

清华大学教材

物 理 学 教 程

主编 夏学江 史斌星

电 磁 学

陈惟蓉 黄天麟 王以炳 编著

清 华 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是清华大学编的《物理学教程》之第二分卷,即《电磁学》.内容包括:真空中的静电场、静电场中的导体和电介质、恒定电流、恒定电流的磁场、磁介质、电磁感应、电磁场方程组等.各章均配有相应的思考题与习题.

本书可作为理科和物理学时较多的工科各专业的大学物理教材,也可作为其他大学生、科技人员、中学物理教师的参考书和青年读者自学用书.

(京)新登字 158 号

清华大学教材
物 理 学 教 程
主 编 夏学江 史斌星

电 磁 学
陈惟蓉 黄天麟 王以炳 编著

清华大学出版社出版
北京 清华园
通县宏飞印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行

开本: 850 \times 1168 1/32 印张: 16 字数: 415 千字
1994 年 6 月第 1 版 1994 年 6 月第 1 次印刷

印数: 0001—3000
ISBN 7-302-01444-2/O · 149
定价: 10.80 元

物 理 学 教 程

序 言

本书是参照我国通用的高等学校理科类与工科类物理课教学大纲, 作为一套普通物理教材而编写的, 希望它可供理、工科各专业使用或参考. 本书的大部分内容曾在清华大学物理学时较多的几个专业以讲义的形式试用; 现在经过修改、重写后分为《力学与热学》、《电磁学》、《波动与光学》、《量子物理学》及《统计与量子力学基础》等五个分卷陆续出版.

本书编者的共同愿望是这套书能帮助读者较好地掌握物理学的基本内容. 我们力图把物理学的基本定律、概念、方法准确地叙述清楚; 力求帮助读者分清主次, 克服学习难点; 对于容易产生误解的地方也力图给予必要的说明. 有些问题虽然在学生学习中容易产生疑问, 但因属于细节问题, 没有包括在教材中. 本书对某些这样的问题也试图在小字段落、脚注、加* 号章节或附录中给以一些说明, 供读者有余力时参考.

物理学是研究自然界最基本规律的一门科学, 学习物理和世界观的建立有密切的联系, 本书在内容的安排与阐述中力求贯彻辩证唯物主义思想, 帮助读者获得对客观世界的正确认识. 在人们对物理概念与规律的认识过程中, 实验与理论的结合起着极重要的作用, 本书在阐明原理概念时, 特别是在说明近代物理概念的发展时, 也希望能将这一情况反映出来, 对于若干重要的实验以及它

们与建立理论、发展概念的关系给予较详细的说明.

物理学日新月异的发展使它在现代科学技术领域中有着越来越广泛和重要的应用. 在着重阐明基本原理的基础上, 我们也尽可能地向读者介绍一些物理原理的应用和物理学新近发展的材料, 使读者增加学习兴趣, 开阔眼界和提高理解新技术及其应用的能力.

为了使本书有较大的适应性, 我们把内容作了如下安排. 凡是不带* 号的各章节属于最基本的内容, 可独立于带* 号的章节学习. 学时较少的各专业只需学习这些章节. 理科专业或学时较多的工科专业则可用带* 号章节、小字段落、附录等作为补充内容. 从全书看, 五个分卷前三卷是基本教材, 我们希望对于一般理科和工科各专业都能适用或可供参考; 第四卷可作基本教材也可作选修课教材, 视专业而定; 最后一卷属于选修课教材.

在编写本书时, 我们力图使它便于自学. 我们的体会是: 学生在学习中不仅应该获得知识与应用知识, 还应该锻炼与提高学习的能力. 因此在教学中必须注意培养与提高学生的学习能力, 其中也包括培养与提高学生读书的能力. 我们希望这套教材可供学生独立阅读, 有助于培养学生的读书习惯与能力. 另一方面, 我们认为, 如果教材便于自学, 则明确了恰当的学习要求与份量后, 就可以在课堂上详讲某些部分, 略讲某些部分, 再留一些部分给学生自学. 这会有利于启发与指导学生, 培养学生正确的学习习惯. 此外, 我们也希望这套书能供在职科技人员和自学的青年使用.

作习题是学习理论的重要环节. 本书各分卷中都附有一定数量的复习思考题和习题. 除基本的习题外, 我们还选编了若干有一定难度的题以反映提高的要求(有的题是参考了国内外研究生入学试题选编的). 书末附有习题答案.

本书各分卷一律采用国际单位制. 物理量的名称和符号也尽可能地符合国际标准化组织(ISO)提出的国际标准.

在本书的编写过程中得到了许多同志的热情帮助. 刘绍唐教授审阅了全部内容, 从编写的指导思想到具体内容都提出了宝贵的意见; 清华大学物理系的许多位年长同志如孟昭英、徐璋本、何成钧、徐亦庄、张礼等教授分别承担了本书某些分卷或某些部分的审阅工作; 还有许多同志分别在各分卷中为编写习题、核对答案、制图、抄稿、出版等各方面作了大量的工作; 在此对他们表示衷心的感谢.

在编写本书各分卷时, 都参考了若干现有的教材, 在许多地方得到启发与教益. 这里难于一一指出, 在此一并致谢.

由于编者能力有限, 编写时间仓促, 书中一定有不少缺点、错误, 欢迎批评指正.

夏学江 史斌星

编 者 的 话

本书是清华大学编写的《物理学教程》的第二分卷,主要内容根据理工院校中偏重理科的各专业的物理课程要求确定.考虑到物理学是一门实验科学以及普通物理课是为低年级大学生开设的课程,本书在内容结构的安排上基本上保留经典电磁学体系.为了适应现代科学技术迅猛发展对普通物理课程现代化的要求,在近几年教学实践的基础上,书中适当增选了有关现代物理内容和科技新进展.重要的增补为:第七章中增加了电磁场量的相对论变换一节,以期学生在分别学习了电场和磁场的规律后,能站在更高的理论高度认识二者的统一性;第四、五章中加入了磁镜和超导体等段落,目的在于开些窗口,看看电磁学在现代科技中的应用及新发展.某些非基本内容,考虑到要求层次的不同以及与正文内容联系的紧密程度分别以带*号的章节、小字或章后附录的形式写出.

本书由夏学江教授主编.其中第一、二、三章由黄天麟执笔,第四、五章由陈惟蓉执笔,第六、七章由王以炳执笔.第七章的*§ 7.4主要选自高炳坤老师为本校编写的补充教材.全书由陈惟蓉整理统稿.编者排名以编写工作量为序.刘绍唐教授审阅了部分初稿.崔砚生教授对前期编写的部分稿件提出过许多中肯的意见.此外,本书的编写工作得到清华大学基础物理教研组广大教师的热情支持,在此一并表示感谢.

编者

目 录

第一章 真空中的静电场.....	(1)
§ 1.1 电荷	(1)
1.1.1 两种电荷	(1)
1.1.2 电荷的量子性	(2)
1.1.3 电荷守恒	(3)
§ 1.2 库仑定律	(4)
1.2.1 点电荷	(4)
1.2.2 库仑定律	(5)
1.2.3 在国际单位制中 k 的量值	(7)
1.2.4 库仑定律的精确性和适用范围	(8)
§ 1.3 电场 电场强度.....	(10)
1.3.1 电场.....	(10)
1.3.2 电场强度.....	(11)
1.3.3 点电荷在外电场中受到的电场力.....	(13)
§ 1.4 点电荷的场强公式 场强叠加原理.....	(14)
1.4.1 点电荷的场强公式.....	(14)
1.4.2 场强叠加原理.....	(15)
1.4.3 连续带电体产生的电场.....	(16)
§ 1.5 高斯定理.....	(31)
1.5.1 电力线.....	(31)
1.5.2 电通量.....	(32)
1.5.3 高斯定理.....	(38)
1.5.4 高斯定理对电力线性质的论证.....	(43)

1. 5. 5	高斯定理的应用举例.....	(46)
1. 5. 6	高斯定理与库仑定律的关系.....	(59)
§ 1. 6	电位.....	(59)
1. 6. 1	静电场力作功与路径无关.....	(59)
1. 6. 2	电位.....	(63)
1. 6. 3	点电荷的电位公式 电位叠加原理.....	(66)
1. 6. 4	电位差.....	(72)
§ 1. 7	等位面 电位与场强的微分关系.....	(77)
1. 7. 1	等位面.....	(77)
1. 7. 2	电位与电场强度的微分关系.....	(79)
§ 1. 8	带电体系的静电势能.....	(86)
1. 8. 1	固有能 相互作用能.....	(86)
1. 8. 2	点电荷系的相互作用能.....	(88)
1. 8. 3	连续带电体系的静电势能.....	(92)
1. 8. 4	电荷在外电场中的相互作用能.....	(94)
思考题	(95)
习题一	(97)
第二章	静电场中的导体和电介质.....	(105)
§ 2. 1	导体和电介质 	(105)
§ 2. 2	静电场中的导体 	(106)
2. 2. 1	导体的静电平衡条件 	(106)
2. 2. 2	孤立带电导体表面的电荷 分布 尖端放电 	(116)
2. 2. 3	封闭导体壳(壳内空腔无带电体) 	(118)
2. 2. 4	封闭导体壳(空腔内有带电体) 	(121)
2. 2. 5	范德格拉夫静电起电机 	(122)
§ 2. 3	电偶极子在外电场中所受的作用 	(125)
2. 3. 1	均匀外电场的作用 	(125)

* 2.3.2 不均匀外电场的作用	(126)
§ 2.4 电介质的极化	(128)
2.4.1 电介质对电场的影响	(128)
2.4.2 电介质的极化	(129)
2.4.3 极化强度矢量	(131)
2.4.4 极化电荷与极化强度的关系	(132)
2.4.5 电介质的极化规律	(137)
§ 2.5 有电介质时的电场 电位移矢量 有电介质 时的高斯定理	(138)
2.5.1 有电介质时的电场	(138)
2.5.2 电位移矢量 有电介质时的 高斯定理	(139)
2.5.3 关于 D 的进一步讨论	(146)
§ 2.6 静电场的边界条件	(148)
2.6.1 有电介质时的静电场方程	(148)
2.6.2 静电场的边界条件	(149)
2.6.3 电位移的折射定律	(151)
§ 2.7 铁电体 压电效应	(153)
2.7.1 铁电体	(153)
2.7.2 压电效应	(155)
§ 2.8 电容器的电容	(156)
2.8.1 孤立导体的电容	(156)
2.8.2 电容器的电容	(157)
§ 2.9 电容器贮能 电场能量密度	(163)
2.9.1 电容器贮能	(163)
2.9.2 电场能量密度	(165)
思考题.....	(168)
习题二.....	(173)

第三章 恒定电流.....	(180)
§ 3.1 电流强度 电流密度 电流的 连续性方程	(180)
3.1.1 电流强度	(180)
3.1.2 电流密度	(181)
3.1.3 电流的连续性方程	(183)
3.1.4 恒定电流和恒定条件	(183)
3.1.5 恒定电场	(186)
§ 3.2 欧姆定律 电阻和电导	(187)
3.2.1 欧姆定律	(187)
3.2.2 电阻率和电导率	(188)
3.2.3 欧姆定律的微分形式	(191)
§ 3.3 电流的功和功率 焦耳定律	(194)
3.3.1 电流的功和功率	(194)
3.3.2 焦耳定律	(196)
§ 3.4 金属导电的古典电子论	(198)
3.4.1 金属导电的古典电子论的 基本概念	(198)
3.4.2 根据古典电子论推导欧姆定律	(201)
§ 3.5 电动势 一段含源电路的欧姆定律	(203)
3.5.1 非静电力	(203)
3.5.2 电动势	(205)
3.5.3 一段含源电路的欧姆定律	(206)
3.5.4 电源的功率和输出功率	(207)
3.5.5 丹聂耳电池	(211)
3.5.6 恒定电路中的电荷分布	(213)
§ 3.6 基尔霍夫定律	(216)
3.6.1 基尔霍夫第一定律	(217)

3. 6. 2	基尔霍夫第二定律	(218)
* § 3. 7	逸出功 接触电位差	(223)
3. 7. 1	逸出功	(223)
3. 7. 2	内接触电位差	(225)
* § 3. 8	温差电现象	(227)
3. 8. 1	塞贝克效应	(227)
3. 8. 2	珀耳贴效应	(228)
3. 8. 3	汤姆孙效应	(229)
3. 8. 4	温差电现象的应用	(232)
* § 3. 9	气体中的电流	(234)
3. 9. 1	气体的被激导电	(234)
3. 9. 2	气体的自激导电	(237)
思考题.....		(240)
习题三.....		(242)
第四章	恒定电流的磁场.....	(249)
§ 4. 1	磁场 磁感应强度	(249)
4. 1. 1	基本磁现象 磁性的起源	(249)
4. 1. 2	磁场	(252)
4. 1. 3	磁感应强度	(252)
4. 1. 4	磁力线	(254)
§ 4. 2	电流的磁场	(254)
4. 2. 1	毕奥-萨伐尔定律	(254)
4. 2. 2	典型电流磁场的计算	(256)
4. 2. 3	匀速运动点电荷的磁场	(263)
§ 4. 3	磁通连续方程和安培环路定理	(265)
4. 3. 1	磁通量 磁通连续方程	(265)
4. 3. 2	安培环路定理	(266)
4. 3. 3	电流分布呈均匀对称时	

磁场的计算	(270)
§ 4.4 磁场对运动电荷的作用	(276)
4.4.1 洛伦兹力	(276)
4.4.2 带电粒子在均匀磁场中的运动	(276)
4.4.3 霍耳效应	(280)
* 4.4.4 非均匀磁场的磁约束	(283)
§ 4.5 磁场对载流导线的作用	(286)
4.5.1 安培力公式	(286)
4.5.2 均匀磁场对载流线圈的作用	(290)
4.5.3 “安培”的定义	(295)
附录 4- 毕奥-萨伐尔关于长直电流的 磁场的实验	(296)
附录 4- 安培环路定理的证明	(296)
思考题.....	(302)
习题四.....	(304)
第五章 磁介质.....	(311)
§ 5.1 磁介质的磁化	(311)
5.1.1 物质的磁化及其微观机制	(311)
5.1.2 磁化强度	(314)
5.1.3 束缚电流(磁化电流)	(314)
§ 5.2 有介质时的磁场	(319)
5.2.1 磁场强度 H 和 H 的环路定理	(320)
5.2.2 介质的磁化规律	(322)
5.2.3 磁场的边界条件	(328)
§ 5.3 铁磁质和铁磁性	(331)
5.3.1 铁磁质的磁化曲线	(331)
5.3.2 铁磁质的磁导率及分类	(334)
5.3.3 铁磁性的微观解释	(338)

§ 5.4	磁路	(340)
5.4.1	铁磁质与非铁磁质的边界 磁路	(340)
5.4.2	磁路的计算	(342)
5.4.3	磁屏蔽	(347)
* § 5.5	磁荷观点	(347)
5.5.1	磁荷观点概述	(348)
5.5.2	分子电流观点与磁荷观点的对比 与联系	(349)
5.5.3	磁荷观点的应用	(351)
附录 5-	铁磁质的磁滞损耗	(355)
附录 5-	超导体	(357)
思考题	(366)
习题五	(368)
第六章	电磁感应	(372)
§ 6.1	电磁感应	(372)
6.1.1	电磁感应现象	(372)
6.1.2	法拉第电磁感应定律	(375)
§ 6.2	电磁感应的应用	(383)
6.2.1	交流发电机的简化原理	(383)
6.2.2	涡电流	(386)
6.2.3	测量磁通	(390)
§ 6.3	动生电动势	(391)
6.3.1	动生电动势的量值、方向	(391)
6.3.2	动生电动势的本质	(392)
6.3.3	能量关系	(397)
6.3.4	关于洛伦兹力是否对运动电荷 作功的问题	(398)
§ 6.4	感生电动势	(400)

6.4.1	感应电场(涡旋电场)	(400)
6.4.2	电子感应加速器	(404)
§ 6.5	自感	(407)
6.5.1	自感现象	(407)
6.5.2	自感系数	(409)
6.5.3	计算举例	(410)
§ 6.6	互感	(414)
6.6.1	互感现象	(414)
6.6.2	互感系数	(414)
6.6.3	互感系数与自感系数的关系	(417)
§ 6.7	磁场的能量	(419)
6.7.1	自感磁能 磁能密度	(420)
6.7.2	互感磁能	(422)
§ 6.8	过渡过程	(426)
6.8.1	L-R 电路的过渡过程	(426)
6.8.2	C-R 电路的过渡过程	(429)
	思考题	(432)
	习题六	(435)
第七章	电磁场方程组	(445)
§ 7.1	位移电流	(446)
7.1.1	简单回顾	(446)
7.1.2	用到开口电路时的矛盾	(447)
7.1.3	位移电流	(448)
7.1.4	全电流	(453)
§ 7.2	麦克斯韦方程组	(456)
7.2.1	积分形式的麦克斯韦方程组	(456)
7.2.2	微分形式的麦克斯韦方程组	(459)
§ 7.3	电磁场的统一性 电磁场量的相对性	(461)

7.3.1	电磁场的统一性	(461)
7.3.2	电磁场量的相对性 不同惯性系中 场量的变换式	(462)
*§ 7.4	电磁场的相对论变换	(469)
7.4.1	电量是相对论不变量	(469)
7.4.2	磁场是电场运动的相对论效应	(469)
7.4.3	电场是磁场的相对论效应	(474)
7.4.4	电磁场的相对论变换	(479)
思考题	(482)
习题七	(483)
附表 1	SI 中各导出电磁学量的定义方程式、量纲式 及单位	(485)
附表 2	有关数值表	(486)
习题答案	(487)

第一章 真空中的静电场

§ 1.1 电 荷

1.1.1 两种电荷

公元前 6 世纪,人们就已发现,毛皮和琥珀互相摩擦后,两者便能吸引羽毛、草籽、头发等轻微物体.后来发现,这种性质并非毛皮和琥珀所独有,其它两种不同质料的物体(例如,丝绸和玻璃棒、丝绸和硬橡胶棒等等)互相摩擦后也都能吸引轻微物体.

物体有了吸引轻微物体的性质,人们便说物体带了电荷.带有电荷的物体称为带电体.使物体带电称为起电.用摩擦的方法使物体带电称为摩擦起电.除摩擦起电外,还有其它方法可以使物体带电.

实验发现,两根用丝绸摩擦过的玻璃棒互相排斥;两根用毛皮摩擦过的硬橡胶棒也互相排斥;然而丝绸摩擦过的玻璃棒和毛皮摩擦过的硬橡胶棒则互相吸引.这表明玻璃棒上带的电荷不同于硬橡胶棒上带的电荷.大量实验证明,任何带电体所带电荷(包括从雷电中引下来的电荷),或者与玻璃棒(用丝绸摩擦过的)上的电荷相同,或者与硬橡胶棒(用毛皮摩擦过的)上的电荷相同.这表明自然界中只存在两种电荷.而且,电荷之间的相互作用规律是:同种电荷互相排斥,异种电荷互相吸引.

为了区分两种电荷,美国物理学家弗兰克林(B. Franklin)把丝绸摩擦过的玻璃棒上所带电荷取名为正电荷,把毛皮摩擦过的硬橡胶棒上所带电荷取名为负电荷.

根据带电体之间的相互作用力,我们可以确定物体所带电荷

的数量. 物体所带电荷的数量叫做电量. 为了同时表明物体带的是哪种电荷, 通常把正电荷的电量用正数表示, 负电荷的电量用负数表示.

实验证明, 若在一个带正电荷的物体上放上等量的负电荷, 则该物体不再带电. 这表明正、负电荷放在一起可以互相抵消. 正、负电荷互相完全抵消叫做中和. 带电体一经中和便成为不带电的物体.

1. 1. 2 电荷的量子性

在 19 世纪末以前, 人们以为电荷是一种连续的流体, 它的量值可以连续变化.

随着物质的原子学说的建立, 人们从法拉第(Faraday)电解定律得出一个惊人的结论: 电荷存在最小单元. 人们把负电荷的最小单元叫做电子.

1911 年密立根(Millikan)用油滴实验最先测出了电子的电量. 通常用 e 表示电子电量的绝对值(又叫基本电量), 密立根测出 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$.

迄今为止的各种实验证明, 电子是自然界中具有最小电量的粒子, 任何带电体和所有带电的微观粒子的电量都是电子电量的整数倍. 这表明电荷的量值只能取一系列分立的数值而不能连续变化, 电荷的这一性质叫做电荷的量子性.

近代物理的理论和实验证明, 通常所见的各种物体(实物)是由原子、分子所组成的, 而原子则由带正电的原子核和围绕原子核运动的带负电的电子组成. 原子核由带正电的质子和不带电的中

基本粒子的层子(夸克)理论预言, 存在一种电量为 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的基本粒子, 它们叫做层子(夸克). 并且认为质子、中子等微观粒子都是由这些层次更深的层子所组成. 不过, 到目前为止, 层子的存在还没有被实验直接证实.

子组成. 质子的电量和电子的电量等值异号, 我们知道电子的电量为 $-e$, 所以质子的电量为 e . 在正常状态下, 原子内的电子总数等于原子核内的质子总数, 因而宏观物体或者物体的任何一部分所包含的电子总数和质子总数是相等的, 所以不显示带电. 当物体在某种作用下失去或得到一些电子时, 物体内的电子总数将小于或大于物体内的质子总数, 这时物体便显示出带电. 宏观物体所带电量等于两者总电量的代数和. 质料不同的两种物体互相摩擦后之所以都会带电, 是因为两物体互相摩擦时, 接触处原子热运动加剧, 因而每个物体中都有一些电子挣脱原子核的束缚并运动到另一个物体上去. 但是质料不同的两个物体在摩擦过程中得到的电子数和失去的电子数是不相等的, 所以净效果是一个物体失去电子, 另一个物体得到电子. 失去电子的物体便显示出带正电, 得到电子的物体就显示带负电, 所以两者的电量必然等值异号.

1. 1. 3 电荷守恒

在摩擦起电过程中, 相互摩擦的两个物体总是同时

图 1. 1. 1 静电感应起电

带电, 并且所带电荷总是等量异号. 其它方法起电时, 同样有上述

的规律性. 图 1. 1. 1 中 A、B 为两个同样大小的不带电的金属球, 分别用玻璃柱支持着, 两球互相接触. 把一带正电的玻璃棒 C 移近 A, 但不与 A 接触, 这时若把 A、B 两球分开, 则发现两球分别带了异号电荷(见图 1. 1. 1b). 取走玻璃棒, 两球上所带电荷不变. 用这种方法使金属球带电叫做静电感应起电. 将 A、B 两球再一次接触, 则发现两球又不带电了(见图 1. 1. 1c). 这表明两球在再一次接触前它们所带电量是等值异号的.

从摩擦起电、静电感应起电过程以及别的起电过程中可以总结出以下的规律: 电荷既不能被创造, 也不能消灭, 它只能从一个物体转移到另一个物体, 或者从物体的一部分转移到另一部分. 也就是说, 当系统与外界无电荷转移时, 不论发生什么物理过程, 系统内电量的代数和保持不变. 这就是电荷守恒定律.

近代物理的实验证明, 电荷守恒定律不仅在各种宏观物理过程中成立, 而且在各种微观过程中同样成立, 所以它是物理学最基本的定律之一.

§ 1. 2 库 仑 定 律

1. 2. 1 点电荷

实验发现, 真空中两个静止带电体之间的电性作用力, 不仅和两个带电体的电量、距离有关, 还和它们的形状、大小以及电荷在带电体上的分布情况有关. 要用实验确定各个因素对作用力的影响实际上是不可能的. 但是, 如果带电体的线度(带电体上最远两个点之间的距离)比带电体之间的距离小得多, 则带电体的形状、大小以及电荷分布情况对它们之间静电相互作用力的影响就非常之小, 因而可以忽略不计. 这时带电体之间的相互作用力只决定于它们的电量和距离, 我们把满足上述条件的带电体叫做点电荷. 带电体一旦被简化为点电荷, 我们就可以用一个几何点来标志带电

体的位置. 两个带电体之间的距离就是标志它们位置的两个几何点之间的距离. 当然, 点电荷是理想模型, 实际的带电体不可能是没有大小的几何点. 至于带电体的线度要比带电体之间的距离小多少才能被看成点电荷, 没有一个绝对的标准, 它取决于所研究的问题要求的精确度. 在本书内, 只要带电体之间的距离比带电体的线度大几十倍, 我们就把带电体看成点电荷.

1. 2. 2 库仑定律

1785 年法国物理学家库仑 (C. A. Coulomb) 用扭秤测定了点电荷之间的相互作用力, 总结出点电荷之间相互作用的规律, 现称之为库仑定律.

图 1. 2. 1 是库仑所用扭秤的示意图. 一根细金属丝下面悬挂着一根秤杆, 杆的一端有一小球 m , 另一端有一平衡小球 P . 在球

图 1. 2. 1 扭秤

m 的附近放有另一与 m 同样大小的小球 n , n 与 m 在同一水平面内, n m 的连线与 mP 连线垂直, 移动 G 可以改变 m 与 n 之间的距离. 当 m 与 n 分别带有一定电荷时, 由于 m 受到 n 的电力作用秤杆发生偏转. 为保持 m 与 n 之间距离不变以及 mn 连线与 mP 连线垂直, 可转动悬丝的旋钮使秤杆回复到原来位置. 这时, n 施于 m 上的电力力矩和悬丝由于扭转而产生的弹性恢复力矩相等.

如果事先校正好悬丝的弹性恢复力矩与悬丝扭转的角度之间的关系, 则由旋扭转过的角度便可知 n 施于 m 上的电力的力矩, 再由秤杆的长度便可算出在此距离下 n 施于 m 上的电力. 保持 n 与 m 上的电量不变, 改变 n 与 m 之间的距离就可研究电力与距离的关系; 保持 n 与 m 之间的距离不变, 改变 n 与 m 上的电量便可研究电力与 n 、 m 上的电量的关系.

库仑用这套装置定量地研究了点电荷之间的相互作用, 总结出以下的规律:

真空中, 电量分别为 q_1 与 q_2 的两个静止点电荷之间的电性相互作用力的大小, 和 q_1 与 q_2 的乘积成正比, 和它们之间的距离 r_{12} 的平方成反比; 作用力的方向沿着它们的连线, 同号电荷相斥, 异号电荷相吸. 这就是库仑定律.

若以 F_{21} 表示 q_2 受到 q_1 的作用力, F_{12} 表示 q_1 受到 q_2 的作用力, 则库仑

图 1. 2. 2 点电荷之间的相互作用

定律用矢量式表示, 便为

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12} \quad (1. 2. 1)$$

而

$$F_{12} = - F_{21}$$

(1. 2. 1) 式中的 \mathbf{r}_{12} 表示从 q_1 指向 q_2 的有向线段的单位矢量. k 是比例常量, 它的量纲和数值随(1. 2. 1)式中各量用什么单位而定.

1.2.3 在国际单位制中 k 的量值

国际单位制(SI)关于电磁学部分的单位采用米千克秒安培(MKSA)有理化单位制. 在这单位制中基本量分别为长度、质量、时间和电流强度. 基本单位分别为米(m)、千克(kg)、秒(s)和安培(A). 在SI中电量是导出量, 它的单位是根据其与电流强度的关系, $q = It$ 来定义的. 若导线内通有电流强度为1安培(A)的稳恒电流, 则1秒(s)内通过导线横截面的电量就定义为1库仑(C), 即

$$1\text{C} = 1\text{A} \cdot \text{s}$$

在SI中(1.2.1)式中各量的单位都已确定, 所以 k 的量值不能随意规定, 必须由实验来确定. 实验测出, 两个各带有1C电量的静止点电荷, 相距1m时它们之间的静电作用力的大小为 $8.9875 \times 10^9 \text{N}$, 根据(1.2.1)式使得

$$k = \frac{8.9875 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2}{1\text{C}^2} = 8.9875 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

为了简化今后常用的电磁场方程的形式, 我们引入一个新的常量 ϵ_0 来代替 k , ϵ_0 的定义是

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.9875 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}} = 8.85423 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

ϵ_0 称为真空的电容率(或真空的介电常数). 於是在国际单位制中库仑定律用下式表示:

$$F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (1.2.2)$$

由(1.2.2)式可求出, 在国际单位制 ϵ_0 的量纲式为

$$[\epsilon_0] = \text{L}^{-3} \text{M}^{-1} \text{T}^4 \text{I}^2$$

这里 L、M、T、I 分别代表长度、质量、时间、电流强度四个基本物理量.

1. 2. 4 库仑定律的精确性和适用范围

库仑定律是静电学的理论基础, 它的精确性关系到整个静电场理论. 然而库仑定律是根据不够精密的扭秤实验总结出来的, 因此不免使人对定律的精确性产生了疑问. 所以长期以来, 一直有人对库仑定律的精确性和适用范围进行实验研究, 主要考察两个问题: (1) 静电力和距离的关系式中的指数是否精确地等于 -2 ? 如果说指数不是精确等于 -2 而是 $-(2+\epsilon)$, 那么 ϵ 是多大? (2) 库仑定律在什么距离范围内是可靠的?

1873 年麦克斯韦(Maxwell)曾经研究过这个问题. 他指出, 如果说指数不等于 -2 , 那么 ϵ 也小于 5×10^{-5} . 1936 年普里姆顿(Plimpton)与洛顿(Lawton)改进了实验方法, 测出 $\epsilon < 10^{-9}$. 1971 年威廉姆斯(Williams)、否勒(Faller)和希尔(Hill)等人进一步改进实验方法测出 $\epsilon < 10^{-16}$. 因此, 我们可以相信, 静电力和距离平方成反比是精确成立的.

粒子散射实验和高能电子散射实验分别证实, 两个带电粒子之间的距离小到 10^{-15}m 和 10^{-17}m 库仑定律仍然成立. 至于在非常大的距离(例如, 地理上的距离或天文上的距离)情形下库仑定律是否依然严格成立, 没有直接实验验证过. 不过, 量子电动力学提供了一个间接证明的根据. 量子电动力学指出, 若库仑定律中距离的指数不是 -2 , 则光子的静止质量就不等于零. 这样, 不同波长的光在真空中传播的速度就会有微小的差异, 因而测定不同波长的光在真空中的速度并加以比较, 可以判断库仑定律是否成立. 实验表明, 从波长较长的无线电波到波长较短的光波, 它们在真空中传播的速度是相等的. 因此, 我们可以相信, 在由 10^{-17}m 到几千米的巨大范围内库仑定律都是成立的, 它是静电学的可靠基础.

例 1 在正常状态下氢原子内电子和原子核之间的距离为 r

$= 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$, 电子和氢原子核的电量分别为 $q_1 = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 和 $q_2 = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$, 电子和氢原子核的质量分别为 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 和 $M = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 万有引力恒量 $G_0 = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, 计算电子和氢原子核之间的静电作用力和万有引力, 并比较两者的大小.

解 根据库仑定律, 电子和氢原子核之间的静电力大小为

$$\begin{aligned} f_e &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ &= \frac{9 \times 10^9 (1.6 \times 10^{-19})^2}{(5.29 \times 10^{-11})^2} = 8.23 \times 10^{-8} \text{ N} \end{aligned}$$

根据万有引力定律, 电子和氢原子核之间的万有引力大小为

$$\begin{aligned} f_G &= G_0 \frac{mM}{r^2} \\ &= 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 1.67 \times 10^{-27}}{(5.29 \times 10^{-11})^2} \\ &= 3.63 \times 10^{-47} \text{ N} \end{aligned}$$

上述静电力与万有引力大小之比为

$$\frac{f_e}{f_G} = \frac{8.23 \times 10^{-8}}{3.63 \times 10^{-47}} = 2.27 \times 10^{39}$$

可见电子和原子核之间的静电力远大于它们之间的万有引力, 所以在研究电子和原子核之间的相互作用时完全可以不考虑它们之间的万有引力而只需计算静电力. 一般地说, 在讨论带电粒子之间的相互作用时都可以忽略它们之间的万有引力. 关于物质结构的研究表明, 原子组成分子, 分子或原子组成液体和固体的结合力, 以及力学中常见的摩擦力和张力等, 本质上都是电性力.

例 2 质量均为 m 的两个小球, 各用长为 l 的丝线悬挂于同一点. 当两个小球带上相同电量后, 平衡时它们相距为 a (设 $a \ll l$) 求每个小球所带电量.

解 设每个小球所带电量为 q , 这时每个小球受到三个力(见图 1.2.3): 重力 P , 丝线拉力 T , 两个小球之间的静电斥力 f . 因小球处于平衡状态, 则由图 1.2.

3 可得

$$f = P \tan \theta$$

$$\text{而 } \tan \theta = \frac{\frac{a}{2}}{l^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2l}$$

根据库仑定律

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$$

于是

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} = P \frac{a}{2l} = mg \frac{a}{2l}$$

$$q = a \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 amg}{l}}$$

图 1.2.3 测量电量的一种方法

这例子表明, 应用库仑定律可以确定带电体所带电量.

§ 1.3 电场 电场强度

1.3.1 电场

关于两个互不接触的带电体之间的静电相互作用问题, 在物理学历史上曾有两种相反的观点. 一种观点认为: 带电体之间的相互作用是一种“超距”作用, 即这种作用既不需要中间物质传递, 也不需要时间, 就能由一个带电体立即加到另一个带电体上, 即

电荷 电荷

另一种观点是英国物理学家法拉第首先提出的, 他认为带电

体之间的相互作用不是“超距”作用而是近距作用.他认为在带电体周围的空间存在电场,一个带电体对另一带电体的作用是由该带电体产生的电场施给的.例如,甲乙两个带电体,乙受到的电力是甲产生的电场施给的,而甲受到的电力则是乙产生的电场施给的,即

电荷 电场 电荷

近代物理的理论和实验完全肯定了后一种观点的正确性,并且证明,变化的电磁场可以脱离电荷和电流而独立存在,并以光速在空间传播;它和实物(指由原子、分子组成的物体)一样,具有质量、能量、动量等属性.所以电磁场也是物质存在的一种形式.

电场对电荷的作用力称为电场力.相对于观察者静止的电荷产生的电场称为静电场.静电场是电磁场的一种特殊形式.静电场有两个基本性质:

1. 静电场对放入其内的任何其它电荷都有作用力.
2. 电荷在静电场中移动的过程中,电场力对移动电荷做功,这表明静电场具有能量.

静电场的这两个基本性质,在近代科学实验和生产实践中有着广泛应用.例如,在示波管、静电式电子显微镜、静电加速器等设备中,以及在静电喷漆、静电除尘等技术中都利用了金属电极间的静电场来控制 and 加速带电粒子的运动.

1.3.2 电场强度

为了定量地描述电场,首先要引入一个能够反映电场强弱和方向的物理量.

设空间有一电量为 $q(>0)$ 的带电体,则在它周围空间存在电场.为了研究空间各点电场的强弱和方向,根据静电场的第一个基本性质我们把一个试验电荷放入这电场中的不同地点,并分别测定它在不同地点所受电场力.为了使实验精确,试验电荷必须满足

以下两个条件: (1) 它的电量应该充分小, 当把它引入电场时, 不会引起原有电荷的分布发生任何可察觉的变化. 否则试验电荷测出的是变化后的电场. (2) 它的线度应该足够小, 小到可以把它看成点电荷. 这样便可用它来研究空间各点电场的性质.

我们把不同电量的试验电荷 q_0 、 $2q_0$ 、 $-q_0$ 、... 依次放到电场中的同一地点(P 点), 分别测出它们在 P 点所受的电场力. 测定的

图 1.3.1 同一试验电荷在电场
中不同地点所受电场力不等

图 1.3.2 不同试验电荷在电场中
同一地点所受电场力不等

结果表明, 各试验电荷在 P 点所受的电场力各不相同, 分别为 f 、 $2f$ 、 $-f$... (见图 1.3.2). 但各试验电荷所受电场力与其电量之比却都相等, 即在 P 点有

$$\frac{f}{q_0} = \frac{2f}{2q_0} = \frac{-f}{-q_0} = \dots$$

我们改变测试地点, 例如改在图 1.3.1 中的 P 点. 重复上面的实验步骤, 测得各试验电荷在 P 点受到的电场力分别为 f 、 $2f$ 、 $-f$... 与在 P 点的情形一样, 有

$$\frac{f}{q_0} = \frac{2f}{2q_0} = \frac{-f}{-q_0} = \dots$$

但在方向与量值上, 一般来说,

$$\frac{f}{q_0} \quad \frac{f}{q_0}$$

以上实验结果表明, 在电场中任一给定点, $\frac{f}{q_0}$ 有确定的量值与方向, 它与试验电荷的电量无关, 而只与电场本身的性质有关. 在电场的不同地点, 一般来说 $\frac{f}{q}$ 有不同的量值与方向. 所以 $\frac{f}{q_0}$ 能反映空间各点电场的方向和强弱, 人们把 $\frac{f}{q_0}$ 定义为电场强度并用符号 E 表示, 即

$$E = \frac{f}{q_0} \quad (1.3.1)$$

电场强度简称场强, 它是一个矢量. 电场中某点的场强在量值和方向上等于单位正电荷在该点所受的电场力. 一般来说, 场强的大小和方向是逐点变化的, 即场强是空间位置坐标的矢量函数, 在直角坐标系可写为 $E(x, y, z)$. 若空间各点 E 相等, 这样的电场称为均匀电场(或匀强电场).

在国际单位制中, 场强的单位是 $N \cdot C^{-1}$, 这个单位也可写成 $V \cdot m^{-1}$ (见§ 1.7). 场强的量纲式为

$$[E] = \frac{[f]}{[q]} = \frac{LMT^{-2}}{IT} = LMT^{-3}I^{-1}$$

1.3.3 点电荷在外电场中受到的电场力

设有一电量为 q 的点电荷, 放在外电场中任一给定点, 如果该点的场强为 E , 则由场强的定义可知, 放在该点的点电荷受到的电场力 f 为

$$f = qE \quad (1.3.2)$$

若点电荷是正电荷(即 $q > 0$), 则 f 的方向和 E 的方向一致.

若点电荷是负电荷($q < 0$), 则 f 的方向与 E 的方向相反. 由(1. 3. 2) 式可见, 要计算一个点电荷在外电场中受到的电场力, 关键是要知道外电场的场强. 当产生外电场的那些电荷的分布已知时, 我们有没有办法计算出电场中任一点的场强呢? 这正是我们在这一章里要着重研究的一个问题.

§ 1. 4 点电荷的场强公式 场强叠加原理

1. 4. 1 点电荷的场强公式

现在我们根据库仑定律和场强定义来计算点电荷产生的电场中任意一点的场强. 设点电荷的电量为 q , 它在周围空间产生电场, P 点是电场中任意一点(叫做场点), 它与 q 相距为 r . 为了计算 P 点的场强, 可在 P 点放一试验电荷 q_0 , 根据库仑定律可得试验电荷在 P 点所受电场力

$$f = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}$$

这里 \mathbf{r} 是由点电荷 q 所在位置指向 P 点的矢径方向上的单位矢量. 根据(1. 3. 1) 式便得 P 点的场强为

$$E = \frac{f}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad (1. 4. 1)$$

图 1. 4. 1 点电荷电场的方向

由于 P 点的任意性, 所以(1. 4. 1) 式给出点电荷的电场分布, 我们把它叫做点电荷的场强公式. 由(1. 4. 1) 式可以看出点电荷的电场有以下两个特点:

(1) 电场中任一点(P 点) 的场强方向总是在点电荷所在点与

P 点的联线上, 若 $q > 0$, 则 P 点的场强方向与 r 的方向一致, 即场强的方向是从点电荷所在位置指向 P 点. 若 $q < 0$, 则 P 点的场强方向与 r 的方向相反, 即场强的方向是从 P 点指向点电荷所在位置.

(2) 电场中任一点的场强大小与产生电场的点电荷的电量成正比, 与该点到点电荷的距离平方成反比. 当 $r \rightarrow 0$ 时, $E \rightarrow \infty$. 若以点电荷所在位置为球心, 作一半径为 r 的球面, 则球面上各点的场强大小相等, 即点电荷产生的电场具有球对称性.

1. 4. 2 场强叠加原理

以上我们讨论了单个点电荷产生的电场. 现在进一步研究点电荷系产生的电场.

设点电荷系由 n 个点电荷组成, 它们的电量分别为 q_1, q_2, \dots, q_n , 它们在空间的位置如图 1. 4. 2 所示. P 点是电场中任意一点, 它与每个点电荷的距离分别为 r_1, r_2, \dots, r_n . 为了计算 P 点的场强, 可设想在 P 点放一试验电荷 q_0 , 计算 q_0 所受电场力, 再根据场强定义便可求出 P 点的场强. 在单个点电荷产生的电场中, q_0 所受电场力可根据库仑定律算出, 但在 n 个点电荷共同产生的电场中, q_0 所受的电场力如何计算呢? 大量的实验证明, 两个点电荷之间的静电作用力并不因另外电荷存在而改变, n 个点电荷共同产生的电场对 q_0 的电场力 f 等于每个点电荷单独存在时施于 q_0 的电场力 f_1, f_2, \dots, f_n 的矢量和, 即

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

于是 P 点的场强为

$$\begin{aligned} E &= \frac{f}{q_0} = \frac{f_1}{q_0} + \frac{f_2}{q_0} + \dots + \frac{f_n}{q_0} \\ &= E_1 + E_2 + \dots + E_n \end{aligned} \quad (1. 4. 2)$$

图 1.4.2 点电荷系电场叠加

式中 $E_1 = \frac{f_1}{q_0}$ 、 $E_2 = \frac{f_2}{q_0}$ 、...、 $E_n = \frac{f_n}{q_0}$ 分别代表 q_1 、 q_2 、...、 q_n 单独存在时在 P 点产生的场强, 而 $E = \frac{f}{q_0}$ 表示它们同时存在时 P 点的场强. 所以(1.4.2)式表明, n 个点电荷同时存在时, 空间任一点的场强等于每个点电荷单独存在时分别在该点产生的场强的矢量和. 这就是电场强度的叠加原理, 它是静电场的基本规律之一, 在今后的学习过程中我们将经常用到这个原理.

1.4.3 连续带电体产生的电场

由于电荷的量子性, 从微观上看, 电荷是一粒一粒地分布在带电体上的. 但电荷分布的微观不连续性在宏观电磁现象中是不易显示出来的, 所以在宏观电磁学中为了研究问题的方便, 仍然把带电体上的电荷看成是连续分布的.

现在我们来研究连续带电体的电场强度计算. 如图 1.4.3 所示, Q 是一任意连续带电体, P 点是电场中任意一点. 为了计算 P 点场强, 可想象地把连续带电体分成“无限”多个“无限小”电荷元.

每一电荷元可看成一个点电荷. 设 dq 是其中任意一个电荷元的电量, 它与 P 点相距为 r , 则由(1. 4. 1)式可得这个电荷元在 P 点产生的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}$$

图 1. 4. 3 连续带电体上电荷元产生的场强

式中 \mathbf{r} 是 dq 所在位置指向 P 点的单位矢量. 根据场强叠加原理, 整个带电体在 P 点产生的场强是各电荷元单独存在时在该点产生的场强的矢量和. 但因电荷连续分布, 求和变为积分, 即

独立存在时在该点产生的场强的矢量和. 但因电荷连续分布, 求和变为积分, 即

$$\mathbf{E} = \int_Q d\mathbf{E} = \int_Q \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \quad (1. 4. 3)$$

表示积分遍及整个带电体. 由(1. 4. 3)式可见, 要具体算出 P 点的场强必须知道带电体上的电荷分布. 所以上面的讨论表明, 如果已知连续带电体的电荷分布, 原则上可以根据库仑定律和场强叠加原理算出电场中任意一点的场强.

为了描述不同模型下连续带电体的电荷分布, 我们引入电荷体密度、电荷面密度以及电荷线密度等概念.

(1) 电荷体密度

如图 1. 4. 4 所示, Q 是连续带电体 Q 上任意一点, V 是包含 Q 点的一个体积元, q 是 V 内电量的代数和. 我们把 $\lim_{V \rightarrow 0} \frac{q}{V}$ 的极限值叫做 Q 点的电荷体密度, 并以 ρ 表示, 即

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{q}{V} = \frac{dq}{dV} \quad (1. 4. 4)$$

为了精确地描写带电体上的电荷分布,从宏观尺度上来说, V 应该尽可能地小.但另一方面,在微观尺度上 V 又必须足够大,使得其内仍然包含大量带电粒子,使得电荷的量子性不致显露出来.所以我们应该把 $V \rightarrow 0$ 理解为宏观小而微观大的体积元.

图 1.4.4 电荷体密度的定义

一般来说, ρ 是逐点变化的,即电荷体密度是位置坐标的标量函数.若带电体上各点的 ρ 相等,我们就说这个带电体是均匀带电体.

当连续带电体的电荷以体密度 ρ 分布时,带电体上任一电荷元所带电量可表示为 $dq = \rho dV$, 於是带电体在场中任一点产生的场强由(1.4.3)式可得

$$E = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \tag{1.4.5}$$

\int_V 表示积分遍及带电体的全部体积, r 是体元 dV 到场点的距离, \mathbf{r} 是由 dV 指向场点的单位矢量.

(2) 电荷面密度

在学了下一章后我们将会知道,在静电平衡条件下,导体上的电荷是分布在导体表面极薄的一层内.图 1.4.5(a)是一带电导体,图中阴影部分表示表面上带电薄层.图 1.4.5(b)是从带电薄层上取出一小块的放大图,这块带电层的厚为 δ 面积为 S , 所带电量为 q , 则 $q = \rho S$. 如果我们只研究带电薄层外的电场分布,不讨论带电薄层内的电场,我们可以把这薄层抽象为一个没有厚度的带电面,如图 1.4.5(c)所示.这时薄层内的全部电量 q 全部分布在 S 上.我们把 $\lim_{S \rightarrow 0} \frac{q}{S}$ 的极限值叫做电荷面密度,以 σ 表示.

图 1.4.5 带电薄层抽象为带电几何面

表示, 即

$$\epsilon = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{q}{S} = \frac{dq}{dS} \quad (1.4.6)$$

显然, $\epsilon = \epsilon$, 当 $S \rightarrow 0$ 时要使 ϵ 有不等于零的有限值, ϵ 必须趋于无穷大. 这表明, 一个“数学意义上的带电面”是不存在的.

一般来说, 电荷面密度也是位置坐标的标量函数. 如果在一带电面上, 电荷面密度处处相等, 我们就说这个带电面是均匀带电面. 同样, (1.4.6) 式中 $S \rightarrow 0$ 也应理解为宏观小而微观大的面积元.

把 $dq = \epsilon dS$ 代入 (1.4.3) 式, 立即可得出带电面产生的场强的计算公式为

$$\mathbf{E} = \oint_S \frac{\epsilon dS}{4\pi r^2} \mathbf{r} \quad (1.4.7)$$

式中 r 是面元 dS 到场点的距离, \mathbf{r} 是从面元 dS 所在位置指向场点的单位矢量. \oint_S 表示积分遍及整个带电面.

(3) 电荷线密度

若电荷分布在图 1.4.6(a) 所示细棒内, 则横截面积为 S 、长

为 l 的一小段细棒所带电量为 $q = \epsilon S$ 。如果, 我们只讨论与棒的距离远大于细棒直径的那些场点的电场分布, 我们可以把细

图 1.4.6 带电细棒抽象为带电线

棒抽象为一条没有粗细的几何线如图 1.4.6(b) 所示. 这样, q 就分布在长为 l 的一段线元上, 我们把 $\lim_{l \rightarrow 0} \frac{q}{l}$ 的极限值叫做电荷的线密度, 以 ϵ 表示, 即

$$\epsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{q}{l} = \frac{dq}{dl} \quad (1.4.8)$$

显然, $\epsilon = \epsilon S$, 当 $S \rightarrow 0$ 时要使 ϵ 有不等於零的有限值 ϵ 必须趋于无穷大. 这表明“数学意义上的带电线”是不存在的.

一般来说, 电荷线密度也是位置坐标的标量函数. 若带电线上各点 ϵ 相等, 我们就说带电线上的电荷分布是均匀的. 关于 $l \rightarrow 0$ 同样应理解为宏观小而微观大的线元.

把 $dq = \epsilon dl$ 代入(1.4.3)式, 就得出带电线产生的场强的计算公式,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\epsilon d\mathbf{l}}{r^2} \mathbf{r} \quad (1.4.9)$$

表示积分遍及整个带电线, r 是线元 $d\mathbf{l}$ 到场点的距离, \mathbf{r} 是从线元 $d\mathbf{l}$ 所在位置指向场点的单位矢量.

以上, 我们分别研究了不同电荷分布产生的电场, 导出了相应

的计算场强的公式. 但必须指出, 这些公式都是矢量式, 在具体问题中一般不直接用这些矢量式进行计算, 而是首先取一坐标系, 写出以上矢量式在该坐标系的分量式, 然后才作积分得出结果.

电偶极子 电量分别为 $+q$ 和 $-q$ 的两个点电荷, 相距为 l , 若场点与点电荷之间的距离远大于 l , 则这一电荷系就称为电偶极子. 连结这对点电荷的直线叫做电偶极子的轴线, 通过这对点电荷连线中点并与轴线垂直的直线叫做电偶极子的中垂线. 我们引入一长度矢量 \mathbf{l} , 它的大小即为这对点电荷之间的距离, 它的方向规定为从负电荷指向正电荷的方向. 我们把电量 q 与 \mathbf{l} 的乘积叫做电偶极子的电偶极矩, 以符号 p_e 表示, 即

$$p_e = ql \quad (1.4.10)$$

电偶极矩是表征电偶极子性质的物理量, 以后我们会看到, 无论是电偶极子产生电场, 还是它在外电场受到的作用, 都和它的电偶极矩有关.

电偶极子是一个很有用的模型, 在讨论电介质对电场的影响、电磁波的辐射和吸收以及中性分子之间的相互作用等问题时都会用到这个模型.

例 1 求电偶极子轴线上和中垂线上的场强分布.

解 先求电偶极子轴线上的场强分布. 取一直角坐标系, 把坐标原点放在电偶极子中点, 使 x 轴与电偶极子轴线重合, y 轴与其中垂线重合. 设 P 点是 x 轴上任意一点, 它与中点相距为 r . $+q$ 和 $-q$ 在 P 点的场强分别用 E_+ 和 E_- 表示, 由(1.4.1)式可得它们的大小分别为

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r - \frac{l}{2}}^2$$

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r + \frac{l}{2}}^2$$

E_+ 的方向与 x 轴正向一致, E_- 的方向与 x 轴正向相反. 根据场强叠加原理, P 点的总场强的大小为

$$\begin{aligned} E &= E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2qlr}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

E 的方向与 x 轴正向一致. 在定义电偶极子时曾强调 $rl \ll 1$, 故在保留一级无穷小量 $\frac{l}{2r}$ 略去二级无穷小量 $\frac{l^2}{4r^2}$ 的精度要求下, 有

$$\begin{aligned} \left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2 &= r^4 \left(1 - \frac{l}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{l}{2r}\right)^2 \\ &= r^4 \left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^2 \approx r^4 \end{aligned}$$

于是 P 点的场强大小近似为

$$E \approx \frac{2ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.4.11)$$

因 p 点的场强方向与 p_e 的方向一致, 故(1.4.11)式可写成矢量形式,

$$E \approx \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.4.12)$$

这就是电偶极子轴线上的场强分布.

现在我们来求电偶极子中垂线上的场强分布. 设 p 点是中垂线上任意一点, 它与电偶极子中点相距为 r . $+q$ 与 $-q$ 在 p 点的场强分别用 E_+ 和 E_- 表示, 由(1.4.1)式可知它们的大小相等.

$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}$$

但二者的方向不同(见图 1.4.7). 根据场强叠加原理, P 点的总场强为

图 1.4.7 计算电偶极子场强

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

写成分量式则为

$$E_x = E_{+x} + E_{-x}$$

$$E_y = E_{+y} + E_{-y}$$

由对称性可以看出,

$$E_{+x} = E_{-x}, \quad E_{+y} + E_{-y} = 0$$

于是

$$E_x = 2E_{+x} = -2E_+ \cos \theta$$

$$= -2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2 + \frac{1}{4}} \approx -\frac{1}{2} \frac{q}{r^2 + \frac{1}{4}}$$

$$E_y = 0$$

所以 P 点的总场强大小为

$$E = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0 r^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0 r^2 + \frac{l^2}{4}}$$

略去二级无穷小量 $\frac{l^2}{4r^2}$, 则上式可写为

$$E = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.4.13)$$

E 的方向与 x 轴正向相反, 亦即与 p_e 方向相反, 所以用矢量式表示则为

$$E = -\frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.4.14)$$

这就是电偶极子中垂线上的场强分布.

因为电偶极子中垂面上任何一点向电偶极子轴线所作垂线都是中垂线, 所以(1.4.14)式对中垂面上任何一点都成立, 故(1.4.14)式给出了中垂面上的场强分布.

例2 设有一长为 L 的均匀带电细棒, 所带电量为 $q(>0)$, 求细棒中垂线上的场强分布.

解 取一直角坐标系, 把坐标原点放在细棒中点并使 y 轴和中垂线重合(见图 1.4.8). 设 P 点为 y 轴上任意一点, 它与 o 点相距为 r . 因为细棒均匀带电, 其电荷线密度为 $\epsilon = \frac{q}{L}$. 把带电细棒分成无限多线电荷元, 每一线电荷元可看成一个点电荷, 设 dx 是位于 x 处的线电荷元的长度, 则它所带电量为 $dq = \epsilon dx = \frac{q}{L} dx$. 由图 1.4.8 可见, 这线电荷元与 P 点的距离为 $\sqrt{x^2 + r^2}$. 根据(1.4.1)式可得这线电荷元在 P 点的场强大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)} = \frac{\epsilon dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)}$$

由于各电荷元在 P 点的场强方向不同, 故 P 点的总场强不能由上式直接积分而得. 为了求得 P 点的总场强可把 dE 沿 x 轴和 y 轴

图 1.4.8 求均匀带电细棒中垂线上的场强分布

分解, 写出它的分量式. 由图 1.4.8 可见

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{e dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{e dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

由电荷分布的对称性, 可知

$$E_x = \int dE_x = 0$$

所以 P 点的总场强的方向沿着 y 轴方向, 而其大小则为

$$\begin{aligned} E &= \int dE_y = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{e r dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{eL}{4\pi\epsilon_0 r \sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}} \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

这就是均匀带电细棒中垂线上场强大小的分布. 因为细棒中垂面上任何与细棒垂直的直线都是中垂线, 所以(1.4.15)式对中垂面

上任何一点都成立, 即(1. 4. 15) 式给出了中垂面上的场强大小分布. 中垂面上各点的场强方向均在垂直细棒的直线上. 若细棒带正电, 则场强方向沿直线向外; 若细棒带负电, 则场强方向沿直线指向细棒.

现在, 我们讨论两个特殊情形:

(a) $r \ll L$ 的情形

这时 $\frac{L^2}{4} + r^2 \approx \frac{L^2}{4}$, 而 $q = \epsilon L$, 于是(1. 4. 15) 式变为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

这是点电荷的场强公式. 这表明, 在 $r \ll L$ 时, 带电细棒可以看成是一个点电荷.

(b) $L \rightarrow \infty$ 的情形(即细棒是无限长均匀带电细棒)

假定在 $L \rightarrow \infty$ 时, ϵ 保持不变, 则由(1. 4. 15) 式可得

$$E = \frac{\epsilon}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (1. 4. 16)$$

这就是无限长均匀带电细棒中垂面上的场强大小分布. 但在无限长情形下任何与细棒垂直的平面都可看成中垂面, 这样, (1. 4. 16) 式对空间任何一点都成立. 故(1. 4. 16) 式实际上给出整个空间的场强大小分布.

(1. 4. 16) 式表明, 场中任一点的场强大小与带电细棒的电荷线密度成正比, 与场点到细棒的距离 r 成反比. 显然, 若以带电细棒的轴线为轴, 以 r 为半径作一圆柱面, 则柱面上各点的场强大小相等. 通常就说这种电场具有柱对称性.

也许有的读者会问:“实际上并不存在无限长的带电棒, 上面的讨论有什么意义?”但是, 由(1. 4. 16) 式不难看出, 当 $L \gg r$ 时, 近似有

$$E \approx \frac{\epsilon}{2\pi\epsilon_0 r}$$

这表明, 一根有限长的均匀带电细棒, 在棒长远大于场点到棒的距离的条件下, 在棒的中部区域的场强分布与无限长带电棒周围的场强分布是一样的. 这就是说在 $L \gg r$ 的条件下, 我们可以把有限长的细棒看成是无限长的, 这就是物理上的“无限长”, 即物理上的“无限长”不同于数学上的无限长, 实际上是有限长在一定条件下的一种抽象.

例 3 设有一半径为 R 的均匀带电圆环, 所带电量为 $q (> 0)$, 求通过圆环中心并垂直环面的直线上的场强分布.

解 取一直角坐标系, 把坐标原点放在环心, 并使 x 轴垂直环面, 如图 1. 4. 9 所示. P 点为 x 轴上任意一点, 设它的坐标为

图 1. 4. 9 求均匀带电圆环轴线上的场强分布

$(x, 0, 0)$. 把带电圆环分成无限多线电荷元, 每一线电荷元可看成一个点电荷. 设 dl 是其中任意一线元的弧长, 其上分布有电量 $dq = \frac{q}{2\pi R} dl$, 圆环上各线电荷元到 P 点的距离相等均为 $r = \sqrt{x^2 + R^2}$, 则由 (1. 4. 1) 式可得每一线电荷元在 P 点产生的场强大小都为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\frac{q}{2\pi R} dl}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)}$$

但各线电荷元在 P 点产生的场强方向各不相同, 图 1.4.9 只画出与 x 轴对称的一对线电荷元在 P 点产生的场强方向. 由电荷分布的对称性可以看出

$$E_y = \int dE_y = 0, \quad E_z = \int dE_z = 0$$

所以 P 点场强是各电荷元在 P 点产生的场强的 x 轴分量的总和. 由图 1.4.9 可见, dE_x 为

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{\frac{q}{2R} dl}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$E_x = \int dE_x = \int_0^{2R} \frac{qx}{8\pi\epsilon_0 R(x^2 + R^2)^{3/2}} dl = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

写成矢量式, 则为

$$E = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \mathbf{x} \quad (1.4.17)$$

这就是均匀带电圆环轴线上的场强分布. (1.4.17) 式表明, 在圆环右侧, 即 $x > 0$ 的一侧, E 的方向与 x 方向一致; 在圆环左侧, 即 $x < 0$ 一侧, E 的方向与 x 方向相反.

若 $x \ll R$, 则 $(x^2 + R^2)^{3/2} \approx R^3$, $E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$ 这是点电荷场强公式. 这表明, 在 $x \ll R$ 的情形下, 可把带电圆环看成一个点电荷.

例 4 设有一半径为 a 的均匀带电圆板, 电荷面密度为 (> 0), 求通过圆板中心并垂直板面的直线上的场强分布.

解 取一坐标如图 1.4.10 所示, x 轴垂直圆板并通过圆板中心, 坐标原点就设在圆板中心. P 点为 x 轴上任意一点, 它与圆板的距离为 x. 把圆板分成一系列不同半径的同心圆环, 其中任一圆环的半径为 R, 环的宽度为 dR , 则此圆环的面积为 $dS = 2\pi R dR$, 其上分布有电量 $dq = \sigma dS = 2\pi R \sigma dR$. 利用例 3 结果 (1.4.17) 式, 可知任一圆环在 P 点产生的场强大小为

图 1.4.10 求均匀带电圆板轴线上的场强分布

$$dE = \frac{x dq}{4 \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{x R dR}{2 \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

因为各圆环在 P 点产生的场强的方向均沿 x 轴方向, 故 P 点总场强是各圆环产生的场强的代数和, 即

$$\begin{aligned} E &= \int_0^a dE = \int_0^a \frac{x R dR}{2 \epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2 \epsilon_0} \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

这就是均匀带电圆板轴线上场强大小分布. 下面我们讨论两种特殊情形:

(a) $x \gg a$ 的情形

$$\text{若 } x \gg a, \text{ 则 } \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2}$$

于是(1.4.18)式变为

$$E \approx \frac{1}{2 \epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} \right) = \frac{1}{4 \epsilon_0} \frac{a^2}{x^2} = \frac{q}{4 \epsilon_0 x^2}$$

式中 q 就是整个圆板所带电量, 这表明, 在 $x \gg a$ 的情形下, 带电圆板可看成一个点电荷.

(b) $a \gg x$ 的情形

$$\text{若 } a \gg x, \text{ 则 } \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \approx \frac{x}{a}, \text{ 於是 (1.4.18) 式变为}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.4.19)$$

在 $a \rightarrow \infty$ 时, 任何垂直平板的直线都可看成大平板的轴线, 所以 (1.4.19) 式对空间任何点都成立, 即 (1.4.19) 式给出无限大均匀带电平板周围空间的场强大小分布. (1.4.19) 式表明, 无限大均匀带电平板产生的电场具有以下特点: 场中任意一点的场强大小, 只和带电平板的电荷面密度有关, 而与场点到平板的距离无关, 即在带电平板的每一侧, 场中各点的场强, 大小相等、方向相同且与带电平板垂直. 这就是说, 在无限大均匀带电平板两侧都是均匀电场, 但带电平板两侧的场强方向相反.

实际的带电平板都是有限大小的, 那么上面的结果有什么意义? 为了说明它的实用意义, 我们讨论 $x \ll a$ 的情形. 当 $x \ll a$ 时 $\frac{x}{a} \ll 1$, 于是

$$\frac{\frac{\sigma x}{a}}{x^2 + a^2} = \frac{\frac{\sigma x}{a}}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \approx \frac{\sigma x}{a^3} \quad 0$$

这样 (1.4.18) 式就变为

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

这表明, 在 $x \ll a$ 的条件下, 有限大小的均匀带电圆板在其轴线上的场强分布和无限大均匀带电平板的场强分布近似相同. 至于在轴线以外的场点, 有限大小的均匀带电圆板的场强分布是否和无限大均匀带电平板的场强分布近似相同? 这从 (1.4.18) 式得不出结论. 但是可以证明, 在 $x \ll a$, 且场点到带电圆板轴线的距离远小于圆板半径的条件下, 圆板两侧中部区域的场强分布就和无限大均匀带电平板的场强分布近似相同. 这就是说, 在计算有限大小的均匀带电圆板两侧中部区域的场强时, 我们可以把这有限大小的圆板看成一个“无限大”的平板. 这个结论可以推广到任意形

状的均匀带电平板. 这时平板的中部区域是指这些场点到平板边缘各点的距离远大于它们到平板的距离.

通过以上四个例子, 我们可以看出, 不同的电荷分布, 对应不同的场强分布. 已知电荷分布时, 可以根据点电荷场强公式(实质上就是库仑定律)和场强叠加原理计算场强分布. 在计算过程中特别要注意场强叠加是矢量叠加, 一般都把它归结为坐标分量的叠加. 而在计算某些对称分布电荷的场强时, 我们可由对称性的分析看出总场强的某些分量等于零, 判断出总场强的方向, 而使计算大大简化.

§ 1.5 高斯定理

1.5.1 电力线

为了形象地描述场强分布, 人们引入了电力线. 电力线是人为地在电场中画出的一些曲线, 这些曲线上每一点的切线方向和该点的场强方向一致. 图 1.5.1 就表示某一电场中的一条电力线.

为了使电力线不仅表示出电场中各点的场强方向, 而且能反映出各点的场强大小, 我们引入电力线数密度: 在电场中任意一点作一个和该点场强方向垂直的小面积 S , 若穿过此面的电力线条

图 1.5.1 电场中的一条电力线

数为 N , 则 $\frac{N}{S}$ 就称为电力线数密度, 即电力线数密度的意义是穿过垂直场强的单位面积的电力线条数. 在画电力线图时, 我们使电场中任一点的电力线数密度等于该点的场强大小, 即

$$E = \frac{N}{S} \quad (1.5.1)$$

这样, 在电场中场强较大的地点电力线就会密集一些, 在场强较小的地点电力线则稀疏一些. 于是, 电场中电力线的疏密就直观地反映出电场的强弱分布.

图 1.5.2 是几种常见电场的电力线图. 由这些电力线图可以看出, 静电场的电力线有以下性质:

(1) 电力线起自正电荷(或无穷远处), 终于负电荷(或无穷远处), 它不会在没有电荷的地点中断.

(2) 电力线不会形成闭合曲线.

(3) 任何两条电力线在电场中任何处不可能相交. 因为, 如果两条电力线在电场中某点相交, 则该点的场强就有两个不同的方向, 这是违背静电场中每一点具有确定场强方向这一基本性质的.

电力线的性质(1)和(2)是由静电场的性质决定的, 关于这两点我们将分别在讲述高斯定理和环路定理时再讨论.

1.5.2 电通量

观察各种电场的电力线图, 可以发现某些规律性. 例如, 在图 1.5.3 所示的电力线图上, 若包围正电荷作一闭合曲面 S_1 , 则有电力线穿过曲面 S_1 向外发出; 若包围负电荷作一闭合曲面 S_2 , 则有电力线穿入曲面 S_2 ; 若闭合曲面 S_3 不包围电荷, 则穿入和穿出曲面 S_3 的电力线条数相等. 这表明, 穿过任意一个闭合曲面的电力线数, 和该闭合曲面包围的电荷之间有着一定的关系, 这个关系就是高斯定理. 在讲述定理之前, 我们先讨论穿过一个平面的电力线数和面上场强的关系并介绍电通量这个物理概念.

首先讨论均匀电场中穿过任一平面的电力线数和面上场强的关系. 设均匀电场的场强为 E , 在电场中任意作一面积为 S 的平面, 平面的法线方向的单位矢量为 n , 它与场强方向的夹角为 θ . 平

图 1. 5. 2 常见电场的电力线图

面 S 在与 E 垂直的平面上的投影为 S_{\perp} , 显然 $S_{\perp} = S \cos \theta$. 由图

图 1.5.3 一对不等量的异号电荷 图 1.5.4 穿过平面 S 的电力线数
产生的电场中的电力线图

1.5.4可以看出, 穿过 S 的电力线数等于穿过 S 的电力线数. 另一方面, 根据画电力线图的规定, 电力线数密度应等于该处的场强, 故穿过 S 的电力线条数, 亦即穿过 S 的电力线条数, 为

$$N = ES = EScos$$

引入面积矢量 $S = Sn$, 则上式可改写成场强矢量与面积矢量的标量积, 即

$$N = ES = EScos = E \cdot S \quad (1.5.2)$$

这就是穿过一个平面的电力线条数与平面上电场强度之间的关系.

现在引入电通量这个物理量, 我们把平面 S 上的场强矢量与平面的面积矢量的标量积 $E \cdot S$ 定义为均匀电场中平面 S 的电通量, 用符号 Φ_e 表示, 即

$$\Phi_e = E \cdot S = EScos \quad (1.5.3)$$

比较(1.5.2)和(1.5.3)两式可见, 平面 S 的电通量等于穿过平面 S 的电力线总数. 因为 E 与 n 的夹角可以是锐角, 也可以是钝角, 在 E 一定时, 全由 n 的选择所决定, 所以平面 S 的电通量是一个可正可负的代数量. 当 θ 角为锐角时, $cos \theta > 0$, 故 Φ_e 为正; 当 θ 角

为钝角时, $\cos < 0$, ϵ 为负; 当 $= 90$ 时, $\epsilon = 0$.

图 1. 5. 5 电通量的正负

现在, 我们进一步来研究不均匀电场中任意一曲面的电通量的计算.

如图 1. 5. 6 所示, S 是不均匀电场中一个任意形状的曲面, 为了计算曲面 S 的电通量, 可想象地把整个曲面分割成无限多块面元, 每块面元都可看成一个平面, 设 dS 是其中任意一块面元的面积, n 是该面元法线方向单位矢量. 在同一块面元上场强近似相等, 设 dS 上的场强为 E , 它与 n 的夹角为 θ . 根据(1. 5. 3)式可得 dS 的电通量为

图 1. 5. 6 曲面的电通量

$$d\epsilon = E \cdot dS = E \cos \theta dS = E_n dS$$

式中 E_n 是场强 E 在 n 方向的投影. 整个曲面 S 的电通量是每一块面元上的电通量的代数和, 即

$$\epsilon = \int_S d\epsilon = \int_S E \cdot dS = \int_S E \cos \theta dS = \int_S E_n dS \quad (1. 5. 4)$$

\oint_S 表示积分遍及整个曲面 S , 如果曲面是一个闭合的曲面, 则积分符号用 \oint_S 表示, 积分号中间画一个圆圈表示闭合.

对于平面或者不闭合的曲面, 面元的法线方向可以有两种相反的选择. 但是对于闭合曲面, 我们规定只取垂直于面元并由曲面内指向外的方向作为面元的法线方向. 这样, 在电力线从闭合面内穿出曲面的那部分面上, 例如图 1.5.7 上的 a 点, $\cos \theta > 0$ 所以这部分曲面的电通量是正值. 而在电力线自曲面外穿进曲面的那部分面上, 例如图 1.5.7 b 点, $\cos \theta < 0$, 所以这部分曲面的电通量是负值.

图 1.5.7 闭合曲面的电通量

$\frac{1}{2}, \cos \theta > 0$ 所以这部分曲面的电通量是正值. 而在电力线自曲面外穿进曲面的那部分面上, 例如图 1.5.7 b 点, $\cos \theta < 0$, 所以这部分曲面的电通量是负值.

例 如图 1.5.8 所示, 在场强为 E 的均匀电场中, 设有一个半径为 R 、长为 L 的闭合圆柱面, 柱轴和 E 平行, 试计算此闭合柱面的电通量。

解 如图 1.5.8 所示, 闭合圆柱面由左右两个底面 S_1 和 S_2 以及侧面 S_3 组成, n_1 、 n_2 和 n_3 分别是这三个面的法线方向单位矢量. 整个闭合面的电通量是 S_1 、 S_2 和 S_3 三个面的电通量的代数和, 即

$$\Phi_e = \oint_S E \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1} E \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} E \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_3} E \cdot d\mathbf{S}$$

在 S_1 面, n_1 与 E 之间的夹角为 θ , 且 E 为恒矢量, 所以

图 1.5.8 闭合圆柱面的电通量

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1} E \cos \theta dS = -ES_1 = -ER^2$$

这表明电力线从 S_1 面穿进闭合面. 在 S_2 面, \mathbf{n}_2 与 \mathbf{E} 的夹角为零, 所以

$$\oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} E dS = ES_2 = ER^2$$

这表明电力线由 S_2 面穿出闭合面. 在 S_3 面, \mathbf{n}_3 与 \mathbf{E} 之间的夹角处处为 $\frac{\pi}{2}$, 故

$$\oint_{S_3} E dS = \oint_{S_3} E \cos \frac{\pi}{2} dS = 0$$

这表明没有电力线穿过 S_3 面. 于是整个闭合圆柱面的电通量为

$$\Phi_e = -ER^2 + ER^2 + 0 = 0$$

这就是说, 一个闭合曲面的电通量等于穿出的电力线数与穿进的电力线数之差. 本例中这个差数为零. 由此例还可看出, 闭合曲面的电通量为零, 并不一定意味闭合曲面上各点的场强为零, 它可以是穿进闭合曲面的电力线数等于穿出闭合面的电力线数. 所以不能仅由 $\Phi_e = 0$ 就得出 $E = 0$ 的结论.

有的读者也许会问:“某个面的电通量是否就是穿过该面的电

力线总数?如果这样,为什么还要定义电通量?”这个问题之所以产生,是因为电通量概念是借助于电力线数密度引入.这样引入的好处是电通量有了具体形象的意义,但也造成了电通量与电力线总数意义等同的误解.必须指出,用一条条分立的电力线来描写电场中场强的分布,本是一种人为的形象化的方法,我们可以采用也可以不采用.如果不采用这种方法,当然就谈不上通过一个面的电力线总数,但是,我们仍可用(1.5.3)和(1.5.4)式定义电通量.这时,电通量的意义就没有前面所说的那样直观,只能从它所遵循的规律上去理解它的意义,这使初学者往往感到有些抽象.不过它的好处是避免了用电力线描写电场时容易使人产生电场强度分布不连续的错觉.

1.5.3 高斯定理

高斯(Gauss)定理是静电场的一条基本规律,也是计算电场强度的有力工具,它给出电场中任一闭合面的电通量和闭合面内的电量之间的定量关系.定理叙述如下:在真空中的静电场内,任一闭合面的电通量等于这闭合面所包围的电量的代数和除以 ϵ_0 ,即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \text{ 在 } S \text{ 内}} q_i \quad (1.5.5)$$

这个定理定量地说明了我们在1.5.2节开始时提到的规律性,它可以从库仑定律和场强叠加原理推导出来.下面,我们分四步来证明高斯定理.

(1) 设空间只有一个点电荷 $q(>0)$, 闭合面是以点电荷为中心的球面

如图1.5.9所示,点电荷 q 位于 O 点.今以 O 点为球心、 r 为半径作一球面 S ,则由点电荷场强公式可知,球面上各点的场强大小相等,均为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

场强的方向沿半径向外,正好与球面上各面元的法线方向一致,故球面任一面元 dS 的电通量为

$$d\Phi_e = E \cdot dS = E dS$$

所以整个球面 S 的电通量为

$$\begin{aligned}\Phi_e &= d\Phi_e = \oint_S E \cdot dS = \oint_S E dS \\ &= E \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q\end{aligned}$$

图 1.5.9 高斯定理证明(1)

即球面的电通量等于球面所包围的电量除以 ϵ_0 . 这样,我们先在这个特殊情形中证明了高斯定理.

若 $q < 0$, $\Phi_e = \frac{q}{\epsilon_0}$ 形式不变,但球面电通量为负值.

(2) 设任意形状的闭合曲面把点电荷 q 包围在内

如图 1.5.10 所示, S 是一任意形状的闭合面,点电荷 q 位于 O 点.今在 S 内以 O 点为中心、以 a 为半径作一球面 S_1 ,并以 O 点为顶点作一顶角无限小的圆锥.此圆锥分别在 S_1 和 S 上截出面元 dS_1 和 dS ,设 dS_1 上的场强为 E_1 , dS 上的场强为 E , dS_1 的法线方向与 E_1 的方向一致,沿半径向外; dS 的法线方向与 E 的方向之间的夹角为 θ , O 点到 dS 的距离为 r .

图 1.5.10 高斯定理证明(2)

现在, 我们来证明: 面元 dS 上的电通量等于面元 dS_1 上的电通量, 即 $E \cdot dS = E_1 \cdot dS_1$.

因为 $E \cdot dS = E \cos \theta dS$, 而 $dS \cos \theta = dS_2$, dS_2 是同一圆锥在半径为 r 的球面(图 1.5.10 中虚线所画)上截出的面元. 因为 dS_1 和 dS_2 是顶点在球心的同一圆锥在两个同心球面上截出的面元, 所以面积元之比等于两个球半径平方之比, 即

$$\frac{dS_2}{dS_1} = \frac{r^2}{a^2}$$

根据点电荷场强公式, 面元 dS_1 和 dS_2 上的场强大小分别为

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}, \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

所以

$$\frac{E}{E_1} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{dS_1}{dS_2}$$

因此, $E dS_2 = E_1 dS_1 = E_1 \cdot dS_1$

於是

$$E \cdot dS = E dS \cos \theta = E dS_2 = E_1 \cdot dS_1.$$

即闭合面 S 上任意一面元的电通量都等于球面 S_1 上相应的一个面元的电通量. 由此, 整个闭合面 S 的总电通量必然等于整个球面 S_1 的总电通量. 根据(1)中的结果便得

$$\oint_S E \cdot dS = \oint_{S_1} E_1 \cdot dS_1 = \frac{1}{\epsilon_0} q$$

这表明, 当包围点电荷的闭合面是任意形状和大小的曲面时, 高斯定理依然成立.

(3) 设点电荷 q 在闭合面外

如图 1.5.11 所示, 点电荷 q 位于闭合曲面 S 以外的 O 点. 我们来计算闭合面 S 的电通量. 以 O 点为顶点, 作一顶角无限小的圆锥, 它在 S 上分别截出两个面元 dS_1 和 dS_2 , O 点到 dS_1 和 dS_2 的距离分别为 r_1 和 r_2 . 由点电荷场强公式可知, dS_1 和 dS_2 上的场

图 1.5.11 高斯定理证明(3)

强大小之比为

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

设面元 dS_1 法线单位矢量 n_1 与 E_1 的夹角为 θ_1 面元 dS_2 法线单位矢量 n_2 与 E_2 的夹角为 θ_2 , 由图 1.5.11 可见, $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$. $\theta_1 =$

- 式中 θ_1 是 n_1 与矢径 r_1 的负方向之间的夹角. 则

$$E_1 \cdot dS_1 = E_1 dS_1 \cos \theta_1 = - E_1 dS_1 \cos \theta_1$$

而 $dS_1 \cos \theta_1$ 正是同一圆锥在以 O 点为球心, r_1 为半径的球面上截出的面元 dS_{10} , 於是

$$E_1 \cdot dS_1 = - E_1 dS_{10}$$

同样, $E_2 \cdot dS_2 = E_2 dS_2 \cos \theta_2 = E_2 dS_{20}$

式中 dS_{20} 是同一圆锥在半径为 r_2 的同心球面上截出的面元. 因为 dS_{10} , dS_{20} 是同一圆锥在两个同心球面上截出的两个面元, 所以有

$$\frac{dS_{20}}{dS_{10}} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{E_1}{E_2}$$

即

$$E_2 dS_{20} = E_1 dS_{10}$$

而

$$E_2 \cdot dS_2 = E_2 dS_{20} = E_1 dS_{10} = - E_1 \cdot dS_1$$

亦即

$$E_2 \cdot dS_2 + E_1 \cdot dS_1 = 0$$

这表明, S 上一对面元(dS_1 和 dS_2) 的电通量等于零. 因为整个闭

图 1.5.12 高斯定理证明(4)

合面 S 的总电通量等于各个不同方位的圆锥在 S 上截出的一对对面元的电通量的代数和, 而每一对面元上的电通量又都为零, 所以当闭合面不包围电荷时, 闭合面的总电通量一定等于零, 即

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(4) 设电场由 $n+k$ 个点电荷产生, 闭合面只包围其中 n 个点电荷, k 个点电荷在闭合面外

设 $n+k$ 个点电荷的电量分别为 $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots, q_{n+k}$. 其中, q_1, q_2, \dots, q_n 在闭合面 S 内, $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{n+k}$ 在闭合面 S 之外, 如图 1.5.12 所示. 我们来计算闭合面 S 的电通量. 根据场强叠加原理, 空间任一点的总场强为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n + \dots + \mathbf{E}_{n+k}$$

这里 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n, \dots, \mathbf{E}_{n+k}$ 分别为 $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots, q_{n+k}$ 单独存在时, 在空间同一点产生的场强. 所以, 闭合面 S 的总电通量为

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \oint_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n + \dots + \mathbf{E}_{n+k}) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} + \dots \\ &\quad + \oint_S \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{S} + \dots + \oint_S \mathbf{E}_{n+k} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

$$= e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots + e_{(n+k)}$$

上式表明, 在 $n+k$ 个点电荷共同产生的电场中, 任一闭合面的总电通量等于每个点电荷单独存在时产生的电场中同一闭合面的电通量的代数和. 由(2)和(3)的结论, 我们知道, 对于包围在闭合面 S 内的那些电荷 q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 分别有

$$e_i = \frac{1}{\epsilon_0} q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

而对于不在闭合面内的那些电荷 q_j ($j = n+1, \dots, n+k$) 分别有

$$e_j = 0 \quad (j = n+1, \dots, n+k)$$

所以

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_1 + \frac{1}{\epsilon_0} q_2 + \dots + \frac{1}{\epsilon_0} q_n = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} q_i$$

至此, 我们证明了高斯定理. 由证明过程可见, 高斯定理是库仑定律和场强叠加原理的必然结果.

对于高斯定理的理解, 应该注意以下三点:

(a) 定理对真空中任何电荷分布产生的电场和任何形状、大小的闭合曲面都普遍成立.

(b) 定理中的 E 是全部电荷共同产生的总场强, 并非仅由闭合面内的电荷产生的场强.

(c) $\sum_{S \text{ 内}} q_i$ 只是闭合面内的电量代数和, 即只有闭合面内的电荷对闭合面的总电通量有贡献. 当闭合面外的电荷分布或电量改变时, 闭合面上各点的场强以及各面元的电通量都会改变, 但只要闭合面内的电量代数和不变, 闭合面的总电通量就不会改变.

1.5.4 高斯定理对电力线性质的论证

(1) 电力线起自正电荷, 终于负电荷, 在没有电荷的空间电力线不会中断

根据高斯定理可以证明电力线的上述性质. 假定电力线从 P

点发出, 我们来证明 P 点必有正电荷. 为此, 我们作一个很小的闭合面 S 恰好把 P 点包围在内. 根据所设, 电力线从这闭合面内向外穿出, 所以这闭合面上的电通量是正值, 则由高斯定理可知, 闭合面内必为正电荷, 这就证明了电力线起自正电荷. 同理可证明在电力线终止点必有负电荷. 例如, 设电力线终止于 P 点, 我们作一个很小的闭合面 S 恰好把 P 点包在内. 根据所设, 电力线是从外穿入 S 的, 所以 S 面上的电通量是负值, 则由高斯定理可知 S 内必为负电荷, 这就证明了电力线终于负电荷. 因为电力线的中断点可看作电力线的起点或终点, 所以上面的证明也就是表明, 在电力线中断处必有电荷, 也就是说, 在没有电荷的空间电力线不会中断.

图 1.5.13

有些情形, 电力线并没有终于负电荷而是终于无穷远处. 例如, 一个孤立的带正电的点电荷产生的电场, 它的电力线就是终于无穷远处. 还有些情形, 电力线不是起自正电荷而是起于无穷远处. 例如, 一个孤立的带负电的点电荷, 它的电场中的电力线就是来自无穷远处. 这些应该如何理解呢? 这个问题涉及在物理上如何理解“孤立”; “无穷远”这两个概念. 大家知道, 在我们生活的世界中存在着许许多多电荷, 它们之间存在静电相互作用. 如果它们之间的距离远大于它们的线度, 这些电荷都可看成点电荷, 根据库仑

定律可知, 它们之间的静电力的大小与它们之间的距离平方成反比. 当它们之间的距离足够大时, 它们之间的作用就可忽略不计. 如果, 我们所研究的一个电荷(或几个电荷)与其它电荷相距都足够远, 则其它电荷对该电荷(或几个电荷)的作用就可忽略不计. 这时, 我们就说那些电荷位于“无穷远”处, 而我们所研究的那个电荷(或几个电荷)就“被看成一个“孤立”电荷(或“孤立”电荷系). 一个孤立的带正电的点电荷产生的电场在距离点电荷不太远的区域中, 电力线是一些呈均匀辐射状向外伸展的直线. 但是在离点电荷足够远处, 那些被认为位于“无穷远”处的电荷在这区域的影响就不能再被忽略了, 因而在离正点电荷足够远处的电力线不再是辐射状的直线, 而且最终这些电力线都将终止于“无穷远”处的负电荷上. 通常我们所画的孤立正点电荷电场的电力线, 都画的是点电荷周围有限区域内电场的电力线, 所以看不到电力线的弯曲, 也看不到电力线终止于负电荷. 同理, 带负电的孤立点电荷电场中的电力线也都是起自“无穷远”处的正电荷. 如果我们所讨论的是孤立电荷系, 而且系统内的正电荷多于负电荷, 则系统内正电荷发出的电力线数大于系统内负电荷上终止的电力线数, 多余的那些电力线必然终止于无穷远处的负电荷上. 反之, 若孤立电荷系内的负电荷多于正电荷, 则系统内正电荷发出的电力线数少于系统内负电荷上终止的电力线数. 所以, 终止于负电荷上的电力线中, 有一些是从无穷远处的正电荷发出的.

图 1.5.14 电力管各横截面上的电通量相等

(2) 电力线密集处场强大, 电力线稀疏处场强小

在证明这一性质前,先介绍电力管,我们把电场中一束电力线围成的管子叫做电力管.由于电力线平行电力管侧壁,所以没有电力线从侧壁穿出,即电力管侧壁面上的电通量为零.

今取一段电力管的两个横截面和侧壁面作为闭合曲面,则闭合面上的总电通量为

$$\Phi_e = -E_1 S_1 + E_2 S_2$$

若这段电力管内无电荷,则由高斯定理得

$$-E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0$$

或

$$E_1 S_1 = E_2 S_2$$

这表明,若一段电力管内没有电荷,则穿过这段电力管任一横截面的电力线条数相等.这样,在电力管横截面大的地方(即电力线稀疏的地方)场强小,在电力管横截面小的地方(即电力线密集的地方)场强大.

1.5.5 高斯定理的应用举例

高斯定理表述了静电场性质的一个方面,在说明静电场中场强分布与电荷的关系上有重要理论意义,在第二章我们将看到它在研究导体与电介质时的应用.现在举出用高斯定理计算场强的一些例子,这也是高斯定理应用的一个方面.

我们知道,高斯定理 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E \cos \theta dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \text{ 在 } S \text{ 内}} q_i$ 是对一个闭合面而言的,一般来说,在闭合面上的不同地点 \mathbf{E} 的大小和方向是不同的, \mathbf{E} 与 $d\mathbf{S}$ 的夹角也各不相同.因此,一般地说,若知道了闭合面内电量的代数和 $\sum_{i \text{ 在 } S \text{ 内}} q_i$,虽可由高斯定理求出闭合面的总电通量,但并不能由此求出曲面上各点的场强.但是,如果电荷的分布具有某种对称性,有可能在电场中选取适当的闭合面 S (又称为高斯面),使得在 S 上各点 \mathbf{E} 的大小处处相等,方向处处

与面元垂直, 即 $\cos \theta = 1$; 或者在 S 的一部分面上, E 的大小相等, 方向与面元垂直, 而在 S 的其余部分面上, E 处处与面元平行, 即 $\cos \theta = 0$. 这样, 场强 E 就可从积分号内提出, 即 $\oint_S E \cdot d\mathbf{S} = ES$, 高斯定理可写成,

$$ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i \in S_{\text{内}}} q_i$$

式中 S 为闭合面的全部面积或部分面积. 由此可求出这样的闭合面上的场强大小(或闭合面一部分曲面上的场强大小).

下面, 我们用三个例子具体说明应用高斯定理求场强的方法. 请注意如何由给定的电荷分布分析场强分布的对称性, 并选取适当的闭合面.

例 1 如图 1.5.15 所示, 一均匀带电球层, 球层内壁的半径为 R_1 , 外壁的半径为 R_2 , 电荷体密度为 ρ (> 0) 求场强大小分布.

图 1.5.15 均匀电球层的电场具有球对称性

解 因为均匀带电球层这种电荷分布具有球对称性, 所以它的电场也应有球对称性. 分析如下: 设均匀带电球层中心位于 O 点, P 点是空间任意一点, 它与 O 点相距为 r . 设想把带电球层分成无限多体积相等的体元, 这些带电体元可看成电量相等的点电

荷. 若 dV 是其中任意一个体元, 则在带电球层上一定可以找到另一体元 dV , 它和 dV 对称地位于 OP 联线的两侧, 而且 dV 和 dV 在 P 点的场强 dE 和 dE 也一定与 OP 联线对称(见图 1. 5. 15), 所以它们的合场强 $dE + dE$ 必定在 OP 联线上. 整个带电球层在 P 产生的场强, 可以看成是由对于 OP 联线对称的成对体元在 P 点产生的场强叠加而成, 所以 P 点的总场强方向必然沿 OP 联线的方向, 即由 O 点指向 P 点的矢径 r 的方向. 由于电荷分布的球对称性, 若以 O 点为中心, r 为半径作一球面, 则球面上各点的场强大小必相等, 而场强的方向都沿着矢径方向, 这种电场分布叫做球对称分布.

根据电场的球对称性特点, 我们取通过 P 点并以 O 点为球心的球面为高斯面(如图 1. 5. 15 中虚线所示). 在这球面上 E 的大小处处相等, E 的方向处处与球面面元垂直, 即处处 $\cos \theta = 1$, 所以该球面的总电通量为

$$\oint_S E \cdot dS = \oint_S E dS = ES = E \cdot 4\pi r^2$$

在上面对称性分析中, 我们对 P 点的位置没有任何限制, 所以电场具有球对称性分布的结论对 $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ 和 $r > R_2$ 三个区域都成立. 下面我们根据高斯定理分别求出三个区域中的电场强度分布.

设 P 点是 $r > R_2$ 区域中的一点, 则高斯面包围了带电球层的全部电量

$$q = \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho$$

根据高斯定理

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3) \rho$$

由此求出 P 点的场强大小为

$$E = \frac{(R_2^3 - R_1^3) \epsilon}{3 \pi r^2}$$

写成矢量式则为

$$E = \frac{(R_2^3 - R_1^3) \epsilon}{3 \pi r^2} \mathbf{r} = \frac{q}{4 \pi \epsilon r^2} \mathbf{r} \quad (1.5.6)$$

式中 \mathbf{r} 为矢径方向单位矢量. 上式表明, 均匀带电球层在球层外面产生的电场与电荷全部集中在球心 O 点的点电荷产生的电场一样.

设 P 点是 $R_1 < r < R_2$ 区域中一点, 则高斯面包围的电量为

$$q_i = \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3) \epsilon$$

根据高斯定理

$$E \cdot 4 \pi r^2 = \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3) \epsilon$$

由此求得球层内的场强分布

$$E = \frac{(r^3 - R_1^3) \epsilon}{3 \pi r^2}$$

写成矢量式为

$$E = \frac{(r^3 - R_1^3) \epsilon}{3 \pi r^2} \mathbf{r} \quad (1.5.7)$$

可见, 带电球层内的电场分布不同于带电球层外的电场分布. 在带电球层内, 电场强度是随着 P 点与 O 点的距离增大而增大.

若 P 点是区域 $r < R_1$ 中的一点, 则高斯面不包围电量, 即

$q_i = 0$, 则由高斯定理可得

$$E = 0 \quad (r < R_1) \quad (1.5.8)$$

这表明, 在均匀带电的球层空腔内, 没有电场. 注意, 这里根据

$q_i = 0$ 得到 $E = 0$ 的结论, 是经过了对称性分析, 确知高斯面

上场强大小处处相等, 场强方向处处与面元垂直(即 $\cos = 1$) 才能够得出的.

为了帮助读者理解均匀带电球层空腔内的场强处处为零, 我们再做一些分析. 把带电球层分成一系列不同半径的、厚度极小的同心球壳, (见图 1.5.16(a)), 所以带电球层在空腔内任一点的总场强等于这些球壳在该点的场强的矢量叠加. 因为均匀带电球壳的电场具有球对称性, 所以不同半径的带电球壳在空腔内任一点产生的场强的方向一定相同, 因而不可能叠加得零, 故空腔内任一点总场强为零表明各同心球壳分别在空腔内产生的场强均为零. 下面我们直接应用库仑定律来证明任一球壳在空腔内的场强等于零. 设半径为 R , 原为 dR 的球壳是一系列同心球壳中的任意一个, P 是空腔内任意一点. 以 P 点为顶点作两个对顶的无限小圆锥, 它们分别在半径为 R 的球壳上截出两个小体积元 dV_1 和 dV_2 , 圆锥在球壳上截出的面积元分别为 dS_1 和 dS_2 (见图 1.5.16(b)).

图 1.5.16 带电球层空腔内场强等于零的证明

每个带电体元可看成一个点电荷, 设它们与 P 点的距离分别为 r_1 和 r_2 . 根据库仑定律, 它们在 P 点产生的场强大小分别为

$$dE_1 = \frac{dq_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{\epsilon dV_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{\epsilon dR dS_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}$$

$$dE_2 = \frac{dq_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\epsilon dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{\epsilon dR dS_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}$$

dE 的方向与 dE_2 的方向相反, 根据电场强度叠加原理, 这对点电荷在 P 点的合场强大小 dE 为

$$\begin{aligned} dE &= |dE_1 - dE_2| \\ &= \frac{\epsilon dR}{4\pi\epsilon_0} \left| \frac{dS_1}{r_1^2} - \frac{dS_2}{r_2^2} \right| \end{aligned}$$

设该圆锥在以 P 点为球心、 r_1 为半径的球面上截出面元为 dS_{10} , 在半径为 r_2 的球面上截出面元为 dS_{20} , 由图 1.5.16(b) 可见,

$$dS_{10} = dS_1 \cos \theta_1$$

$$dS_{20} = dS_2 \cos \theta_2$$

由图可以看出

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \theta_1 = \theta_2$$

所以

$$\frac{dS_{10}}{dS_{20}} = \frac{dS_1}{dS_2}$$

因为 dS_{10} 和 dS_{20} 是同一顶角的圆锥在同心的两个球面上截出的面元, 所以

$$\frac{dS_{10}}{dS_{20}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

由此得

$$\frac{dS_1}{dS_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad \text{即} \quad \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2}$$

所以

$$dE = 0$$

根据叠加原理, 半径为 R 的均匀带电球壳在 P 点的总场强, 等于以 P 点为顶点的不同方位的小圆锥在球壳上截出的一对对体元在 P 点产生的场强的矢量叠加. 因为每一对体元产生的场强叠加的结果为零, 所以总场强必然为零. 这样, 我们证明了均匀带电球壳在空腔内任一点的场强为零, 既然每一球壳在空腔内的场强为零, 所以整个带电球层在空腔内的场强一定为零.

由以上计算过程可以看出, 空腔内没有电场是库仑平方反比

律的结果. 若库仑定律不是平方反比关系, 则均匀带电球层空腔内就会有电场. 因此检验空腔内是否存在电场可以精确验证库仑定律是否平方反比关系.

均匀带电球层产生的电场中, 场强大小随距离变化的曲线如图 1.5.17(a) 所示, 可见 $E-r$ 曲线是一条连续曲线, r 取任何值场强都不会突变. 当带电球层变薄(例如 R_1 增大, R_2 保持不变)而电量又保持不变时, 在 $r > R_2$ 的区域 $E-r$ 曲线不变, 但在 $R_1 < r < R_2$ 区域中 $E-r$ 曲线变陡(见图 1.5.17(b)), 当带电球层进一步变薄, 则曲线将愈来愈陡, 接近于一条与横轴垂直的直线. 当带电球层的厚度趋于零而电量依然保持不变, 即带电球层变为一个带电球面时, 在 $r > R_2$ 的区域 $E-r$ 曲线仍然不变, 而在 $r < R_2$ 区域场强处处为零, 即场强在带电球面内外有一个突然变化(见图 1.5.17(c)). 这表明, 当把电荷从体分布抽象为面分布时, 在带电面两侧电场强度发生突变. 以后我们会知道, 这一点具有普遍性, 即不

图 1.5.17 均匀带电球层的场强大小随距离变化曲线

管带电面是什么形状和大小,也不管带电面是否闭合,在带电面两侧场强都发生突变,这是面电荷分布的电场的一个共同特点.

例 2 设有一无限长均匀带电细棒,电荷线密度为 ρ_e ,求场强分布.

解 无限长均匀带电细棒的电场具有柱对称性.这个结论我们在§ 1.4 例 2 中讲过,在那里我们是根据求出的场强分布得出这个结论的.那么在场强分布尚未求出的情况下,能否分析出它的对称性呢?读者应用与例 1 类似的分析方法不难得出上面的结论,这里我们介绍另一种分析对称性的方法:

(1) 与均匀带电细棒距离相等的点,场强大小相等.

首先证明,在与细棒垂直的同一平面上,以细棒对称的两点场强相等,即证明图 1.5.18(a) 中 P, P' 两点场强相等.我们用反证法:设 $E_P > E_{P'}$,把细棒绕其自身轴线旋转 180° ;则原来面对 P 的部分转到面对 P' 点,而原来面对 P' 点的部分转到面对 P 点,根据前面所设应有 $E_P > E_{P'}$,但均匀带电细棒旋转 180° 空间电荷分布未变,所以 P, P' 两点的场强应该不变,这就发生了矛盾,矛盾的产生是因为假设了 $E_P > E_{P'}$.同理若设 $E_P < E_{P'}$,也会产生矛盾.为使细棒绕其自身旋转时空间各点场强不变必须 $E_P = E_{P'}$.用同样方法进一步可证明,这平面上与细棒等距的任意两点场强相等.现在我们证明,图 1.5.18(b) 中 P, P' 两点场强相等.同样用反证法设 $E_P > E_{P'}$,使细棒绕 P, P' 两点联线的中垂线 OO' 旋转 180° ;则细棒的上下正好颠倒,由假设应该得出 $E_P > E_{P'}$.但细棒这样旋转 180° 空间电荷分布未变,则 P, P' 两点场强应该不变,这样就产生了矛盾.同理若设 $E_P < E_{P'}$ 也会产生矛盾.可见,只有在 $E_P = E_{P'}$ 时才不会引起矛盾.这样,我们就证明了与细棒距离相等的点,场强大小相等.

(2) 场强方向垂直均匀带电细棒

同样用反证法;设 P 点场强方向为图 1.5.18(c) 中 E 方向,使

带电细棒绕 OP 线旋转 180° ; 细棒上下正好颠倒, 则根据所设 P 点的场强方向应变为图 1.5.18(c) 中 E 的方向, 但细棒这样旋转没改变空间电荷分布, 故空间各点的场强应该不变, 这样就产生了矛盾. 这就证明了 E 的方向必在垂直细棒的直线上.

图 1.5.18

至此, 我们证明了无限长均匀带电细棒的电场有以下特点: 与带电细棒距离相等的点, 场强大小相等, 场强的方向在垂直细棒的直线上, 若细棒带正电则场强方向背离细棒向外; 若细棒带负电则场强方向指向细棒. 因而, 若以带电细棒的轴线为轴作一半径为 r 的圆柱面, 则圆柱面上各点场强大小相等, 场强方向垂直圆柱面呈辐射状, 这样的电场称为具有柱对称性的电场.

根据电场的上述对称性, 我们取以带电细棒为轴、半径为 r 高为 h 的圆柱面和上下两底面构成的闭合面为高斯面(见图 1.5.18(d)). 这闭合面上的总电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{上底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{圆柱面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

在上下底面上 E 处处与底面平行(即 $\cos = 0$), 所以上下底面上的电通量均为零. 而在圆柱面上 E 的大小处处相等, E 的方向处处垂直圆柱面(即 $\cos = 1$), 于是

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{圆柱面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{圆柱面}} E dS = E \cdot 2\pi r h$$

这闭合面所包围的电量为

$$q_i = \epsilon_0 h$$

根据高斯定理

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 h$$

$$E = \frac{\epsilon}{2\pi \epsilon_0 r}$$

这正是我们在§ 1.4 例 2(b) 所得结果. 当然, 无限长的带电细棒是不存在的, 但只要场点到棒的距离远小于该点到棒的两端的距离, 我们就可以把这细棒看成是无限长的, 而用上式计算均匀带电细棒中部附近的场强.

有的读者认为, 用高斯定理求出的场强实际上只是闭合面内的电荷产生的场强. 因为他们这样想: 根据场强叠加原理, 闭合面上任一点的总场强是闭合面内电荷产生的场强 $E_{\text{内}}$ 和闭合面外电荷产生的场强 $E_{\text{外}}$ 的矢量叠加, 即

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{内}} + \mathbf{E}_{\text{外}}$$

所以闭合面上总电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{E}_{\text{内}} + \mathbf{E}_{\text{外}}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{S}$$

因为闭合面外电量对电通量无贡献, 所以

$$\oint_S \mathbf{E}_{\text{外}} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

于是

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{S}$$

由于电场的柱对称性

$$\oint_S \mathbf{E}_{\text{内}} \cdot d\mathbf{S} = E_{\text{内}} \cdot 2\pi r h.$$

根据高斯定理便得,

$$E_{\text{内}} \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{e}{\epsilon_0} h$$

$$E_{\text{内}} = \frac{e}{2 \epsilon_0 r}$$

可见 $E = E_{\text{内}}$

这似乎证明了有的读者的看法. 但问题在于, 闭合圆柱面内电荷产生的场强 $E_{\text{内}}$ 是否具有柱对称分布? 根据点电荷的场强公式和场强叠加原理不难得出, 闭合面内一段有限长均匀带电

图 1.5.19 有限长均匀带电细棒的电场没有柱对称性

细棒在柱面上各点的场强方向如图 1.5.19 所示, 而且柱面上各点场强大小也不都相等, 所以

$$\oint_{\text{上底面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0, \quad \oint_{\text{下底面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

故 $\oint_S \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{圆柱面}} \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{S} = E_{\text{内}} \oint dS = E_{\text{内}} 2\pi r h$

因此根本得不出 $E_{\text{内}} = \frac{e}{2 \epsilon_0 r}$, 只有考虑了全部电荷的贡献, 我们才得出场强的分布具有柱对称分布, 所以由高斯定理求出的场强是全部电荷产生的场强.

例 3 设有一电荷面密度为 σ 的无限大均匀带电平板, 求平板周围空间的场强分布.

解 应用例 1 或例 2 中的分析方法, 可以知道无限大均匀带电平板的电场有以下特点: 与平板距离相等的点, 场强的大小一定相等; 在平板的每一侧, 各点的场强方向相同沿着垂直平板的直线, 平板两侧的场强方向正好相反. 我们把这样的电场称为具有平面对称性的电场, 对称面就是带电面本身.

根据电场的上述对称性, 我们取闭合圆柱面为高斯面, 闭合圆

图 1.5.20 用高斯定理求无限大均匀带电平板的场强分布

柱面的两个底面 S_1 和 S_2 对称地位于带电平板两侧, 并和平板平行. 圆柱面 S_3 和带电平板垂直, 如图 1.5.20 所示. 该闭合圆柱面的总电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

在底面 S_1 和 S_2 上, 场强大小处处相等, 且 $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2 \perp \mathbf{E}$, 场强的方向处处与底面垂直(即 $\cos \theta = 1$); 而在圆柱面 S_3 上场强的方向处处与圆柱面平行(即 $\cos \theta = 0$), 所以

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{S}_2 = 2E S_1$$

式中 $S_1 = S_2$, 这闭合圆柱面包围的电量为

$$q_i = \sigma S_1$$

根据高斯定理

$$2E S_1 = \frac{S_1}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

这与我们在 § 1.4 例 4(b) 所得结果(1.4.19) 式相同. 可见, 无限大均匀带电平板两侧各点的场强大小相等与该点到平板的距离无

关. 若平板带正电, 平板两侧的场强方向垂直背离平板; 若平板带负电, 平板两侧的场强方向垂直指向平板, 平板两侧的场强方向始终相反, 即场强在带电平板两侧有一个突变.

对于有限大小的带电平板, 在场点到平板的距离远小于该点到平板边缘的距离的条件下, 可以把这有限大小平板看成“无限大”平板, 而用上面结果计算这些场点的场强.

利用以上结果和场强叠加原理不难求出, 两块平行放置的、电荷面密度

图 1.5.21 电荷面密度为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的两块无限大平板的电场

分别为 $+\sigma$ 和 $-\sigma$ 的无限大平板的场强分布如下:

在两块平板之外任意一点处的场强大小为

$$E = 0 \quad (1.5.8)$$

即两块平板外面没有电场.

两块平板之间任意一点的场强大小为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.5.9)$$

E 的方向从带正电的平板垂直指向带负电的平板, 即两块平板间是均匀电场.

从以上三个例子可见, 应用高斯定理求场强比应用库仑定律和场强叠加原理求场强要简单得多, 但后者原则上可用于求任何已知电荷分布的静电场的场强, 而前者只适用于求分布具有某几种对称性的电场的场强. 应用高斯定理求场强时, 关键的一步是根据所给电荷分布分析出电场的对称性. 我们介绍了两种分析对称性的方法, 例 1 中所用的方法是基本的, 读者应该掌握.

1.5.6 高斯定理与库仑定律的关系

由高斯定理的证明过程可见, 高斯定理可由库仑定律和场强叠加原理导出, 即在静电学内库仑定律是高斯定理的基础. 但在研究某些静电问题时, 高斯定理较之库仑定律有独到的优点. 例如, 已知电场分布根据高斯定理可以求出电荷分布; 高斯定理的数学形式便于作数学变换和推广. 这两点, 读者在今后的学习过程中将逐渐体会到.

也许有的读者会想到, 若把高斯定理作为基本, 根据高斯定理可以导出库仑定律. 必须指出, 这种想法是错误的, 仅根据高斯定理是不可能导出库仑定律的, 只有把高斯定理和下面即将讲到的静电场的环路定理结合起来才能导出库仑定律, 即在静电学内高斯定理和环路定理二条规律才和库仑定律等价.

§ 1.6 电 位

1.6.1 静电场力作功与路径无关

前面, 我们从库仑定律导出了高斯定理, 这是研究静电场性质时由库仑定律得到的第一个结果. 我们知道, 静电场还有另一性质: 电荷在电场中移动时电场力要作功. 在研究静电场力作功时, 可以发现静电场力作功与电荷移动的路径无关, 这是库仑定律得到的另一结果.

我们分两步证明静电场的上述性质: 首先证明在单个点电荷产生的静电场中, 电荷 q_0 从 a 点出发移动到 b 点, 电场力作的功与电荷 q_0 移动的路径无关. 然后再证明, 在任何电荷系产生的静电场中移动电荷时, 电场力作功同样有上述性质.

(1) 单个点电荷产生的电场

设电量为 $q(>0)$ 的点电荷固定于 O 点, 电量为 $q_0(>0)$ 的试

验电荷沿电场中的一条路径 L 从 a 点移到 b 点, a 、 b 两点与 O 点的距离分别为 r_a 、 r_b 如图 1.6.1(a) 所示, 我们计算, q_0 从 a 点移到 b 点的过程中电场力作的功.

图 1.6.1 静电场力做功的计算

设 q_0 在路径 L 上任意一点处(P 点)作一元位移 dl 到达 P' 点, P 、 P' 两点与 O 点的距离分别为 r 、 $r + dr$ ($r = r + dr$)。在这元位移过程中电场力作的元功为

$$dA = F \cdot dl = q_0 E \cdot dl$$

式中 E 是点电荷 q 在 P 点产生的场强. 电荷 q_0 沿路径 L 从 a 点移到 b 点的过程中, 电场力作的总功是各元位移过程中作的元功的代数和. 即

$$A = \int_L dA = \int_a^b q_0 E \cdot dl \quad (1.6.1)$$

这就是电场力做功的计算公式. 根据点电荷场公式, P 点的场强为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}$$

式中 \mathbf{r} 是从 O 点指向 P 点的矢径方向单位矢量. 由图 1. 6. 1(b) 可见,

$$d\mathbf{l} = dr\mathbf{r} + r d\mathbf{t}$$

这里 \mathbf{t} 是横向单位矢量, \mathbf{t} 的方向与 \mathbf{r} 方向垂直. 所以

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

于是

$$A = \int_{(L)} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r_a}^{r_b} \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

可见, 当 q_0 一定时, 电场力的功只和 q_0 始末位置有关, 与电荷 q_0 移动的路径无关.

(2) 任意带电体系产生的电场

对于任何带电体, 我们总可以把它分成许多电荷元, 而每一电荷元可看作一个点电荷. 所以, 任何带电体系都可归结为点电荷系. 设有 n 个点电荷, 它们的电量分别是 q_1, q_2, \dots, q_n . 它们同时存在时在空间任意一点处产生的场强为 \mathbf{E} , 所以在试验电荷 q_0 沿电场中一条路径 L 从 a 点移到 b 点的过程中, 电场力作的功为

$$A = \int_{(L)} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

根据场强叠加原理

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n$$

式中 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ 分别表示 q_1, q_2, \dots, q_n 单独存在时在空间同一点产生的场强, 于是

$$\begin{aligned} A &= \int_{(L)} q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{(L)} q_0 \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{(L)} q_0 \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_{(L)} q_0 \mathbf{E}_n \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$

上式右边每一项积分分别表示每个点电荷单独存在时产生的电场

对 q_0 作的功, 根据在 (1) 中所得结果, 上式右边每一项积分都与路径无关, 因而总功也就一定与路径无关.

这样, 我们就证明了, 电荷 q_0 在静电场中移动过程中, 电场力作的功与电荷移动的路径无关, 只和电荷 q_0 及其始末位置有关. 这是静电场的一个重要性质, 也是静电场区别于其它电场的一个主要标志.

静电场力作功与路径无关, 有另外一种等价的表述. 设 q_0 在静电场中沿任意一条闭合曲线 L 移动一周, 则电场力在这过程中作的总功为

$$A = \oint_L q_0 E \cdot dl$$

\oint_L 表示沿一条闭合曲线积分. 今在 L 上任取两点 a 和 b , 把 L 分成 L_1 和 L_2 两段, 如图 1.6.2 所示, 于是

$$A = \oint_L q_0 E \cdot dl = \int_{(L_1)}^b q_0 E \cdot dl + \int_{(L_2)}^a q_0 E \cdot dl$$

图 1.6.2 静电场的环路定理

$$= \int_a^b (L_1) q_0 E \cdot dl - \int_a^b (L_2) q_0 E \cdot dl$$

上式右面第一项积分表示 q_0 沿 L_1 从 a 点移到 b 点过程中静电场力作的功, 第二项积分表示 q_0 沿 L_2 从 a 点移到 b 点过程中静电场力作的功. 根据静电场力作功与路径无关这一特性可知

$$\int_a^b (L_1) q_0 E \cdot dl = \int_a^b (L_2) q_0 E \cdot dl$$

于是

$$A = \int_L q_0 E \cdot dl = 0$$

因为 $q_0 \neq 0$, 所以

$$\int_L E \cdot dl = 0 \quad (1.6.2)$$

这表明, 电场强度沿任意一条闭合曲线的线积分恒等于零, 这就是静电场力作功与路径无关这一特性的另外一种表述. 电场强度沿一闭合曲线的线积分 $\int_L E \cdot dl$ 叫做电场强度的环流, 所以(1.6.2)式表明, 静电场场强的环流恒等于零. 我们把(1.6.2)式叫做静电场的环路定理, 它是静电场的基本定理之一.

根据静电场的环路定理, 可以证明静电场中的电力线不可能是闭合曲线. 因为, 如果某一条电力线是闭合曲线, 那么沿这一条电力线作场强的线积分, 在电力线上各点 E 的方向和 dl 的方向相同, 所以处处 $E \cdot dl > 0$, $\int_L E \cdot dl$ 就不可能等于零, 这与静电场的环路定理矛盾. 所以, 静电场中的电力线不可能是闭合曲线.

1.6.2 电位(电势)

我们在力学中讲过, 做功与路径无关的力场称为保守力场, 在保守力场中可以引入位能概念. 因为静电场力作功与路径无关, 所以静电场也是保守力场, 也可以引入静电位能概念.

设想把电量为 q_0 的试验电荷从电场中 a 点移到 b 点, 我们把这过程中电场力作的功定义为 q_0 在 a 、 b 两点的静电位能之差, 若以 $W_a - W_b$ 表示 q_0 在 a 、 b 两点的静电位能之差, 则

$$W_a - W_b = \int_a^b q_0 E \cdot dl \quad (1.6.3)$$

这表明, 静电场力的功是静电位能变化的量度. (1.6.3) 式给出了 q_0 在 a 、 b 两点的静电位能之差, 若要问电荷 q_0 在电场中任一给定点的静电位能是多大, 则需选定参考点(或标准点). 令 q_0 在参考点的静电位能为零, 用(1.6.3)式计算 q_0 在其它各点与参考点的静电位能差, 就可得出 q_0 在其它各点的静电位能值. 至于选什么点作为参考点, 完全是任意的, 视分析问题方便而定. 理论上, 在计算 q_0 在点电荷或有限大小的带电体的电场中的静电位能时, 通常取无穷远处为参考点. 而在研究电路问题以及在实用上, 常取大地或仪器的外壳, 以及公共接线为参考点. 若取 P_0 点为参考点, 则由(1.6.3)可得; q_0 在电场中任一给定点(a 点)的静电位能为

$$W_a = \int_a^{P_0} q_0 E \cdot dl \quad (1.6.4)$$

即 q_0 在电场中任一点的静电位能数值上等于把 q_0 从该点移到参考点过程中静电场力作的功. 显然, 对于一定的静电场, 如果参考点选的不同, 则 q_0 在电场中的一点的静电位能不同, 即静电位能是一个有赖于参考点选择的物理量.

有的读者也许会问:“力学中一再强调位能是属于一个系统的, 为什么在这儿只提 q_0 不说系统? 再者, 在力学中是用一对保守力的功来定义位能的变化, 为什么这儿只用于 q_0 上的电场力的功定义位能变化?”对此, 我们作一点说明. 说 q_0 在场中某点的静电位能只是为了说话简单, 决不意味静电位能只属于 q_0 所有, 应该把这句话理解为 q_0 在电场中某点时, q_0 与静电场这一系统具有的静电位能, 或者 q_0 与产生电场的那些电荷组成的系统所具有的相互作用能. 至于为什么不用一对保守力的功定义静电位能的改变, 这是因为, 在 q_0 从电场中 a 点移到 b 点的过程中, 产生电场的那些电荷是固定不动的, 所以, q_0 对这些电荷有静电作用力但这些力不作功. 所以作用于 q_0 上的电场力的功实际上等于一对对保守力的功的代数和.

由(1.6.4)式可看出, q_0 在电场中 a 点的静电位能的大小不仅和场强分布和 a 点的位置有关, 而且还和自身的电量大小成正比.

因此, 电位能并不直接描述该点电场的性质. 但比值 $\frac{W_a}{q_0}$ 却与 q_0 无

关, 只与电场性质和 a 点位置有关, 这表明 $\frac{W_a}{q_0}$ 是描写电场中 a 点电场性质的物理量, 我们把它叫做 a 点的电位 (电势), 若取无穷远处为参考点, 以 U_a 表示 a 点电位, 则

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.6.5)$$

(1.6.5) 式表明, 电场中任意一点的电位, 数值上等于把单位正电荷从该点移到无穷远处电场力作的功, 或者, 等于单位正电荷在该点的静电位能. 电位是从能量角度描写电场性质的一个物理量, 它是标量, 可正可负. 一般来说, 电场中不同地点的电位不相等, 即电位是位置坐标的标量函数.

因为电位能的大小与参考点的选择有关, 所以电场中一点的电位也是和参考点选择有关的物理量. (1.6.5) 式定义的电位是取无穷远处为参考点, 如果取电场中 P_0 点为参考点, 则空间任一点 (a 点) 的电位将为

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.6.6)$$

在 SI 中电位的单位是伏特(V), 它是这样定义的: 若电量为 1C 的正电荷位于电场中某点, 它的静电位能恰为 1J, 则该点的电位大小就定义为 1V, 即

$$1V = \frac{1J}{1C}$$

电工学中常把电动势这个概念简称为“电位”, 这与物理学中的电位概念完全不同. 因此读者在参考有关书籍时应搞清楚所提到的电位究竟是物理学中的电位还是物理学中的电动势. 关于电动势概念我们将在第三章中介绍.

在 SI 中, 电位的量纲为

$$[U] = \frac{[W]}{[q]} = L^2 M T^{-2} I^{-1}$$

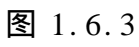
1. 6. 3 点电荷的电位公式 电位叠加原理

1. 点电荷的电位公式

设电量为 q 的点电荷位于空间 o 点, a 点是电场中任意一点, 它与 o 点的距离为 r_a . 根据 (1. 6. 5) 式, a 点的电位为

$$U_a = \int_a E \cdot dr$$

因为电场力作功与路径无关, 我们可取最方便的路径

来作上面的积分, 为此, 取从  图 1. 6. 3 求点电荷电场中的电位分布
 o 点指向 a 点的矢径方向的直线作为计算路径, 则

$$U_a = \int_a E \cdot dr = \int_a \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_a}$$

由于 a 点是电场中任意一点, 所以 r_a 的下标可略去. 这样, 我们就得到了点电荷的电场中, 电位的分布为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1. 6. 7)$$

我们把 (1. 6. 7) 式称为点电荷的电位公式. 由上式可见, 点电荷的电场中的电位分布有以下特点: 场中任意一点的电位和点电荷的电量成正比, 和点电荷到该点的距离成反比; 若点电荷带正电即 $q > 0$, 则 $U > 0$, 离点电荷愈近的点, 电位愈高, 无穷远处电位最低. 反之, 若点电荷带负电即 $q < 0$, 则 $U < 0$, 离点电荷愈近的点, 电位愈低, 无穷远处电位最高.

2. 电位叠加原理

现在我们计算点电荷系产生的电位分布, 设有 n 个点电荷, 电

量分别为 $q_1、q_2、\dots、q_n$ ，分别固定于空间 n 个不同地点， a 点是空间任意一点，它与 n 个点电荷的距离分别为 $r_1、r_2、\dots、r_n$ 。根据(1. 6. 5)式， a 点的电位为

$$U = \int_a E \cdot dl$$

根据场强叠加原理，图 1. 6. 4 电位叠加

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

于是

$$U = \int_a E \cdot dl = \int_a E_1 \cdot dl + \int_a E_2 \cdot dl + \dots + \int_a E_n \cdot dl$$

上式右边每一项积分，正是每个点电荷单独存在时在 a 点产生的电位，我们用 $U_1、U_2、\dots、U_n$ 表示，则

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n \tag{1. 6. 8}$$

(1. 6. 8)式表明， n 个点电荷同时存在时，空间任意一点的电位等于每个点电荷单独存在时在该点产生的电位的代数和，这就是电位叠加原理。电位叠加原理是电位定义和场强叠加原理的必然结果，与场强叠加不同，电位叠加是标量相加。根据(1. 6. 7)式， $U_1、U_2、\dots、U_n$ 分别等于

$$U_1 = \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1}$$

$$U_2 = \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_2}$$

...

$$U_n = \frac{q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_n}$$

于是(1. 6. 8)式可写为

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (1.6.9)$$

因为任何带电体系都可看成点电荷系,所以,当电荷分布已知时,原则上可以根据点电荷的电位公式和电位叠加原理,求得这带电体系产生的电位分布.

这样,我们有两条途径计算电位:一条是直接根据电位定义来计算,另一条则是根据点电荷的电位公式和电位叠加原理来计算.对于场强分布已知,或者场强分布能用高斯定理求出的那些电场,一般可根据电位定义直接计算电位.对于场强分布未知,而又不能应用高斯定理计算场强分布的那些电场,一般可根据点电荷的电位公式和电位叠加原理去计算电场中任意一点的电位.下面,我们举三个计算电位的例子.

例 1 设有一半径为 R 的均匀带电球面(见图 1.6.5),球面上所带电量为 q ,求其电场中的电位分布.

解 因为电荷分布具有球对称性,所以其电场也应具有球对称性.取高斯面为同心球面,应用高斯定理可求出场强分布如下:

$$E = 0 \quad (r < R)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

根据(1.6.5)式,在均匀带电球面外区域中任意一点的电位为

图 1.6.5 均匀带电球面的电位分布

$$U = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} dr' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r > R)$$

这表明, 均匀带电球面在球面外任意一点产生的电位和电量集中在球心的点电荷在该点产生的电位相同.

现在我们计算带电球面内任意一点的电位. 根据(1.6.5)式, 带电球面内任意一点的电位为

$$U = \int_r E \cdot dl + \int_R E \cdot dl$$

在 $r < R$ 的区域, $E = 0$, 所以 $\int_r^R E \cdot dl = 0$ 在 $r > R$ 的区域, $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$,

$$\int_R E \cdot dl = \int_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

球面内任意一点的电位为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad r < R$$

这表明, 在球面内电位处处相等. 于是均匀带电球面的电场中的电位分布为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad r < R$$

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r > R$$

显然, 当 $r = R$ 时, $U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$, 这表明电位在带电球面处是连续变化的.

均匀带电球面电场中的 $U-r$ 曲线如图 1.6.5 所示, 它是一条连续曲线.

例 2 计算电偶极子电场中的电位分布(只考虑 $r \gg l$ 的区域)

解 根据点电荷的电位公式和电位叠加原理, a 点的电位为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

因为 $r \gg l$, 所以 $r_- \approx r_+ \approx l \cos \theta$, $r_+ r_- \approx r^2$, 于是 a 点的电位可表示为

$$U = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.6.10)$$

式中 $p_e = ql$ 是电偶极子的电偶极矩。(1.6.10) 式是用极坐标表示的电偶极子电场中的电位分布。

如果取一直角坐标系, 把坐标原点设在电偶极子中心, 并使 x 轴正向与电偶极矩 p_e 的方向一致, 则由图 1.6.6 可见, $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$. 于是, 用直角坐标表示电偶极子电场中的电位分布, 为

$$U = \frac{p_e \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p_e x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.6.11)$$

由(1.6.11)式可以看出, 在 $x > 0$ 一侧, 空间任一点的电位都大于

图 1.6.6 计算电偶极子电场中的电位分布

零, 这表明, 这一区域中各点的电位都比无穷远处的电位高; 在 $x < 0$ 一侧, 各点的电位都小于零, 这表明, 这一区域中各点的电位都比无穷远处的电位低. 而在 $x = 0$ 处, 亦即 yz 平面上各点, 电位处处等于零, 这表明, 电偶极子中垂面上各点的电位与无穷远处电位相等.

例 3 设有一半径为 R 的均匀带电圆环, 环上所带总电量为 q , 求圆环轴线上的电位分布.

解 取圆环轴线为 x 轴, 坐标原点设在环心. 设 a 点是轴线上任意一点, 它与 o 点相距为 x . 把带电圆环分成无限多段长度相等的线元, 每个带电线元可看作一个点电荷, dl 是其中任意一线元, 其上分布的电量为 dq

图 1.6.7 计算圆环轴线上的电位分布

$= \frac{q}{2\pi R} dl$, 它与 a 点相距为 r . 根据 (1.6.7) 式, dq 在 a 点产生的电位为

$$dU = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\frac{q}{2\pi R} dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

根据电位叠加原理, a 点的总电位为

$$U = \int_L dU = \int_L \frac{\frac{q}{2\pi R} dl}{4\pi\epsilon_0 r}$$

因为圆环上各线元到 a 点的距离相等, 所以 r 可从积分号内提出, 则上式积分为

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\frac{q}{2R}}{4\pi\epsilon_0} \int_L dl = \frac{\frac{q}{2R} \int_L dl}{4\pi\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)} \quad (1.6.12)
 \end{aligned}$$

这就是均匀带电圆环轴线上的电位分布。

1.6.4 电位差(电势差)

电场中任意两点的电位之差,叫做这两点的电位差,通常又叫电压.根据电位定义不难写出电场中任意两点电位差的计算公式.设 P_0 点为参考点, a 、 b 两点为电场中任意两点,它们的电位分别为 U_a 和 U_b , 因此, a 、 b 两点的电位差为

$$\begin{aligned}
 U_a - U_b &= \int_a^{P_0} E \cdot dl - \int_b^{P_0} E \cdot dl \\
 &= \int_a^b E \cdot dl + \int_b^{P_0} E \cdot dl - \int_b^{P_0} E \cdot dl \\
 &= \int_a^b E \cdot dl \quad (1.6.13)
 \end{aligned}$$

(1.6.13) 式表明, 电场中 a 、 b 两点的电位差, 数值上等于把单位正电荷从 a 点移到 b 点过程中静电场力作的功。

由(1.6.13)式可见, 场中任意两点的电位差只和这两点的位置有关, 和参考点无关, 即对于电场中任意给定的两点, 它们之间的电位差是定值, 与参考点的选择无关。

计算两点的电位差有两种方法: 一种方法是根据(1.6.13)式直接计算, 它不必求出每一点的电位. 这种方法一般适用于场强分布已知或者场强分布能用高斯定理计算的那些电场. 另一种方法是先分别算出每一点的电位, 然后计算它们之差. 这种方法一般适用于场强分布未知, 而场强分布又不能应用高斯定理计算的那些电场。

根据电位差的意义, 我们可以得出, 电量为 q_0 的电荷从电场中 a 点移到 b 点过程中静电场力作的功为

$$A_{ab} = q_0 (U_a - U_b) \quad (1.6.14)$$

(1.6.14) 式表明, 电场力的功的大小和正负, 由 q_0 在电场中始末位置的电位差以及 q_0 的大小和正负所决定. 在许多实际问题中, 电场中两个给定点的电位差往往是已知的, 或者是可以用仪表直接测出, 所以用 (1.6.14) 式计算电场力作的功非常简单. 不过读者在用此式计算功时应注意两点: (1) 电位相减的次序和电荷 q_0 的始末位置对应, 即 q_0 从 a 移到 b 则电位差为 $U_a - U_b$; 反之, q_0 从 b 移到 a , 则电位差应为 $U_b - U_a$. (2) 正电荷的电量用正值代入, 负电荷的电量用负值代入.

下面, 我们举三个有关电位差和电场力作功的例子.

例 1 设有两块平行放置的无限大均匀带电平板, 电荷面密度分别为 $+$ 和 $-$, 两块平板相距为 d , (1) 计算这两块平板之间的电位差. (2) 今把电量为 $-q_0$ 的电荷从带负电的平板移到带正电的平板, 求这过程中电场力作的功.

解 根据 (1.5.9) 式, 两块无限大带电平板之间的场强分布为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

E 的方向由带正电平板垂直指向带负电平板.

(1) 取一条电力线作为积分路径, 则带正电平板与带负电平板之间的电位差为

图 1.6.8 计算两块无限大平板之间的电位差

$$U_+ - U_- = \int_+^- E \cdot dl = \int_+^- E dl = E d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad (1.6.15)$$

可见, 带正电的平板的电位比带负电的平板的电位高. 在一定时, $U_+ - U_-$ 和两块平板之间的距离 d 成正比. 而在 d 一定时, $U_+ - U_-$ 和 q_0 成正比.

(2) 根据(1. 6. 14)式可得, 这过程中电场力作的功为

$$A = (-q_0)(U_- - U_+) = q_0(U_+ - U_-) = q_0 \frac{U_+ - U_-}{d}$$

可见, 在这过程中电场力作正功, 这表明, 负电荷位于带负电平板处的静电位能, 比它位于带正电平板处的静电位能大.

例 2 设有两个均匀带电的同心球面, 半径分别为 R_1 和 R_2 . 已知内球面的电位比外球面的电位高 V 伏. (1) 求内球面所带电量; (2) 假定有一电量为 $e (> 0)$ 、质量为 m 的粒子从内球面逸出, 忽略粒子所受重力, 求这时粒子的加速度.

解 (1) 设内外球面分别带有电量 q_1 和 q_2 . 因为 q_1 和 q_2 的分布具有球对称性, 所以它们的电场也应具有球对称性. 取半径为 r 的同心球面(见图 1. 6. 9 中虚线)为高斯面, 根据高斯定理可求得, 两个同心带电球面间的场强分布为

图 1. 6. 9 已知内外球面的电位差
计算内球面所带电量

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

E 的方向沿矢径 r 的方向. 根据(1. 6. 13)式可得, 内外球面间的电位差为

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

由此解得

$$q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} V$$

于是, 内外球面间的场强分布为

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{R_1 R_2 V}{(R_2 - R_1) r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

本例表明, 已知电位差要求电量或场强时, 解题的思路如下所示:

$$\text{设 } q \text{ — } E \text{ — } U_1 - U_2 \text{ — } q$$

(2) 设 E_1 是无限接近内球面处的场强, 则带电粒子逸出内球面后所受的电场力为

$$f = eE_1$$

而由(1)的结果知

$$E_1 = \frac{R_1 R_2 V}{(R_2 - R_1) R_1^2}$$

根据牛顿第二定律可得带电粒子的加速度为

$$a = \frac{f}{m} = \frac{eE_1}{m} = \frac{eR_1 R_2 V}{m(R_2 - R_1) R_1^2}$$

a 的方向与 E 的方向相同, 即沿该点矢径 r 的方向.

例 3 图 1.6.10 是一示波管的“电子枪”的示意图, 图中 K 为阴极、 G 为控制栅极、 F 为聚焦电极、 A 为加速阳极. 它们的电位分别用 U_K 、 U_G 、 U_F 、 U_A 表示, 由图可见 $U_A > U_F > U_G > U_K$. 在这四个电极的电场作用下, 阴极发射的电子流被聚焦成一细束, 并以极快的速率从阳极小孔射出. 设电子离开阴极时的速率为零, A 、 K 两极的电位差为 V , 电子的电量为 $-e$, 电子质量为 m_0 , 求电子从“电子枪”射出时的速率 v .

解 在电子从阴极飞到阳极过程中, 电场力作的功为

$$A_{KA} = (-e)(U_K - U_A) = e(U_A - U_K) = eV$$

根据动能定理

$$A_{KA} = E_K - E_{K0}$$

因为电子离开阴极时速率为零, 故初动能 $E_{K0} = 0$, 于是

$$A_{KA} = E_K = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

图 1.6.10 一示波管“电子枪”

$$v = \frac{\sqrt{2A_{KA}}}{m_0} = \frac{\sqrt{2eV}}{m_0} \quad (1.6.16)$$

上式表明, 电子从电子枪射出时的速率取决于阳极与阴极之间的电压 V , 电压 V 大, 则电子速率亦大. 但当电压 V 很大时, (1.6.16) 式不再成立. 因为, 这时电子的速率接近真空中光速, 必须考虑质量随速率变化, 因而电子的动能应该用相对论的公式, 即

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

于是

$$eV = m_0 c^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

由此解得电子的速率为

$$v = c \frac{\sqrt{(eV + 2m_0 c^2) eV}}{eV + m_0 c^2} \quad (1.6.17)$$

显然, 若 $m_0 c^2 m \text{ eV}$, 即 $V_n \frac{m_0 c^2}{e} = 5.12 \times 10^5 \text{ V}$ 时则 (1. 6. 17) 式便退化为 (1. 6. 16) 式. 通常情形 $V \sim 10^3 V_n 5.12 \times 10^5 \text{ V}$, 所以可用 (1. 6. 16) 式计算电子从电子枪射出的速率.

本例表明, 虽然“电子枪”内的场强和电位的分布非常复杂, 但是只要知道了始末位置的电位差, 就可利用 (1. 6. 14) 式求出电子的动能和速率, 既不要考虑电场中场强和电位的分布, 也不要考虑电子运动的轨道, 这是用能量方法处理问题的一个突出优点.

电子伏特

我们知道, 电子的电量 $q_0 = -e = -1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$, 因而, 在它通过电位升高 1 V 的区间的过程中, 电场力作的功为

$$A = -1.60 \times 10^{-19} \times (-1) = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

这表明, 电子在通过这个区间后, 它的动能增加 $1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$. 近代物理学中为了方便, 就把这样大小的能量叫做 1 电子伏特, 用符号 eV 表示, 即

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

必须注意, 电子伏特不是电压单位而是能量单位. 在近代物理学中, 微观粒子的能量一般较大, 所以还常用千电子伏 (KeV)、兆电子伏 (MeV)、吉电子伏 (GeV) 等作为微观粒子的能量单位, 它们与电子伏特的关系为

$$1 \text{ KeV} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

$$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

§ 1. 7 等位面 电位与场强的微分关系

1. 7. 1 等位面

我们知道, 在静电场中, 电位是位置坐标的函数, 一般地说在

电场中总是存在一些电位相等的点. 例如, 点电荷的电场中的电位分布为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

若以点电荷所在位置为中心, 作一半径为 r 的球面, 则球面上各点的电位相等.

由电位相等的点组成的曲面或平面叫做等位面(等势面). 与电场中画电力线的目的相同, 我们可以在电场中画一系列等位面来形象地表示电位分布. 例如在点电荷电场中画一系列以点电荷所在位置为球心的不同半径的球面, 这些球面分别是点电荷电场中不同电位值的等位面. 因为点电荷电场中的电力线是以点电荷为中心的辐射状的直线, 所以点电

图 1.7.1 点电荷电场中的等位面和电力线

荷电场中的等位面与电力线互相垂直如图 1.7.1 所示, 图中虚线表示等位面. 图 1.7.2 给出另外两个常见静电场中的等位面和电力线图, 其中虚线表示等位面, 实线表示电力线.

现在我们来证明, 在任何电荷分布产生的静电场中等位面总是和电力线垂直的, 这是等位面的一个基本性质. 如图 1.7.3 所示, S 是静电场中的一个等位面, a 和 b 是这等位面上任意的相邻两点, 今把试验电荷 q_0 沿着等位面上的一条路径从 a 点移到 b 点, 在这过程中电场力作功为

$$A_{ab} = q_0(U_a - U_b) = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_0 E \cos \theta \int_a^b dl$$

图 1.7.2 常见的两个静电场的等位面与电力线

因为 a 、 b 是同一等位面上的两点, 所以 $U_a = U_b$, 于是由上式得出,

$$q_0 E \cos \theta = 0$$

因为 q_0 、 E 、 θ 均不为零, 所以必为

$\cos \theta = 0$, 即 $\theta = \frac{\pi}{2}$. 由于 a 、 b 是等位面

上的任意两点, 所以这一结论在等位面上都对, 即电场强度或电力线必须

图 1.7.3

处处和等位面垂直. 根据这个性质如果已经画出电场中的等位面图就可画出电力线图. 反之, 如果已经绘出电场中的电力线图则可画出等位面图. 许多实用上的电场是由形状比较复杂的带电体产生的, 以致难于用理论求出电场分布的情况, 对于这些电场的分布往往是借助实验的方法测得的. 由于等位面图用实验方法容易测绘, 所以对这些电场都是先用实验方法测绘出等位面图, 然后根据电力线垂直等位面的性质画出电力线图.

1.7.2 电位与电场强度的微分关系

电位和电场强度是从两个不同角度描述静电场性质的两个物

理量, 电场强度是从力的角度描述电场, 而电位则是从能量方面来描述静电场. 两者之间有密切关系, (1. 6. 6) 式反映了两者之间的积分关系. 它表明, 电场中任意一点的电位是由整个电场中的场强分布决定的. 若场强分布已知, 则由(1. 6. 6)式可求出电位的分布. 本节我们将研究一个相反的问题: 若已知电位分布, 能否求出电场强度的分布?

设电场中电位分布已知, 即电场中等位面图已经画出, 我们在电场中任取相邻的两个等位面, 它们的电位分别为 U 和 $U + \Delta U$,

a 点是电位为 U 的等位面上任意的一点, 如图 1. 7. 4 所示. 图中 \mathbf{n} 是 a 点处等位面法线方向的单位矢量, 它与电位为 $U + \Delta U$ 的等位面交于 b 点, Δr 是 a 、 b 两点之间的距离. 今把电量为 q_0 的试验电荷沿着法线方向从 a 点移到 b 点, 在这过程中电场力做功为

图 1. 7. 4 电位和场强的微分关系

$$A = q_0 [U - (U + \Delta U)] = -q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\begin{aligned} \Delta r \text{ 很小, } \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &\approx E_n \Delta r, \text{ 则由上式可得} \\ -q_0 \Delta U &= -q_0 E_n \Delta r \\ E_n &= -\frac{\Delta U}{\Delta r} \end{aligned}$$

当 $\Delta r \rightarrow 0$ 时, 上式变为精确相等, 即

$$E_n = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} -\frac{\Delta U}{\Delta r} = -\frac{dU}{dr}$$

式中 E_n 是电场强度在等位面法线方向的投影值, 因为电力线与等位面垂直, 所以 \mathbf{E} 的方向或者与 \mathbf{n} 的方向一致, 或者与 \mathbf{n} 的方向

相反, 而 E_n 的绝对值等于 E 的大小. 所以上式两边乘以法线方向单位矢量 n , 即可把上式写成矢量形式

$$E = - \frac{U}{n} n \quad (1.7.1)$$

这就是电位与电场强度之间的微分关系. 式中 $\frac{U}{n}$ 是电位沿等位面法线方向的变化率或者称为电位沿等位面法线方向的方向导数. 由(1.7.1)式可知电场强度的单位也可写成 $V \cdot m^{-1}$.

现在我们根据(1.7.1)来分析一下电场强度的方向是指向电位升高的方向还是降低的方向. 设 $\frac{U}{n} > 0$, 即沿等位面法线方向电位升高, 则由(1.7.1)式可知 E 与 n 方向相反, 即电场强度指向电位降低的方向; 若 $\frac{U}{n} < 0$, 即电位沿等位面法线方向降低, 则由(1.7.1)式可知 E 与 n 方向一致, 但电场强度仍指向电位降低的方向. 所以(1.7.1)式表明, 电场中一点的场强方向和通过该点的等位面垂直, 并指向电位降低的方向, 而场强的大小则等于该点处电位沿等位面法线方向变化率的绝对值.

若电场中的电位分布已知, 则根据(1.7.1)式便可求出电场强度的分布. 我们知道, 标量的计算往往比矢量计算要简单. 所以, 在已知电荷分布的条件下, 一般可先求出电位分布, 然后根据(1.7.1)式求出电场强度的分布.

为了使等位面图能反映电场中各点电场强度大小的分布, 我们在画等位面时补充一条规定, 电场中任意相邻的两个等位面之间有相等的电位差. 有了这条规定, 我们根据(1.7.1)式可知, 等位面密集处电场强度较大, 等位面稀疏处电场强度较小.

为了描写标量函数沿什么方向变化最快, 我们引入标量函数梯度这个概念. 标量函数的梯度被定义为一个矢量, 它的方向是该标量变化最快的方向, 梯度的大小是标量函数沿变化最快方向的

变化率. 可以证明, (1. 7. 1) 式右边矢量 $-\frac{U}{n}n$ 正是符合上述定义的一个矢量, 所以又称为电位梯度. 我们用符号 $\text{grad } U$ 表示电位梯度, 即

$$\text{grad } U = -\frac{U}{n}n \quad (1. 7. 2)$$

现在我们来证明: $-\frac{U}{n}$ 是电位变化最快方向上的变化率, $-\frac{U}{n}n$ 总是指向电位增加的方向.

设 S_1, S_2 是电场中任意两个相邻的等位面, 它们的电位分别为 U 和 $U + \Delta U$ (见图 1. 7. 5), a 点是 S_1 上任意一点, 过 a 点任意作一直线 l , 它与 S_2 交于 c 点, 设 $\overline{ac} = \Delta l$. S_1 面 a 点处的法线方向为图中 n 的方向, 法线与 S_2 交于 b 点, $\overline{ab} = \Delta n$. 由图可以看出 $\Delta n = \Delta l \cos \theta$, 则电位沿 l 方向的变化率为

图 1. 7. 5 计算电位沿任意方向的变化率

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \frac{dU}{dl}$$

因为 $\Delta n = \Delta l \cos \theta$, 而且在 $\Delta l \rightarrow 0$ 时, θ 是不变的, 所以电位沿 l 方向的变化率可写为

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dl} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta l} = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\frac{\Delta n}{\cos \theta}} \\ &= \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} \cos \theta = -\frac{U}{n} \cos \theta \end{aligned} \quad (1. 7. 3)$$

因为 $\cos \theta \leq 1$, 所以上式表明, 在电场中任意一点, 电位沿任何其它方向的变化率 $\frac{dU}{dl}$ 均小于沿等位面法线方向的变化率 $-\frac{U}{n}$, 也就是

说, 等位面的法线方向是电位变化最快的方向. 而(1. 7. 3) 式表明 $-\frac{U}{l}$ 正是电位梯度 $-\frac{U}{n}$ 在 l 方向的分量.

现在我们来分析一下 $-\frac{U}{n}$ 的指向. 设电位沿 n 方向增大, 即 $\frac{U}{n} > 0$, 则 $-\frac{U}{n}$ 的方向与 n 的方向一致, 这就是说 $-\frac{U}{n}$ 指向电位增大的方向. 若电位沿 n 方向降低, 即 $\frac{U}{n} < 0$, 则 $-\frac{U}{n}$ 的方向与 n 的方向相反, $-\frac{U}{n}$ 仍指向电位增大的方向. 可见, 不论电位沿 n 的方向是增加还是降低, 电位梯度 $-\frac{U}{n}$ 的方向总是指向电位增加的方向.

若把直角坐标系的 x 、 y 、 z 三个轴的方向分别取为 l 方向, 则根据(1. 7. 3) 式可得

$$\frac{U}{x} = \frac{U}{n} \cos \alpha, \quad \frac{U}{y} = \frac{U}{n} \cos \beta, \quad \frac{U}{z} = \frac{U}{n} \cos \gamma$$

式中 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 是法线方向单位矢量 n 的三个方向余弦.

$$\begin{aligned} x \frac{U}{x} + y \frac{U}{y} + z \frac{U}{z} &= \frac{U}{n} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \\ &= \frac{U}{n} n = \text{grad } U \end{aligned} \quad (1. 7. 4)$$

由此可见, 电位梯度在直角坐标系的三个分量分别为

$$\begin{aligned} (\text{grad } U)_x &= \frac{U}{x} \\ (\text{grad } U)_y &= \frac{U}{y} \\ (\text{grad } U)_z &= \frac{U}{z} \end{aligned} \quad (1. 7. 5)$$

把(1. 7. 1) 式和(1. 7. 2) 式加以比较, 可得出场强与电位梯度的关系为

$$E = - \operatorname{grad} U \quad (1.7.6)$$

这是电位与场强之间的微分关系的另一种表达形式, 它表明, 电场中一点的场强, 等于该点的电位梯度的负值. 根据(1.7.5)式可写出两者在直角坐标系分量间的关系为,

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{U}{x} \\ E_y &= - \frac{U}{y} \\ E_z &= - \frac{U}{z} \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

下面, 我们举两个由电位梯度计算场强的例子.

例 1 证明: 电偶极子电场中任意一点的场强为

$$E = \frac{3(\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} - \frac{\mathbf{p}_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

式中 $p_e = ql$ 电偶极子的电偶极矩, r 是从电偶极子中心指向任意场点 a 的矢径.

解 根据(1.6.11)式, 电偶极子电场中的电位分布为

$$U = \frac{p_e x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

于是根据(1.7.7)式, 可分别求得任意一点场强的三个坐标分量分别为

图 1.7.6 计算电偶极子电场中任意一点的场强

$$\begin{aligned} E_x &= - \frac{U}{x} \\ &= \frac{3p_e x^2}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$E_y = - \frac{U}{y} = \frac{3p_{ex}y}{4\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$E_z = - \frac{U}{z} = \frac{3p_{ex}z}{4\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

根据 $E = E_x x + E_y y + E_z z$ 可得

$$E = \frac{3p_{ex}}{4\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}(xx + yy + zz) - \frac{p_{ex}}{4\epsilon_0(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

由图 1.7.6 可看出

$$p_e = p_{ex}, r = xx + yy + zz, p_e \cdot r = p_{ex}$$

把这些关系代入上式, 使得

$$E = \frac{3(p_e \cdot r)r}{4\epsilon_0 r^5} - \frac{p_e}{4\epsilon_0 r^3}$$

这就是电偶极子电场中的场强分布。下面我们讨论两个特殊情况:

(1) 若场点是电偶极子轴线上一点, 则 $p_e \cdot r = p_e r$ 于是由上式可得

$$E = \frac{2p_e}{4\epsilon_0 r^3}$$

(2) 若场点是中垂面(yz 平面)上一点, 则 $p_e \cdot r = 0$, 于是由前式可得

$$E = - \frac{p_e}{4\epsilon_0 r^3}$$

这两个结果与我们在 § 1.4 例 1 所得结果(1.4.12)和(1.4.14)两式完全相同.

例 2 设有一半径为 R 的均匀带电圆环, 环上所带总电量为 q , 求圆环轴线上任意一点的场强.

解 利用 § 1.6 例 3 所得结果(1.6.12)式, 圆环轴线上的电位分布为

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

于是根据(1.7.7)式,可求得

$$E_x = -\frac{U}{x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

由电荷分布的对称性可以看出

$$E_y = 0, \quad E_z = 0,$$

所以

图 1.7.7 计算均匀带电圆环轴线上任一点场强

$$E = E_x \hat{x} = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

这与我们在§ 1.4 例 3 中所得结果完全相同.

至此,我们介绍了求场强的三种方法:

(1) 应用点电荷场强公式(即库仑定律)和场强叠加原理求场强.

(2) 应用高斯定理和场强叠加原理求场强.

(3) 应用场强与电位梯度的关系求场强.

原则上讲,(1)(3)两种方法可用于求电荷分布已知的一切静电场中的场强.而(2)只适用于求具有某些对称性分布的静电场中的场强.但在(2)能用的场合,它要比(1)(3)两法简单.至于在(2)不能用的情形下是选用(1)还是(3)来求场强比较简单,要视具体问题而定.

§ 1.8 带电体系的静电势能

1.8.1 固有能 相互作用能

因为电荷之间有静电相互作用力,所以在形成带电体的过程中,必有外力反抗静电力做功.根据能量守恒定律,外力所作的功

应等于带电体静电位能的增量, 即

$$A = W_e - W_{e0} \quad (1.8.1)$$

式中 A 是带电体形成过程中外力作的功, W_e 是带电体形成后的静电位能, W_{e0} 是带电体形成前的静电位能.

根据(1.8.1)式可以确定带电体静电位能的增量, 但还不能知道带电体的静电位能, 要知道带电体的静电位能, 还得先规定静电位能等于零的状态. 可以设想带电体是由无限多电荷元组成的, 这些电荷元最初分散在各处, 彼此相距“无限远”, 后来在外力作用下它们被聚集起来形成带电体, 我们把电荷元彼此相距“无限远”的状态的静电位能规定为零. 这样, 在(1.8.1)式中令 $W_{e0} = 0$ 便得

$$W_e = A \quad (1.8.2)$$

这表明, 一个带电体的静电位能, 数值上等于把各个电荷元从彼此相距无限远的分散状态聚集成一个带电体的过程中外力作的功. 为了区别于带电体在外电场中的静电位能, 我们把外力反抗同一带电体上各电荷元之间静电力作的功定义为该带电体的固有能(或带电体的自能). 因为同号电荷之间的静电力是斥力, 所以不论带电体带正电还是带负电, 在带电体形成过程中外力都作正功, 故带电体的固有能总是正值. 一个带电体的固有能, 由它的形状、大小、所带电量以及电荷在其上的分布情况等因素决定. 如果带电体在外电场中移动的过程中, 它的形状、大小、所带电量以及电荷分布保持不变, 那么它的固有能就保持不变, 因而可以不考虑.

如果带电体系由若干个带电体组成, 一般, 我们可以把带电体系的形成过程设想为二个过程, 第一个过程, 把每个带电体上的各个电荷元从彼此相距无限远的状态聚集成一个个带电体. 第二个过程, 把各个带电体从彼此相距无限远的位置移到目前位置.

带电体系的总静电位能, 等于上述两个过程中外力反抗静电力作的功. 第一个过程中外力所作的功定义为该带电体系的固有能, 第二个过程中外力作的功定义为该带电体系内各带电体之间

的相互作用能. 所以带电体系的总静电位能是其固有能与相互作用能之和.

1. 8. 2 点电荷系的相互作用能

现在, 我们来推导 n 个点电荷组成的系统的相互作用能. 首先, 我们研究由两个点电荷组成的系统. 设有两个点电荷, 电量分别为 q_1 和 q_2 , 分别位于 a_1 和 a_2 点, 它们之间相距为 r_{12} . 根据上面所述, 这个系统的相互作用能 $W_{\text{互}}$ 应该等于把 q_1 和 q_2 分别从无限远处移到 a_1 和 a_2 点的过程中外力反抗静电力所作的功. 假定, 首先把 q_1 从无限远处移到 a_1 点, 然后再把 q_2 从无限远处移到 a_2 点. 在把 q_1 从无限远处移到 a_1 点的过程中, q_2 尚在无限远处, 所以 q_1 不受静电力作用. 故外界不必反抗静电力做功. 在把 q_2 从无限远处移到 a_2 点的过程中, 因为 q_2 处于 q_1 的静电场中, 受到电场力 $f_{21} = q_2 E_1$, 故外力要反抗静电力做功 A . 根据相互作用能的定义得

$$\begin{aligned} W_{\text{互}} = A &= \int_{\infty}^{a_2} -q_2 E_1 \cdot dr = q_2 \int_{\infty}^{a_2} E_1 \cdot dr \\ &= q_2 \int_{r_{12}}^{\infty} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \end{aligned}$$

现在改变电荷移动的次序, 先把 q_2 从无限远处移到 a_2 点, 然后再把 q_1 从无限远处移到 a_1 点. 在把 q_2 从无限远处移到 a_2 点的过程中, q_2 不受静电力, 所以外界不必反抗静电力做功. 而在把 q_1 从无限远处移到 a_1 点的过程中, 因为 q_1 处于 q_2 的电场中, 受到电场力 $f_{12} = q_1 E_2$, 因而外力要反抗电场力做功 A , 故系统的相互作用能 $W_{\text{互}}$ 为

$$\begin{aligned} W_{\text{互}} = A &= \int_{\infty}^{a_1} -q_1 E_2 \cdot dr = q_1 \int_{\infty}^{a_1} E_2 \cdot dr \\ &= q_1 \int_{r_{12}}^{\infty} \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} \end{aligned}$$

可见, $W_{\bar{2}} = W_{\bar{1}}$. 这表明, 两个点电荷组成的系统的相互作用能与点电荷系的形成次序无关, 只与点电荷的电量以及它们的相对位置有关. 可以证明, 对于任何点电荷系同样有这个结论.

由以上结果还可看出, 若 q_1 和 q_2 同号, 则 $W_{\bar{2}} > 0$; 若 q_1 和 q_2 异号, 则 $W_{\bar{2}} < 0$, 即相互作用能与固有能不同, 可正可负.

如果用 U_1 表示 q_2 在 a_1 点产生的电位, U_2 表示 q_1 在 a_2 点产生的电位, 则两个点电荷之间的相互作用能可写成对称的形式:

$$\begin{aligned} W_{\bar{2}} &= \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}} \\ &= \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 \end{aligned}$$

现在, 我们进一步讨论由三个点电荷组成的系统的相互作用能. 设三个点电荷的电量分别为 q_1 、 q_2 、 q_3 , 它们分别位于 a_1 、 a_2 和 a_3 三点, 它们之间的距分别为 r_{12} 、 r_{13} 和 r_{23} . 为了计算它们之间的相互作用能, 可设想先把 q_1 和 q_2 从无限远处移到 a_1 和 a_2 点, 然后再把 q_3 从无限远处移到 a_3 点. 把 q_1 和 q_2 从无限远处移到 a_1 和 a_2 点过程中外力作的功 A_1 前面已算出为,

$$A_1 = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}}$$

把 q_3 从无限远处移到 a_3 点的过程中, 因为 q_3 处于 q_1 和 q_2 的电场中, 受到电场力 $f = q_3(E_1 + E_2)$, 所以外力反抗静电力作功 A_2 为

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\infty}^{a_3} -q_3(E_1 + E_2) \cdot dr \\ &= - \int_{\infty}^{a_3} q_3 E_1 \cdot dr - \int_{\infty}^{a_3} q_3 E_2 \cdot dr \\ &= \int_{r_{13}} q_3 E_1 \cdot dr + \int_{r_{23}} q_3 E_2 \cdot dr \\ &= \int_{r_{13}} q_3 \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r^2} dr + \int_{r_{23}} q_3 \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2} dr \end{aligned}$$

$$= \frac{q_1 q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{23}}$$

把 q_1 、 q_2 、 q_3 从无限远处分别移到 a_1 、 a_2 、 a_3 点的过程中外力作的总功 $A = A_1 + A_2$, 故这个点电荷系的相互作用能为

$$\begin{aligned} W_{\text{互}} = A &= A_1 + A_2 = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{23}} \\ &= q_1 \frac{1}{2} \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{13}} + q_2 \frac{1}{2} \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_3}{4 \pi \epsilon_0 r_{23}} \\ &\quad + q_3 \frac{1}{2} \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{23}} \end{aligned}$$

如果用 U_1 表示 q_2 和 q_3 在 q_1 所在位置 a_1 点产生的电位的代数和, 用 U_2 表示 q_1 和 q_3 在 q_2 所在位置 a_2 点产生的电位的代数和, 用 U_3 表示 q_1 和 q_2 在 q_3 所在位置 a_3 点的电位代数和, 则上式可写为

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 + \frac{1}{2} q_3 U_3$$

把这个结果推广到 n 个点电荷组成的系统, 则

$$\begin{aligned} W_{\text{互}} &= \frac{1}{2} q_1 U_1 + \frac{1}{2} q_2 U_2 + \dots + \frac{1}{2} q_n U_n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

式中 U_i 是除 q_i 外其它点电荷在 q_i 所在位置产生的电位的代数和, 即

$$\begin{aligned} U_i &= U_{i1} + U_{i2} + \dots + U_{in} \\ &= \frac{q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_{1i}} + \frac{q_2}{4 \pi \epsilon_0 r_{2i}} + \dots + \frac{q_n}{4 \pi \epsilon_0 r_{ni}} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{4 \pi \epsilon_0 r_{ji}} \end{aligned}$$

所以, (1.8.3) 式也可写成

$$\begin{aligned}
 W_{\text{互}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ji}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ji}} \quad (1.8.4)
 \end{aligned}$$

由(1.8.4)式可以看出,点电荷系的相互作用能与点电荷的标号 i 、 j 的顺序无关,这表明,点电荷系的静电相互作用能的大小与电荷系形成过程的次序无关.

例 如图 1.8.1 所示,在边长为 L 的立方体的每个角上放有一个电量为 $-e$ 的点电荷,在立方体中心放有一个电量为 $+2e$ 的点电荷,求此点电荷系的相互作用能.

图 1.8.1 点电荷系的相互作用能

解 由电荷分布的对称性可知,立方体八个角上的电位应相等. 设 U 表示立方体八个角中任一角的电位, U_c 表示立方体中心处的电位,则根据点电荷电位公式和电位叠加原理可得

$$\begin{aligned}
 U &= 3 \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 L} + 3 \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{2}}{2} L} + \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{2} L} \\
 &\quad + \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{2} L} = \frac{-3.39e}{4\pi\epsilon_0 L}
 \end{aligned}$$

$$U = 8 \frac{-\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{2}L}{\frac{3}{2}L} = -\frac{9.24e}{4\pi\epsilon_0 L}$$

根据(1.8.3)式可算出这个点电荷系的相互作用能为

$$\begin{aligned} W_{\text{互}} &= 8 \left[\frac{1}{2} (-e)U \right] + \frac{1}{2} (2e)U \\ &= \frac{3.39e^2}{4\pi\epsilon_0 L} - \frac{9.24e^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{0.344e^2}{4\pi\epsilon_0 L} \end{aligned}$$

1.8.3 连续带电体系的静电位能

若带电体系由若干个连续带电体组成,我们可以把每个带电体分割成很多电荷元,每个电荷元可看成一个点电荷.这样,整个带电体系可看成一个点电荷系.设 dq 是任一带电体上的一个电荷元,它所在处的电位为 U ,根据(1.8.3)式,这带电体系的静电位能为

$$W_e = \frac{1}{2} \int U dq \quad (1.8.5)$$

上式积分遍及带电体系的所有带电体.若每个带电体上的电荷以体密度 ρ_e 连续分布,则 $dq = \rho_e dV$, 这里 dV 是电荷元所占体积,于是(1.8.5)式可写为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho_e U dV \quad (1.8.6)$$

(1.8.6)式的积分遍及所有带电体的体积.

同理可写出带电体系的电荷以面密度 σ_e 或线密度 λ_e 分布时的静电位能的表示式:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_S \sigma_e U dS \quad (1.8.7)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_L \lambda_e U dl \quad (1.8.8)$$

虽然, (1.8.6), (1.8.7), (1.8.8) 三式都是根据(1.8.3)式推

广而得,但它们与(1.8.3)式的意义是有区别的,(1.8.3)式表示点电荷系的相互作用能,而以上三式却表示带电体系的总静电位能,即固有能与相互作用能的总和.我们以(1.8.6)式为例作一点说明.前面说过,(1.8.6)式中的 U 是体元所在处电位,它是除 dV 所在处的电荷元以外的所有电荷(其中包括同一带电体上其它各电荷元)在该处产生的电位.根据电位叠加原理, U 应等于同一带电体上其它电荷元在该处产生的电位 U 与其它带电体在该处产生的电位 U 之和,即 $U = U + U$.这样,(1.8.6)式积分可变成两项积分,第一项积分正是把每一个带电体上的电荷元从彼此相距无限远的状态聚集成一个个带电体过程中外力作的功,这就是带电体系的固有能,而第二项积分则是把各个带电体从彼此相距无限远的位置移到目前位置过程中外力作的功,这就是带电体系的相互作用能.所以(1.8.6)式表示的是带电体系的固有能与相互作用能的总和,即它表示的是带电体系的总静电位能.如果带电体系只是一个带电体,则由(1.8.6)式或(1.8.7)、(1.8.8)两式算出的是带电体的固有能.

例 设有一半径为 R 的均匀带电球面,所带电量为 $-q$,求此带电球面的固有能.

解 因为球面均匀带电,电荷面密度为 $\sigma = \frac{-q}{4\pi R^2}$,利用§ 1.6 例 1 的结果,均匀带电球面上任一处的电位 $U = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$,于是带电球面的固有能为

$$\begin{aligned} W_{\text{固}} &= \frac{1}{2} \int_{\text{球面}} U dS = \frac{1}{2} \int_{\text{球面}} \frac{-q}{4\pi R^2} \cdot \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} dS \\ &= \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^3} \int_{\text{球面}} dS = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^3} \cdot 4\pi R^2 \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

由上面的结果可见, 虽然球面带负电, 但它的固有能却是正值. 另外还可看出, 若保持电量不变, 而使带电球面缩为一点(即 $R \rightarrow 0$), 则固有能趋向无穷大. 这表明, 若把带电体抽象为点电荷, 它的固有能是无穷大.

1. 8. 4 电荷在外电场的相互作用能

在§ 1. 6 节, 我们首先引入点电荷在外电场的静电位能, 然后进一步把单位正电荷在外电场中一点的静电位能定义为该点的电位. 于是, 电量为 q 的点电荷在外电场中电位为 U 的点的静电位能为电量与电位的乘积, 即

$$\text{静电位能} = qU$$

现在看来, 当时定义的点电荷在外电场中一点的静电位能是点电荷 q 和产生外电场的那些电荷之间的相互作用能, 因为它既没有包括点电荷 q 的固有能, 也没有包括产生外电场的那些电荷的固有能. 所以, 点电荷 q 在外电场中一点的静电位能就是点电荷在外电场中的相互作用能, 即

$$W_{\pm} = qU \quad (1. 8. 9)$$

例 计算电偶极矩 $p = ql$ 的电偶极子在外电场中的相互作用能.

解 根据(1. 8. 9)式, 电偶极子中正、负点电荷在外电场中的相互作用能分别为

$$W_{+} = q U_{+}$$

$$W_{-} = - q U_{-}$$

所以电偶极子在外电场中的相互作用能为

图 1. 8. 2 电偶极子在外电场中的相互作用能

$$W_{\pm} = W_{+ \pm} + W_{- \pm} = qU_{+} - qU_{-} = q(U_{+} - U_{-})$$

根据(1.6.13)式,电偶极子正、负点电荷所在处的电位差 $U_{+} - U_{-}$ 为

$$U_{+} - U_{-} = \int_a^b E \cdot dl = -El \cos \theta$$

于是,电偶极子在外电场中的相互作用能为

$$W_{\pm} = q(U_{+} - U_{-}) = -qlE \cos \theta = -pE \cos \theta$$

式中 θ 是电偶极矩矢量 p 与场强矢量 E 之间的夹角.把上面结果写成矢量形式,则为

$$W_{\pm} = -p \cdot E \quad (1.8.10)$$

由(1.8.10)式可见,若 p 与 E 方向一致(即 $\theta = 0$),则 $W_{\pm} = -pE$,电偶极子在外电场中的相互作用能最小;若 p 与 E 方向相反(即 $\theta = \pi$),则 $W_{\pm} = pE$,电偶极子在外电场中的相互作用能最大.如果电偶极子可以绕其中心自由转动,则它总是趋向于使 p 与 E 方向一致的位置,因为这是稳定平衡的位置.

思 考 题

1.1 场强的定义是 $E = \frac{f}{q_0}$,这不是表明场强 E 与试验电荷的电量 q_0 成反比吗?为什么说场强与试验电荷无关?

1.2 地球表面附近存在一竖直方向的电场,电子在此电场中受到向上的力,试问这电场的场强方向是朝上还是朝下?

1.3 一个带正电的小球(其质量很小),用长丝线悬挂起来,如果要测量和带电小球在同一水平面内某点的场强,我们在该点放一试验电荷 q_0 ,测定 q_0 所受的力 f ,问: $\left| \frac{f}{q_0} \right|$ 是小于、等于、还是大于该点的场强?

1.4 不知道大小和符号的两个点电荷,相距为 a ,若在它们之间的连线上某点场强为零,你对这两个点电荷可以作出什么结论?

1.5 把一个点电荷放在电场中,由静止状态释放,若此点电荷只受电场

力作用, 它的运动轨迹是否就是电场的电力线?

1.6 在一无限大均匀带电平板 A 附近, 放置一面积为 S 的平面 B, 问:

- (1) 平面 B 应该怎样放置, 才能使它的电通量最大?
- (2) 平面 B 怎样放置, 才能使它的电通量等于零?
- (3) 平面 B 怎样运动, 才能使它的电通量不变?
- (4) 平面 B 怎样运动, 才能使它的电通量周期性变化?

1.7 设在一球面内部有一电量为 q_1 的点电荷, 球面外有两个点电荷, 它们的电量分别为 q_2 和 q_3 , 问:

(1) 若 q_2 在球面外移动位置, 球面上各点的场强变不变? 球面上每一小块面积的电通量变不变? 球面的总电通量变不变?

(2) 若 q_1 在球面内移动位置, 球面上各点的场强变不变? 球面上每一小块面积的电通量变不变? 球面的总电通量变不变?

(3) 若把 q_3 从球面外移入球面内, 这时球面的电通量等于多大?

1.8 若闭合曲面内没有电荷, 闭合面上各点的场强是否一定等于零? 反之, 若闭合面上各点场强均等于零, 闭合面内是否一定没有电荷?

1.9 三个相同的点电荷位于等边三角形的三个角上, 能否以三角形中心为球心作一球面, 应用高斯定理来计算它们产生的场强?

1.10 两条电力线能否相切?

1.11 真空中能否存在这样的静电场, 它的电力线如下图所示, 图中箭头的长短表示场强的大小.

1.12 同一条电力线上任意两点的电位能否相等? 为什么?

1.13 在空间某点, 若其周围放置的正电荷愈多, 该点的电位是否一定愈大? 该点的场强是否也一定愈大?

1.14 电荷在电位高的地点的静电位能是否一定比在电位低的地点的静电位能大?

1.15 如果初速等于零的电荷只受电场力作用, 它是否一定向电位低的地点运动? 能否说它一定向静电位能低的地点运动?

思考题 1.11 图

1.16 不同电位的两个等位面能否相交或相切?

- 1.17 同一等位面上任意两点的场强是否一定相等?
- 1.18 场强在等位面的切向分量是否一定等于零?
- 1.19 电位在带电面两侧会不会突变?
- 1.20 均匀电场中各点的电位是否相等? 各点的电位梯度是否相等?
- 1.21 如果在某一区域内, 电位处处相等, 这区域内有无电场?
- 1.22 在场强为零的地点电位是否一定也为零? 而在电位为零的地点, 场强是否一定也为零?
- 1.23 为什么在点电荷系相互作用能的公式 $W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i$ 中有因子 $\frac{1}{2}$, 而点电荷在外电场中的相互作用能公式 $W_{\text{互}} = qU$ 却没有这个因子?

习 题 一

1.1 设有四个点电荷, 电量分别为 q 、 $2q$ 、 $-4q$ 、 $2q$, 顺序放在边长为 a 的正方形四角上(1)计算正方形中心处的场强; (2)若在正方形中心放一电量为 $-q_0$ 的试验电荷, 求 $-q_0$ 受到的电场力.

1.2 三个点电荷, 电量均为 $q = -1.60 \times 10^{-19} \text{C}$, 分别放在等边三角形的三个顶点上, 三角形的边长为 0.10m . 在三角形中心放置一个什么电荷, 才能使三角形顶点上每一电荷所受电场力为零?

1.3 如图所示, 一个 α 粒子沿着氢分子轴线的中垂线方向, 快速穿过氢分子中心. 设 α 粒子穿过氢分子时, 氢原子核的移动可以忽略不计, 氢分子内的电子对 α 粒子的作用也忽略不计. 氢原子核之间的距离为 b , 求 α 粒子受到的最大电场力.

1.4 如图所示的电荷系统叫做电四极子, 它由两个相同的电偶极子组成. 求证: 在电四极子轴线的延长线上离中心为 r ($r \gg l$) 的 P 点的场强为 $E = \frac{3Q}{4\epsilon_0 r^4}$, 式中 $Q = 2ql^2$ 叫做电四极子的电四极矩.

1.5 如图所示, 长为 $l = 15.0 \text{cm}$ 的细棒上均匀地分布着正电荷, 电荷线密度为 $\rho_e = 2.00 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$. 求: 细棒延长线上, 与棒的一端相距 $a = 5.00 \text{cm}$ 处 P 点的场强.

习题 1.3 图

习题 1.4 图

1.6 如图所示,长为 $l = 2.00\text{m}$ 的均匀带电细棒,带有电量 $q = 2.00 \times 10^{-7}\text{C}$. 求与细棒的一端相距 $a = 1.00\text{m}$ 处 P 点的场强。

1.7 设有一半径为 R 的均匀带电半圆环,带有电量 q . 求通过半圆环中心的轴线上的场强分布。

习题 1.6 图

1.8 设在半径为 R 的半个球面上,均匀地分布着电荷 q , 求这个半球面的球心处的场强。

1.9 设有一半径 $R = 10.0\text{cm}$ 的均匀带电圆环, 带有电量 $q = 1.00 \times 10^{-8}\text{C}$. 今有一电子沿着圆环的轴线向环心运动, 求电子受到的最大电场力。

1.10 设有一半径为 R 的圆环, 它的上半部均匀地分布着电量 q_1 , 它的下半部均匀地分布着电量 q_2 , 求圆环轴线上与环心距离为 a 处的场强。

1.11 如图所示, 两个均匀带电圆环, 半径分别为 R_1 和 R_2 , 各带有电量 q , 两环平行放置, 并且两环的中心在同一轴线上, 求轴线上中点(O 点)的场强。

1.12 如图所示, 两条水平架设的高压输电线, 两线间的距离 $d = 1.50\text{m}$, 设两条输电线上的电荷线密度分别为 $\lambda_1 = 5.17 \times 10^{-7}\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ 和 $\lambda_2 = -5.17 \times 10^{-7}\text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, 在两条输电线的联线的中垂线上有一 P 点, P 点到联线的距离 $h = 2.00\text{m}$, 求 P 点的场强。

1.13 设有两块平行放置的无限大均匀带电平板, 电荷面密度分别为 $\sigma_1 = 6.00 \times 10^{-8}\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ 和 $\sigma_2 = -3.00 \times 10^{-8}\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$. 计算两块平板之间和两

习题 1.11 图

习题 1.12 图

块平板之外任意一点的场强.

1.14 设有一块均匀带电的大平板, 平板中部有一半径为 $R = 3.00\text{cm}$ 的小孔, 平板的电荷面密度为 $\sigma = 2.00 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$. 在通过小孔中心并与平板垂直的直线上有一 P 点, 它与小孔中心相距 $a = 4.00\text{cm}$, 求 P 点的场强.

1.15 设有一直径 $D = 4.00\text{cm}$ 的均匀带电空心长圆筒, 电荷线密度为 $\lambda = 2.00 \times 10^{-9} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, (1) 计算与圆筒轴线相距 $r_1 = 1.00\text{cm}$ 和 $r_2 = 3.00\text{cm}$ 两处的场强. (2) 画出场强大小随距离 r 变化的曲线.

1.16 设有一个半径为 R 的均匀带电球体, 电荷体密度为 ρ . (1) 求场强分布; (2) 画出场强大小随距离 r 变化的曲线.

1.17 设有两个同心球面, 半径分别为 $R_1 = 2.00\text{cm}$ 和 $R_2 = 4.00\text{cm}$, 带有电量 $q_1 = 5.00 \times 10^{-9} \text{C}$ 和 $q_2 = -10.0 \times 10^{-9} \text{C}$. (1) 计算与球心相距 $r = 1.00\text{cm}$ 、 3.00cm 、 5.00cm 三处的场强. (2) 画出场强随距离 r 变化的曲线.

1.18 一半径为 R 的均匀带电球面, 电荷面密度为 σ , 今在球面上割去一半径为 a ($a < R$) 的小圆片, 求球中心处的场强.

1.19 两个无限长同轴圆柱面, 它们的半径分别为 $R_1 = 2.00\text{cm}$, $R_2 = 4.00\text{cm}$, 圆柱面均匀带电, 内柱面单位长度上的电量为 $8.00 \times 10^{-9} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, 外柱面单位长度上的电量为 $12.0 \times 10^{-9} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$. (1) 计算 $r = 1.00\text{cm}$ 、 3.00cm 、 5.00cm 三处的场强; (2) 画出场强随距离 r 的变化曲线.

1.20 设有一无限大均匀带电厚板, 电荷体密度为 ρ , 厚为 d . 若 x 轴垂直厚板, 坐标原点取在厚板中央. (1) 求场强分布; (2) 画出 $E-x$ 曲线.

1.21 设有一半径为 R 的无限长均匀带电圆柱体, 电荷体密度为 ρ .

(1) 求场强分布; (2) 画出场强随距离 r 变化的曲线.

1.22 氢原子在正常状态下可看成这样的带电体: 中心处是一个带正电的点电荷, 电量为 e . 周围分布有负电荷, 电荷体密度为 $\rho = -\frac{e}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$. 式中 $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$, $a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{m}$ [叫做玻尔(Bohr)半径], r 为到中心的距离. 求: $r = a_0$ 处的场强.

1.23 设气体放电形成的等离子体圆柱内的电荷体密度为

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{r^2}{a^2}}$$

式中 r 是到轴线的距离, ρ_0 是轴线上的电荷体密度值, a 是个常数. 求场强分布.

1.24 设有一无限大均匀带电平面, 电荷面密度为 σ , 它与一无限大均匀带电层紧贴(见图), 带电层厚为 d , 电荷体密度为 ρ . (a) 求出场强分布; (b) 设 x 轴垂直带电平面和带电层, 坐标原点放在带电平面上, 画出场强随 x 变化曲线.

习题 1.24 图

习题 1.25 图

1.25 设有一均匀带电球体, 电荷体密度为 ρ , 半径为 R . 今在带电球体内挖去一个半径为 b 的小球, 带电球体中心到空腔中心的距离为 a . (1) 求带电球体中心 O 点的场强; (2) 计算空腔内的场强分布.

1.26 设有一无限长均匀带电圆柱体, 半径为 R , 电荷体密度为 ρ . 今在其中挖去一个半径为 b 的细长柱体, 空腔的轴线与圆柱体的轴线平行, 两者相距为 a , 求: (1) 带电圆柱体轴线处场强; (2) 空腔内的场强分布.

1.27 两个点电荷, 电量分别为 $q_1 = 1.20 \times 10^{-8} \text{C}$ 和 $q_2 = -1.20 \times 10^{-8}$

C, 它们相距 10.0cm. (1) 计算图中 A、B、C 三点的电位; (2) 若把 $q_0 = 1.00 \times 10^{-9} \text{C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点. 外力反抗电场力作多少功?

习题 1.27 图

习题 1.28 图

1.28 四个点电荷, 二正二负, 分别放在边长为 a 的正方形的四个角上 (见图), A、B、C 三点分别是每一边的中点, 已知 $q = 1.00 \times 10^{-8} \text{C}$, $a = 10.0 \text{cm}$. (1) 求 A、B、C 三点的电位; (2) 若把 $q_0 = 50.0 \times 10^{-11} \text{C}$ 的点电荷从 A 点移到 C 点, 外力反抗静电场力作多少功?

1.29 一均匀带电细棒, 长为 $l = 15.0 \text{cm}$, 电荷线密度 $\lambda = 2.00 \times 10^{-9} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, 求: (1) 细棒延长线上与棒的一端相距 $a = 5.00 \text{cm}$ 处的电位; (2) 细棒中垂线上与细棒相距 $b = 5.00 \text{cm}$ 处的电位.

1.30 设半个球面均匀带电, 电荷面密度为 σ , 球面的半径为 R . 在穿过球心并垂直半球面最大截面的直线上有一 P 点, P 点和球心的距离为 a , 求 P 点的电位.

1.31 设有一均匀带电球体, 电荷体密度为 ρ , 球半径为 R . (1) 求电位分布; (2) 画出 $U-r$ 曲线.

1.32 设有两个同心的均匀带电球面, 半径分别为 $R_1 = 10.0 \text{cm}$, $R_2 = 20.0 \text{cm}$, 均带有电量 $q = 2.00 \times 10^{-8} \text{C}$. (1) 计算与球心

习题 1.30 图

相距 $r = 0.150 \text{m}$ 、 0.300m 两处的电位; (2) 画出 $E-r$ 和 $U-r$ 曲线.

1.33 设有两个同轴的薄壁金属长圆筒, 半径分别为 $R_1 = 1.00 \text{cm}$, $R_2 = 1.50 \text{cm}$. 已知内外圆筒上电荷线密度分别为 $\lambda_1 = 1.00 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, $\lambda_2 =$

- $1.00 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$. 求: 内外圆筒的电位差.

1. 34 两个同心的均匀带电球面, 半径分别为 $R_1 = 5.00 \text{ cm}$, $R_2 = 20.0 \text{ cm}$. 已知内球面的电位为 $U_1 = 60.0 \text{ V}$, 外球面的电位 $U_2 = -30.0 \text{ V}$. (1) 求内、外球面上所带电量; (2) 在两个球面之间何处的电位为零?

1. 35 如图所示, 三块互相平行的均匀带电大平板, 电荷面密度分别为 $\sigma_1 = 1.20 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$, $\sigma_2 = 2.00 \times 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$, $\sigma_3 = 1.10 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. A 点与带电平板 相距 5.00 cm , B 点与带电平板 相距 7.00 cm . (1) 计算 A、B 两点的电位差; (2) 设把电量 $q_0 = -1.00 \times 10^{-8} \text{ C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点, 外力反抗电场力作多少功?

1. 36 一计数管中有一直径为 2.00 cm 的金属长圆筒, 在圆筒的轴线处装有一根直径为 $1.27 \times 10^{-5} \text{ m}$ 的细金属丝, 金属丝与圆筒间加有电压

习题 1.35 图

850 V . 求: (1) 金属丝表面附近的场强大小; (2) 圆筒内表面处的场强.

1. 37 一示波管如下图所示, 管内高度真空. 电子由阴极发射出来后, 在阴极和阳极之间的电场的作用下得到加速, 以很快的速率穿过阳极上的小

1. 灯丝; 2. 阴极; 3. 控制栅; 4. 聚焦极; 5. 加速阳极;
6. 水平偏转板; 7. 垂直偏转板 8. 荧光屏

习题 1.37 图

孔. 若水平偏转板和垂直偏转板上均未加电压, 则电子匀速前进, 沿中心线穿过两个偏转板, 射到荧光屏上 O 点. 今在垂直偏转板上加上电压 $U = 80.0 \text{ V}$, 荧光屏上亮点移过距离 $S = 2.00 \text{ cm}$. 已知垂直偏转板之间相距 $d = 2.00 \text{ cm}$,

偏转板长 $b = 4.00\text{cm}$. 偏转板末端和荧光屏相距 $L = 18.0\text{cm}$. (1) 求这时加在阳极与阴极之间的电压 U_{AK} ; (2) 电子射到荧光屏时具有的动能.

1.38 电子束焊接机中的电

子枪, 如图所示, K 为阴极, A 为阳极, 其上有一小孔. 阴极发射的电子在阴极和阳极的电场作用下聚焦成一细束, 以极高的速率穿过阳极上的小孔, 射到被焊接的金属上, 使两块金属熔化而焊接在一起. 已知: $U_A - U_K = 2.50 \times 10^4\text{V}$, 电子电量 $-e = -1.60 \times 10^{-19}\text{C}$, 电子的静止质量 $m_0 = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$. 整个装置和被焊接金属都放在真空容器内.

习题 1.38 图

设电子从阴极发射出来后的速率等于零. 求: (1) 电子到达被焊接金属时具有的动能(用 eV 单位表示); (2) 电子射到被焊接金属上时具有的速率.

1.39 设把金原子核看成半径 $R = 6.90 \times 10^{-15}\text{m}$ 的均匀带电球体, 所带电量为 $q = Ze = 79 \times 1.60 \times 10^{-19}\text{C}$. 今有一质子(电量为 $e = 1.60 \times 10^{-19}\text{C}$, 质量为 $m = 1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$) 以初速 $v_0 = 1.20 \times 10^7\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 从很远的地点射向金原子核, 求它与金原子核的最近距离.

1.40 有两个异号点电荷, 电量分别为 nq 和 $-q$ (这里 $n > 1$), 它们相距为 a . (1) 证明电位等于零的等位面是一个球面; (2) 求出这个球面的半径和球心的位置.

1.41 两条均匀带电的无限长平行直导线, 电荷的线密度分别为 ρ_e 和 $-\rho_e$, 相距为 $2a$, (1) 求空间的电位分布; (2) 证明电位为 U 的等位面是半径为 $r = \frac{2ka}{k^2 - 1}$ 的圆柱面, 柱面的轴线与两条带电直导线共面, 位置在 $x = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} a$ 处, 其中 $k = \exp \frac{2\rho_e U}{e}$; (3) 电位等于零的等位面是什么形状? (4) 由电位梯度求出场强分布.

1.42 一个电四极子如图所示, 已知 q 和 l . (1) 求 $r \gg l$ 处的电位分布; (2) 由电位梯度求出图平面内 $r \gg l$ 处的场强分布.

习题 1.42 图

习题 1.43 图

1.43 一个电四极子如图所示, 已知 q 和 l . (1) 求 $x-y$ 平面上 $r \gg l$ 处电位分布; (2) 由电位梯度求出 xy 平面上 $r \gg l$ 处的场强分布.

1.44 一均匀带电圆盘, 半径为 R , 电荷面密度为 σ . (1) 求圆盘轴线上的电位分布; (2) 由电位梯度求出圆盘轴线上的场强分布.

1.45 求 1.42 题图所示电四极子的静电相互作用能.

1.46 设有一半径为 R 的均匀带电球体, 所带电量为 Q , 求这带电体的静电固有能.

1.47 本世纪初, 曾经有一种看法, 认为电子的静止质量完全起源于本身的静电固有能. 试根据这一看法, 把电子看成一均匀带电球体并利用相对论的质能关系, 求出电子的半径 r_0 .

1.48 两个同心球面, 半径分别为 R_1 和 R_2 , 球面上均匀带电, 所带电量分别为 q_1 和 q_2 , 求这个带电系统的静电位能.

1.49 重原子的核, 可粗略地看作电荷均匀分布的带电球体, 电荷体密度为 $\rho = \frac{4}{3} \times 10^{25} \text{C} \cdot \text{m}^{-3}$. 若总电量为 $Q = 92e$ 的铀核分裂为两个带有等量电荷, 半径相等的核相离远去, 试问在此过程中电位能变化多少(用 MeV 单位表示)?

第二章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 导体和电介质

实验表明,物体按其导电性能大致可分为两大类.具有良好导电性能的物体,叫做导体,如金属、石墨、电解液、等离子体以及人体和大地等.几乎不导电的物体叫做电介质(绝缘体),如玻璃、丝绸、橡皮、陶瓷、气体和油类等.

导体和电介质的导电性能上的差别是因为两者有不同的电结构.我们知道,实物是由分子(或原子)组成的,分子由原子组成,而原子又由带正电的原子核和围绕核运动的电子组成.原子中离开原子核最远的电子叫做价电子,原子核对价电子的吸引力最小,因而价电子比内层电子容易脱离原子.不同原子的价电子受到原子核吸引力的大小是不同的,因而不同原子的价电子脱离原子的难易程度不同.

对于金属来说,金属原子中的价电子受到原子核的吸引力较小,当大量金属原子组成固态金属时,金属原子的价电子挣脱原子核的束缚,在整个金属内部自由运动.我们把在金属内部自由运动的电子叫做自由电子.金属原子失去价电子后成为正离子,固态金属中的正离子排列成整齐的点阵叫做晶体点阵(或晶格).金属中的正离子不能宏观移动,仅能围绕各自的平衡位置作微小振动.当金属内部不存在电场时,自由电子在晶体点阵间作无规则热运动,它们频繁地和点阵上的正离子发生碰撞,还不时互相碰撞,自由电子的这种混乱运动不会形成电流.当金属内部存在电场时,自由电子在电场力的作用下定向移动形成电流.所以金属内部存在大量

自由电子是金属具有良好导电性能的原因所在。

至于电解质溶液这类导体, 它们的电结构不同于金属. 在电解质溶解于水时, 溶液中形成许多正、负离子, 这些离子可以在溶液中自由移动. 当溶液中存在电场时, 正负离子便在电场力作用下定向移动形成电流, 所以电解质溶液具有良好的导电性能是由于内部存在大量正负离子. 通常把金属称为第一类导体, 把电解质溶液称为第二类导体. 两类导体虽然电结构不同, 但它们内部存在大量可以自由运动的电荷却是共同的, 这决定了两者都具有良好的导电性能.

和金属原子不同, 在组成电介质的原子中原子核对价电子的吸引力比较大, 价电子不易脱离原子, 所以电介质中的自由电荷极少, 绝大多数电荷只能在分子范围内移动, 我们把这些不能作宏观运动的电荷叫做束缚电荷. 电介质的这种电结构决定了它的导电性极差, 在研究电介质在电场中的性质时, 为了简化问题和突出它的主要特征, 我们忽略它的微弱导电性, 而把它看成完全不导电的物体.

应该指出, 把物体分为导体和电介质也不是绝对的, 二者之间并没有严格的界限. 在一定条件下, 物体可由电介质转变为导体, 例如, 电介质在强电场中被击穿而变为导体.

§ 2.2 静电场中的导体

2.2.1 导体的静电平衡条件

如果导体内部和表面没有电流, 我们便说导体处于静电平衡状态. 因为导体内部存在大量自由电荷, 如果导体内存在电场, 则自由电荷在电场力作用下必然形成电流. 所以, 导体处于静电平衡状态的必要条件是, 导体内部电场强度处处为零, 即 $E_{\text{内}} = 0$.

这里有两点需要说明: (1) 所谓导体内部电场强度处处为零,

指的是电场强度在物理无限小体积内的平均值,即宏观电场强度等于零,而不是指导体内每一几何点的微观场强.实际上,在非常靠近一个正离子或一个电子的点,电场强度并不等于零.本章在讨论导体或电介质中的场强时都是指的宏观电场强度.(2)如果导体内的自由电荷除了受到电场力的作用外还受非静电性质的力的作用,那么导体的静电平衡条件就不是导体内场强处处为零,而应改为作用于自由电荷上的静电力和非静电力的合力为零.有关导体内存在非静电力的情形,我们将在第三章中讨论.

当我们使一个导体带电或者把一个导体放入外电场中时,导体都要经历一个极其短暂的从不平衡到平衡的过程.例如,把一个不带电的金属球放入场强为 E_0 的均匀外电场中,如图 2.2.1(a)

图 2.2.1 导体的静电平衡

所示,金属球内的自由电子便处于场强为 E_0 的电场中,电子受到方向向左的电场力作用而向金属球的左端移动.这样,金属球左端由于电子积聚而带负电,右端由于缺少电子而带正电,这就是静电感应现象.金属球左右两端出现的电荷叫做感应电荷.感应电荷一出现,它们便在金属球内外产生附加的电场 E ,于是金属球内外任一点的总电场强度是 E_0 与 E 的叠加,即

$$E = E_0 + E$$

在金属球内, E 的方向与 E_0 相反(见图 2.2.1(b)), 因而使球内的总场强削弱. 只要这个总场强不为零, 它就会驱使金属球内的自由电子继续向左端移动, 直到金属球上的感应电荷在金属球内各点产生的电场强度 E 与 E_0 完全抵消时, 即金属球内总电场强度处处为零为止. 这时, 金属球内自由电子不再定向移动, 感应电荷在金属球上的分布也不再变化, 即金属球在外电场中达到了新的静电平衡状态.

值得注意的是, 若外电场是由带电导体 A 产生, 则当把原先不带电的导体 B 放入此电场时, 不仅导体 B 上出现了某一电荷分布, 而且导体 A 上的电荷也将重新分布. 这是因为导体 B 上出现的感应电荷同样会在导体 A 所在处产生附加电场, 从而破坏了后者原有的静电平衡, 导体 A 内部的自由电荷受电场力驱动定向移动, 使 A 上的电荷分布发生变化并且它所产生的电场也随之变化. 这反过来又引起导体 B 上电荷分布改变. 这一相互影响的过程一直持续到导体 A 和 B 上的电荷在二者内部产生的场强叠加均为零, 这时导体 A 和 B 同时达到新的静电平衡状态.

由导体的静电平衡条件可以得出以下三点推论:

(1) 导体是等位体, 其表面是等位面.

设 a 、 b 是导体内任意两点, 在导体中任选一条连接此两点的路径, 因为静电平衡下导体体内场强 E 处处为零, 则 a 、 b 两点间的电位差 $U_a - U_b = \int_a^b E \cdot dl = 0$, 即 $U_a = U_b$. 这表明导体内部各点电位相等, 即导体是等位体, 导体表面是等位面.

(2) 导体内部不带电, 电荷只分布在导体表面.

设 P 点是导体内任意一点, 在导体内作一包围 P 点的很小的闭合面, 因导体内场强处处为零, 此闭合面上的电通量应为零. 由高斯定理可知, 该闭合面所包围的电量为零, 即 P 点附近一物理上无限小的体积内没有净电荷, 或 P 点处电荷体密度为零. 由于

P 点是导体内任一点, 这一论证表明, 导体内部处处不带电, 导体所带电荷只能分布在导体表面.

(3) 导体外紧靠导体表面处的场强, 方向垂直导体表面, 大小与导体表面的电荷面密度成正比.

因为导体表面是等位面, 根据电力线与等位面互相垂直的性质可知, 导体外紧靠表面处场强方向垂直导体表面. 关于场强大小与导体表面电荷面密度成正比的结论, 可根据高斯定理证明. 设 P 点是导体外, 紧靠导体表面的一点. 过 P 点作一个与导体表面平行的小面元 S , 并以 S 为底面, 以导体表面法线为轴作一个很扁的圆柱体, 圆柱体的另一个底面在导体内, 如图 2.2.2 所示. 这

图 2.2.2 导体外紧靠表面处的场强

个圆柱体在导体表面截出一块面积 S , 当 S 足够小时, $\sigma = \frac{Q}{S}$, 并且在 S 上电荷面密度 σ 近似相等. 我们先计算这个圆柱体表面 S 上的总电通量. 显然, 总电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{上底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\text{下底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

因为圆柱体底面面积 S 足够小, 所以上底面上各点场强近似相等, 则

$$\oint_{\text{上底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\text{上底面}} E_n dS = E_n S$$

下底面在导体内, 它上面各点场强为零, 所以 $\oint_{\text{下底面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$. 侧面

上各点场强方向与侧面平行(即 $\cos\theta = 0$), 故 $\int_{\text{侧面}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$. 于是圆柱体表面的总电通量就等于上底面上的电通量, 即

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_n S$$

S 面所包围的电量 $q_i = \epsilon_0 E_n S = \epsilon_0 S$, 于是根据高斯定理可得

$$E_n S = \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 S$$

$$E_n = \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 \quad (2.2.1)$$

因为上底面的法线方向与导体表面的外法线方向 \mathbf{n} 一致, 所以 E_n 就是场强在导体表面的外法线方向 \mathbf{n} 上的分量, 又因该处的场强方向垂直导体表面, 所以 P 点的场强可表示为

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon_0} \epsilon_0 \mathbf{n} \quad (2.2.2)$$

由(2.2.1)或(2.2.2)式可见, 导体外紧靠表面处的场强大小与导体表面上的电荷面密度成正比. 若导体表面上的电荷分布不均匀, 则电荷面密度大的表面附近的电场强, 电荷面密度小的表面附近的电场弱.

我们在导出(2.2.1)式过程中, 对导体周围有无其它带电体或导体没有作任何假定, 所以, 在导体周围存在其它带电体和导体时, (2.2.1)式同样成立.

读者应该注意, 由(2.2.1)式算出的场强并非只是圆柱体表面包围的那部分电荷 $\epsilon_0 S$ 在 P 点产生的场强, 而是全部电荷(包括导体周围其它带电体)在该点产生的总场强.

应用导体的静电平衡条件和电荷守恒定律以及静电场的基本规律, 可以求出某些简单情形下导体表面的电荷分布, 下面我们举几个例子.

例 1 设有一电荷面密度为 $\epsilon_0 (> 0)$ 的均匀带电大平面, 在它

附近平行地放置一块不带电的厚金属板, (1) 求厚金属板两面的电荷分布. (2) 把金属板接地, 金属板两面的电荷又将如何分布?

解 (1) 设厚金属板两个表面上的电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 , 如图 2.2.3(a) 所示. 因厚金属板原来不带电, 根据电荷守恒定律可得

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \quad (1)$$

设 P 点为厚板内任意一点, 根据场强叠加原理可得, P 点的场强大小为

$$E_P = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}$$

根据导体的静电平衡条件, P 点场强应该为零, 即

$$\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} = 0 \quad (2)$$

由(1)(2)两式可解得

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma_0}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_0}{2}$$

即厚金属板两个表面的感应电荷面密度只是施感电荷面密度 σ_0 的一半. 这时的电荷分布和电场分布如图 2.2.3(b) 所示.

(2) 把厚金属板接地后, 板与地成为一个导体, 达到静电平衡状态后两者电位必须相等, 因而厚金属板右表面不能带电. 因为板的右表面若带有正电荷, 则正电荷发出的电力线必终止到地面的负电荷上, 这样板与地之间必存在电位差, 这与静电平衡时

图 2.2.3 计算厚金属板上的电荷面密度

导体的性质矛盾.

设厚板与地达到静电平衡后, 板的左表面的电荷面密度为 σ_0 , 根据电场强度叠加原理求得厚板内任一点处的电场强度为

$$E = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

根据导体静电平衡条件 $E = 0$, 得

$$\sigma_0 = -\sigma_0$$

即厚板接地后不仅板右表面的正电荷被来自地面的负电荷中和, 而且板的左表面的负电荷也增加了一倍. 这时电荷分布和电场分布如图 2.2.3(c) 所示.

例 2 设有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的金属球, 它们周围无其它带电体或导体, 它们之间相距也非常远. 今用一根细导线把它们相连, 若给它们带上一定电量后, 它们表面的电荷面密度之比将为何值?

图 2.2.4 例 2 用图

解 设两个金属球表面上分别带有电量 q_1 和 q_2 , 因为它们相

距很远, 相互影响可忽略不计, 所以每个金属球面上的电荷分布都可认为是均匀的, 则两球表面上的电荷面密度分别为

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2}, \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

所以, 两个金属球面上电荷面密度之比为

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{q_1}{q_2} \quad (1)$$

另一方面, 两个金属球由细导线相连成为一个导体, 它们的电位应该相等, 即 $U_1 = U_2$. 又因它们周围无其它带电体或导体, 它们之间又相距很远, 所以每个金属球的电位可以按孤立带电球面情况处理, 分别为

$$U_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1}, \quad U_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

由 $U_1 = U_2$ 可得

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (2)$$

把(2)代入(1)式便得

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

由此可见, 用细导线相连的两个金属球表面的电荷面密度与球面半径成反比. 因为球面的曲率等于球面半径的倒数, 所以本例的结果表明, 两球上电荷面密度与球体表面的曲率成正比.

例 3 在一块无限大的接地导体板附近有一个电量为 $q (> 0)$ 的点电荷, 它与导体板表面相距为 h , 求导体板表面上的感应电荷分布.

解 由于导体板接地, 感应电荷只出现在其上与点电荷相近一侧的表面. 设 P 和 P' 分别为位于导体板内外无限接近表面的两点, 它们与点电荷相距 r , 与 O 点相距为 R . 设 E_0 为点电荷在 P 点产生的场强, E 为导体板表面感应电荷在 P 点产生的场强, 则 P

点总场强为

$$E_p = E_0 + E$$

根据静电平衡条件 $E_p = 0$, 于是 $E = -E_0$ 即

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

图 2.2.5 求导体板表面的感应电荷面密度

而由对称性可知, 感应电荷在 P 点产生的场强大小 E 应与 E_0 相等, E 的方向与导体表面的夹角等于 E_0 的方向与表面的夹角(见图 2.2.5), 所以导体板外 P 点的总场强 E_p 为

$$\begin{aligned} E_p &= E_0 + E \\ E_p &= 2E_0 \cos \alpha = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{qh}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{qh}{2\pi\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

而由(2.2.1)式可得 P 点总场强的法向分量与该处导体表面上感应电荷面密度之间的关系为

$$E_{pn} = \frac{1}{\epsilon_0}$$

因为 P 点总场强 E_p 的方向垂直指向导体表面, 所以

$$E_{pn} = E_p \cos 180^\circ = -E_p = -\frac{qh}{2\epsilon_0(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

于是可得

$$= -\frac{qh}{2\epsilon_0(h^2 + R^2)^{3/2}}$$

可见, 导体板表面感应电荷的分布是不均匀的, 在 $R=0$ 处, 的绝对值最大, 在离开 O 点很远处(即 $R \rightarrow \infty$) 感应电荷面密度趋于零. 读者可以证明, 导体表面上总的感应电量等于 $-q$, 即与点电荷 q 等量异号.

例 4 一半径为 R 的接地金属球, 球外不远处放置一点电荷, 点电荷电量为 q , 与球心相距 l . 试求金属球面上感应电荷总量 q' .

解 由静电场的基本知识可以判定, 欲满足导体静电平衡条件, 此球面上感应电荷分布必不均匀.

通常认为大地与无限远等电位, 接地则金属球电位为零, 自然体内任一点电位均为零. 选择球心 O

图 2.2.6 例 4 用图

这一特殊点计算其电位. 先求感应电荷在 O 处产生的电位. 在球面上任取电荷元 dq , 由点电荷电位叠加原理可得 q' 在 O 处产生的电位为

$$U_O = \int dU_O = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

而点电荷 q 在 O 处产生的电位为

$$U_{qO} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l}$$

因此, 有

$$U_O = U_{qO} + U_O = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} = 0$$

$$q = - \frac{R}{l} q.$$

感应电荷的符号与 q 相反, 数值小于 q 值.

2.2.2 孤立带电导体表面的电荷分布 尖端放电

上面已证明, 带电导体的电荷只能分布在表面. 至于电荷在表面上如何分布则是一个比较复杂的问题, 电荷的分布不仅和导体的形状有关, 还和导体周围有无其它带电体或导体等因素有关. 如果所研究的导体与其它物体相距很远, 以致其它物体在导体所在处产生的电场可忽略不计, 我们便把这个导体叫做孤立导体. 实验表明, 对于孤立的带电导体, 电荷的分布大致有以下定性的规律: 在表面凸出的尖锐部分(曲率是正值且较大)电荷面密度较大, 在表面比较平坦部分(曲率较小)电荷面密度较小, 在表面凹入部分电荷面密度最小. 根据导体表面附近的场强与表面上电荷面密度的关系可知, 孤立带电导体周围的电场分布应是表面凸出尖锐部分附近的电场最强, 相应该处电力线最密集. 图 2.2.7 是根据实验测定画出的带电导体 A 附近的电力线图.

图 2.2.7 孤立导体表面曲率对电荷分布的影响

当具有尖端的导体带电到一定程度时, 尖端附近的强电场使

尖端附近空气中残留的离子在自由程内得到很大的速度, 因此当它们碰撞空气分子时有可能产生新的离子. 这样, 在尖端附近便会形成大量离子, 和尖端所带电荷同号的离子由于受到排斥力背离尖端远去; 和尖端上电荷异号的离子由于受到吸引力而趋向尖端并与尖端上的电荷中和, 这样, 尖端上的电荷逐渐减少, 这种现象叫做尖端放电. 尖端放电时, 其附近往往隐隐约约笼罩着一层光晕, 叫做电晕. 这是因为尖端附近的离子碰撞气体分子, 会使它处于激发状态, 当这些分子从激发状态回到正常状态的过程中便会发出光形成电晕. 有时夜间在高压输电线周围可看到电晕现象.

尖端放电在生产实践和科学实验中有许多应用, 避雷针就是其中的一个应用. 此外, 在静电加速器、静电照相、静电复印、静电除尘以及消除静电技术中也都应用到尖端放电.

象其它事物一样, 尖端放电也具有二重性. 在某些情形下尖端放电是有害的, 应该尽量避免, 例如高压输电线周围的电晕放电白白消耗了许多电能. 为了避免发生尖端放电, 高压输电线的表面应加工得非常光滑, 导线的半径也不能过小.

请读者注意, 前述关于孤立带电导体表面曲率与电荷分布的结论, 并不是在任何情形下都成立. 可以有导体表面曲率相等而电荷面密度不等的例外, 也可以有曲率大的表面上的电荷面密度反而小的例外. 例如, 在上一节例 2 中如果用细导线连在一起的两个金属球相距不远, 则每个金属球面上的电荷不可能均匀分布. 因为, 假若每个金属球面上的电荷均匀分布, 则每个金属球面上的电荷在自身内部产生的场强等于零, 但在另一个金属球内部产生的场强却不为零, 从而使每一个金属球内部的总场强不等于零, 这与静电平衡矛盾, 所以尽管同一金属球面上曲率处处相同但电荷面密度却不相同. 我们把以细导线相连的这两个金属球看作一个整体, 则它是孤立导体, 它表面上的电荷分布不符合前述规律.

下面我们讨论静电平衡时导体壳上电荷分布及其电场的

特点.

2.2.3 封闭导体壳(壳内空腔无带电体)

若封闭导体壳空腔中无带电体,则在静电平衡状态下,导体壳内表面上电荷面密度处处为零,壳内空间场强处处为零.

应用静电场的基本规律不难证明导体壳的上述性质.在导体壳的壳体内作一闭合曲面 S (如图 2.2.8 中虚线),把空腔包围在内.根据静电平衡条件, S 面上 E 处

处为零,因而其上电通量为零,则由高斯定理可知, S 内的电量代数和为零.而壳内无其它带电体,此即为导体壳内表面上电量代数和为零.

电量代数和为零可以是内表面上电量处处为零,也可以是在内表面某些地方带正电,而在另外的地方带等量的负电荷.下面,我们利用反证法证明后一种情形不可能存在.设

内表面上电荷如图 2.2.8 所示分布,则必有电力线从内表面带正电的地方发出.因为空腔内无带电体,电力线又不能在没有任何电荷的地方中断,所以电力线一定终止于内表面带负电的地点.因为一条电力线的两端一定存在电位差,这样,导体壳内表面上相应的两点间便有电位差,这违背导体壳处于静电平衡状态的前提.所以导体壳的内表面上电荷面密度一定处处为零.同样,由于空腔中无带电体,腔中任一点都不可能成为电力线的端点,而电力线又不能闭合,因而空腔中不可能存在任何电力线,即空腔中处处场强为零.

图 2.2.8 证明导体壳内表面上无电荷,壳内空间无电场

导体壳的带电性质可用图 2.2.9 所示实验演示.图中 A 、 B 是两个静电计, C 是近乎封闭的金属圆筒(圆筒内无其它带电体)固定在静电计 B 上, D 是固定在一根绝缘棒上的一个金属小球.首

图 2.2.9 导体壳内壁不带(电)的证明

先, 给金属圆筒 C 带上一定电量, 这时若将 D 接触 C 的外壁, 然后再将 D 接触静电计 A, 可看到 A 的指针偏转, 这证明 C 的外壁带电. 若将 D 伸入圆筒 C 内与其内壁任一处接触, 然后抽出 D 使其接触 A, 可看到 A 的指针始终不动, 这证明 C 的内壁不带电. 若 D 接触 C 的外壁后伸入 C 内与内壁接触, 然后再取出 D 与 A 接触, 这时 A 的指针也不偏转. 这说明, D 接触 C 外壁后所带的电荷在与 C 内壁接触时又全部转移到 C 的外壁上去了.

导体壳的带电性质在理论上被用来检验库仑的平方反比定律. 因为腔内无带电体时导体壳内表面不带电的结论是以高斯定理为基础得出的, 而高斯定理则由库仑平方反比定律推出. 如果二点电荷之间的静电力偏离平方反比关系, 例如有一偏差量 ϵ , 即其作用力为

$$f = \frac{1}{r^{2 \pm \epsilon}}$$

则高斯定理不成立. 从而, 导体壳内表面可能带电. 因此, 可以通过

实验测定导体壳内表面是否精确不带电来检验库仑定律中的平方反比关系. 开文迪许最早用这种方法进行了实验并证明指数偏差

不大于 0.02. 由于静电电量的测量远比库仑扭秤方法的测量精密, 而且库仑定律作为静电学的基本规律其重要性是不言而喻的. 因此, 继开文迪许之后许多物理学家运用他的方法, 不断改变测量技术进行实验, 以求得更为精密的结果. 本世纪 70 年代的实验已确认指数偏差 的上限为 $(2.7 + 3.1) \times 10^{-16}$.

实用中利用导体壳电荷分布的性质可使导体获得极高的电位. 例如, 在图 2.2.9 中以一与直流电源相连的导体 A 取代静电计 A, 使带绝缘棒的导体球 D 先与 A 接触, 然后插入金属筒 C 与其内壁接触, 则 D 上电荷将全部转移到 C 的外壁. 如此多次重复即可使 C 上积累的电荷不断增加, 因而电位不断升高, 并可获得远比源 A 的电位高得多的电位. 范德格拉夫起电机便是根据类似的原理制成, 其主要结构和工作原理详见本章 § 2.2.5.

内部无其他带电体的导体壳空腔中电场处处为零的性质无疑与导体壳本身的带电状况、壳外带电体的电荷及位置诸因素无关. 因而, 无论是导体本身带电还是导体壳处于外部带电体的电场之中, 这样的导体壳将“保护”壳所包围的空间不受外界电荷(电场)的干扰, 这就叫静电屏蔽. 静电屏蔽并非外部带电体不能在空腔中激发电场, 而是它所激发的电场始终为导体壳外表面上感应电荷产生的场所抵消.

等电位高压带电操作的工作人员穿着的工作服就是利用了导体壳的这一静电屏蔽性质. 等电位带电操作是指在不停电情况下对设备和高压线路进行维修. 工作人员坐在一个用绝缘柱支持的平台上, 缓缓升高平台使人逐渐靠近高压线, 过程中人体电位逐渐升高到接近高压线的电位, 最后用手接触高压线而实现等电位操作. 工作人员穿戴着由金属丝和纤维编织而成的衣、帽、手套和袜子, 就好象处在一个金属壳内. 尽管高压线周围有很强的电场, 但

能渗入人体的电场极弱. 因此当人接近和接触高压线时外部电场只是使金属工作服上电荷分布不断改变而产生脉冲电流, 而不会对人体造成伤害.

2.2.4 封闭导体壳(空腔内有带电体)

若封闭导体壳的腔内有带电体, 则在静电平衡状态下, 导体壳的内表面带电, 所带电量与腔内带电体所带总电量的代数和为零.

导体壳的这一性质利用高斯定理很容易加以证明, 读者自己可以进行.

一般情况下, 导体壳的外表面将带电, 壳外空间存在电场. 但若使导体壳接地, 同时壳外无带电体, 则导体壳的外表面上电荷全部流入地下, 壳外空间电场处处为零, 图 2.2.10(a)、(b) 分别给出一中性导体球壳内存在一点电荷 q 时接地前后的情形. 如果我们注意到接地导体的电位为零, 采用与 § 2.2.3 中同样的反证方法不难证明上述结论, 本文不再赘述.

图 2.2.10 腔内有带电体时的导体球壳

外部无带电体时接地导体壳外空间无电场的结论显然与空腔中带电体的电量及位置无关, 这就表明腔内带电体在壳外空间产

生的电场总是为导体壳的内表面上感应电荷的电场所抵消. 因而接地导体壳能够把腔内带电体的影响囿于导体壳所包围的空间之内. 这是另一种静电屏蔽.

工作中为了使某个带电体, 例如高压设备不致影响外部, 就可给它罩上接地金属壳.

普遍情况下, 封闭导体壳内外都可存在带电体, 自然, 这时导体壳的内外表面都带电, 且内外空间的电场都不为零. 但是, 应当指出, 只要导体处于静电平衡状态, 则壳外带电体及导体壳外表面上电荷二者在壳内空腔的合电场恒为零, 从而腔内区的电场仅由腔内带电体以及导体壳的内表面上的电荷决定; 同时, 腔内带电体及导体壳内表面上感应电荷二者在壳外空间的合场强恒为零, 从而壳外空间的电场仅由腔外带电体及导体壳的外表面上电荷决定. 对于这一结论的证明将由电动力学的唯一性定理给出, 已超出本课程要求. 这里仅以图 2.2.10(b) 所示接地导体球为例作一说明. 如果在此球外置另一点电荷 q_1 , 我们可以把这时的情况看作是图 2.2.10(b) 所示情况与一只是壳外有点电荷 q_1 而壳内无电荷 q 的导体球壳情况(如图 2.2.11(a)) 二者叠加. 由于前者在壳外无电场, 后者在腔内区电场为零, 叠加时理应对原有的电荷分布都没有影响. 因此, 最后的电场分布在空腔区的分布与图 2.2.10(b) 相同, 在壳外区的与图 2.2.11(a) 一致, 如图 2.2.11(b) 所示.

由此可知, 一接地导体不仅可以屏蔽腔内带电体对外界的静电作用, 亦可屏蔽外部带电体对腔内的静电作用. 但是不接地的导体壳却只能完成后一屏蔽. 这是因为腔内带电体不仅在导体壳内表面引起感应电荷, 还会在导体壳外表面产生与它等量的感应电荷. 出现在外表面的这一电荷最终将影响壳外空间电场的分布.

实际应用中, 采用封闭的金属网亦可有良好的静电屏蔽作用.

图 2.2.11 接地导体壳的内外电场

2.2.5 范德格拉夫静电起电机

范德格拉夫(Van de Graff)静电起电机是利用导体壳上的电荷分布性质和尖端放电现象使导体获得极高电势的一种装置,图 2.2.12 是它的构造示意图.图中 A 为一金属球壳,它固定在绝缘支柱 B 上.C 是用绝缘材料(例如橡胶布)制成的传送带,它套在两个滑轮 D 和 D' 上,滑轮 D 由电动机 M 带动旋转,因而传送带循环运转.图中 E 和 F 是两排金属针.当 E 和几万伏的直流高压电源 H 的正极接通时,由于尖端处电场特别强,发生尖端放电现象,使靠近 E 的传送带带上正电,图中 G 是接地金属板,它的作用是加强 E 向传送带的喷电.当传送带上的正电荷被运送到 F 附近时,F 由于静电感应带负电.同样,由于尖端附近电场特别强而发生尖端放电,这样,传送带上的正电荷便被转移到金属球壳 A 的外表面上.随着传送带不断地把正电荷运送到球壳上,球壳外表面所带正电荷越来越多,因而它的电位(即对地电位差)也就越来越高.大型的范德格拉夫静电起电机可产生高达 10^7 伏特的电位.

图 2.2.12 范德格拉夫静电起电机

若放电针 E 接直流高压电源 H 的负极, H 的正极接地, 则球壳 A 的外表面带负电, 这时球壳 A 的电位是负值.

范德格拉夫静电起电机的主要用途是用来加速带电粒子, 使粒子获得很大的动能. 为此, 可在静电起电机内装一加速管. 加速管竖直放置, 顶部在金属球壳内, 管内有离子发生装置, 底部可放置各种材料制成的靶, 加速管被抽成高真空. 因为金属球壳电位比地电位高, 所以管内电场的方向竖直向下. 正离子注入这电场后便在电场力作用下向下加速运动. 由于电场很强, 离子经过一段时间

加速便能获得很大的动能, 因而当它轰击底部的靶时, 能够引起核反应产生各种放射线. 所以范德格拉夫静电起电机是研究原子核反应的基本设备之一.

§ 2.3 电偶极子在外电场中所受的作用

为了研究电场对电介质的作用, 本节先研究电偶极子在外电场中受到的作用. 所谓外电场是指偶极子以外的其它电荷产生的电场.

2.3.1 均匀外电场的作用

如图 2.3.1, 电偶极矩为 $p = qL$ 的电偶极子位于场强为 E 的均匀外电场中, 电偶矩 p 的方向与 E 的方向之间的夹角为 θ . 电偶极子的正负电荷所受电场力分别为 $f_+ = qE$ 和 $f_- = -qE$,

$$f = f_+ + f_- = qE + (-qE) = 0$$

图 2.3.1 电偶极子在均匀外电场中所受的作用

即电偶极子在均匀外电场中所受合力为零. 因而, 初速为零的电偶极子在外电场中不会发生平动.

因为 f_+ 与 f_- 大小相等、方向相反且不在同一直线上, 所以它们构成为力偶. 因而, 电偶极子在均匀外电场中受到力偶矩作用. 因

为力偶矩与转轴的位置无关, 我们可以取通过负电荷所在位置且垂直电偶矩 p 的转轴计算电偶极子所受力矩 M . 由力矩的定义可得,

$$M = L \times f_+ = L \times qE = qL \times E = p \times E$$

即

$$M = p \times E \quad (2.3.1)$$

由式(2.3.1)可见, 只要 p 的方向与外电场 E 的方向不在一条直线上, 则电偶极子在均匀外电场中会受到力矩作用, 这力矩要使 p 的方向转向 E 的方向. 所以电偶极子在均匀外电场中一般将发生转动.

若电偶极子的电偶矩 p 的方向与场强 E 的方向一致或者相反, 即对应 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 两个位置, 则电偶极子不仅所受合力为零, 且力矩也为零. 所以 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 都是电偶极子的平衡位置, 前者对应稳定平衡, 后者对应不稳定平衡.

* 2.3.2 不均匀外电场的作用

如图 2.3.2, 电偶矩 $p = qL$ 的电偶极子在不均匀外电场中. 设电偶极子中心 O 点的场强为 E , 正负点电荷所在位置场强分别为 E_+ 和 E_- , 则电偶极子在外电场中所受合力为

$$f = f_+ + f_- = qE_+ + (-qE_-) = q(E_+ - E_-)$$

因为电偶极子正负点电荷之间距离 L 很小, 所以近似有

$$E_+ - E_- = \frac{E}{L} j \cdot L$$

而

$$\begin{aligned} \frac{E}{L} &= \frac{E}{x} \frac{dx}{dL} + \frac{E}{y} \frac{dy}{dL} + \frac{E}{z} \frac{dz}{dL} \\ &= \cos(L, x) \frac{E}{x} + \cos(L, y) \frac{E}{y} + \cos(L, z) \frac{E}{z} \end{aligned}$$

所以

$$f = q(E_+ - E_-) = qL \frac{E}{L}$$

图 2.3.2 电偶极子在不均匀外电场中所受作用

$$\begin{aligned}
 &= p \cos(L, x) \frac{E}{x} + p \cos(L, y) \frac{E}{y} + p \cos(L, z) \frac{E}{z} \\
 &= p_x \frac{E}{x} + p_y \frac{E}{y} + p_z \frac{E}{z} = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} E \\
 &= (\mathbf{P} \cdot \nabla) E
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

这里 ∇ 是矢量微分运算符号, 在直角坐标系中为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

由式(2.3.2)可见, 电偶极子在不均匀外电场中所受合力不为零, 合力的大小和方向不仅与场强分布以及电偶极子的电偶矩大小有关, 还和它在外电场中的取向有关. 例如, 在图 2.3.2 中若 \mathbf{P} 的方向与 \mathbf{E} 的方向一致, 则电偶极子所受合力指向场强增大的方向. 反之, 若 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 方向相反, 则合力指向场强减弱的方向.

若电偶极子的电偶极矩的方向与场强方向不在同一直线上, 则电偶极子在不均匀电场中同时还受到电场的力矩, 电场力对偶极子中心 O 点的力矩 M 为

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\mathbf{L}}{2} \times \mathbf{f}_+ + \frac{\mathbf{L}}{2} \times \mathbf{f}_- = \frac{\mathbf{L}}{2} \times q\mathbf{E}_+ + \frac{\mathbf{L}}{2} \times q\mathbf{E}_- \\
 &= q \frac{\mathbf{L}}{2} \times (\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-)
 \end{aligned}$$

因为 L 很小, 所以近似有 $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-}{2}$ 于是

$$M = q \frac{\mathbf{L}}{2} \times 2\mathbf{E} = \mathbf{P} \times \mathbf{E} \tag{2.3.3}$$

式(2.3.3)表明, 非均匀电场中电偶极子受到的力矩与均匀电场中的相同. 只是式中场强 E 应取为电偶极子中心处的场强.

在摩擦起电的现象中, 我们曾看到用丝绸摩擦过的玻璃棒能够吸引纸片、头发等轻微物体. 这是因为带电玻璃棒周围是不均匀电场. 而纸片、头发等物中的分子在电场作用下首先沿电场方向形成等效电偶极子(参见§ 2.4 电介质的极化), 继而非均匀电场对这些电偶极子的力使它们趋向于场强增强的方向, 因而被吸向玻璃棒.

§ 2.4 电介质的极化

2.4.1 电介质对电场的影响

电介质内部没有自由电荷, 是电的绝缘体, 但把它放入电场, 却可使空间各处场强发生变化. 这可用图 2.4.1 所示实验演示: 用感应起电机(或直流高压电源)使两块平行的金属大平板带上等量异号的电荷, 然后与起电机断开, 使两板上的电量保持不变. 两板

图 2.4.1 电介质对电场的影响

的电位差由静电计指针偏转的角度指示. 把一块电介质板插入两块平板间, 可看到静电计指针偏转的角度变小, 即二金属板间的电

位差变小了. 由于在插入电介质板的过程中, 二金属板之间的距离并未改变, 电位差的变小表明两块平板间的电场强度减弱. 若撤出介质板, 可以看到静电计指针偏转又复原, 这表明金属板上电荷并未因插入介质板而改变. 因此, 插入介质板后二金属板之间电场减弱的事实意味着在所插入的电介质板上出现了新的电荷分布, 这些新电荷产生的附加电场使总的电场强度变小. 要说明电介质板上为什么会出现新的电荷分布, 须先了解电介质在外电场中发生的变化, 即下面要讨论的电介质的极化.

2.4.2 电介质的极化

电介质由中性分子(或中性原子)组成. 中性分子内部包含等量的正、负电荷, 但它们并不集中于一点, 而是分布在线度为 10^{-10} m 数量级的分子体积内. 所以中性分子是一个复杂的电荷系. 但是就中性分子在外面产生电场以及它在外电场中受到的静电作用而言, 可以把分子内全部正电荷看成集中于一点, 这一点叫做分子的正电重心, 把分子内全部负电荷看成集中于另一点, 这点叫做分子的负电重心. 分子的正、负电重心构成一个电偶极子. 即一个中性分子一般可等效为一个电偶极子.

按照分子的电结构, 电介质大致可分为两类. 一类电介质分子在没有外电场时, 分子的正、负电重心重合, 即电偶极矩为零, 这类分子叫做无极分子. 例如, N_2 、 H_2 、 O_2 、 CO_2 、 CH_4 、 CCl_4 等分子都是无极分子. 另一类电介质分子, 在没有外电场时, 它的正、负电重心不重合, 即分子本身具有一定的电偶极矩(叫做固有电偶极矩), 这类分子叫做有极分子. 例如, HCl 、 CO 、 NH_3 、水、甲醇、硝基苯等分子都是有极分子. 在外电场作用下, 无极分子和有极分子发生的变化不同, 分别介绍如下:

1. 无极分子的位移极化

在外电场的作用下, 无极分子内的电子和原子核沿相反方向

发生微小的位移,因而无极分子内的正负电重心分开,形成一定的电偶极矩,这个电偶极矩叫做分子的感生电偶矩.感生电偶矩 $P_{\text{感}}$ 的方向与外电场的场强方向一致,大小和外电场的电场强度大小成正比.在图上我们用一段小箭头表示无极分子的等效电偶极子,箭头的始端为负电重心,末端为正电重心(见图 2.4.2(a)). 于是一块由无极分子构成的电介质板放入均匀外电场后,电介质内各个分子的极化状况可用图 2.4.2(b) 表示. 各分子的等效电偶极子沿外电场方向排列起来,同一直线上相邻两个电偶极子的正、负电荷挨在一起,因而均匀电介质内部没有净电荷.但在和外电场方向垂直的电介质表面上出现了等量异号电荷,这就是电介质的极化现象.电介质表面上出现的电荷叫做极化电荷.

图 2.4.2 均匀电场中无极分子位移极化

极化电荷被束缚在分子之内,它既不能从电介质表面转移到别的物体上,也不能在电介质内部作宏观位移,因此又称为束缚电荷.因为这类电介质的极化,是由于分子内的电子和原子核在外电场作用下相对位移造成的,所以叫做位移极化.因为电子的质量远小于原子核的质量,所以无极分子的位移极化主要是电子位移造成的.

2. 有极分子的取向极化

对有极分子构成的电介质而言,虽然外电场不存在时,每个分子具有固有电偶矩,但由于分子的热运动,这些电偶矩的取向是完

全紊乱的(见图 2.4.3(a)). 因而, 在电介质的任一物理小体积内, 分子电矩的矢量和 $\sum p_{\text{分子}}$ 为零, 宏观上不产生电场. 当把电介质放入外电场中时, 每个有极分子受到电场的力矩作用, 要使分子的固有电偶矩转向外电场方向, 但由于分子热运动的缘故, 所有分子的电偶矩不可能都沿外电场方向排列起来, 而只是部分整齐地沿外电场方向取向(见图 2.4.3(b)). 尽管如此, 在垂直电场方向的电介质表面上也会出现极化电荷. 显然, 外电场愈强, 分子电偶矩的取向愈整齐, 电介质表面上的极化电荷也愈多. 因为这种极化是由有极分子的电偶矩取向所造成, 所以叫做取向极化.

图 2.4.3 有极分子的取向极化

应该指出, 在由有极分子组成的电介质发生取向极化的同时, 还会发生位移极化, 因为: 感生电偶矩远小于分子的固有电偶矩, 对有极分子来说位移极化引起的效应远小于取向极化所引起的效应, 所以通常把位移极化忽略了. 但若外电场高频变化, 由于分子惯性较大, 分子固有电偶矩的取向跟不上外电场的变化, 因而取向极化大大减弱. 另一方面, 电子的惯性很小, 电子位移能跟上外电场的变化. 所以在高频变化的外电场中, 有极分子的电介质的极化主要是位移极化.

2.4.3 极化强度矢量

由电介质的极化过程可以看出, 无论何种电介质, 在未被极化时, 若在电介质中任取一物理小体积 V , 则 V 内分子电偶矩的

矢量和 $P_{\text{分子}}$ 为零. 而当电介质在外电场中极化后, V 内的各个分子, 或者具有了与外电场方向一致的感生电偶矩, 或者它们的固有电矩沿外电场方向部分整齐地排列起来, 因而 V 内分子电偶矩的矢量和 $P_{\text{分子}}$ 不再为零. 外电场愈强, V 内的 $p_{\text{分子}}$ 愈大.

因此, 比值 $\frac{P_{\text{分子}}}{V}$ 能够描写电介质内各处极化的强弱程度和方向, 我们把它叫做电极化强度矢量, 用符号 P 表示, 即

$$P = \frac{P_{\text{分子}}}{V} \quad (2.4.1)$$

由(2.4.1)式可知, 极化强度在数值和方向上等于单位体积内分子电偶矩的矢量和. 在 SI 中, 极化强度的单位为 $C \cdot m^{-2}$, 它的量纲为 $L^{-2}TI$.

若电介质中各点的极化强度矢量相等, 则叫做电介质处于均匀极化状态, 否则叫做电介质处于非均匀极化状态.

2.4.4 极化电荷与极化强度的关系

均匀电介质在外电场中极化后, 它的表面会出现极化电荷. 如果电介质不均匀, 则在电介质内部也会出现极化电荷. 外电场愈强, 电介质单位体积内分子电偶矩的矢量和愈大, 电介质表面的极化电荷也愈多. 这表明, 极化电荷与极化强度之间存在确定的关系. 下面, 我们来研究它们之间的关系.

设在已极化的电介质内部任意作一闭合曲面 S , 则 S 将把一些位于 S 附近的电介质分子截为两部分, 一部分在 S 内, 一部分在 S 外, 如图 2.4.4(a) 所示.

显然, 只有被 S 所截的分子, 或者说其电偶矩穿过 dS 的分子, 才对 S 内的极化电荷有贡献. 为此, 我们首先讨论 S 上任一物理上无限小的面元 dS 所截的分子的贡献.

在 dS 附近的薄层内, 可近似认为极化是均匀的, 各分子具有

图 2.4.4 证明 $q = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$

相等的电偶矩, 设该处极化强度为 \mathbf{P} 、分子电偶矩 $p_{\text{分子}} = ql$, l 与面元 dS 的外法线单位矢量 \mathbf{n} 的夹角为 θ 、单位体积内的分子数为 N 。

以 l 为长、底面为 dS_1 和 dS_2 作一斜柱体, 如图 2.4.4(b) (为了看清分子极化的贡献, 图中对 l 及 dS 的大小并未按比例画出), 面元 dS 位于斜柱体中间。斜柱体的体积为

$$dV = dS l \cos \theta$$

由图 2.4.4(b) 可见, 只有分子电偶矩中心落在 dV 内的那些电偶极子的正、负电荷才被 dS 对半分开。 dV 内的电偶极子数为 $N dV = N l \cos \theta dS$, 所以被 dS 截在 S 内的电量绝对值为

$$dq = q \cdot N l \cos \theta dS$$

因为

$$\mathbf{P} = N q l$$

所以 $N q l \cos \theta = P \cos \theta = P_n$, 于是

$$dq = P_n dS$$

因为在 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, $P_n > 0$, 落在 S 内的是负电荷, 而当 $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时, $P_n < 0$

0, 落在 S 内的是正电荷, 所以被 dS 所截的电量可写为

$$dq = - P_n dS = - P \cos \theta dS$$

把上式对曲面 S 积分, 即可求得 S 所截的总电荷, 也就是 S 内的极化电荷, 为

$$q = - \int_S P \cos \theta dS \quad (2.4.2)$$

上式表明, 介质中任一闭合面内包围的极化电荷等于极化强度在此闭合面上的通量的负值. 它是关于极化电荷与极化强度的普遍关系. 可以证明, 对均匀介质(指介质本身的物理性质各处相同), 介质体内处处无极化电荷, 即极化电荷的体密度为零; 而对非均匀介质, 体内会出现极化电荷. 但无论何种介质, 一旦极化其表面上必定有极化电荷.

现考虑介质表面的极化电荷. 同样在介质表面取一物理无限小面元 dS , 该处极化强度为 P , P 与表面外法线方向夹角为 θ . 由图可见, 极化电荷出现在厚度为 $l \cos \theta$ 的表面层内; 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时表面带正电, $\theta > \frac{\pi}{2}$ 时表面带负电. 类似于图 2.4.5(b), 凡其分子电偶矩中心位于以表面层的内底面为中心面, 斜高为 l 的柱体内的分子, 对表面层中电荷有贡献. 因此面积为 dS 的表面层内的电荷为

$$dq = (N l dS \cos \theta) q_{\text{分子}} = P_n dS$$

而由面电荷定义, $dq = \sigma dS$, 最后可得

$$\sigma = P_n \quad (2.4.3)$$

式(2.4.3)表明电介质表面极化电荷的面密度等于该处极化强度在表面外法线方向的投影.

把式(2.4.2)用于两种电介质分界面的附近区域, 可求得分界

确切地说, 这一结论在介质体内不存在自由电荷时, 即均匀电介质在外电场中极化时成立.

图 2.4.5 介质表面极化电荷

面处极化电荷的面密度. 设界面某处两侧的极化强度分别为 P_1 、 P_2 , 该处界面法线方向从介质 2 指向介质 1. 在分界面 S 处作一很小的扁封闭圆柱面 S , 使二底面紧靠界面, 如图 2.4.6, 则该闭面包围的极化电荷 q 为

$$q = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\text{底面1}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{底面2}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{侧面}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

$$q = - \int_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\text{底面1}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{底面2}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{侧面}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$$

因为柱面很扁, 所以 $\int_{\text{侧面}} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0$ 于是

$$q = - (P_1 \cos \alpha_1 S + P_2 \cos \alpha_2 S)$$

由图 2.4.6 可知 $\cos \alpha_2 = - \cos \alpha_1 = - \cos \alpha$

$$q = - (P_1 \cos \alpha - P_2 \cos \alpha) S = (P_2 \cos \alpha - P_1 \cos \alpha) S$$

$$= (P_{2n} - P_{1n}) S$$

分界面上的极化电荷面密度

图 2.4.6 证明 $\sigma = P_{2n} - P_{1n}$

$$= -\frac{q}{S} = P_{2n} - P_{1n} \quad (2.4.4)$$

由式(2.4.4)可知, 若介质 2 的另一侧是真空, 则

$P_{1n} = 0$, 于是 $\sigma = P_{2n}$ 可见式(2.4.3)是式(2.4.4)的一个特殊情况, 或者说应用式(2.4.2)就可导出式(2.4.3).

根据式(2.4.3)容易证明: 若介质均匀极化, 则电介质内部没有极化电荷. 证明如下:

设在电介质内部任取一小封闭曲面 S , 则由式(2.4.3); S 所包围的极小体积 V 内的极化电荷 q 为

$$q = - \oint_S P_{jn} dS = - \oint_S P_{jn} \cos \alpha dS$$

因为 $\oint_S dS = 0$

所以 $q = 0$

由于封闭曲面 S 位置的任意性, 上述结果表明由介质均匀极化时, 其体内处处无极化电荷.

例 设有一均匀极化的电介质球, 极化强度为 P , 求电介质球表面上的极化电荷分布.

解 由于电介质均匀极化, 其体内无极化电荷, 极化电荷只出现在球的表面.

取球心 O 为原点, 平行于 P 的直径为极轴. 对球面上任一点

a, 其极角 θ 也就是 a 点表面法线与 P 的夹角. 根据式(2.4.3), 得该处极化电荷面密度为

$$\sigma = P_n = P \cos \theta.$$

由此可见, 在 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 的半个球面上 $\sigma > 0$, 而在 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 的半个球面上 $\sigma < 0$. 在两个半球的分界

线上 $\sigma = \frac{P}{2} = 0$; 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 两处 σ 最大(见图 2.4.7).

2.4.5 电介质的极化规律

虽然电介质的极化是由自由电荷产生的电场引起的, 但是电介质中任何一处的极化强度 P 的大小和方向却并不仅由 E_0 决定. 因为电介质一经极化, 其上就出现极化电荷和由极化电荷产生的附加电场. 这附加电场同样对电介质的极化起作用, 因而电介质中任一点的极化强度是由自由电荷和极化电荷在该点产生的总电场强度 E 所决定.

图 2.4.7 均匀极化电介质球表面极化电荷分布

实验发现, 有一类电介质, 当电场不太强时电介质中任何一点的极化强度的方向和该点电场强度的方向一致, 极化强度的大小和该点总场强的大小成正比, 即

$$P = \epsilon_0 \epsilon_r E \tag{2.4.5}$$

式中 ϵ_r 是一无量纲的常数, 叫做极化率, 它只与电介质的性质有关, 与电场强度 E 无关. 我们把满足上述极化规律的电介质叫做各向同性电介质, 本书主要讨论这种电介质.

各向同性电介质和均匀电介质是两个不同的概念, 前者是指在电介质中同一点, 不论场强是什么方向, 只要场强大小相同, 则在各方向引起的极化强度的大小相等. 而后者是指电介质中各点的物理性质相同. 例如, 若电介质中各点的极化率相等, 这就是均匀电介质.

对于具有晶体结构的电介质(例如石英晶体),极化规律比较复杂.介质内任一点的极化强度的大小不仅和该处的电场强度的大小有关,而且和场强 E 与晶轴之间的夹角有关.这类电介质的极化规律在直角坐标系中可表示为

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0(\epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z) \\ P_y &= \epsilon_0(\epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z) \\ P_z &= \epsilon_0(\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

我们把这类电介质叫做各向异性电介质.各向异性电介质的极化率是用 $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \dots, \epsilon_{yx}, \epsilon_{yy}, \dots, \epsilon_{zz}$ 等九个量来描述.

由式(2.4.6)可知,在各向异性电介质中任意一点, P 的方向与 E 的方向不同.例如,设 E 的方向沿 X 轴,即 $E_x = E, E_y = E_z = 0$, 根据式(2.4.6)可得极化强度 P 在 x, y, z 三轴的分量分别为: $P_x = \epsilon_0 \epsilon_{xx}E, P_y = \epsilon_0 \epsilon_{yx}E, P_z = \epsilon_0 \epsilon_{zx}E$, 显然 P 的方向不沿 X 轴,即 P 与 E 方向不同.

还有一些固体电介质,如酒石酸钾钠($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)等,在一定温度范围内,极化强度与电场强度之间的关系很复杂,即使它们的分量之间也不存在如式(2.4.6)那样的线性关系.极化强度与电场强度之间甚至没有单值关系,即极化强度的大小不能由电场强度的值唯一地确定,它还和电介质的极化历史有关.关于这类电介质的性质,我们将在§ 2.7 中介绍.

§ 2.5 有电介质时的电场 电位移矢量 有电介质时的高斯定理

2.5.1 有电介质时的电场

如前所述,电介质在外电场中发生极化,电介质上出现极化电荷.极化电荷象自由电荷一样,也要在周围空间产生电场.因此,电场中有电介质时,电介质内外任何一点的电场强度 E 是自由电荷产生的电场强度 E_0 和极化电荷产生的附加电场 E 的矢量叠加,即

$$E = E_0 + E$$

在许多问题中自由电荷的分布是已知的, 所以不难求出 E_0 的分布. 但极化电荷的分布却和电介质中 E 的分布彼此关联, 这使得求解有电介质时的电场变得比较复杂, 其计算上的循环可图示如下:

$$P = q \quad ()$$

$$q_{\text{自由}} = E_0 - E = E$$

$$(= E_0 + E)$$

为了克服这一计算困难, 我们设法绕开极化电荷 q 和它所产生的电场 E , 为此将引入一新的物理量——电位移矢量.

2.5.2 电位移矢量 有电介质时的高斯定理

在第一章中我们在库仑定理的基础上导出了真空静电场的高斯定理. 实践表明, 库仑定律不仅反映真空中二宏观点电荷之间静电作用力的规律, 而且位于物质内部原子中的核与核外电子之间的静电作用也遵从库仑定律. 因此当电场中有电介质时, 只要考虑了极化电荷, 高斯定理仍然成立, 即对电场中任一封闭曲面有

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q_{\text{自由内}} + q_{\text{内}}) \quad (2.5.1)$$

式中 $q_{\text{自由内}}$ 和 $q_{\text{内}}$ 分别表示封闭面 S 内的自由电荷和极化电荷的代数和, 而 E 应是全部电荷产生的总场强. 由式(2.4.2), 封闭面 S 内的极化电荷为

$$q = - \oint_S P \cdot dS$$

代入上式, 有

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} (q_{\text{自由内}} - \oint_S P \cdot dS)$$

或写作

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{自由内}}$$

引入一辅助物理量 \mathbf{D} , 令

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.5.2)$$

由此定义的 \mathbf{D} 叫做电位移矢量, 或称电感应强度. 一般情况下 \mathbf{D} 是位置坐标的点函数, 它的单位与 \mathbf{P} 的单位相同, 在 SI 中为 $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$, 量纲为 L^{-2}TI .

引入 \mathbf{D} 之后, 前面的积分式可写为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{自由内}} \quad (2.5.3)$$

式(2.5.3)表明: 任意一封闭曲面 S 的电位移通量等于该封闭曲面包围的自由电荷的代数和. 这就是有电介质时的高斯定理, 又称 \mathbf{D} 的高斯定理. 显然, 真空静电场的高斯定理是有介质时的高斯定理的一个特殊情况. 因为真空时 $\mathbf{P} = 0$, 则 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, 于是式(2.5.3)还原为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{自由内}}$$

引入电位移矢量并导出了有电介质时的高斯定理, 对计算有电介质时的电场强度分布带来什么方便? 首先, 方程中已不再包含极化电荷 q , 即 \mathbf{D} 的通量与 q 无关(注意, 这并不意味着 \mathbf{D} 与 q 无关!), 如果某些问题中自由电荷和电介质的分布具有某种对称性, 从而使 \mathbf{D} 的分布具有某种对称性, 我们就有可能根据式(2.5.3)求出 \mathbf{D} 的分布. 如果再进一步知道 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的关系, 就可以通过 \mathbf{D} 而求出 \mathbf{E} 了.

我们知道, 对于各向同性介质有

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

代入 \mathbf{D} 的定义式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

式(2.5.4)表示, 各向同性电介质中任一点的 D 和该点的 E 成正比. 式中常量 $= \epsilon_0 \epsilon_r$ 及 $\epsilon_r = 1 +$ 都只和电介质的极化率有关, 分别称为电介质的电容率(介电常数)和相对电容率. 后者为无量纲的纯数. 真空的 $= 0$, $\epsilon_r = 1$, $= \epsilon_0$, 因此把 ϵ_0 称为真空的电容率(介电常数).

任何各向同性电介质的 > 0 , 因而其 $\epsilon_r > 1$. 常用的电介质的相对电容率见表 2.1.

表 2.1 电介质的相对电容率和击穿电场强度

电介质	相对电容率 ϵ_r	击穿电场强度(kV/mm)
空气 (1atm)	1.000590	3
纯水 (20)	80	—
油	4.5	12
玻璃	5—10	10—25
云母	3.7—7.5	80—200
普通陶瓷	5.7—6.8	6—20
电木	7.6	10—20
聚乙烯	2.3	50
二氧化钛	100	6
氧化钽	11.6	15
钛酸钡	$10^2—10^4$	3

式(2.5.4)称为电介质的性能方程.

应用有介质时的高斯定理和电介质的性能方程, 在 D 的分布具有特殊对称性的情况下可以方便地求出 D 和 E 的分布. 下面我

通常情况下, 电介质是电的绝缘体. 但当电介质中的电场强度超过某一极限值时, 介质就丧失其绝缘性能而变为导体. 这种现象叫做电介质的击穿. 这一极限场强值叫做电介质的击穿电场强度(或介电强度).

们举例说明其应用.

例 1 设一半径为 R 、电量为 q 的金属球埋在相对电容率为 ϵ_r 的均匀无限大电介质中. 求: (1) 电介质中 D 和 E 的分布 (2) 电介质与金属球的分界面上的极化电荷面密度.

解 (1) 由自由电荷和电介质分布的球对称性可知电介质中 D 的分布具有球对称性. 在电介质中作一半径为 r 的同心球面 S (图 2.5.1), 则 S 上各点 D 的大小相等, D 的方向沿径向, 于是 S 面的电位移通量为

$$\oint_S D \cdot dS = \oint_S D_n dS = D_n \oint_S dS = D_n \cdot 4\pi r^2$$

式中 D_n 是 D 在 S 面法线方向的分量. S 面所包围的自由电荷为 q , 根据有介质时的高斯定理可得

$$D_n \cdot 4\pi r^2 = q$$

$$D_n = \frac{q}{4\pi r^2}$$

因为球面 S 的法线方向即为矢径 r 的方向, 故

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \frac{r}{r} = \frac{q}{4\pi r^2} r$$

图 2.5.1 例 1 用图

再由电介质的性能方程可得

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} r$$

若金属球外没有电介质而金属球所带电量仍为 q , 则金属球外的电场强度为

$$E_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} r$$

两相比较, 可得

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

即在无限大均匀电介质中任一点的场强是自由电荷在该点产生的场强的 $1/\epsilon_r$ 倍. 至此, 我们并未计算极化电荷和它的附加电场而直接求出了电场分布.

(2) 根据式(2.4.3), 在电介质与金属球分界面上的极化电荷面密度为

$$\sigma_p = P_n$$

对各向同性介质, 有 $P_n = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_n$. 由于分界面的外法线方向为 $-\mathbf{r}$ 方向, 故

$$E_n = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}q$$

由此可得

$$\sigma_p = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_n$$

$$= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{1}{4\pi r^2}q$$

式中 $\frac{1}{4\pi r^2}q$ 为金属球表面自由电荷的面密度. 因为 $\epsilon_r > 1$, 结果表明与 σ 反号. 整个分界面上极化电荷为 $q_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}q$, 即极化电荷的绝对值恒小于自由电荷的绝对值.

由此可见, 介质极化后相当于新增一均匀带电球面, 因此在介质中任一点, 由场强叠加原理, 有

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{r} + \frac{q_p}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{r} + \frac{-\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}\mathbf{r} \end{aligned}$$

与(1)中结果完全一致这正是我们预料之中的.

例 2 设两块平行放置的均匀带电大金属平板, 电荷面密度分别为 $+$ 和 $-$, 两平板间充有两层均匀电介质, 它们的相对电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$), 两层电介质的交界面与带电大平板平行. 求: (1) 两层电介质中的场强分布. (2) 每层电介质中的极化强度分布. (3) 两层电介质交界面上的极化电荷面密度.

解 (1) 求电场强度

因为自由电荷产生的电场是方向垂直于大平板的均匀电场, 因而介质均匀极化, 且极化后只在与平板平行的表面上出现均匀分布的电荷, 故介质中的 E , 从而 D 的方向亦垂直于平板. 作闭合圆柱面 S_1 如图 2.5.2(a), 使柱面的一个底面位于金属板内. 静电平衡下, 金属内部 $E = 0, D = 0$, 从而 S_1 上的电位移通量为

$$\oint_{S_1} D_1 \cdot dS = \int_{\text{左底面}} D_1 \cdot dS + \int_{\text{右底面}} D_1 \cdot dS + \int_{\text{侧面}} D_1 \cdot dS$$

$$= D_1 \cdot S$$

式中 D_1 是第一层电介质(ϵ_1)中的电位移矢量, S 是底面的面积. 该闭合面内的自由电荷为

$$q = \sigma \cdot S$$

根据 D 的高斯定理, 得

$$D_1 \cdot S = \sigma \cdot S$$

$$D_1 = \sigma$$

写成矢量形式, 有

$$D_1 = \sigma \cdot n$$

式中 n 是平板法线由带正电板指向负板方向的单位矢量.

同理, 作闭合柱面 S_2 (见图 2.5.2(a))可求得第二层电介质中的电位移矢量为

$$D_2 = \sigma \cdot n$$

可见, $D_1 = D_2$

所以, 电位移线是连续地穿过两种电介质的交界面(图 2.5.2

图 2.5.2 例 2 用图

(b)).

根据电介质的性能方程可得两种电介质中的场强分布如下:

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} n = \frac{E_0}{r_1}$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} n = \frac{E_0}{r_2}$$

式中 E_0 是两块带电大平板上自由电荷产生的场强. 这表明, 均匀电介质充满电场中两个等位面之间空间时, 介质中任一点的场强是自由电荷在该点产生的场强的 $\frac{1}{r}$ 倍. 由于 $r_1 > r_2$, 所以 $E_1 < E_2$, 电力线条数在两种电介质的交界面发生突变.

(2) 求极化强度

由式(2.4.5), 两层电介质中的极化强度各自均匀, 分别为

$$P_1 = \epsilon_1 - \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{r_1} n$$

$$P_2 = \epsilon_2 - \epsilon_0 E_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{r_2} n$$

(3) 根据(2.4.4)式, 两层电介质交界面上的极化电荷面密度为

$$= P_{2n} - P_{1n}$$

式中 P_{2n} 、 P_{1n} 分别是 P_1 、 P_2 在交界面法线方向 n 的投影, 这里 $n = -n$. 所以

$$= -\frac{r_2 - 1}{r_2} - \left(-\frac{r_1 - 1}{r_1}\right)$$

$$= \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

由题设 $r_1 > r_2$, 所以 > 0 . 分界面上极化电荷为正电荷.

2.5.3 关于 D 的进一步讨论

有介质时的高斯定理表明 D 在封闭曲面上的通量只和面内自由电荷有关. 而在§ 2.5.2 所举二例的计算结果中我们又看到, 二例中电介质中的场强均有 $E = \frac{E_0}{r}$, 而空间任一点的电位移

$$D = \epsilon_0 r E = \epsilon_0 E_0.$$

即 D 只和该点自由电荷产生的场强 E_0 相差一常数, 亦即 D 的分布也只由自由电荷决定. 由此, 初学者常常会误以为任何情况下 D 的分布都只和自由电荷有关. 事实上§ 2.5.2 中二例只是电介质均匀充满整个电场或均匀充满二等位面之间空间的两种特例. 一般情况下, D 的分布不仅和自由电荷有关, 而且与极化电荷有关. 为此特举例说明如下.

设有两块平行放置的大平板, 分别带有等量异号的电荷, 在两板间产生场强为 E_0 的均匀电场. 今把相对电容率为 r 的电介质细棒放入这电场中, 棒轴与 E_0 的方向平行(图 2.5.3). 设棒长为 l , 棒的直径为 d , 且 $l \gg d$, 棒被均匀极化, 极化强度为 P . 棒的两端与带电大平板相距很远, 因而介质棒放入后平板上的电荷分布可

图 2.5.3 $D = \epsilon_0 E_0$ 的例子

认为未变. 现考虑棒中点的场强. 由于介质棒细长, 极化电荷主要出现在棒的二端面, 并可视为点电荷. 所以极化电荷在棒中点产生的附加电场 E 的大小为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

式中 q 为介质棒两端的极化电荷的绝对值, 而 $q = \sigma_l \cdot \frac{d^2}{4} = P \frac{d^2}{4}$, 把这代入上式得

$$E = \frac{P d^2}{2\epsilon_0 l^2}$$

因为 $l \gg d$, 所以 E 与 E_0 相比可忽略不计, 故介质棒中点的场强大小

$$E = E_0 - E = E_0$$

即
$$E = E_0 - \frac{E_0}{r}$$

再由电介质的性能方程, 可得介质棒中点的电位移矢量为

$$D = \epsilon_0 r E = \epsilon_0 r E_0$$

若以 D_0 表示两块大平板没有介质棒时的电位移矢量, 则

$$D_0 = \epsilon_0 E_0$$

显然, 在介质棒的中点有 $D > D_0$.

同理, 还可分析真空中位于电介质棒轴线上靠近两端面处的场点的电场强度. 由于该处 E 方向与 E_0 平行同向, 因此总场强的大小

$$E = E_0 + E > E_0$$

相应, 该处的电位移矢量的大小

$$D = \epsilon_0 E > \epsilon_0 E_0 = D_0$$

此例中放入电介质前后自由电荷分布相同, 但电位移却不相同, 这表明电位移矢量 D 不仅和自由电荷分布有关, 也和电介质上的极化电荷有关.

正因为如此, 我们引入电位移矢量 D 并求得关于 D 的高斯定理对求解有电介质时的场才有普遍的意义.

§ 2.6 静电场的边界条件

2.6.1 有电介质时的静电场方程

真空中静电场的方程为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i \quad (\text{对任一闭合曲面})$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0 \quad (\text{对任一闭合曲线})$$

当电场中存在电介质时, 以上两个方程依然成立, 只是应该把 E 理解为自由电荷与极化电荷共同产生的总场强, 把 q_i 理解为闭合曲面 S 包围的自由电荷与极化电荷的代数和. 为了避免在方程中出现极化电荷, 我们在§ 2.5 节引入了电位移矢量 D . 这样, 有介质时静电场的方程改写为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{自由}}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

要从以上两个方程得到 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 的唯一解, 还须补充电介质的性能方程.

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

这样, 若已知自由电荷和电介质的分布以及每种电介质的电容率, 则原则上可以根据以上三个方程确定电场中任一点的 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} .

2.6.2 静电场的边界条件

由静电场方程和电介质的性能方程可以推出电介质分界面两侧紧靠界面处场量 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 的关系.

设两种电介质的电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 , 它们的分界面如图 2.6.1 所示, 分界面法线方向单位矢量 \mathbf{n} 的方向规定为由介质 2 指向介质 1 的方向. 作一极扁的小柱体, 它的两个底面分别位于两

图 2.6.1 证明 $D_{1n} = D_{2n}$

种电介质中并紧靠界面(见图 2.6.1), 这柱体的两个底面和侧面构成一个闭合面, 由于柱体极扁, 侧面的面积近似为零, 故这闭合面上的电位移通量为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{底面1}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{底面2}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= D_1 \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot d\mathbf{S} + D_2 \int_{\Sigma_2} \mathbf{n}_2 \cdot d\mathbf{S}$$

设分界面上没有自由电荷, 则由高斯定理得

$$(D_1 \int_{\Sigma_1} \mathbf{n}_1 \cdot d\mathbf{S} + D_2 \int_{\Sigma_2} \mathbf{n}_2 \cdot d\mathbf{S}) = 0$$

因 $\Sigma = 0$, 所以 $D_1 \cdot \mathbf{n}_1 + D_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

或 $D_1 \cdot \mathbf{n}_1 = - D_2 \cdot \mathbf{n}_2$

因为 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}$, 故

$$D_1 \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = D_2 \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}$$

或 $D_{1n} = D_{2n} \quad (2.6.1)$

(2.6.1) 式表明, D 的法向分量在分界面两侧是相等的. 即 D 的法向分量在分界面上连续.

设分界面上某处的切向单位矢量 \mathbf{t} 如图 2.6.2. 紧贴该处分界

图 2.6.2

面作一小矩形回路, 使回路的二相对边与 \mathbf{t} 平行, 且分别位于介质 1、介质 2 中. 矩形的二短边边长近似为零, 因而场强 E 沿这矩形回路的环流为

$$\oint E \cdot d\mathbf{l} = E_1 \int_{-l}^l (-\mathbf{t}) \cdot d\mathbf{l} + E_2 \int_l^{-l} \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

即 $(E_2 \int_l^{-l} \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} - E_1 \int_{-l}^l \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l}) = 0$

因为 l 不为零, 所以

$$E_2 \int_l^{-l} \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} - E_1 \int_{-l}^l \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

即 $E_{2t} = E_{1t}$

式(2.6.2)表明, E 的切向分量在分界面两侧是相等的, 即 E 的切

向分量在分界面上连续.

对于各向同性电介质, 根据介质的性能方程, 两种电介质中分别有 $D_1 = \epsilon_1 E_1$ 和 $D_2 = \epsilon_2 E_2$, 则由式(2.6.1)及(2.6.2)分别可以得出

$$\frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2.6.3)$$

$$\frac{D_{2t}}{D_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (2.6.4)$$

二式表明 E 的法向分量及 D 的切向分量在分界面两侧不相等, 即它们在分界面上有突变.

(2.6.1)、(2.6.2)、(2.6.3)、(2.6.4) 四式统称为静电场的边界条件.

2.6.3 电位移的折射定律

由于一个面的电场强度通量和电位移通量取决于场量在该面上的法向分量, 所以, 从边界条件可以看出, 电位移线将连续地穿过分界面, 但方向发生突变, 而电力线则在分界面上是不连续的. 设 D_1, D_2 与分界面法线之间夹角分别为 α_1 和 α_2 , 由图 2.6.3 可见

$$\tan \alpha_1 = D_{1t} / D_{1n}, \quad \tan \alpha_2 = D_{2t} / D_{2n}$$

而 $D_{1n} = D_{2n}$, 所以

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1 E_{1t}}{\epsilon_2 E_{2t}} = \epsilon_1 / \epsilon_2$$

即
$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2.6.5)$$

由式(2.6.5)可以看出, 若 $\epsilon_1 > \epsilon_2$, 则 $\alpha_1 > \alpha_2$, 即从电容率大的介质进入电容率小的介质时, 电位移线偏向界面法线; 反之, 若 $\epsilon_1 < \epsilon_2$, 电位移线偏离界面法线. 因为(2.6.5)式在形式上类似于光线在两种透明介质分界面上的折射定律, 故称为电位移线的折射定律.

例 如图 2.6.4(a), 相对电容率 $\epsilon_r = 6.5$ 的均匀介质大平板

放在外电场中. 已知板外电场是均匀电场, 场强大小 $E_1 = 2 \times 10^4 \text{ V/m}$, E_1 方向如图, $\theta = 60^\circ$. 求: (1) 介质板内的 D_2 和 E_2 ; (2) 介质表面的极化电荷面密度.

解 (1) 由(2.6.5)式得

$$\tan \theta_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan \theta_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\epsilon_0} \tan \theta_1 = \epsilon_r \tan \theta_1$$

$$\text{式中 } 90^\circ - \theta_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

图 2.6.3 电位移线的折射

$$\tan \theta_2 = 6.5 \tan 30^\circ = 3.751$$

$$\theta_2 = 75^\circ$$

由边界条件 $D_{2n} = D_{1n}$ 得

$$D_2 \cos \theta_2 = D_1 \cos \theta_1$$

$$D_2 = D_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} = \epsilon_0 E_1 \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

$$= 8.85 \times 10^{-12} \times 2 \times 10^4 \times \frac{0.8660}{0.2588}$$

$$= 5.92 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

由电介质性能方程得

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{5.92 \times 10^{-7}}{8.85 \times 10^{-12} \times 6.5} = 1.03 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$(2) \quad P_{2n} = \epsilon_0 E_{2n}$$

$$= (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E_2 \cos(180^\circ - 75^\circ)$$

$$= -\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \cdot E_2 \cos 75^\circ$$

$$= -8.85 \times 5.5 \times 1.03 \times 10^4 \times 0.2588$$

$$= -1.30 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$P_{2n} = -1.30 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

$$= 1.30 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$$

图 2.6.4 边界条件例题

§ 2.7 铁电体 压电效应

2.7.1 铁电体

有一类各向异性电介质,在一定温度范围内,极化强度和场强之间是非线性关系,甚至没有单值的函数关系.当外电场撤去后,这类电介质能保留一定的极化.因为这类电介质的极化和铁磁体

的磁化相似, 所以被称为铁电体. 例如, 酒石酸钾钠单晶 ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$)、钛酸钡 (BaTiO_3)、铌酸钠 (NaNbO_3)、钽酸锂 (LiTaO_3) 等都是铁电体. 铁电体有以下特性:

(1) 铁电体在极化过程中有电滞现象

以钛酸钡为例, 当它的温度低于 125°C 时, 若在钛酸钡上加上外电场, 并把场强从零开始逐渐增大, 则钛酸钡介质中的极化强度沿图 2.7.1oa 曲线上升, 当极化强度的大小达到 P_s 值(图中 a 点)后, 再增大场强, 极化强度也不再增加, 这种现象叫做电极化饱和. 此后, 若减弱电场, 极化强度不沿原曲线减少, 而是沿 ab 曲线逐渐

图 2.7.1 电滞回线

图 2.7.2 矩形电滞回线

减少. 这表明钛酸钡中极化强度的减少滞后于场强的减少. 当场强减弱到零时, 钛酸钡中的极化强度并不减为零, 而是保留某个数值 P_r (图 2.7.1 中 b 点), P_r 叫做剩余极化强度. 这时若加上反向电场并逐渐增大场强, 则极化强度沿曲线 bcd 变化. 当场强达到 $-E_s$ 值时, 钛酸钡在反方向达到极化饱和. 此后, 若减弱反向电场, 则极

化强度沿 de 曲线变化. 当场强减弱到零时, 钛酸钡中保持 $-P_r$ 的剩余极化. 这时, 若加上正向电场, 则 P 沿曲线 $ef a$ 上升. 可见, 场强大小和方向变化一周 ($E_s \rightarrow 0 \rightarrow -E_s \rightarrow 0 \rightarrow E_s$), 极化强度沿闭合曲线 $abcdef a$ 亦变化一周, 这条闭合曲线叫做电滞回线. 由电滞回线可见, 同一场强值可以对应不同的极化强度, 即钛酸钡中的极化强度不仅与场强的大小和方向有关, 而且与钛酸钡的极化历史有关. 不同的铁电体有不同的电滞回线, 有些铁电体的电滞回线的形状十分接近矩形 (图 2.7.2), 这些铁电体可用来制造电子计算机的记忆元件.

(2) 居里点

当铁电体的温度超过某一极限值, 铁电体就转化为一般电介质. 这一极限温度值叫做居里点. 不同铁电体有不同的居里点, 例如钛酸钡的居里点为 125°C , 钛酸铅的居里点为 500°C .

(3) 铁电体的相对电容率很大

一般电介质的相对电容率在 $1\sim 10$ 之间, 而铁电体的相对电容率在 $10^2\sim 10^4$ 之间. 用铁电体作为介质, 可以制成电容量很大、体积很小的电容器. 因为铁电体的电容率随铁电体中场强而变, 所以用铁电体作为介质的电容器的电容量, 将随加在电容器两极上的电压而变化, 这种电容器叫做非线性电容器. 非线性电容器用于振荡电路和介质放大器中.

2.7.2 压电效应

铁电体和某些晶体 (如石英、电气石、糖等晶体) 在受到拉伸或压缩时也会发生极化现象, 在承受压力或拉力的两个表面上出现等量异号的极化电荷, 如图 2.7.3 所示. 这种现象叫做压电效应. 例如, 石英晶体在受到 $9.81\text{N}\cdot\text{cm}^{-2}$ 的压力作用时, 它承受正压力的两个表面出现 0.5V 左右的电势差.

压电效应有逆效应, 即当给压电晶体加上电场时, 它沿电场方

向的长度发生变化, 这种现象叫做电致伸缩. 当然, 晶体的伸长或缩短是极其微小的, 例如, 在压电晶体的两个表面加上几百伏的电势差时, 晶体只伸长或缩短千分之一微米.

压电效应和电致伸缩在近代科学技术中有广泛应用. 利用压电效应可以把机械振动转变为电振荡. 例如, 扩音器的晶体话筒和

图 2.7.3 压电效应

电唱机的晶体唱头就是利用压电晶体的压电效应把机械振动转变为电振荡的. 利用电致伸缩则可以把电振荡还原为机械振动. 例如, 晶体耳机就是借助压电晶体的电致伸缩把电振荡还原为机械振动, 它再把机械振动传给装在耳机中的金属膜片, 使之发出声音. 此外, 利用电致伸缩还可产生超声波. 把压电效应和电致伸缩结合在一起, 还可制成用处很大的晶体振荡器, 这种振荡器的突出优点是频率高度稳定. 例如, 利用晶体振荡器制成的石英钟, 每昼夜的误差不大于 $2 \times 10^{-5} \text{ s}$. 此外, 利用压电效应还可制成压电变压器和压电传感器.

§ 2.8 电容器的电容

2.8.1 孤立导体的电容

孤立导体带电后, 电荷在其表面有确定的分布, 导体有确定的电位(以无穷远处为参考点). 若使孤立导体所带电量增加一倍, 则其表面上各点电荷面密度必然相应地增加一倍, 否则导体不可能保持静电平衡状态. 这样, 空间每一点的场强相应增加一倍, 因而把单位正电荷从孤立导体表面移到无穷远处电场力作的功、亦即孤立导体的电位也相应增加一倍. 这就是说, 孤立导体的电位 U

与其所带电量 q 成正比, 即

$$U \propto q$$

写成等式则为

$$C = \frac{q}{U} \quad (2.8.1)$$

式中 C 是比例常数, 叫做孤立导体的电容, 它仅与导体的形状、大小有关, 与其所带电量 q 或电位 U 无关. 由(2.8.1)式可见, 孤立导体的电容, 数值上等于使孤立导体的电位升高 1 单位时所需的电量.

在 SI 中, 电容的单位为 F. 1F 表示这样大小的电容: 孤立导体的电位升高 1V 所需电量为 1C, 即

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$$

因为 F 这个单位太大, 所以实用中用 μF 和 pF 作为电容单位, 它们与 F 的关系为

$$1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$$

$$1\text{pF} = 10^{-12}\text{F}$$

在 SI 中电容的量纲为

$$[C] = \frac{[q]}{[U]} = \text{L}^{-2}\text{M}^{-1}\text{T}^4\text{I}^2$$

2.8.2 电容器的电容

当导体 A 周围有其它导体时, 导体 A 的电位 U_A 不仅和它自己所带电量 q_A 有关, 还和其它导体的形状、位置有关. 所以不可能再用一个恒量 $C = \frac{q_A}{U_A}$ 来反映 U_A 和 q_A 之间的依赖关系了.

不过, 对满足一定条件的二个导体组成的系统也可引入与(2.8.1)式定义相似的电容概念. 如图 2.8.1 所示, A 是一个导体, B 是一个封闭的导体壳, A、B 间充满了电介质. 设 A 带有电量 q ,

图 2.8.1 导体 A、B 间的电位差与导体 C 无关

则导体壳内表面带电 $-q$, AB 间有电位差 $U_A - U_B$. 若把 A 的电量增为 $2q$, 则 B 内表面电量变为 $-2q$, AB 间电位差增为 $2(U_A - U_B)$. 这表明, AB 间的电位差 $U_A - U_B$ 与导体 A 所带电量 q 成正比. 由于导体壳 B 的静电屏蔽作用, $U_A - U_B$ 不受壳外其它导体 C 或带电体的影响, 因而比值 $\frac{q}{U_A - U_B}$ 是一恒量与壳外其它导体无关. 我们把电位差与电量成正比且不受其它导体影响的二个导体组成的系统叫做电容器, 导体本身叫做电容器的极板, 而把比值 $\frac{q}{U_A - U_B}$ 叫做电容器的电容, 用符号 C 表示, 即

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} \quad (2.8.2)$$

电容器的电容 C 只与导体 A、B 的形状、尺寸以及两极板间的电介质性质和分布有关, 与电量 q 和电位差 $U_A - U_B$ 无关. 由(2.8.2)式可见, 电容器的电容, 数值上等于两极板间的电位差升高一单位

如果电容器极板间填充的电介质是铁电体, 则 C 与 q 和 $U_A - U_B$ 有关. 这种电容器叫做非线性电容器.

时所需的电量. 电容器电容的单位和量纲与孤立导体的电容相同.

其实, 若把无穷远看作一个导体, 则孤立导体可看成是导体与无限远组成的电容器, 于是由(2.8.2)式可得这电容器的电容为

$$C = \frac{q}{U_A - U} = \frac{q}{U_A}$$

这正是(2.8.1)式. 可见, 孤立导体的电容概念可看作电容器电容概念的一个特例.

在绝大多数实际应用中, 并不需要图 2.8.1 那样严格的静电屏蔽, 所以实际电容器多数是由两块靠得很近的金属平板(或金属箔)中间夹一层均匀电介质(或真空)组成. 对于这样的导体系统, 若两板间的距离远小于平板的长和宽(或者圆形平板的直径), 则两板以外带电体对板间场强分布的影响近似可忽略不计.

电容器的种类很多, 若按极板间填充的电介质来分类, 则有真空电容器、空气电容器、云母电容器、纸介电容器、陶瓷电容器、涤纶电容器、电解电容器、钛酸钡电容器等. 若按电容是否可变来分类, 则有固定电容器、可变电容器、微调电容器等. 若按极板的形状来分, 则有平行板电容器、圆柱形电容器、球形电容器等. 在电路图上电容器用图 2.8.2 所示符号表示. 除电解电容器的极板有正、负极之分外, 其它电容器极板没有正、负之分.

图 2.8.2 电容器在电路中的表示

电容器是电路的基本元件之一, 它在电路中起着各种作用. 例如, 隔断直流通交流、与其它元件组成振荡回路、滤波电路、延时电

路等. 它也是贮存电能的基本元件.

下面, 我们推导典型电容器的电容公式, 由此可了解电容由哪些因素决定.

(1) 平行板电容器的电容

平行板电容器的构造示意图如图 2.8.3 所示, 每块极板面积为 S , 两块极板内表面之间距离为 d ($d \ll \sqrt{S}$), 两板间充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质.

图 2.8.3 平行板电容器

设电容器两块极板分别带有 $+q$ 和 $-q$ 的电量, 则两块极板内表面的电荷面密度分别为 $\sigma = \frac{q}{S}$ 和 $\sigma = -\frac{q}{S}$. 根据(2.5.15)式两板间的场强分布为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} n = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} n$$

式中 n 为从 A 板垂直指向 B 板的单位矢量. 因而 A、B 两板的电位差为

$$U_A - U_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^d \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} dl = \frac{qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S}$$

根据(2.8.2)式,得

$$C = \frac{q}{U_A - U_B} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} \quad (2.8.3)$$

这就是平行板电容器的电容公式. 由(2.8.3)式可见, 在 ϵ_r 一定时, C 与 S 成正比, 与 d 成反比. 在 S 和 d 一定时, C 与 ϵ_r 成正比.

若两板间是真空($\epsilon_r = 1$), 则电容量 C_0 为

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

可见, 极板间充满电介质时的电容 C 是真空时电容 C_0 的 ϵ_r 倍, 即

$$C = \epsilon_r C_0$$

由(2.8.3)式可知, 要增大平行板电容器的电容, 可增大极板面积 S 、缩小两板间的距离 d , 但最方便的办法是在两板间填充相对电容率大的电介质.

(2) 圆柱形电容器的电容

如图 2.8.4, 圆柱形电容器由两个半径分别为 R_1 和 R_2 的同轴薄壁金属圆筒构成, 两个圆筒间充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 圆筒的长为 l ($l \ll R_2 - R_1$). 读者可自行推得圆柱形电容器的电容为

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (2.8.4)$$

由(2.8.4)式可见, 圆柱形电容器的电容也只和极板的长度、两个薄壁金属圆筒的半径以及极板间充满的电介质的相对电容率有关.

(3) 球形电容器的电容

如图 2.8.5, 球形电容器由两个同心的金属球壳构成, 两个球壳的半径分别为 R_1 和 R_2 , 球壳间充满相对电容率为 ϵ_r 的电介质.

图 2.8.4 圆柱形电容器

图 2.8.5 球形电容器

该球形电容器的电容为

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (2.8.5)$$

由以上三种电容器的电容公式可见, 电容器的电容大小由极板的形状, 大小和极板间的电介质的性质所决定, 而与极板所带电量或极板之间的电位差无关. 而计算电容的思路可归纳如下:

$$\text{设 } q(\text{ 或 }) \quad D \quad E \quad U_A - U_B \quad C = \frac{q}{U_A - U_B}$$

需要指出的是, 电容器和电容的概念可以推广到任何两个导体组合, 例如两条输电线, 输电线与大地, 电子仪器内部任何两条接线, 接线与金属机壳, 电路元件与仪器金属机壳以及晶体管各极之间都可看成电容器而具有电容, 这种电容叫做分布电容(或杂散电容). 这时两个导体所带电量往往不相等, 这时式(2.8.2)中的 q 应理解为, 若用导线把这两个导体连接起来在达到新的静电平衡状态的过程中从一个导体转移到另一导体的电量. 分布电容一般很小, 而且很易受到其它导体的影响. 在静电和直流电的问题中一般不考

虑分布电容,但在某些问题(例如高频电流)中,分布电容可能起重要作用,这时必须考虑它的存在和影响.

§ 2.9 电容器贮能 电场能量密度

2.9.1 电容器贮能

电容器极板一带电,它就贮存了电能.这可用图 2.9.1 所示实

图 2.9.1 电容器贮能

验演示.先把开关倒向 a 边,电容器 C 和电源 E 接通,电容器开始充电,当电容器两块极板的电位差等于电源的电动势时,电容器充电结束,这时电容器两块极板分别带有 $\pm Q$ 的电荷($Q = EC$).把开关倒向 b 边,这时可看到小灯泡发光,因为小灯泡只和电容器相连,所以它发光的能量只可能来自电容器,这证明极板带电的电容器贮有能量.当电容器贮存的能量释放完毕,小灯泡熄灭,这时电容器的两个极板也不带电了.

下面,我们来计算一个充了电的电容器贮存的电能.设电容为 C 的电容器的两块极板分别带有电量 Q 和 - Q,则两极板的电位差为

$$U_1 - U_2 = \frac{Q}{C}$$

根据电荷系的静电能公式

$$W_e = \frac{1}{2} U dq$$

求得该电容器贮存的电能为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} U_1 Q - \frac{1}{2} U_2 Q \\ &= \frac{1}{2} Q (U_1 - U_2) \\ &= \frac{Q^2}{2C} \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

(2.9.1) 式表明, 当 C 一定时, $W_e \propto Q^2$, 即电容器极板带的电量愈多, 电容器贮存的能量愈多. 我们在推导(2.9.1) 式过程中并没有涉及电容器的类型, 所以(2.9.1) 式对各种电容器普遍成立.

应用 $Q = C(U_A - U_B)$ 还可把(2.9.1) 式写为

$$W_e = \frac{1}{2} C (U_A - U_B)^2 \quad (2.9.2)$$

$$W_e = \frac{1}{2} Q (U_A - U_B) \quad (2.9.3)$$

在实际应用中, 电容器充电的电位差是给定的, 所以用(2.9.2) 式计算电容器贮能比较方便. 由(2.9.2) 式可以看出, 在电位差一定时, 电容愈大的电容器贮存的能量愈多, 所以从这个意义上讲, 电容是描写电容器贮能本领大小的物理量. 对于同一电容器来说, 加在极板上的电位差愈大, 它贮存的能量愈多, 但因加在电容器上的电压不能超过电容器内电介质的击穿电压, 所以每个电容器贮存的能量有一定限度. 虽然如此, 若使电容器在极短时间内放电, 则可输出很大功率. 这在脉冲式大功率激光器和摄影用的闪光灯中都有应用.

例 电容 $C = 1000 \mu\text{F}$ 的电容器, 用电压为 400V 的电源充电,

(1) 计算电容器充电结束时贮存的能量. (2) 若电容器经过 0.01s

放电完毕, 计算电容器输出的平均功率.

解 (1) 根据(2.9.2)式, 电容器充电结束时贮存的能量为

$$W_e = \frac{1}{2}C(U_A - U_B)^2 = \frac{1}{2}10^3 \times 10^{-6} \times (400)^2 = 80\text{J}$$

(2) 电容器输出的平均功率 N 为

$$N = \frac{W_e}{t} = \frac{80}{0.01} = 8 \times 10^3 \text{W}$$

电容器贮能除前面提到的一些应用外, 电容焊接也是其中的一个应用. 所谓电容焊接, 是利用电容器贮存的能量在很短时间内释放出来, 使被焊接的金属熔化而焊在一起. 若电容器每次充电的电压相同, 则电容器每次放电释放出的能量相等, 这样可以保证焊接的质量.

2.9.2 电场能量密度

充了电的电容器贮有能量, 那么这些能量分布在哪里? 根据(2.9.1)式来看, 似乎电能是分布在电荷上的. 但是, 电磁波存在的事实表明, 电磁能是分布在场中的. 所以电容器贮存的能量是分布在电容器的电场中而不是分布在电荷上.

既然能量分布在场中, 那么电场中单位体积内分布多少能量? 下面, 我们以平行板电容器为例来推导电场中能量体密度公式. 设平行板电容器每块极板的面积为 S , 两块极板相距为 d , 极板间充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质. 设电容器两块极板的电位差为 $U_A - U_B$, 则电容器贮存的能量为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}C(U_A - U_B)^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d} (Ed)^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 Sd = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \epsilon_r E) \int_V E dV \\ &= \frac{1}{2} D \int_V E dV \end{aligned}$$

式中 D 为电容器内介质中任一点的电位移矢量, E 为该点的场强, V 为电容器两块极板之间的体积亦即电场分布的体积. 因为平行板电容器中的电场是均匀电场, 所以可以想象电能在场中也是均匀分布的. 故由上式可得, 单位体积内分布的电能 w_e 为

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} D \cdot \epsilon E \quad (2.9.4)$$

(2.9.4) 式叫做电场能量的体密度公式, 虽然它是从平行板电容器这个特例导出, 但是可以证明, 它是一个普遍成立的公式. (2.9.4) 式表明, 电场中任一点的电能密度由该点的电位移矢量和场强的标量积决定.

若电场不均匀, 则电能密度是位置坐标的函数, 这时整个电场的能量是能量体密度的积分, 即

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} D \cdot \epsilon E dV \quad (2.9.5)$$

式中 V 表示积分遍及电场分布的全部空间.

把(2.9.1)式和(2.9.5)式结合起来, 我们可得另一计算电容器电容的公式:

$$C = \frac{Q^2}{2W_e} = \frac{Q^2}{\int_V D \cdot \epsilon E dV} \quad (2.9.6)$$

应该指出, 我们在第一章所讲的电荷系统的固有能与相互作用能之和就是电场能, 并且由电荷系统的静电能公式可以导出(2.9.5)式.

例 设有一半径为 R 的均匀带电球壳、所带电量为 $-q$. 球壳外充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 计算带电球壳产生的电场中分布的总能量.

解 均匀带电球壳产生的电场中 D 和 E 的分布如下:

在 $0 < r < R$ 区域

$$E = 0, D = 0$$

图 2.9.2 均匀带电球壳产生的电场中分布的总能量

在 $r > R$ 区域

$$D = - \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

所以, 与球心 O 点相距 r 处的电场能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2} D \cdot E = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

若以半径 r 和 $r + dr$ 作两个同心球面, 则在这两个球面间的电场能量密度可近似认为相等. 两个球面间的体积为 $dV = 4\pi r^2 dr$, 所以在 dV 内分布的电场能量为

$$\begin{aligned} dW_e &= w_e dV = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr \end{aligned}$$

因此, 整个电场中分布的总能量为

$$W_e = \int_R^\infty dW_e = \int_R^\infty \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

上面的结果表明, 尽管电场是由负电荷产生的, 但电场的能量恒为正值. 若球壳外为真空 ($\epsilon_r = 1$), 则电场的总能量为

$$W_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

这与我们在第一章计算过的带电球面的静电固有能完全相同. 可见, 带电系统的静电能就是静电场能.

思 考 题

2.1 一个立方体导体带电后, 电荷在其表面上是否均匀分布? 导体表面是否等位面? 表面附近各点场强大小是否相等?

2.2 在一个中性导体球壳的中心放一电量为 q 的点电荷, 这时球壳内外表面各带多少电量? 若把点电荷从球壳中心移到壳内其它点, 球壳内外表面上的电荷分布变不变? 球壳内外的场强分布变不变?

2.3 若把一个带正电的点电荷 q 放在一个中性导体 A 附近, 由于静电感应, 导体 A 上出现如图所示的感应电荷分布. 有人根据电力线始于正电荷终于负电荷的性质, 画出如图所示的电力线. 你认为他这样画电力线对不对? 为什么?

思考题 2.3 图

思考题 2.4 图

2.4 若空间只有 AB 两个带电导体, 它们能否有如图所示的电荷分布 (即二者都有异号电荷)? 为什么?

2.5 一个电量为 q 的带电体, 放在中性导体 A 附近, 由于静电感应导体 A 两端出现感应电荷, 请证明感应电荷的绝对值 q 不可能大于施感电荷 q .

思考题 2.5 图

思考题 2.6 图

2.6 设在一导体 B 的空腔内有一带电导体 A, 请证明: 只要导体 A 带正电, 则 A 的电位一定高于 B 的电位; 反之, 若 A 带负电, 则 A 的电位一定低于 B 的电位, 与导体 B 是否带电无关.

2.7 若把一个带正电的导体 A 移到一个中性导体 B 附近, 导体 B 的电位是升高还是降低? A 的电位是升高还是降低? 为什么?

2.8 若在两个带等量异号电荷的导体 A 和 B 之间放入一个中性导体 C, 那么 AB 之间的电位差是增大还是减少?

2.9 设有三个彼此绝缘不带电的导体 A、B、C, 它们的电位均为零, 今若使导体 A 带正电, 那么 B 和 C 的电位是否仍为零?

2.10 若把一个带电体放在一个金属壳附近, 这带电体在金属壳内单独产生的场强是否为零? 金属壳的静电屏蔽作用是怎样产生的?

2.11 若在一个中性导体壳内放上两个彼此绝缘的带电导体 A 和 B, 若 A 和 B 带有等量异号电荷, 导体壳外的带电体是否受到作用力?

2.12 如图所示, 在金属球壳 B 内有一接地的金属球 A, AB 彼此绝缘. 若球壳 B 带正电, 球 A 是否带电? 如果有一带电体移到球壳 B 附近, 空腔内的场强分布变不变?

2.13 电介质在电场中极化后, 在介质表面出现极化电荷(见图). 若沿图中 AA 方向把这块电介质切为两部分, 撤去电场后, 这两块电介质是否分别带了电?

2.14 电介质的极化和导体的静电感应有何不同?

2.15 有人说:“由电位移矢量的高斯定理可以看出, 电位移矢量只和自由电荷有关, 而与极化电荷无关”. 你认为他说的是否有道理?

2.16 在电量为 q 的点电荷附近, 有一细长的圆柱形电介质棒. 有人应

思考题 2.12 图

思考题 2.13 图

用有介质时的高斯定理, 算出图中 P 点的电位移大小为 $D = \frac{q}{4\pi r^2}$, 再由电介质性能方程求得 P 点的场强大小为 $E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$. 他的计算是否正确?

思考题 2.16 图

2.17 以下各式哪些是普遍成立的? 哪些是有条件的?

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= q_{\text{自由}} & - & \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = q \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} & \mathbf{P} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} & &= \mathbf{P}_n \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}_0 & &= \epsilon_0 \mathbf{E}_n \\ \mathbf{E} &= \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r} \end{aligned}$$

2.18 若电场中放入电介质后, 自由电荷分布未变, 电介质中的场强大小是否一定比真空中的场强小?

2.19 二块平行的金属大平板, 始终和一电源的正负极相连. 若这时在两板间充满相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质, 这电介质中任一点的场强大小是否比真空时的场强减少 ϵ_r 倍? 有介质时的电位移矢量的大小是否和真空

时的电位移矢量大小相等?

2.20 如图所示, 两块平行的金属大平板之间一半为真空, 一半为相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质所充满. 若两块金属平板和电源相连, 这时真空中的场强是否比介质中的场强大 ϵ_r 倍?

思考题 2.20 图

2.21 设在均匀极化的电介质(相对电容率为 ϵ_r)中挖出一个圆柱形空腔, 空腔的轴线与极化强度的方向一致. (1) 若空腔的长远大于空腔的直径, 这时空腔中的场强是否为介质中场强的 ϵ_r 倍? (2) 若空腔的直径远大于空腔的长, 空腔中的电位移矢量是否比介质中的电位移矢量小 ϵ_r 倍?

2.22 有人根据 $C = \frac{q}{U_A - U_B}$ 得出结论:“若 $q = 0$, 则 $C = 0$. 即电容器不带电时没有电容”. 你认为对吗?

2.23 如果在一个平行板电容器中放入一块厚度可以忽略的铝箔, 铝箔与电容器极板平行, 并与极板绝缘. 此铝箔对平行板电容器的电容有无影响? 如果此铝箔和平行板电容器的一个极板相连, 则电容器的电容是增大还是减少?

2.24 在平行板电容器的两块极板间放入一块电介质板或者一块金属板, 电介质板和金属板的厚度相等, 它们均与平行板电容器的极板平行. 两者对电容的影响是否相等?

2.25 三块金属大平板平行放置, 中间分别放有相对电容率为 ϵ_r 的电介质板, 最外面的两块金属平板用导线连在一起, 如图所示. 今从 A、B 两端

看进去, 这三块金属平板构成几个平行板电容器, 它们是串联还是并联?

思考题 2.25 图

思考题 2.26 图

2.26 四块平行的金属大平板, 最外面的两块平板用导线连在一起(如图). 从 AB 两端看进去, 这四块大平板构成几个平行板电容器? 它们是什么联接?

2.27 电容一定的电容器, 它贮存的电能有无上限? 为什么?

2.28 范德格拉夫静电起电机的金属球壳上所带电量是否有上限? 为什么?

2.29 两个完全相同的电容器串联起来与电源相连, 如图所示. 今把一块相对电容率为 ϵ_r 的电介质板插入其中一个电容器, 这两个电容器的电量、电势差、电容以及贮存的电能将如何变化?

思考题 2.29 图

2.30 设平行板电容器始终和电源相连. 今把其中一块极板相对另一块极板向外平移一定距离, 在这过程中电场力作正功还是作负功? 电场能是增加还是减少? 以电容器为系统, 这系统的能量是否守恒? 能量到哪儿去了?

习 题 二

2.1 设半径为 $R_1 = 0.01\text{m}$ 和 $R_2 = 0.02\text{m}$ 的二个导体小球各带有电量 $q = 1.00 \times 10^{-8}\text{C}$ 的正电荷, 二球中心相距 $d = 1\text{m}$, 今用一根细导线将两球相连, 忽略导线上的电荷分布. 求: (1) 每个小球所带电量; (2) 每个小球的电位(以无穷远为参考点).

2.2 两块平行的无限大均匀带电平板, 相距 $D = 0.01\text{m}$, 电荷面密度分别为 $\sigma_1 = 3 \times 10^{-8}\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$ 和 $\sigma_2 = 1 \times 10^{-8}\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$. 今将一块不带电的厚度为 $d = 2 \times 10^{-3}\text{m}$ 的金属大平板放入两块带电平板间, 如图所示. 求: (1) 金属平板上的感应电荷面密度; (2) 放入金属平板后, 二块带电大平板之间的电位差改变了多少?

习题 2.2 图

2.3 两块平行的金属大平板, 面积均为 $S = 0.5\text{m}^2$, 分别带有电量 $Q_1 = 2 \times 10^{-8}\text{C}$ 和 $Q_2 = 1 \times 10^{-8}\text{C}$. 求: (1) 每块金属平板两个表面上的电荷面密度; (2) 两块金属平板之间及外侧的场强, 并画出电力线图.

2.4 两块平行的金属大平板, 相距 $2.5 \times 10^{-3}\text{m}$. 设在两块平板上加上 100V 的电势差, 求: (1) 两板之间的场强; (2) 两块平板上的电荷面密度.

2.5 如图所示, 二块平行的金属大平板, 用细导线连在一起. 现将一块带电的金属大平板(它的两个表面的电荷面密度均为 $\sigma = 2 \times 10^{-8}\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$) 放入上述两块平板之间, 它与两板之间的距离分别为 $d_1 = 0.08\text{m}$ 和 $d_2 = 0.06\text{m}$. 求三块金属大平板表面的电荷面密度.

2.6 两个彼此绝缘的同心金属球壳 A 和 B, 如图所示. A 带有电量 $q = 2 \times 10^{-8}\text{C}$, B 不带电. (1) B 的两个表面各带多少电量? (2) 若用导线把 A 和 B 相连, 则 A 和 B 各带多少电量?

2.7 如图, 在半径为 $R = 0.2\text{m}$ 的金属球内, 有两个球形空腔. 金属球不带电, 在两个空腔中心分别放有一个点电荷, 电量分别为 $q_1 = 2 \times 10^{-9}\text{C}$ 和 $q_2 = -1 \times 10^{-9}\text{C}$. 在金属球外面远处有一个点电荷 $q_3 = 3 \times 10^{-9}\text{C}$, 它与金属球

习题 2.5 图

习题 2.6 图

中心 O 相距 $r = 20\text{m}$. 求: 作用在 q_1 、 q_2 、 q_3 以及金属球上的静电力.

习题 2.7 图

2.8 如图, 两个同心金属球, 外球是空心的. 内球半径为 $R_1 = 0.02\text{m}$, 外球内半径为 $R_2 = 0.04\text{m}$, 外半径 $R_3 = 0.06\text{m}$. 内球带有 $2 \times 10^{-8}\text{C}$ 的正电荷, 外球带有 $-3 \times 10^{-8}\text{C}$ 的负电荷. 求: (1) 外球内外表面上分布的电量; (2) $r = 0.03\text{m}$ 、 0.05m 以及 0.07m 三处的场强大小和电位并画出 $E-r$ 和 $U-r$ 曲线.

2.9 两个同心薄壁金属球壳, 半径分别为 R_1 和 R_2 . 原来两个球面都不带

习题 2.8 图

电, 现使外球带电到其电位为 U_0 (以无穷远为参考点). 问: (1) 内球面是否带电? 内球的电位为多大? (2) 若将内球接地, 并保持外球壳的电位为 U_0 值, 内球壳带多少电? 画出这时电场中电位分布曲线.

2.10 两根平行长直输电线, 半径都为 $R = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$, 相距 $d = 1 \text{ m}$ (见图). 两根输电线的电荷线密度分别为 $\lambda_1 = 7.5 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$ 和 $\lambda_2 = -7.5 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$. 因为 $d \gg R$, 可以近似认为每一根输电线上的电荷都是均匀分布在表面上的. 计算这两根输电线的电位差.

习题 2.10 图

2.11 半径分别为 $R_1 = 0.02 \text{ m}$ 和 $R_2 = 0.04 \text{ m}$ 的两个薄壁同心金属球壳, 它们和一电压为 200 V 的电源相连, 内球壳接电源负极, 外球壳接电源正极. 求内球壳表面附近的场强.

2.12 设有两个平行的无限大均匀带电平面, 相距为 D 、电荷面密度分别为 σ_1 和 σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$). 在两个带电平面间紧贴带电 σ_1 平面平行地置一块厚为 d ($d < D$)、相对电容率为 ϵ_r 的均匀电介质板. 求: (1) 两带电面间 D 和 E 的分布; (2) 两带电面间电位 U 的分布 (以带电面 σ_1 所在处为参考点); (3) 电介质板表面的极化电荷面密度.

2.13 两块平行的金属大平板, 在两块平板上加有 10^3 V 电压. 在两块大平板间充满两层均匀电介质, 一层电介质的相对电容率为 $\epsilon_{r1} = 5$ 、厚为 0.02 m , 另一层 $\epsilon_{r2} = 2$ 、厚为 0.03 m . 求: (1) 电介质中 D 和 E 的分布; (2) 两层电介质中的极化强度; (3) 两层电介质交界面上的极化电荷面密度.

2.14 两个同心的薄壁金属球壳的半径分别为 $R_1 = 0.02 \text{ m}$ 和 $R_2 = 0.06 \text{ m}$, 球壳间充满两层均匀电介质, 它们的相对电容率分别为 $\epsilon_{r1} = 6$ 和 $\epsilon_{r2} = 3$, 两层电介质的分界面的半径为 $R = 0.04 \text{ m}$. 设内外球壳分别带有电量 $Q_1 = 6$

$\times 10^{-8} \text{C}$ 和 $Q_2 = -6 \times 10^{-8} \text{C}$, 求: (1) D 和 E 的分布并画出 $D-r$ 和 $E-r$ 曲线; (2) 两个球壳之间的电位差; (3) 两层电介质交界面上的极化电荷面密度.

2.15 如图, 单芯电缆由半径为 R_1 的圆柱形铜芯线和半径为 R_2 的用铜丝编织成的同轴薄壁圆筒构成. 在它们之间充满两层均匀电介质, 相对电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ($\epsilon_2 < \epsilon_1$), 两层电介质的分界面是半径为 R 的圆柱面. 设芯线和编织线的电荷线密度分别为 $+$ 和 $-$. 求: (1) D 和 E 的分布并画出 $D-r$ 和 $E-r$ 曲线; (2) 电位 U 的分布(以铜芯线为参考点)并画出 $U-r$ 曲线; (3) 每层电介质中的极化强度分布; (4) 两层电介质交界面上的极化电荷面密度.

习题 2.15 图

2.16 设有一半径为 R 相对电容率为 ϵ 的均匀电介质球, 其内均匀地分布着电荷体密度为 ρ_0 的自由电荷. 求: (1) D 和 E 的分布并画出 $D-r$ 和 $E-r$ 曲线; (2) 极化强度分布; (3) 极化电荷体密度.

2.17 两块金属大平板 A 和 B 相距为 d , 其间充满相对介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两种均匀电介质, 两种电介质所对应的极板面积分别为 S_1 和 S_2 , 如图所示. 设在 A 和 B 两板上加上电压 U_0 , 求: (1) 每种电介质中的 D 和 E ; (2) 两块金属平板上的电荷面密度; (3) 电介质表面的极化电荷面密度; (4) 这系统的电容.

2.18 球形电容器由半径为 R_1 的金属球和与它同心的半径为 R_2 的薄壁金属球壳构成, 在金属球与球壳之间的一半空间内充满相对电容率为 ϵ 的均匀电介质(见图). 求这个电容器的电容.

2.19 纸介电容器由两张面积 $S = 4 \times 10^{-3} \text{m}^2$ 的锡箔和两张同样面积、

习题 2.17 图

习题 2.18 图

厚为 $d = 5 \times 10^{-2} \text{ mm}$ 的腊纸 ($\epsilon_r = 1.8$) 组成. 锡箔和腊纸交替叠放卷成圆筒. 求此纸介电容器的电容.

2.20 电容器的两块极板都是边长为 a 的正方形金属平板, 两块平板不严格平行, 它们之间有一个很小的夹角 (见图). 求证: 当 $n \frac{d}{a}$ 时, 这个电容器的电容为 $C = \epsilon_0 \frac{a^2}{d} \left(1 - \frac{a}{2d} \right)$

习题 2.20 图

习题 2.23 图

2.21 单芯电缆芯线的直径 $D_1 = 1 \times 10^{-2} \text{ m}$, 它外面紧紧包着一层相对电容率 $\epsilon_{r1} = 5$ 的固体电介质. 在固体电介质外面充满相对电容率 $\epsilon_{r2} = 2.5$ 的油, 固体电介质和油的分界面是直径为 $D_2 = 2.5 \times 10^{-2} \text{ m}$ 的圆柱面. 最外层金属壳的内直径 $D_3 = 4 \times 10^{-2} \text{ m}$. 求这电缆每米的电容.

2.22 两根平行的长直输电线,相距为 d ,输电线的半径为 R ($d \gg R$). 求两根输电线每米具有的电容.

2.23 电容相等的四个电容器,它们的联接如图所示. (1) 合上 K_1 (K_2 打开) 充电,充完电把 K_1 打开,把 K_2 合上. 电源的电动势 $E = 6V$, 求: (1) 各电容器上的电压. (2) 若充电时 K_2 合上,这时各电容器上的电压又将如何?

2.24 若实验室只有电容 $C = 10^3 \mu F$ 、耐压 $5kV$ 的电容器,你将如何联接这些电容器使它们能接到电压为 $10kV$ 的供电线上并使这组电容器贮存的电量 $Q = 10^{-5} C$?

2.25 一平行板电容器以聚苯乙烯为介电物质,它的相对电容率 $\epsilon_r = 2.6$,击穿电场强度为 $250kV \cdot m^{-1}$. 若使这电容器的电容为 $5 \times 10^{-2} \mu F$ 、耐压为 $4000V$,此电容器的极板面积至少要多大?

2.26 一圆柱形空气电容器由直径 $d_1 = 5mm$ 的导线和直径为 $d_2 = 2.5cm$ 的同轴薄壁金属圆筒构成,空气的击穿电场强度 $E_k = 30kV \cdot m^{-1}$. 问:这电容器能承受的最大电压是多大?

2.27 一范德格拉夫静电起电机的金属球壳的直径为 $3m$. (1) 若此金属球壳放在空气中,则球壳的电位最高能达多大? (2) 若金属球壳放在击穿场强为 $83.5kV \cdot m^{-1}$ 的气体中,则金属球壳的电位最高能达多大? 若使金属球壳上所带电量和(1)相同,球壳的直径可缩小到多大?

2.28 圆柱形电容器由两个同轴薄壁金属圆筒组成,它们的半径分别为 R_1 和 R_2 . 它们之间充满两层均匀电介质: 第一层电介质的相对电容率为 ϵ_{r1} 、击穿电场强度为 E_k , 第二层的相对电容率为 $\epsilon_{r2} = \frac{\epsilon_{r1}}{2}$, 击穿场强也为 E_k , 两层电介质分界面的半径为 R ($R < 2R_1$). 当加在这电容上的电压逐渐升高时,哪层电介质首先被击穿? 计算这电容器能承受的最大电压.

2.29 若上题中二层电介质的相对电容率分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} , 击穿电场强度分别为 E_{k1} 和 E_{k2} . 求证: 两层电介质同时被击穿的条件是

$$\epsilon_{r1} E_{k1} R_1 = \epsilon_{r2} E_{k2} R$$

2.30 平行板电容器极板的面积 $S = 200cm^2$, 两块极板相距 $d = 0.1cm$, 极板间有一块厚为 $0.1cm$ 的玻璃板 ($\epsilon_r = 5$) 计算在下列两种情形下抽出玻璃板的过程中外力作的功(忽略摩擦): (1) 电容器充电到 $300V$, 切断电源, 然后抽出玻璃板; (2) 电容器始终与电压为 $300V$ 的电源相连(忽略电源内阻) 而

抽出玻璃板.

2.31 一铅直放置的平行板空气电容器, 极板面积为 S 、极板间相距为 d . 将此电容器充电到电压为 U_{12} 时断开电源, 再从下面提上盛有液体电介质的容器, 使电容器的一半浸在液体中(如图所示), 设液体的相对电容率为 ϵ_r . 求: 电容器贮能的变化.

2.32 证明: 球形电容器和圆柱形电容器中贮存的能量, 按电场能量密度积分所得结果和用电容器贮能公式算得结果相同.

2.33 设电量 q 均匀地分布在半径为 R 的球体内. 求这带电体产生的电场中分布的能量.

习题 2.31 图

2.34 设有两个同轴的薄壁金属圆筒, 内筒的半径为 R_1 , 外筒的半径为 R_2 . 证明: 当在这两个圆筒上加上电压时, 其中一半能量是分布在半径 $r = \sqrt{R_1 R_2}$ 的圆柱体内.

第三章 恒 定 电 流

§ 3.1 电流强度 电流密度 电流的连续性方程

3.1.1 电流强度

导体内自由电荷的定向移动形成导体中的电流. 历史上人们以为金属中的电流是正电荷定向移动形成的, 所以把正电荷定向移动方向定为电流方向. 电子被发现后人们才搞清楚金属中的电流是金属内自由电子定向移动形成的, 但由于电子沿某一方向运动引起的电磁效应和等量正电荷沿相反方向运动引起的电磁效应大都相同, 因而至今人们仍沿用历史上的规定, 即电流方向仍规定为正电荷定向移动的方向, 也即金属中的电流方向和电子定向移动的方向相反.

为了定量描述电流的大小, 我们引入电流强度这个物理量. 在导体上任取一截面, 若在 t 时间内通过该截面的电量为 q , 则比值 $\frac{q}{t}$ 在 $t \rightarrow 0$ 的极限就定义为该截面处的电流强度(简称电流), 用 I 表示电流强度, 则

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{q}{t} = \frac{dq}{dt} \quad (3.1.1)$$

(3.1.1)表明, 某截面处的电流强度数值上等于单位时间通过该截面的电量. 电流强度是标量.

在 SI 中电流强度是第四个基本物理量, 它的单位是安培

霍尔效应除外, 关于霍尔效应见第四章.

(A), 关于安培的定义见第四章.

3. 1. 2 电流密度

电流强度虽然能反映电流的强弱, 但它对电流的描述是比较粗略的. 例如, 对于图 3. 1. 1 所示横截面处处不等的导体, 若单位时间通过各截面的电量相等, 则导体各截面处的电流强度相等. 但电流强度却不能反映导体不同截面处或同一截面不同位置处电荷流动情况的差别, 为了细致地描述导体中的电荷流动, 我们引入电流密度矢量 \mathbf{j} .

图 3. 1. 1 粗细不匀的弯曲导体中的电流

在导体中任一点, 取一和该处正电荷定向移动方向垂直的面元 S , 若通过该面元的电流为 I , 我们把比值 $\frac{I}{S}$ 在 $S \rightarrow 0$ 时的极限, 定义为该点处的电流密度矢量 \mathbf{j} 的大小, 即

$$j = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{I}{S} = \frac{dI}{dS} \quad (3. 1. 2)$$

将该点处正电荷定向移动的方向定义为 \mathbf{j} 的方向. 由 (3. 1. 2) 式可知, 导体中某点的电流密度, 数值上等于和该点正电荷定向移动方向垂直的单位面积上的电流强度. 一般来说, 电流密度矢量 \mathbf{j} 是位置坐标的函数, 即 $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x, y, z)$.

这样, 在通电导体上的每一点, 都有一个确定的电流密度矢量

\mathbf{j} , 因而在通电导体内存在一个 \mathbf{j} 场, 我们把它叫做电流场. 静电场的场强分布可以用电力线来形象描绘, 电流场也可以引入电流线来形象描绘. 所谓电流线是指这样的一些曲线, 其上每一点的切线方向即为该点电流密度矢量的方向.

至此, 我们引入了两个描写电流的物理量——电流强度和电流密度, 前者描述一定截面上的电流的整体特征, 后者反映一个点处的电流特征. 从二者的定义不难求出它们之间的关系式. 在电流场中某点处取一面元 dS , 设面元 dS 法线方向单位矢量 \mathbf{n} 与该点电流密度矢量 \mathbf{j} 之间的夹角为 θ , 如图 3. 1. 2 所示. 其中 $dS \cos \theta$ 是 dS 在与 \mathbf{j} 垂直的平面上的投影. 根据 (3. 1. 2) 式, 通过面元 dS 的电流强度为

$$\begin{aligned} dI &= \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = j dS \cos \theta \\ &= j_{\perp} dS = j_{\perp} dS \end{aligned} \quad (3. 1. 3)$$

图 3. 1. 2 面元 dS 的电流强度 dI 与电流密度矢量 \mathbf{j} 的关系

因而, 电流场中任一曲面的电流强度是 (3. 1. 3) 式的曲面积分, 即

$$I = \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (3. 1. 4)$$

(3. 1. 3) 和 (3. 1. 4) 两式就是电流强度和电流密度的一般关系式.

它们表明, 电流场中任一曲面的电流强度是该曲面上的电流密度矢量的通量.

在 SI 中电流密度的单位是 $A \cdot m^{-2}$, 量纲为 $L^{-2}I$.

3. 1. 3 电流的连续性方程

电流的连续性方程是电流场的一个基本方程, 它是电荷守恒定律在电流场中的一种数学表述. 设在电流场中任取一闭合曲面 S , 规定闭合曲面上各面元矢量 dS 的方向为闭合面 S 的外法线方向, 则在 dt 时间内由闭合面 S 净流出的电量可表示为

$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt$. 根据电荷守恒定律, $\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt$ 应等于闭合曲面 S 内电量的减少值 $-dq_{\text{内}}$, 即

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} dt = -dq_{\text{内}}$$

则

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_{\text{内}}}{dt} \quad (3. 1. 5)$$

(3. 1. 5) 式叫做电流的连续性方程. 它表明, 若闭合曲面 S 内正电荷增加, 则流入 S 内的正电荷一定多于从 S 内流出的正电荷. 反之, 若 S 内正电荷减少, 则从 S 内流出的正电荷一定多于流入 S 内的正电荷. 另外, 由(3. 1. 5)式还可看出, 电流线始于正电荷减少的地点, 终于正电荷增加的地点.

3. 1. 4 恒定电流和恒定条件

若电流场中每一点的 \mathbf{j} 的大小和方向均不随时间改变, 这样的电流叫做恒定电流. 因为导体内的电流是导体内自由电荷在电场力驱动下定向移动形成的, 所以要电流恒定必须电场分布恒定不变, 这就要求空间电荷分布不随时间改变. 这样, 如果在电流场中任作一闭合面, 则该闭合面内包围的电荷 $q_{\text{内}}$ 应满足 $dq_{\text{内}}/dt =$

0, 由式(3.1.5)可得

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.1.6)$$

式(3.1.6)是为保证电流恒定必须满足的方程, 故称为电流恒定条件, 又叫恒定电流方程. 它显然应在恒定电流场中处处得到满足, 这就意味着恒定电流场的电流线应是没有起点和终点的闭合曲线, 这叫做恒定电流的闭合性. 恒定电流的闭合性决定了恒定电流的电路(简称恒定电路)必须是闭合的. 由电流恒定条件还可得出以下三个结论:

(1) 导体表面电流密度矢量的法线方向分量 $j_n = 0$

在导体表面处作一极扁的封闭小圆柱面 S , S 的一个底面 S_1 在导体外, S 的另一个底面 S_2 在导体内, S 的侧面 S_3 的面积近似为零. 则由电流恒定条件得

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{S_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

在导体外 $\mathbf{j} = 0$, 因 S_3 的面积近似为零, 所以 $\oint_{S_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 则上式变为

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_2} j_n dS = j_n S = 0$$

上式中 S 为底面 S_2 的面积显然不为零, 因而要使电流恒定条件仍然成立必须 $j_n = 0$, 即导体表面处电流密度矢量处处和表面平行.

(2) 在一段无分支的恒定电路里, 各个横截面的电流强度相等.

设一段无分支电路如图 3.1.3 所示, S_1 和 S_2 是该电路中任意两处的横截面. 这样, S_1 和 S_2 以及它们之间的导体表面 S_3 构成一个闭合面 S , 我们把(3.1.6)式应用到这个闭合面上, 则有

图 3.1.3 恒定电路各截面电流强度相等

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{s_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

在恒定电流情形下, 导体表面上的电流密度矢量处处和表面平行, 故 $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$, $\oint_{s_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 于是,

$$\oint_{s_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{即} \quad - \oint_{s_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{s_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

上式左边正是截面 S_1 处的电流强度 I_1 , 而等式右边则是截面 S_2 处的电流强度 I_2 , 所以上面等式表明

$$I_1 = I_2$$

既然无分支的稳恒电路中各横截面的电流强度相等, 故对于一条无分支的恒定电路中的电流只需用一个电流强度来标志.

(3) 在电路的任一节点处, 流入节点的电流强度之和等于流出节点的电流强度之和.

三条电路或三条以上电路的联

图 3.1.4 流入 A 点的电流强度之和等于从 A 点流出的电流强度之和

结点叫节点(或结点). 图 3. 1. 4 中 A 点即为节点. 现在我们来证明上面的结论: 作一闭合面 S(图中虚线所示)恰好把 A 点包在内, 对 S 应用电流的恒定条件得

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = & \oint_{s_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \\ & + \oint_{s_4} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_5} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{则 } - \oint_{s_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{s_4} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{s_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_5} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 s_1, s_2, \dots, s_5 分别是闭合面 S 与每条电路相截部分的截面.

由图可知 $-\oint_{s_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} - \oint_{s_4} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 正是流入 A 点的电流强度之和 I_1

+ I_4 , $\oint_{s_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{s_5} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 正是从 A 流出的电流强度之和 $I_2 + I_3 + I_5$, 故上式可写为

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3 + I_5$$

这就是我们所要证明的结论. 这个结论叫做基尔霍夫第一定律.

3. 1. 5 恒定电场

电流恒定时的电场叫做恒定电场. 恒定电场是由分布在导体表面和导体内部两种导体的界面处的电荷产生的. 在电流恒定的情形下, 尽管电荷在流动, 但电荷的分布(电荷面密度和体密度)不随时间改变, 所以恒定电场的性质和静电场一样, 同样满足高斯定理和环路定理, 即对于恒定电场同样有

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{自由}}$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这表明恒定电场象静电场一样, 也是保守力场, 因而同样可引入电位和电位差(电压)等概念. 所以我们把恒定电场对电荷的作用力

也叫静电力.

§ 3.2 欧姆定律 电阻和电导

3.2.1 欧姆定律

当一段均匀导体两端存在电位差时, 导体内便形成电流. 1826年德国物理学家欧姆(Ohm)通过实验发现: 若一段均匀导体的温度保持恒定, 则导体内的电流强度和导体两端的电位差成正比, 即

$$I \propto U_1 - U_2$$

这个结论叫做欧姆定律. 写成等式则为

$$U_1 - U_2 = RI \quad (3.2.1)$$

式中 R 是比例常数, 叫做导体的电阻. 导体的电阻与导体的材料、形状和尺寸以及导体的温度有关.

实验证明, 金属导体严格遵守欧姆定律, 只有当电流密度大到每平方厘米几百万安培时才观察到和欧姆定律相差 1%. 电解质的水溶液也很好遵守欧姆定律. 但对晶体管、电子管以及气体导电管(例如日光灯管)欧姆定律不成立. 为了描写各种导电器件的电流和电压的关系, 我们用横坐标表示器件上所加电压, 纵坐标表示器件中的电流强度, 画出它们之间的函数曲线, 这种曲线叫做器件的伏安特性曲线. 遵守欧姆定律的导电器件, 它的伏安特性曲线是一条通过原点的直线, 其斜率等于电阻的倒数, 它与器件上所加电压以及器件中的电流强度无关. 具有这种性质的导电器件叫做线性器件, 其电阻叫做线性电阻. 不遵守欧姆定律的导电器件, 其伏安特性是不同形状的曲线, 这些器件叫做非线性器件. 在本课程中, 如无特别声明, 所讨论的器件都是线性器件. 图 3.2.1 给出最常见的一种线性器件和一种非线性器件的伏安特性曲线.

需要指出的是, 若一段导体内存在非静电力, 则上述欧姆定律不再成立. 关于这段导体内的电流强度和电压的关系, 我们将在

图 3.2.1 线性器件和非线性器件的伏安特性

§ 3.5 中讨论.

在 SI 中, 电阻的单位叫欧姆(简称欧, 以希腊字母 Ω 表示). 1Ω 表示这样大小的电阻: 当加在导体两端的电压为 1V 时, 导体内的电流强度恰为 1A. 即

$$1\Omega = \frac{1\text{V}}{1\text{A}}$$

除欧姆外, 电阻的常用单位还有千欧(k Ω)和兆欧(M Ω).

电阻的倒数叫电导, 用 G 表示电导, 则

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.2.2)$$

电导的单位叫做西门子(以 S 表示), 它等于(Ω)⁻¹.

3.2.2 电阻率和电导率

实验发现, 对于由一定材料制成的横截面均匀的一段导体, 其电阻 R 和长度 l 成正比, 和横截面 S 成反比, 写成等式, 为

$$R = \frac{l}{S} \quad (3.2.3)$$

式中 ρ 是比例常数, 叫做导体的电阻率, 它的大小由材料的性质和温度所决定. 由(3.2.3)式可见, 某种材料的电阻率, 数值上等于由该材料制成的长为 1m, 横截面为 1m² 的导体的电阻. 在 SI 中电阻

率的单位为 $\Omega \cdot m$.

几种常见导体的电阻率如表 3.1 所示.

表 3.1 几种金属、合金和碳在 0 时的电阻率 ρ_0 和 κ 值

材 料	$\rho_0(\Omega \cdot m)$	$\kappa(1/\Omega \cdot m)$
银	1.58×10^{-8}	4.0×10^{-3}
铜	1.68×10^{-8}	4.3×10^{-3}
铝	2.58×10^{-8}	4.7×10^{-3}
铂	9.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
汞	94×10^{-8}	8.8×10^{-4}
碳	3500×10^{-8}	5×10^{-4}
镍铬合金 (60% Ni, 15% Cr, 25% Fe)	110×10^{-8}	1.6×10^{-4}
铁铬铝合金 (60% Fe, 30% Cr, 5% Al)	140×10^{-8}	4×10^{-5}
锰铜合金 (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni)	48×10^{-8}	1×10^{-5}

由表 3.1 可见, 银、铜、铝等金属的电阻率很小, 而镍铬、铁铬铝等合金的电阻率较大. 因此, 一般用铜和铝制造导线, 而用镍铬、铁铬铝等合金制作电炉或电阻器的电阻丝.

电阻率的倒数叫做电导率, 用希腊字母 κ 表示,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{3.2.4}$$

电导率的单位是 $(S \cdot m^{-1})$.

实验表明, 各种材料的电阻率都随温度变化. 金属的电阻率随温度升高而增大. 在通常的温度下当温度变化的范围不大时, 纯金属的电阻率与温度近似有以下线性关系:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \quad (3.2.5)$$

式中 ρ 是 t 时的电阻率, ρ_0 是 0 时的电阻率, α 叫做电阻的温度系数, 单位为 $1/^\circ\text{C}$. 不同材料的 α 不同(见表 3.1). 利用金属电阻率随温度变化的性质, 可制作电阻温度计来测量温度. 有些合金, 例如锰铜, α 特别小, 用这些合金制作的电阻器, 它们的阻值受温度变化的影响最小, 所以这些电阻器常作为标准电阻.

实验发现, 当温度降低到绝对零度附近时, 金属电阻率与温度不再是线性关系. 某些金属的电阻率当温度趋于绝对零度时趋向一个恒定的数值, 例如铜为 $0.02 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ 但还有一些金属和化合物, 当温度降至绝对零度附近的某一数值 T_c 时, 其电阻率突然降为零(见图 3.2.2), 这种现象叫做超导电现象, T_c 叫做正常态和超导电态之间的转变温度. 表 3.2 列出几种超导材料的转变温度.

表 3.2 几种超导材料的转变温度

材料	$T_c(\text{K})$	材料	$T_c(\text{K})$
铝(Al)	1.183	铌(Nb)	9.17
汞(Hg)	4.16	铌三锡(Nb_3Sn)	18.05
铅(Pb)	7.23	铌三铝(Nb_3Al)	17.5
铌三锗(Nb_3Ge)	23.2		

1987 年以来超导材料的研制取得突破性的发展. 1987 年 2 月 6 日美国科学家朱经武领导的小组宣布已制成 T_c 在 $80\text{—}93\text{K}$ 区间的超导材料. 同年 2 月 24 日中国科学院物理所赵中贤领导的小组宣布制成 T_c 在 92.8K 的超导材料, 随后相继有许多国家的科

除超导电性外, 超导体还有一系列独特的物理性质. 读者可参阅本书第五章的附录及有关书籍.

图 3.2.2 汞的电阻率在 4K 以下变为零

学家宣布制成了 T_c 在 90—100K 区间的超导材料. 目前公认的最高 T_c 为 125K. 超导体的应用有着广阔的前景, 如果室温下的超导材料研制成功, 势必引起工程技术上的又一场革命.

3.2.3 欧姆定律的微分形式

既然导体中的电流是由于电场驱动自由电荷定向移动而形成的, 所以导体中任一点的电流密度矢量与该点的场强间就应该存在某种确定的关系. 下面, 我们根据欧姆定律导出 j 与 E 的关系式.

设想在导体的电流场中取一长为 l 、横截面为 S 的小圆柱体, 圆柱体的轴线与电流线的切线一致(见图 3.2.3). 若小圆柱体两个端面间的电压为 U , 则 $U = E l$. 圆柱体横截面的电流强度

$I = j S$. 根据式(3.2.3), 小圆柱体的电阻 $R = \frac{l}{\sigma S}$. 把欧姆定律用于这圆柱体得

$$U = I R$$

$$\text{即} \quad E l = j S \frac{l}{\sigma S} = j l$$

由此可得
$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}$$

图 3. 2. 3 推导微分形式的欧姆定律

当 Δl 和 ΔS 同时趋于零时, 上式两边精确相等则

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

因为导体中任一点 \mathbf{j} 的方向为该点正电荷定向移动的方向, 而正电荷定向移动的方向和该点场强方向相同, 所以在导体中任一点 \mathbf{j} 和 \mathbf{E} 的方向相同. 于是上式可写成矢量形式:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (3. 2. 6)$$

式(3. 2. 6)叫做欧姆定律的微分形式. 它表明, 导体中任一点的电流密度 \mathbf{j} 和该点场强 \mathbf{E} 成正比, 比例系数为该点导体的电导率 σ .

下面, 我们把(3. 2. 1)和(3. 2. 6)两式作一比较: 式(3. 2. 1)描述一段有限长度、有限截面导体上电压和电流强度的关系. 因为电压 $U_1 - U_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, 电流强度 $I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ 都是积分量, 所以(3.

2. 1) 式反映了两个积分量之间的关系可称为欧姆定律的积分形式. 与此不同, 式(3. 2. 6)描述了导体中每一点的 \mathbf{j} 和 \mathbf{E} 以及 σ 的关系, 它清楚地表明, 导体的导电性质和场强分布决定导体中的电流分布, 所以它比式(3. 2. 1)更为细致地反映了导体的导电规律.

例 一高压输电线铁塔如图 3. 2. 4, 设在某次事故中有电流 I_0 沿铁塔流入大地, 铁塔的接地电极为一半球形导体, 电流在半

这在各向同性的电导体中一般成立.

球面上均匀分布. 大地土质看做均匀的, 电导率为 γ , 若这时有一人在铁塔附近, 他的右脚与接地电极中心 O 点相距为 r_1 , 左脚与接地电极中心相距为 r_2 . 计算此人两脚之间的电压(叫做跨步电压).

图 3. 2. 4 跨步电压

解 按题设可以认为地中电流线是辐射状的, 如图. 距 O 点为 r 处的电流密度可如下求得: 以 O 点为中心作一半径为 r 的半球面, 设半球面上电流密度为 j , 则半球面上的电流强度为

$$I = \int j \, dS = j \int dS = j \cdot 2\pi r^2$$

由电流恒定条件可知, 这个半球面的电流强度应该等于 I_0 , 于是由上式可得

$$j = \frac{I_0}{2\pi r^2}$$

根据欧姆定律的微分形式可得, 这一半球面上任一点, 也即距 O

点为 r 处的场强大小为

$$E = \frac{j}{r} = \frac{I_0}{2r^2}$$

因而此人两脚间的电压 $U_1 - U_2$ 为

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 E j r dl = \int_{r_1}^{r_2} \frac{I_0}{2r^2} dr = \frac{I_0}{2} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

由上面的结果可看出, 此人离铁塔愈近(即 r_1 和 r_2 愈小), 他的两脚分得愈开(即 $r_2 - r_1$ 愈大), 两脚之间的电压就愈大.

§ 3.3 电流的功和功率 焦耳定律

3.3.1 电流的功和功率

由式(1.6.14)可知, 在正电荷从电位较高的地点移动到电位较低的地点的过程中, 电场力对电荷作正功. 在此过程中电位能转化为其它形式的能量. 所以, 在电流顺着电位降落方向通过一段电路时, 发生电能向其它形式能量的转化. 例如, 在电流通过由导线和电炉组成的一段电路时, 电能转化为电炉丝和导线中晶格点阵上的正离子的热运动能量, 并可由电炉丝和导线以传热方式释放出来, 对于其它用电器, 电能也可转化为其它形式能量, 例如机械能, 化学能等.

要确定电流通过一段电路时电能转化为其它形式能量的大小, 只须计算电流通过该段电路时电场力的功, 通常把有电流时电场力作的功叫做电流的功. 下面, 我们来导出电流的功的表达式:

设一段电路由导线和某一用电器(例如电炉或电动机)组成(见图 3.3.1), 今在这段电路两端 a 和 b 维持一电压 $U_1 - U_2$, 便有恒定电流 I 通过这段电路, 电流方向如图所示. 因此, 在通电时间 t

习惯用语把这说成是电流通过电阻时产生热量.

内, 通过这段电路中任何一处的电量均为 $q = It$. 这样, 在时间 t 内, 电场力对这段电路中移动着的正电荷做功的总和, 相当于电量为 $q = It$ 的正电荷从 a 点移到 b 点的过程中电场力作的功. 根据式(1.6.14), 这个功为

$$A = q(U_1 - U_2) = I(U_1 - U_2)t \quad (3.3.1)$$

这就是电流的功的表达式. 式(3.3.1)表明, 一段电路内电能转化为其它形式能量的量值由加在这段电路两端的电压和通过这段电路的电流强度以及通电时间共同决定.

单位时间内电场力作的功, 叫做电功率. 若用 P 表示电功率, 则由式(3.3.1)得

$$P = \frac{A}{t} = I(U_1 - U_2) \quad (3.3.2)$$

图 3.3.1 推导电流的功的表达式

即一段电路的电功率等于这段电路两端的电压和通过该电路的电流强度的乘积.

应当指出, 普遍情况下电流的功并不总是正值. 在§ 3.5 中将会看到, 在一段包含有电源的电路中, 电流是可以从电位低的一端流向电位高的一端的. 这时电场力作负功, 即电流的功为负值, 相应有其他形式能量转换为电荷所增加的电位能. 具体转换关系在§ 3.5 中讨论.

在 SI 中电流的功和功率的单位为 J(焦耳)和 W(瓦特), 由式(3.3.1)及(3.3.2)可知, $1J = 1V \cdot A \cdot s$, $1W = 1V \cdot A$.

电力工程上, 通常用千瓦(kW)及千瓦小时(kW·h)分别为电功率及电流的功的单位. 平常所说的 1 度电就是指 1kW·h. 1 度电与焦耳的关系为

$$1 \text{ 度电} = 1\text{kW} \cdot \text{h} = 3.60 \times 10^6 \text{J}$$

用电器上一般都标有工作电压和电功率. 例如, 电灯泡上标有 220V 40W, 它表明该灯泡在 220V 电压下工作时, 电功率是 40W.

3.3.2 焦耳定律

如果图 3.3.1 中的用电器是一电阻, 则电流的功全部转化为电阻上产生的热, 这时(3.3.1)式也就表示电流通过这段电路时产生的热量 Q , 即

$$Q = A = I(U_1 - U_2)t \quad (3.3.3)$$

根据欧姆定律, $U_1 - U_2 = IR$, 所以上式可改写为

$$Q = I^2 R t = \frac{(U_1 - U_2)^2}{R} t \quad (3.3.4)$$

式中热量的单位是焦耳. 因为式(3.3.4)最早是由英国科学家焦耳(joule)从实验中总结出来的, 所以叫做焦耳定律. 通常把电流通过电阻时产生的热量叫做焦耳热.

单位时间内发出的热量叫做发热功率. 若用 $P_{\text{热}}$ 表示发热功率, 则由式(3.3.4)可得

$$P_{\text{热}} = \frac{Q}{t} = I^2 R = \frac{(U_1 - U_2)^2}{R} \quad (3.3.5)$$

式中发热功率的单位是 W.

请读者注意, 电流的功不是在任何情形下都转化为焦耳热. 例如, 在图 3.3.1 所示电路中的用电器若为一台电动机, 则当电流通过这段电路时, 电能的大部分转化为机械能, 小部分转化为焦耳热, 因而在这情形中电流的功等于机械能与焦耳热之和. 只有在用电器为一纯电阻时, 电流的功的量值才等于电路中的焦耳热.

在交流电情形, 这个值指电压的有效值.

当导体上的电流分布不均匀时, 导体上不同部分产生的热量不相等. 为了细致地描述导体上各处发热的情况, 我们引入热功率密度这个物理量. 设在通电导体上任一点处取一体元 V , 若 V 内的发热功率为 $P_{\text{热}}$, 则比值 $\frac{P_{\text{热}}}{V}$ 在 $V \rightarrow 0$ 时的极限值叫做该点的热功率密度, 若用 $w_{\text{热}}$ 表示热功率密度, 则

$$w_{\text{热}} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{P_{\text{热}}}{V} \quad (3.3.6)$$

即热功率密度等于单位体积内的发热功率. 引入热功率密度这个概念后, 我们可以写出焦耳定律的微分形式. 设所取体元为图 3.2.3 中小圆柱体, 则小圆柱体的发热功率为

$$P_{\text{热}} = (I)^2 R = (j \cdot S)^2 j \propto \frac{1}{S} = (j \cdot S)(E \cdot l)$$

式中 j 和 E 均为小圆柱体所在处的电流密度和场强的大小. 小圆柱体的体积 $V = S \cdot l$, 于是小圆柱体处的热功率密度为

$$w_{\text{热}} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{P_{\text{热}}}{V} = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ l \rightarrow 0}} \frac{j \cdot S E \cdot j \propto \frac{1}{S} \cdot l}{S \cdot l} = j E$$

根据欧姆定律的微分形式 $j = \sigma E$, 代入上式便得,

$$w_{\text{热}} = \sigma E^2 \quad (3.3.7)$$

(3.3.7) 式叫做焦耳定律的微分形式. 它表明, 导体上任意一点的热功率密度和该点的场强平方成正比, 比例系数就是该点导体的电导率.

电流的热效应在日常生活和生产、科研中都有广泛的应用, 例如白炽灯, 电炉、电烙铁、电烘箱以及保险丝等等都是利用电流的热效应来工作的.

当然, 事情总是一分为二的, 在有些场合电流的热效应是有害的, 例如在输电线、变压器、电动机和发电机等场合中, 电流的热效应不仅白白浪费电能, 而且在散热不好的情形下还可能烧坏绝缘材料引起事故. 因此, 为了安全地使用导线和电器设备, 对通过导

线和电器设备的电流强度必须加以限制. 导线和电器设备容许通过的最大电流强度叫做额定电流. 导线的额定电流可由电工手册查到, 电器设备的额定电流一般写在设备的铭牌上, 或者由额定功率算出. 我们在使用导线和电器设备时要注意不可使通过的电流大于额定值.

§ 3.4 金属导电的古典电子论

3.4.1 金属导电的古典电子论的基本概念

1. 自由电子气

我们在第二章中说过, 金属导体具有晶体结构, 正离子以一定方式排列成整齐的空间点阵, 自由电子在点阵间不停地热运动, 其运动图象与装在容器中的气体分子的热运动极为相似, 所以金属中自由电子的整体常又称为自由电子气. 古典电子论的基本观点是, 气体分子运动论的有关规律同样适用于金属中的自由电子气.

2. 金属导体中电流形成的微观过程

当金属中不存在电场也不存在电子密度梯度和温度梯度时, 电子朝各方向运动的几率相等, 因而它们热运动速度的平均值等于零. 这就是说, 若在金属中任意取一截面, 则在同一时间内, 从两边穿过该截面的电子数相等, 因而从宏观上看, 金属中不形成电流.

自由电子在热运动过程中不断碰撞晶体点阵上的正离子, 所以每个自由电子的轨迹都是一条曲折的折线(图 3.4.1 中实线).

当金属中存在电场时, 每个自由电子都受到电场作用力, 因而每个自由电子都在原有热运动的基础上附加一个逆着电场方向的定向运动(叫做漂移运动), 由于漂移运动, 每个自由电子的轨迹将如图 3.4.1 中虚线所示. 这时自由电子的速度是其热运动速度和定向运动速度的叠加. 因为热运动速度的平均值仍然等于零, 所以

图 3.4.1 电子在电场作用下的漂移运动

自由电子的平均速度等于定向运动速度的平均值. 定向运动速度的平均值叫做漂移速度. 它的方向与金属中的电场方向相反. 大量自由电子的漂移运动形成金属导体中的电流. 下面, 我们根据上述观点找出金属导体中电流密度和自由电子漂移速度的关系.

设通电导体中某点附近自由电子的数密度为 n , 自由电子的漂移速度为 u , 经过时间 t , 该点附近的自由电子都移过距离 $u t$. 今在该点附近取一小圆柱体, 截面和漂移速度方向垂直、截面积为 S 、长为

图 3.4.2 电流密度与漂移速度的关系

$u t$ (图 3.4.2). 显然, 位于这小圆柱体内的自由电子, 经过时间 t 后都将穿过小圆柱体的左端面. 位于小圆柱体内的自由电子数为 $nu t S$, 所以在时间 t 内穿过左端面的电量 q 为

$$q = nu t S e$$

式中 e 是电子电量的绝对值. 由此可得左端面上的电流强度 I 为

$$I = \frac{q}{t} = ne u S$$

左端面处的电流密度大小 j 为

$$j = \frac{I}{S} = ne u$$

因为电子带负电, 所以电流密度的方向与漂移速度的方向相反. 故上式写成矢量形式时应加一负号, 即

$$j = - ne u \quad (3.4.1)$$

这就是电流密度与漂移速度的关系式. 利用此式可计算金属导体中自由电子的漂移速度.

例 设直径为 1mm 的铜导线, 载有 10A 的恒定电流. 已知铜导线中自由电子数密度 $n = 8.4 \times 10^{28}$ 个/ m^3 . 求: 铜导线中自由电子的漂移速度的大小, 并把它与室温(27)下热运动的平均速率作一比较.

解 铜导线中的电流密度大小为

$$\begin{aligned} j &= \frac{I}{S} = \frac{I}{r^2} = \frac{10}{3.14 \times (0.5)^2} = 12.7 \text{ A } \mu\text{m}^{-2} \\ &= 12.7 \times 10^6 \text{ A } \mu\text{m}^{-2} \end{aligned}$$

根据(3.4.1)式, 自由电子的漂移速度大小为

$$\begin{aligned} u &= \frac{j}{ne} = \frac{12.7 \times 10^6}{8.4 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 9.45 \times 10^{-4} \text{ m } \mu\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

结果表明, 即使在很大的电流密度的情况下, 自由电子的漂移速度还是非常小的.

应用气体分子运动论的结论, 可计算出室温下自由电子气热运动的平均速率为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{8kT}{m}} = \sqrt{\frac{8 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{3.14 \times 9.11 \times 10^{-31}}} \\ &= 1.08 \times 10^5 \text{ m } \mu\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

可见, 自由电子的漂移速度的大小远小于其室温下热运动的平均速率.

现在要问：“既然自由电子的漂移速度如此之小，为什么当开关刚一闭合，电路中立刻有电流？”关于这个问题应该这样来理解：电路中的电流并不是由电源内的电子跑到该处以后才形成的，它是由电路中任一处当地的自由电子的定向运动所形成。而自由电子的定向运动是由电场引起的，所以电路中电流形成的快慢由电路中各处电场建立的快慢所决定。开关闭合前，导线处于静电平衡状态，导线内部场强处处为零。但开关两端通过导线和电源相联，则开关两端存在电位差，因而开关两端附近存在电场。在开关闭合过程中，引起周围电场变化，这变化以电磁波的形式传播，传到哪里就在哪里建立起电场。而电磁波以光速($3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$)传播，所以开关一闭合，电路中各处几乎立即建立起电场，因而电路中各处几乎同时形成电流。由此可见，电路中电流形成的快慢与漂移速度的大小无关。

3.4.2 根据古典电子论推导欧姆定律

现在，我们根据古典电子论的观点，从微观上导出欧姆定律的微分形式，并把金属的电导率与微观量的平均值联系起来。

设金属导体内存在场强为 E 的电场，则导体中每个自由电子受到的电场力为

$$f = -eE$$

式中负号表示电子所受电场力的方向与场强方向相反。根据牛顿第二定律，每个自由电子获得的加速度为

$$a = \frac{f}{m} = -\frac{eE}{m}$$

式中 m 是电子的质量。由于与晶体点阵上的正离子碰撞，自由电子定向速度的增加受到限制。由于自由电子热运动速度远大于定向运动速度，所以电子与晶体点阵碰撞时受到的冲力远大于电场力，因而碰撞过程中可以忽略电场力。这样一来，电子与点阵碰撞

后向各个方向运动的几率相等, 所以每次碰撞后瞬间平均而言定向速度, 也即此后运动中的定向初速度 $u_0 = 0$. 设电子在两次碰撞之间的平均自由飞行时间为 τ , 则电子在第二次碰撞前一瞬间的定向运动速度 u_t 为

$$u_t = a \tau = - \frac{e}{m} E \tau$$

则在时间 τ 内的平均定向运动速度, 即漂移速度 u 为

$$u = \frac{u_0 + u_t}{2} = - \frac{e}{2m} E \tau$$

设电子的平均自由程为 λ , 热运动平均速率为 v , 由于 $v \gg u$, 近似有

$$\tau = \frac{\lambda}{v}$$

把这结果代入上式使得

$$u = - \frac{e}{2mv} E \quad (3.4.2)$$

因为 e 、 m 、 v 都与场强无关, 因此自由电子的漂移速度的大小与场强成正比. 把式(3.4.2)代入式(3.4.1) $j = - neu$ 中可得

$$j = \frac{ne^2}{2mv} E \quad (3.4.3)$$

因为金属导体中自由电子数密度亦与场强无关, 所以式(3.4.3)表明, 金属导体中的电流密度与场强成正比, 这就是欧姆定律的微分形式. 把式(3.4.3)与式(3.2.7)对比, 可得

$$\sigma = \frac{ne^2}{2mv} \quad (3.4.4)$$

根据分子运动论, 我们知道, 平均自由程 λ 与温度无关, 而 v 与 \sqrt{T} 成正比, 故由(3.4.4)式可知

$$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

因而金属电阻率与温度的关系为

$$\frac{1}{T} \quad (3.4.5)$$

这样,金属导体的电导率随温度升高而降低,电阻率随温度升高而增加的实验事实也得到了说明.但是必须指出,古典电子论只能定性地说明金属导体导电的规律,定量的结果与实验事实有很大出入.例如,根据式(3.4.4)算出的电导率与实验测出的数值相差很大,而且实验结果表明,大多数金属的电阻率与热力学温度成正比,即

$$\frac{\text{实验}}{T}$$

这与(3.4.6)式相差很大.这些情形表明,古典电子论存在许多困难.近代物理学指出,只有根据量子力学来研究金属导电时,才能得到与实验一致的结果.

应用古典电子论还可定性说明电流的热效应.当金属导体中存在电场时,自由电子在电场作用下定向漂移形成电流,在此过程中电场力对自由电子作正功,使自由电子的定向运动动能增大.同时,自由电子又频繁地和晶体点阵上的正离子碰撞,在碰撞过程中自由电子把定向运动动能传递给正离子,使其热振动加剧,因而金属导体的温度升高,这就是电流的热效应.

§ 3.5 电动势 一段含源电路的欧姆定律

3.5.1 非静电力

前面说过,恒定电流的电路必须是闭合回路.恒定电流的闭合回路中不可能只存在静电力.因为,导体一般都是有电阻的,顺着电流方向导体电位逐点降低.电流流过导体产生焦耳热,正电荷电位能减少.如果不存在非静电性质的作用,正电荷不可能从较低的电位处再回到原来的位置.这样势必引起电荷分布改变而导致电场分布变化,回路中的电流也就不可能恒定.所以恒定电流的闭合

回路中至少应有一段电路上存在着能把正电荷从低电位处移到高电位处并在移动电荷的过程中把其他形式能量转变成电位能的非静电性质的作用. 我们把这种作用叫做非静电力, 把提供非静电力的装置叫做电源. 这就是说闭合电路中要形成恒定电流必须存在电源.

每个电源有两个电极, 当电源单独存在时电位高的那个电极叫做电源的正极, 电位低的那个电极叫做电源的负极. 电源的正负极用一具有一定电阻的导体连接起来就构成一个最简单的闭合电路, 如图 3.5.1 所示. 电源以外的电路叫外电路, 电源内部的电路叫内电路. 当电路接通时外电路中只存在静电力, 所以电流由电源正极经外电路流向电源负极. 在内电路中, 静电力和非静电力同时存在, 非静电力反抗静电力把正电荷从电源负极移到电源正极, 所以内电路中电流由电源负极流向电源正极. 内电路也有电阻, 叫做电源内阻. 有电流通过时内电阻同样产生焦耳热.

图 3.5.1 电源的原理图

从能量转换的角度看, 在外电路中, 电场力驱动正电荷定向移动作正功, 电位能转化为电阻上产生的焦耳热. 在内电路中, 非静电力把正电荷由电源负极移到电源正极反抗静电力作正功, 把其它形式能量转化为电位能和内电路产生的焦耳热. 正电荷沿闭合

电路移动一周电位能不变. 所以内外电路电阻上产生的焦耳热全部由电源内其它形式能量转化而来. 所以从能量的角度看, 电源是一个把其他形式能量转化为电能的换能器.

电源的种类很多, 例如有化学电池、发电机、光电池、热电偶等不同类型的电源. 在各种电源中, 非静电力的本质是完全不同的, 例如化学电池中的非静电力是与离子溶解和沉积过程有关的化学作用, 发电机中的非静电力则是电磁感应作用. 这些将在以后有关的章节中再来讨论.

3. 5. 2 电动势

相同电量的电荷通过不同的电源, 各电源提供的电能是不同的. 为了描述电源提供电能的本领, 我们引入电动势这个物理概念. 设电量为 q 的正电荷经内电路从负极移到正极, 在此过程中非静电力作的功为 $A_{\text{非}}$, 则比值 $\frac{A_{\text{非}}}{q}$ 叫做电源的电动势. 用 E 表示电动势, 则

$$E = \frac{A_{\text{非}}}{q} \quad (3. 5. 1)$$

即电源的电动势数值上等于把单位正电荷经内电路从负极移到正极的过程中非静电力作的功, 亦即单位正电荷经内电路从负极移到正极的过程中其它形式能量转化为电能的数量.

设作用在单位正电荷上的非静电力为 $E_{\text{非}}$, 则电量为 q 的电荷所受到的非静电力为

$$F_{\text{非}} = qE_{\text{非}}$$

在电荷 q 经内电路从负极移到正极的过程中, 非静电力作的功为

$$A_{\text{非}} = \int_{-}^{+} F_{\text{非}} \cdot \vec{dl} = \int_{-}^{+} qE_{\text{非}} \cdot \vec{dl} \quad \begin{matrix} \text{(电源内)} & \text{(电源内)} \end{matrix}$$

于是电源电动势的定义又可写为

$$E = \frac{A_{\text{非}}}{q} = \oint_{\text{(电源内)}} E_{\text{非}} \cdot dl \quad (3.5.2)$$

若在闭合电路中处处存在非静电力, 则无法区分电源内部和电源外部, 这时我们把 $E_{\text{非}}$ 沿闭合电路的环路积分 $\oint_{\text{(闭合电路)}} E_{\text{非}} \cdot dl$ 定义为闭合电路的电动势, 即

$$E = \oint_{\text{(闭合电路)}} E_{\text{非}} \cdot dl \quad (3.5.3)$$

显然, (3.5.2) 式只是 (3.5.3) 式的一个特殊情形, 因为在电源外 $E_{\text{非}} = 0$, 则 (3.5.3) 式就转变为 (3.5.2) 式. 所以 (3.5.3) 式是电动势的普遍的定义.

在 SI 中, 电动势的单位为 V, 即电动势的单位与电位差的单位相同, 但必须注意它们是两个不同的概念.

电动势是电源的基本特征之一, 它的大小由电源本身的性质所决定, 与通过电源的电流大小和方向无关.

由定义可知, 电动势是一标量. 但为了反映非静电力驱动正电荷运动的趋向, 通常在电源处画一指向, 习惯上把从负极经内电路指向正极的方向规定为电动势的指向, 当正电荷沿电动势指向通过电源, 电源内非静电力作正功.

3.5.3 一段含源电路的欧姆定律

对于包含电源的一段电路, $U_1 - U_2 = IR$ 不成立. 因为在电源内部除静电力外还存在非静电力, 电源内部的电流是在静电力和非静电力共同作用下形成的, 所以在电源内部应把 $j = E$ 修改为

$$j = (E + E_{\text{非}}) \quad (3.5.4)$$

此式叫做含源电路欧姆定律的微分形式. 下面, 我们由 (3.5.4) 式导出含源电路欧姆定律的积分形式. 由 (3.5.4) 式得

$$j = E + E_{\text{非}}$$

把上式两边积分,并选择积分路径通过电源内部,则

$$\int_{-}^{+} \underline{j} \cdot \underline{e} dl = \int_{-}^{+} E \cdot \underline{j} dl + \int_{-}^{+} E_{\text{非}} \cdot \underline{j} dl$$

(电源内) (电源内) (电源内)

$$= U_{-} - U_{+} + E$$

而积分 $\int_{-}^{+} \underline{j} \cdot \underline{e} dl = \int_{-}^{+} j \cos \theta dl$, 式中 θ 是 j 与 dl 的夹角, 若电源内部电流的方向是从负极指向正极, 我们就说电源在放(供)电, 这时 j 与积分路径方向相同, $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$; 若电源内部电流的方向是从正极指向负极, 我们就说电源在充电, 这时 j 与积分路径方向相反, $\theta = \pi$, $\cos \theta = -1$. 因而,

$$\int_{-}^{+} \underline{j} \cdot \underline{e} dl = (\pm 1) \int_{-}^{+} j dl$$

$$= (\pm 1) \int_{-}^{+} \frac{I}{S} dl = \pm I \int_{-}^{+} \frac{dl}{S} = \pm Ir$$

式中 I 是电流强度 $I = jS$, S 是导体的截面积. 在恒定电流情形下, I 在积分路径上是常数, 可从积分号内提出. 上式中 $\frac{dl}{S}$ 是电阻率, $r = \int_{-}^{+} \frac{dl}{S}$ 是电源内阻. 于是

$$\pm Ir = U_{-} - U_{+} + E$$

或

$$U_{+} - U_{-} = E \mp Ir \quad (3.5.5)$$

这就是一段含源电路欧姆定律的积分形式. 式中 $\mp Ir$ 一项, 在电源放电时取“-”号, 充电时取“+”号. 式(3.5.5)表明, 电源放电时, 路端电压小于电动势. 电源充电时, 路端电压大于电动势. 在无电流流过电源时, 路端电压等于电动势.

若电源内阻为零, 则无论电源是充电还是放电, 路端电压恒等于电动势, 即电源的端电压是恒定的, 这种电源叫做理想电源. 由式(3.5.5)可见, 一个有内阻的实际电源可以等效为一个电动势为 E 的理想电源和一个阻值等于内阻 r 的电阻的串联电路(见图

3. 5. 2) .

图 3. 5. 2 实际电源的等效电路

3. 5. 4 电源的功率和输出功率

电源处于放电状态时, 电源内非静电力作正功. 若通过电源的电流强度为 I , 则在时间 t 内, 通过电源的电量为 $q = It$. 由式(3. 5. 1) 可得, 在时间 t 内非静电力作的功为,

$$A_{\text{非}} = qE = ItE$$

单位时间内非静电力作的功叫做电源的功率, 以 $P_{\text{源}}$ 表示, 则由上式可得电源的功率为

$$P_{\text{源}} = \frac{A_{\text{非}}}{t} = IE \quad (3. 5. 6)$$

电源的功率表示单位时间内其他形式能量转化为电位能的数量. 由于电源有内阻, 当电流通过电源内部时产生焦耳热, 所以电源在单位时间内向外电路输出的电能小于电源功率, 电源在单位时间内向外电路输出的电能叫做输出功率. 若用 $P_{\text{出}}$ 表示输出功率, 则

$$P_{\text{出}} = IE - I^2r = I(E - Ir) = I(U_+ - U_-) \quad (3. 5. 7)$$

因为通过电源的电流大小和外电路负载有关, 故电源的输出功率大小和外电路负载有关.

现在讨论一个最简单的情形, 设外电路负载是一个阻值为 R 的电阻, 如图 3. 5. 3. 在此情形下, 电源输出的能量全部转化为电阻 R 上产生的焦耳热, 即

$$P_{\text{出}} = I^2R \quad (3. 5. 8)$$

把式(3.5.8)代入式(3.5.7)得

$$I^2 R = I E - I^2 r$$

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (3.5.9)$$

式(3.5.9)叫做闭合电路(或全电路)的欧姆定律,已知闭合电路中的

电动势和内外电路的总电阻, 图 3.5.3 最简单的闭合电路

应用式(3.5.9)可求出无分支的

闭合电路中的电流强度.把式(3.5.9)代入式(3.5.8)得

$$P_{\text{出}} = \frac{E^2}{(R + r)^2} R \quad (3.5.10)$$

式(3.5.10)表明,电源输出功率的大小随负载电阻 R 的大小而变,当负载电阻 R 比电源内阻 r 大很多或者小很多时,电源输出功率都很小.把式(3.5.10)对 R 求一阶导数并令其等于零,即

$$\frac{dP_{\text{出}}}{dR} = 0$$

可求得 $P_{\text{出}}$ 为极大值的条件是

$$R = r \quad (3.5.11)$$

(3.5.11)式叫做负载与电源的匹配条件.把 $R = r$ 代入(3.5.10)式得电源最大输出功率为

$$P_{\text{出 max}} = \frac{E^2}{4}$$

必须指出,匹配条件只是在电子技术放大电路中才有意义.因为对放大电路的负载来说,放大电路相当于是一个具有很大内阻的电源.而输出的讯号功率又很弱,应用负载与电源匹配条件可大大提高放大电路输出的讯号功率.收音机、扩音机的功率放大电路通过输出变压器和喇叭相接就是为了满足匹配条件.

例 一电路如图 3.5.4 所示,已知 $E_1 = 6V$, $E_2 = 3V$, $r_1 = r_2 = 1$, $R_1 = 10$, $R_2 = 9$, (1) 求 ab 两端的电压 $U_a - U_b = ?$ (2) 若把

R_1 变为 9 , R_2 变为 10 , 这时 $U_a - U_b = ?$ 若用导线把 ab 两端相连, 有无电流通过电源 2? 求此时电源 1 和电源 2 的输出功率.

图 3.5.4

解 (1) 因 ab 两端断开, 没有电流通过电源 2, 所以回路 f g c d e f 中的电流强度可根据 (3.5.9) 式求得

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 + r} = \frac{6}{20} = 0.3A$$

根据 (3.2.1) 式, ad 两点的电压为

$$U_a - U_d = IR_2$$

而根据 (3.5.5) 式得 bd 两点的电压为

$$U_b - U_d = E_2$$

把以上两式相减得

$$U_a - U_b = IR_2 - E_2 = 0.30 \times 9 - 3 = -0.30V$$

即 a 点电势比 b 点电势低 0.30V.

(2) 因回路 f g c d e f 中电动势未变, 回路中总电阻 $R_1 + R_2 + r$ 的值也未变, 所以回路中电流强度不变仍为 0.30A. 根据 (1) 所得结果, ab 两端的电压为

$$U_a - U_b = IR_2 - E_2 = 0.3 \times 10 - 3 = 0$$

这表明, ab 两端电势相等, 在电势相等的两端连上一根导线, 导线

中不会形成电流,因而没有电流通过电源 2,这就是说,一个电源和外电路接通时,也可以没有电流通过该电源.

根据(3.5.7)式,电源 1 的输出功率为

$$\begin{aligned} P_{1\text{出}} &= I E_1 - I^2 r_1 = I(E_1 - I r_1) = 0.3(6 - 0.3 \times 1) \\ &= 1.71 \text{W} \end{aligned}$$

因为通过电源 2 的电流为 0,故电源 2 的输出功率为 0.

* 3.5.5 丹聂耳电池

为了使读者对非静电力有一个具体的了解,这里介绍一种原理上最简单的化学电池——丹聂耳电池.

丹聂耳电池的构造如图 3.5.5(a)所示,一块多孔素瓷板把绝缘材料制成的一个容器分成两部分,每一部分各盛有 CuSO_4 溶液和 ZnSO_4 溶液.多孔素瓷板使两种溶液不易掺混,但却能使 SO_4^{2-} 离子自由通过.在 CuSO_4 溶液和 ZnSO_4 溶液中分别插入铜板和锌板,这样便构成了一个丹聂耳电池.铜板和锌板就是电池的两个电极.

图 3.5.5 丹聂耳电池

由于锌板和溶液之间的物理化学作用,锌板上的正离子 Zn^{++} 被拉入 ZnSO_4 溶液,而在板上留下价电子,由于正负电荷的静电吸引力,在锌板和溶

液之间形成一个等量异号的电荷层(叫做偶电层). 偶电层内建立起方向由溶液指向锌板的电场, 因而这电场阻碍锌板上的 Zn 离子移入溶液. 随着 Zn 离子移入溶液, 偶电层的正负电荷逐渐增多, 偶电层内的电场逐渐增强, 它对 Zn 离子移入溶液的阻碍作用也愈来愈大. 当偶电层内的电场增强到一定程度时, 电场对 Zn 离子的阻碍作用和使 Zn 离子从锌板上移入溶液的物理化学作用达到动态平衡. 这时偶电层内的电场不再改变, 于是 $ZnSO_4$ 溶液和锌板之间有恒定的电位差, 溶液电位高, 锌板电位低. 由于这电位变化发生在一个很小的距离上, 故称为电位跃变. 我们以 U_{cd} 表示锌板处的电位跃变.

$CuSO_4$ 溶液和铜板之间的物理化学作用使溶液中的 Cu 离子沉积到铜板上, 使铜板带正电. $CuSO_4$ 溶液中的一部分 SO_4^{2-} 根离子在铜板上正电荷的静电吸引下聚集在铜板周围, 与铜板上正电荷形成一个偶电层. 这个偶电层内的电场方向是从铜板指向溶液, 它阻碍 $CuSO_4$ 溶液中的 Cu 离子向铜板上沉积. 同理, 当电场对 Cu 离子的阻碍作用和使 Cu 离子在铜板上沉积的物理化学作用达到动态平衡时, 铜板与溶液间有恒定电位差. 铜板处电位跃变用 U_{ab} 表示. 在丹聂耳电池中铜板的电位最高, 锌板的电位最低. 所以铜板是电池的正极, 锌板是电池的负极.

丹聂耳电池中的非静电力, 就是使锌板上的 Zn 离子移入溶液和溶液中的 Cu 离子沉积到铜板上的化学力. 化学力只存在于锌板、铜板与各自溶液的分界面处, 亦即偶电层内. 在每种溶液内部, 由于各处物理化学性质相同, 不存在把离子从一处移向另一处的化学力. 所以, 在把电量为 q 的正电荷经电池内部从锌板移到铜板的过程中, 非静电力作的功等于它在两个偶电层内反抗电场力作的功, 即

$$A_{\text{非}} = qU_{ab} + qU_{cd}$$

根据(3. 5. 1)式, 丹聂耳电池的电动势为

$$E = \frac{A_{\text{非}}}{q} = U_{ab} + U_{cd}$$

即丹聂耳电池的电动势等于两个偶电层电位跃变之和.

当外电路是开路时, 没有电流通过电池. 这时, 除了溶液和两个电极的分界面处存在电位跃变外, 溶液内其它各处的电位均相等. 电池内的电位分布如图 3. 5. 5(b) 所示.

需要指出的是, 在两块极板和溶液交界面处存在的电位跃变是由极板

图 3.5.6 丹聂耳电池放电的情形

和溶液间的物理化学作用决定的,只要极板与溶液的物理化学性质不改变,极板与溶液交界面处的电位跃变就不会改变,与有无电流通过交界面无关.

当丹聂耳电池的两块极板被一电阻为 R 的导线接通后,立即有电流通过电池,如图 3.5.6(a).这时极板与溶液交界面处电位跃变保持不变,但在溶液内顺着电流方向电位逐点降低.设通过电池的电流为 I ,溶液中 cb 间的电阻为 r ,则溶液中 cb 两处的电位差 $U_{cb} = Ir$.因而电池的端电压为

$$U_a - U_d = U_{ab} + U_{cd} - U_{cb} = E - Ir$$

这与(3.5.5)式结果相同.电池放电时电池内部电位分布如图 3.5.6(b)所示.

丹聂耳电池虽然是最简单的一种化学电池,但它的某些性质却是各种化学电池所共有的.现把这些性质归纳如下:

(1) 化学电池内部的非静电力是与离子溶解和沉积相联系的化学力.化学力的大小是由电极极板与溶液的物理化学性质所决定.化学力仅存在于极板与溶液交界面处.

(2) 化学力在两块极板和溶液交界面处造成并维持一定的电位跃变.化学电池的电动势等于正负电极极板和溶液交界面处的电位跃变之和.

(3) 只要极板与溶液的物理化学性质不变,化学电池的电动势就不会改变,与有无电流通过电池无关.

3.5.6 恒定电路中的电荷分布

前面说过, 恒定电流的电场是由分布在导体内部和表面的电荷产生的, 现在我们具体地来研究恒定电路中的电荷分布.

在不存在非静电力的载流导体内, 任取一闭合曲面 S , 则由电流恒定条件和欧姆定律的微分形式可得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

若导体是均匀导体, 即导体的电导率处处相等, 则电导率 γ 可从上面面积分号内提出, 于是

$$\gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \gamma \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

因为 $\gamma \neq 0$, 所以

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

则由高斯定理可知, 闭合面 S 内的净电量为零. 由于闭合面 S 的任意性, 所以上述结论对均匀导体内任何一处都成立, 即在均匀导体内部电荷体密度处处为零.

若导体不均匀, 即电导率 γ 不处处相等, 则导体内部可以存在电荷分布. 现用一特例来说明这一结论. 设电路由两种导体连接而成, 它们的电导率分别为 γ_1 和 γ_2 , 导体横截面处处相等, 如图 3.5.7 所示. 在电流恒定的条件下, 两种导体交界面两侧的电流密度应相等, 则由欧姆定律微分形式可得

$$\gamma_1 \mathbf{E}_1 = \gamma_2 \mathbf{E}_2$$

因为 $\gamma_1 \neq \gamma_2$, 所以 $E_1 \neq E_2$. 今在分界面附近作一很扁的闭合圆柱面, 这圆柱面的两个底面分别在分界面的两侧, 底面面积为 S . 则此闭合面上的电通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{S} = (E_2 - E_1) S \neq 0$$

图 3.5.7 在导体不均匀处有电荷分布

则由高斯定理可知, 闭合圆柱面内的电量不等于零. 即在导体的不均匀处有净电荷.

下面, 我们通过分析电流达到恒定的过程定性说明导线表面有电荷分布.

设电源两极未接导线时, 电源正、负极上的电荷分布在空间产生的电场的电力线如图 3.5.8(a) 所示, 图中虚线是等位面. 由图可见, 在正负极附近电力线密集, 电场较强. 今用一根均匀导线把两个电极接通(见图 3.5.8(b)). 为了简单起见, 假定在导线刚接通的

图 3.5.8 恒定电流时导线表面有电荷分布

瞬间场强分布尚未改变, 导线中的自由电子在此电场作用下定向

运动形成电流, 愈靠近正负两极电流密度愈大. 在 AC 段导线内由 A 到 C 电流强度逐渐减小, 因而在 AC 段导线表面出现过剩的正电荷. 而在 CB 段导线内, 愈靠近 B 端电流愈大, 因而 CB 段导线表面出现过剩的负电荷. 随着导线表面出现正负电荷分布, 导线内外的场强分布发生变化. 这个过程一直进行到导线内的场强大小处处相等, 导线内的电力线与导线平行, 从电源正极指向负极为止. 这时, 导线内电流强度处处相等, 电流线与导线平行, 导线表面的电荷分布不再改变, 这就是电流恒定的状态. 应该指出, 从导线接通正负极到电路达到恒定状态所需的时间极短, 而且实际发生的过程也远比上面描述的过程复杂得多, 在导线接通电源正负极前, 电荷和电场的重新分布过程在导线移近时就已经开始. 但这些情形并不影响导线表面有电荷分布的结论. 总起来说, 恒定电路中必定有电荷分布在导体表面和导体内部不均匀处.

§ 3.6 基尔霍夫定律

对于只有一个回路的电路, 若已知回路中的电动势和电阻, 则由闭合电路欧姆定律可算出回路中的电流强度. 有些电路虽然包含多个回路, 但经过电阻的串并联也可简化为一个回路的电路, 图 3.6.1 就是一个例子. 但是有些电路, 例如图 3.6.2 所示电路, 不可能用电阻串并联的方法简化为一个回路的电路. 我们把这样的电路叫做复杂电路. 解决复杂电路问题的基本规律是基尔霍夫第一定律和基尔霍夫第二定律. 我们分别介绍如下.

3.6.1 基尔霍夫第一定律

我们在 3.1.4 节从电流的恒定条件已经导出基尔霍夫第一定律: 恒定电路中流入任一节点的电流强度之和等于从该节点流出的电流强度之和. 对于图 3.6.2(a) 中 A 点, 则有

图 3.6.1 电路的简化

图 3.6.2 不能简化的电路例图

$$I_1 + I_2 = I_3$$

根据基尔霍夫第一定律列出的方程叫做节点电流方程(简称节点方程). 对于电路中每个节点都可列出一个节点方程, 例如对于图 3.6.2 中 B 点可写出

$$I_3 = I_1 + I_2$$

显然以上两个方程完全相同. 这表明, 包含两个节点的电路只能写出一个独立的节点方程. 可以证明, 若电路有 n 个节点, 则只能写出 $n-1$ 个独立的节点方程(若再对第 n 个节点列出节点方程, 则它必然可以由前 $n-1$ 个节点方程推出). 这 $n-1$ 个独立的节点方

程组成一个方程组,叫做基尔霍夫第一方程组.

节点电流方程反映出联接于同一个节点的各条支路的电流强度间的关系. 以上我们写节点方程时,是把流入节点的各条支路的电流强度写在等式一边,而把从节点流出的电流强度写在另一边. 但是,若规定在流入节点的电流强度前加“+”号,而在从节点流出的电流强度前加“-”号则基尔霍夫第一定律也可表述为:在恒定电流的电路中流入任一节点的电流强度的代数和等于零,即

$$(\pm) I_i = 0 \quad (3.6.1)$$

3.6.2 基尔霍夫第二定律

根据恒定电场的环路定理 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 沿复杂电路中任一回路绕行一周, 电位不变. 但在绕行过程中电位有升有降. 若我们规定顺着绕行方向电位降落为正的降落, 顺着绕行方向电位升高为负的降落, 则由环路定理可知, 沿任一闭合回路绕行一周, 电位降落的代数和恒为零. 用闭合回路中的电流强度、电阻和电动势表达这一物理事实的数学方程叫做基尔霍夫第二定律又称为回路电压方程. 在写回路电压方程时请注意三点: (1) 先选定回路绕行方向. (2) 若电流 I 的方向与回路正向相同, 则在电阻 R 上电位降落 IR ; 若电流 I 的方向与回路正向相反, 则在电阻上电位降落 $-IR$. (3) 若理想电源电动势 E 的方向与回路正向相同, 则在理想电源电位降落 $-E$; 若 E 的方向与回路正向相反, 则在理想电源处电位降落 E .

现在, 我们根据上述三点写出图 3.6.2(a) 中回路 CDAEFBC 的回路电压方程. 取回路正绕行方向为 C → D → A → E → F → B → C, 则该回路电压方程为

$$-E_1 + I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_2 r_2 - I_2 R_2 + E_2 = 0$$

或写成

$$I_1 r_1 + I_1 R_1 - I_2 r_2 - I_2 R_2 = E_1 - E_2$$

把上面结果推广到任何闭合回路, 便得基尔霍夫第二定律的另一表达形式:

$$(\pm) I_i R_i = (\pm) E_j \quad (3.6.2)$$

上式左边是闭合回路中各电阻上电位降落的代数和, 而式的右边则是该回路中各理想电源处电位升高的代数和, 所以(3.6.2)式表明, 对于任一闭合回路, 该回路各电阻上电位降落的代数和恒等于该回路内各理想电源处电位升高的代数和.

(3.6.2)式中 I_i 和 E_j 前面的“ \pm ”号的取法如下: (1) 任意选定回路的绕行正方向. (2) 若 I_i 的方向与回路正向相同, 则 I_i 前取“ $+$ ”号; 反之则 I_i 前取“ $-$ ”号. (3) 若 E_j 的方向与回路正向相同, 则 E_j 前取“ $+$ ”号; 反之则 E_j 前取“ $-$ ”号. 注意这一点与按回路电位降落代数和恒为零写回路电压方程时关于 E_j 前的正、负号取法正相反.

对于复杂电路中的每一回路, 根据基尔霍夫第二定律都可写出一个回路方程, 但并非对各回路写出的回路方程都是彼此独立的. 例如图 3.6.2(a) 所示电路共包含三个回路: ABCDA、ABFEA、CDAEFBC. 三个回路方程中只有两个是独立的. 因为第三个回路方程可由前两个回路方程联立得到. 对于能在一平面图上画出的复杂电路, 确定该电路独立回路方程个数的简单方法是, 该复杂电路包含的“网孔”个数就是能写出的独立的回路方程的个数. 例如, 图 3.6.2(a) 所示电路包含两个“网孔” ABCDA 和 ABFEA, 所以可写出两个独立的回路方程. 而图 3.6.2(b) 所示电路, 包含三个“网孔”, 所以可写出三个独立的回路方程.

把独立的回路方程组和独立的节点方程组联立, 便能求解复杂电路的问题. 例如, 已知复杂电路中各个电阻和各电源的电动势, 求各支路的电流强度. 在这类问题中, 各支路中的电流方向有

时难于事先定出, 因此, 必须先设定各支路中电流的正方向. 一条支路只能设一个电流正方向. 根据所设电流正向分别写出独立回路方程组和独立节点方程组, 联立求解各支路电流强度. 若解得第 i 支路中电流强度 $I_i > 0$, 这表示该支路中实际电流方向和所设电流正向一致. 若 $I_i < 0$, 则表示该回路中实际电流的方向与所设的电流正向相反.

例 1 一复杂电路如图 3. 6. 2(a) 所示, 已知 E_1 、 E_2 , R_1 、 R_2 、 r_1 和 r_2 , 求各支路的电流强度.

图 3. 6. 2 (a)

解 设各支路电流的正方向如图所示. 根据基尔霍夫第一定律, 对于节点 A, 有

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (1)$$

根据基尔霍夫第二定律, 对于回路 ABCDA 和回路 ABFEA, 分别有

$$I_1(R_1 + r_1) + I_3R_3 = E_1 \quad (2)$$

$$I_2(R_2 + r_2) + I_3R_3 = E_2 \quad (3)$$

把(1)(2)(3)三式联立解得

$$I_1 = \frac{E_1(R_2 + r_2 + R_3) - E_2R_3}{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2) + R_3(R_1 + r_1 + R_2 + r_2)} \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{E_2(R_1 + r_1 + R_3) - E_1 R_3}{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2) + R_3(R_1 + r_1 + R_2 + r_2)} \quad (5)$$

$$I_3 = \frac{E_1(R_2 + r_2) + E_2(R_1 + r_1)}{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2) + R_3(R_1 + r_1 + R_2 + r_2)} \quad (6)$$

由(4)、(5)两式可见, 当 E_1 、 E_2 、 R_1 、 R_2 、 r_1 、 r_2 、 R_3 取不同的值时, I_1 和 I_2 分别可取正值、负值或零. 但 I_1 和 I_2 不可能同时为零或同时为负值.

若 $E_2(R_1 + r_1 + R_3) - E_1 R_3 = 0$, 则 $I_2 = 0$ 而 $I_1 > 0$, 这表明, 在包含多个电源的复杂电路中, 一条包含电源的支路虽然和其它支路相连接成为闭合回路, 却可以没有电流流过, 这时该电源的路端电压等于该电源的电动势. 即

$$E_2 = I_1 R_3$$

由(6)式可见, 不论 E_1 、 E_2 、 R_1 、 R_2 、 r_1 和 r_2 分别取何值, I_3 恒为正值, 这表明 I_3 的方向始终和所设电流正向一致.

例2 图 3.6.2(a)* 是电位差计测电源电动势的电路示意图, 图中 AB 部分是一均匀电阻丝、G 是检流计、R 是一可变电阻器、E 是工作电源、 E_0 是标准电池(电动势 E_0 的值已精确知道)、 E_x 是待测电动势电源.

电位差计测电动势的方法步骤如下: 把电位差计滑动头置于一确定位置 C, 将电键 K 倒向 1, 调节可变电阻 R 的大小, 使检流计 G 指示为零. 保持可变电阻 R 的阻值不变, 将电键 K 倒向 2, 这时有电流流过检流计 G. 移动电位差计的滑动头, 当滑动头移到 D 点时, 检流计又指零. 已知 E_0 、 $AC = l_1$ 、 $AD = l_2$, 求 E_x .

解 当滑动头置于 C 点、电键 K 倒向 1, 检流计指零时, 根据基尔霍夫第二定律, 对回路 ACE_0A 写出回路方程

$$IR_{AC} = E_0 \quad (1)$$

(1)式中 R_{AC} 是电阻丝 AC 段的电阻.

当电键 K 倒向 2、滑动头移到 D 点, 检流计又指零时, 电阻丝 AB 上流过的电流仍为 I, 对回路 ADE_xA 写出回路方程

图 3.6.2 (a)* 电位差计测电动势

$$IR_{AD} = E_x \quad (2)$$

则由(1)(2)两式得

$$E_x = \frac{R_{AD}}{R_{AC}} E_0$$

因为 AB 是一根均匀电阻丝, 所以

$$\frac{R_{AD}}{R_{AC}} = \frac{l_2}{l_1}$$

则

$$E_x = \frac{l_2}{l_1} E_0$$

例 3 图 3.6.3 是一电桥电路. 图中 G 为一检流计, 它的内阻为 R_G . 电桥各臂的电阻分别为 R_1 、 R_2 、 R_3 和 R_4 , 工作电源的电动势为 E , 内阻可忽略. 求该电桥不平衡时流过检流计的电流强度.

解 设各支路中电流如图 3.6.3 所示. 根据基尔霍夫第一定律, 对图中 A、B、C 三个节点分别写出节点方程:

$$\text{对节点 A} \quad -I_1 - I_2 + I_5 = 0 \quad (1)$$

$$\text{对节点 B} \quad I_1 - I_3 - I_G = 0 \quad (2)$$

$$\text{对节点 C} \quad I_2 + I_G - I_4 = 0 \quad (3)$$

图 3. 6. 3 电桥电路

根据基尔霍夫第二定律, 对图中 1、2、3 三个回路分别写出回路方程:

$$\text{对回路 1} \quad I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_G R_G = 0 \quad (4)$$

$$\text{对回路 2} \quad - I_G R_G + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 \quad (5)$$

$$\text{对回路 3} \quad I_2 R_2 + I_4 R_4 = E \quad (6)$$

把以上六个方程联立求解, 得

$$I_G = \frac{(R_2 R_3 - R_1 R_4) E}{R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_3 R_4 R_1 + R_4 R_1 R_2 + R_G (R_1 + R_3) (R_2 + R_4)}$$

由上式可见, 若 $R_2 R_3 - R_1 R_4 > 0$, 则 $I_G > 0$, 这表明流过检流计 G 的电流方向与所设的电流方向相同; 若 $R_2 R_3 - R_1 R_4 < 0$, 则 $I_G < 0$, 这表示流过检流计的电流方向与所设电流方向相反. 若 $R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0$, 则 $I_G = 0$, 即没有电流流过检流计. 电桥与电源接通时检流计指零叫做电桥平衡, 可见电桥平衡的必要与充分条件是

$$R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

^{*} § 3.7 逸出功 接触电位差

3.7.1 逸出功

金属中的自由电子虽然在不停地热运动,但在通常温度下,从金属表面逸出的电子极少,这一事实表明,电子运动到金属表面附近时受到方向指向金属内部的阻力作用.深入地研究阻力的起源是比较复杂的,这里只给以粗浅的说明.由金属的结构可知,金属中以正离子形成晶格骨架,在内部各个正离子对电子的吸引力互相抵消(见图 3.7.1a 处),因而金属内部的电子可认为不受力作用

图 3.7.1 电子在表面附近受到阻力

而自由运动.当电子运动到表面附近,正离子都在电子的一侧,它们对电子的作用力不能互相抵消,合力指向金属内部(见图 3.7.1 中 b 处),它阻止金属内部的电子从金属表面逸出.

金属内部的电子要从金属表面逸出,必须反抗上述阻力做功,这个功叫做电子脱离金属的逸出功.不同金属逸出功不同,此外逸出功的大小与金属表面的状况密切相关,例如金属表面敷有铯或钍时逸出功就大大降低(见表 7.1).

表 7.1 几种金属的逸出功

金属	逸出功(eV)	金属	逸出功(eV)
铂	5.3	钨(表面敷铯)	1.36
钨	4.5	钨(表面敷钡)	1.56
钼	4.2	钨(表面敷钍)	2.63
钽	3.4		

电子要从金属内跑出, 它的动能必须大于逸出功. 在通常温度下, 金属内动能大于逸出功的电子数极少, 所以只有极少数的电子能从金属表面逸出. 当金属的温度升高时, 电子热运动动能增加, 动能大于逸出功的电子增多, 因而逸出金属表面的电子数也随之增多. 当金属的温度高于 1000 K 时, 金属开始显著地发射电子, 这种现象叫做热电子发射. 热电子发射是各种电子管和电子射线管(如示波管、显象管)广泛采用的一种获得电子流的方法.

3.7.2 内接触电位差

实验发现, 当两种不同金属 A 和 B 接触时, 它们之间形成电位差, 这个电位差叫做内接触电位(势)差. 内接触电位差是由于两种金属内自由电子数密度不同而引起的. 设金属 A 内的电子数密度 n_A 大于金属 B 内的电子数密度 n_B , 则接触面处存在电子数密度梯度. 电子将因这梯度从 A 向 B 扩散. A 因电子数减少而带正电, 而 B 则因得到电子而带负电, 于是在接触面间形成场强方向从 A 指向 B 的电场(见图 3.7.2), 这电场阻碍 A 中的电子向 B 扩散. 若把电子从 A 向 B 扩散等效为在接触面间存在一种非静电性的“扩散力”, 则当电场力和“扩散力”平衡时, 扩散中止, 接触面两边有稳定的电位差, 这就是内接触电位差. 既然接触面间存在非静电性的“扩散力”, 则两种金属的接触面可看成一个内阻为零的电

源, 其电动势叫做接触电动势, 电动势的大小即为内接触电位差. 实验表明, 内接触电位差的大小只和两种金属的性质以及接触处的温度有关. 内接触电位差的数值很小, 其数量级为 10^{-3} 到 10^{-2} V.

图 3. 7. 2 两种金属接触面间形成内接触电位差

如果两种金属 A 和 B 接成一个闭合回路, 如图 3. 7. 3, 则闭合回路中的电动势等于两个接头处的接触电动势的代数和. 若两个接

路中的电动势等于两个接头处的接触电动势的代数和. 若两个接

图 3. 7. 3 两种金属构成的回路

图 3. 7. 4 四种金属构成的回路

头处的温度相同, 则回路中电动势为零, 即

$$(E_{AB})_1 + (E_{BA})_2 = 0 \quad (3. 7. 1)$$

即

$$(E_{AB})_1 = - (E_{BA})_2 \quad (3. 7. 2)$$

对于多种金属构成的闭合回路, 伏打(Volta)发现, 若各个接头处的温度相同, 则闭合回路中的各接触电动势的代数和为零. 对于图 3. 7. 4 所示回路, 则回路中总电动势为

$$E = E_{AB} + E_{BC} + E_{CD} + E_{DA} = 0$$

由此得

$$E_{AB} + E_{BC} + E_{CD}$$

$$= - E_{DA} = E_{AD} \quad (3.7.3)$$

这表明, AD 间的接触电动势等于 AB 间、BC 间及 CD 间接触电动势的代数和.

* § 3.8 温差电现象

3.8.1 塞贝克效应

德国物理学家塞贝克(Seebeck)于 1821 年首先发现, 若用两种金属接成闭合回路, 并使两个接头处的温度不同, 如图 3.8.1, 则在闭合回路中形成电流, 这一现象叫做温差电现象或塞贝克效应. 回路中形成电流表明该回路中存在电动势, 这种由于温差而出现的电动势叫做温差电动势. 我们把两种不同金属焊接成的闭合回路叫做温差电池或热电偶.

图 3.8.1 温差电现象

实验表明, 温差电动势的大小只和两种金属的性质及接头处的温度有关. 金属的温差电动势是非常小的, 例如用铜和康铜构成的热电偶, 当两个接头处的温度相差 100 °C 时, 回路中的温差电动势只有 4.3mV.

当热电偶中形成电流时, 放在高温热源处的热电偶接头从高温热源吸热, 而放在低温热源处的另一接头则向低温热源放热. 热电偶两个接头吸热和放热的差值即为转化成电能的数量. 金属热电偶的发电效率极低约为 0.1%, 即热电偶从高温热源处吸热

1000J, 只有 1J 转化为电能, 999J 热量传给低温热源. 所以金属热电偶不宜作为电源用, 它的主要用途是作为温度计测量温度.

除金属有温差电现象外, 半导体也有温差电现象. 用某些半导体制成的温差电池有较大的温差电动势和较高的发电效率(6% — 8%), 所以半导体温差电池在实际中可作为电源用.

对温差电现象深入研究后发现, 闭合回路中出现的温差电动势是由两个电动势——珀耳帖电动势和汤姆孙电动势叠加而得. 因此, 我们在计算闭合回路中的温差电动势前, 首先介绍珀耳帖效应和汤姆孙效应.

3. 8. 2 珀耳帖效应

法国钟表技师珀耳帖(Peltier)于 1834 年发现, 若把两种金属 A 和 B 接成图 3. 8. 2 所示电路并通电时, 则二接头之一(例如接头 1)吸热, 而另一个接头放热; 当电路中电流反向时, 此二接头的吸放热情况随之相反. 这表明接头处吸热还是放热和电流方向有关. 这一现象叫做珀耳帖效应, 接头处吸收或放出的热量叫做珀耳帖热. 显然, 珀耳帖热与焦耳热不同, 焦耳热与电流方向无关, 而且只放不吸.

图 3. 8. 2 珀耳帖效应

珀耳帖热可用两种金属接触面处存在接触电动势来说明. 以图 3. 8. 3 为例, 接头 1 处相当于存在一个处于放电状态的电源, 接

图 3. 8. 3 解释珀耳帖热用图

头 2 处相当于存在一个处于充电状态的电源. 当电流从铜流向铁时, 接头 1 处非静电力作正功, 电场力作负功, 因而有其他形式能量转化为电能, 所以接头 1 从外界吸收热量. 而在接头 2 处电流从铁流向铜, 非静电力作负功, 电场力作正功, 因而有电能转化为热能, 所以接头 2 向外界放出热量. 正因为电流流过接头处时吸收或放出珀耳帖热, 所以接头处的接触电动势又称为珀耳帖电动势, 并以 $\epsilon_{AB}(T)$ 表示.

3. 8. 3 汤姆孙效应

若把一根材料均匀的金属棒 ac 与电源联结如图 3. 8. 4 所示, 并在棒的中点 b 加热, 则当电流沿图示方向流过金属棒时, 棒的 ab 段从外界吸热, 而棒的 bc 段则向外界放出热量, 若改变电流方向, 则 ab , bc 段的吸放热状况互换. 这一现象是汤姆孙(Thomson)在理论上预言的, 故称为汤姆孙效应.

汤姆孙效应可以这样来解释: 当 b 点温度高于 a c 两端的温度时, b 处电子的热运动动能大于 ac 两处电子的热运动动能, 因

图 3.8.4 汤姆孙效应

而电子从 b 处向 ac 两端扩散, b 处由于电子减少而带正电, ac 两端由于电子增多而带负电. 这样, 便在金属棒内形成附加的电场, ab 段棒内附加电场的方向由 b 指向 a, bc 段棒内附加电场方向由 b 指向 c. 附加电场阻碍电子从 b 处向 ac 两端扩散. 若把电子因温度梯度而扩散等效为一种非静电性的“热扩散力”, 则当“热扩散力”与电场力平衡时, 电子不再由 b 处向 ac 两端扩散, 因而 ba 和 bc 两端有稳定的附加电位差. 这样, ab 段和 bc 段各相当于一个电源(见图 3.8.4). 当电流从 a 流向 c 时, ab 段电源处于放电状态, bc 段电源处于充电状态. 因而电流通过 ab 段时, “热扩散力”作正功, 电场力作负功, ab 段金属棒从外界吸热. 而在 bc 段, “热扩散力”作负功, 电场力作正功, 因而 bc 段金属棒向外界释放热量.

设 $E_{\text{非}}$ 表示单位正电荷所受的“热扩散力”, 则理论和实验证明, $E_{\text{非}}$ 的大小可表示成

$$E_{\text{非}} = (T) \frac{dT}{dl} \quad (3.8.1)$$

式中 (T) 叫做汤姆孙系数, 它的大小只和金属的性质及温度有关. 若金属棒 a 端的温度为 T_1 , b 点的温度为 T_2 , 则 ab 段内的电动势为

$$E_T = \int_a^b E_{\text{非}} \cdot dl = \int_{T_1}^{T_2} (T) dT \quad (3.8.2)$$

这个电动势叫做汤姆孙电动势. 汤姆孙电动势的数值很小, 例如室温下铋的汤姆孙系数的数量级为 $10^{-5} \text{V/}^\circ\text{C}$.

以上, 我们分别介绍了汤姆孙效应和珀耳帖效应, 现在返回去计算两种金属 A 和 B 联接成的闭合回路中的温差电动势.

设回路如图 3.8.5, 两个接头处的温度分别为 T_1 和 T_2 ($T_2 > T_1$), 则金属 A 和 B 上同时存在温度梯度, 因而分别产生汤姆孙电动势 E_{AT} 和 E_{BT} . 而在 A 和 B 的接头处分别存在珀耳帖电动势 $\pi_{AB}(T_2)$ 和 $\pi_{AB}(T_1)$. 设回路中温差电动势的正向如图 3.8.5 中环

图 3.8.5 计算温差电动势用图

行箭头所示, 则闭合回路中温差电动势为

$$\begin{aligned} E &= \pi_{AB}(T_2) - \pi_{AB}(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} E_{AT} dT - \int_{T_1}^{T_2} E_{BT} dT \\ &= \pi_{AB}(T_2) + \pi_{BA}(T_1) + \int_{T_1}^{T_2} E_{AT} dT + \int_{T_2}^{T_1} E_{BT} dT \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

由(3.8.3)式可见, 当热电偶给定后, 它的温差电动势的大小由两个接头处的温度决定.

如果在金属 A 和 B 之间插入另一金属 C, 可以证明, 只要维持 C 和 A、B 的两个接头处温度相同, 则 A B C 三种金属联成的闭合回路中的温差电动势的大小等于 A B 两种金属联成的回路中的温差电动势. 实际使用热电偶时常常利用这一结论.

图 3.8.6 在热电偶中插入第三种金属 C 后不改变回路温差电动势

3.8.4 温差电现象的应用

温差电现象有许多实际应用,这里我们只介绍三种应用.

(1) 测量温度

金属热电偶的主要应用是测量温度.热电偶测量温度的示意图如图 3.8.7.由金属 A 和 B 构成的热电偶的一个焊接点(叫做热电偶的测试端或热端)放在待测温度的地点, A 和 B 的另一端分别用两根相同的金属线 C 接到电位差计. C 和 A 及 B 的联结点(叫做热电偶的参考端或冷端)放在温度已知的恒温物质(例如冰水或大气)中.因为热电偶的冷端温度固定在温度 T_0 , 则由(3.8.3)式知, 热电偶的温差电动势只是测试端温度 T 的函数.用电位差计测出热电偶的温差电动势, 然后从事先校准好的 $E \sim T$ 曲线上便可查出待测温度.

热电偶温度计与通常用的液体温度计相比, 有测温范围大(从 - 200 到 2000)、灵敏度和准确度高(准确度可达 $1/1000$ 度以下)、热惯性小、可逐点测量被测物体上的温度分布等一系列优点.常用的热电偶有铜-康铜热电偶(适用于测 300 以下的温度)、铁-

图 3.8.7 热电偶测量温度

康铜热电偶(适用于测 800 以下温度)、铂-铂铑热电偶(适用于测- 200 至 1700 范围的温度).

此外,若把热电偶装在真空管内,并在测试端焊上一块涂有碳黑的金属片,则此装置可测量微弱的辐射能量.

(2) 温差电源

前面说过,金属热电偶的发电效率极低,所以在实际中不能作为电源用.但是某些半导体做成的热电偶具有较强的温差电效应和较高的发电效率.为了进一步增大温差电动势,常把热电偶串联起来做成温差电堆,如图 3.8.8. 温差电堆中的所有热端放在高温热源中,工作时热端从高温热源吸收热量. 温差电堆的所有冷端放在散热器中,工作时冷端释放的热量通过散热器散走,温差电堆在实际中可作为电源用. 例如,有一种半导体温差电堆,只用一盏煤油灯加热便能发出几十瓦的电力. 这种电源特别适合于在野外工作用.

(3) 致冷器

图 3. 8. 8 温差电堆

利用某些半导体有较强的珀耳帖效应,可制成半导体致冷器.例如,若把图 3. 8. 8 所示温差电堆外接一个电源,使电流由温差电堆的正极流入电堆,负极流出,则温差电堆的所有冷端从周围吸收热量,而所有热端向高温热源放热.这样,随着电流不断流过温差电堆,温差电堆冷端所在处的温度将逐渐降低,这就是致冷器.半导体致冷器无机械运动部件,直接利用电能实现热量的转移,所以这种致冷器具有结构简单、无噪声、无空气污染,使用寿命长等一系列优点,但这种致冷器耗电较多.

^{*} § 3. 9 气体中的电流

3. 9. 1 气体的被激导电

气体是由大量中性分子或原子组成的,所以在通常情况下是良好的绝缘体.高压输电线用裸线正是基于空气的良好绝缘性.但

在外界因素(例如火焰、紫外线、X 射线等)作用下气体可以变成导体,甚至可以通过强大的电流.

为什么中性分子或原子组成的气体在火焰或紫外线等外界因素作用下会变成导体?这是因为火焰、紫外线等因素都能使中性分子内的电子获得足够的能量挣脱原子核的束缚而离去.这样一来,一个中性分子就分成一个带正电的离子和一个带负电的电子,而电子和其它中性分子相遇时可以结合为负离子,于是气体中就有了可以自由移动的正、负电荷.在电场作用下,它们分别沿相反方向定向运动形成气体中的电流.

中性分子在外界因素作用下形成正、负离子的过程称为电离过程,促使中性分子电离的外界因素(如火焰、紫外线、X 射线和宇宙射线等)统称电离剂.在气体中发生中性分子电离过程的同时,还发生正、负离子相遇形成中性分子的过程,正、负离子结合成为中性分子的过程叫做复合过程.

电离和复合是一对互相矛盾的因素.电离使气体中正、负离子增加,复合使气体中正、负离子减少.此外,正、负离子运动到电极上与那里的异号电荷中和,成为中性分子,这也是使气体中正、负离子减少的一个原因.如果撤去电离剂后,气体中的电离过程消失,则气体中全部正、负离子将因复合过程而变成中性分子.这样,气体就失去了导电性.若气体只在电离剂存在时能够导电,电离剂撤走后就不能导电,这种导电现象叫做被激导电.

气体中电流的伏安特性曲线,可用图 3.9.1 所示实验得到.设电离剂的强度保持不变,改变 AK 间的电压,由零开始逐渐增加,分别记下每一电压所对应的电流.由实验测定可得气体中电流的伏安特性如图 3.9.2 所示.由伏安特性曲线可见,当 AK 间的电压不大时,电流 I 与电压 U 成正比(图中 OA 段).此后,随着电压增大,电流增加逐渐缓慢(图中 AB 段).当电压增大到某一数值之后,电流不再因电压增大而增加(图中 BC 段),这一情形叫做电流

图 3. 9. 1 研究气体中电流的实验原理

图 3. 9. 2 气体导电的伏安特性曲线

饱和,这时的电流强度叫做饱和电流,以 I_s 表示. 当电压增大到 U_c 后,若再继续增大,则电流将急剧增加(图中 CD 段). 在图中 C 点以前,气体的导电现象均需在电离剂作用下才能发生,把电离剂撤

走, 气体中的电流很快消失, 故 C 点以前均属被激导电.

3. 9. 2 气体的自激导电

在以上测定气体电流的伏安特性曲线的实验中, 当 AK 间的电压大于 U_0 后, 即使撤走电离剂, 气体仍然导电. 气体的这种导电现象叫做自激导电. 当气体由被激导电过渡到自激导电时, 我们就说气体被点燃(或击穿), 使气体点燃的电压 U_0 叫做点燃电压(或击穿电压).

为什么在放电管 AK 两极间的电压大于 U_0 时撤走电离剂气体仍能维持导电? 这是因为当电压大于 U_0 时, 气体中的电场比较强, 电场力在电子和离子的自由程内作的功, 使它们获得较大的动能. 因此, 当它们碰撞中性分子时, 能使后者电离, 这种电离叫做碰撞电离. 碰撞电离过程链锁地发展下去, 使得气体中电子和离子数雪崩式地增加. 此外, 动能很大的正离子轰击阴极时, 能从阴极打出新的电子, 这种现象叫做二次电子发射. 这些电子在强电场作用下也参与碰撞电离过程. 因此, 即使没有电离剂的作用, 只要电场足够强, 气体也可由于碰撞电离和二次电离而维持导电.

在发生碰撞电离过程的同时, 还发生中性分子或原子被激发的过程, 即气体中有一些分子或原子, 在它们受到电子或离子碰撞而获得能量后, 并没有发生电离, 而只是从能量较低的状态跃迁到能量较高的状态. 但是能量较高的状态是不稳定的, 在极短的时间(10^{-8} — 10^{-7} 秒)内又回到原来的能量状态, 多余的能量便以光辐射的形式放出. 所以在自激导电时, 往往伴有发光现象.

自激导电因条件不同而有不同的形式, 以下是几种常见的自激导电形式:

1. 弧光放电

弧光放电是自激导电的一种, 可以在低气压、通常气压和高气压中发生. 产生弧光放电的最简单方法是, 在通常气压下, 在两个

碳棒或金属棒作成的电极上加上一定电压,先使其两极接触,随后就分开,这时由于接触处产生的焦耳热,使阴极温度很高而产生热电子发射.此外,还由于正离子碰撞阴极而产生二次电子发射.这些因素使得弧光放电的电流很大,在两极间可产生几千度甚至上万度的高温.

弧光放电的特点是:极板间的电阻小,电压不高;当电流增大时,两极间的电压反而下降;伴随弧光放电有强烈的发光.

因为弧光放电时有强烈的发光,故可用作电影放映机和探照灯的光源.弧光放电时产生的高温,在工业上可用来冶炼金属、焊接和切割高熔点的金属.

在高压电路或有大电流通过的电路中拉开电闸时也会产生电弧,称为拉闸电弧.这也是在大气压下的一种弧光放电,若不采取适当的灭弧措施,就会烧坏电器甚至引起火灾.故灭弧问题是制造和使用电器时必须注意的一个问题.

2. 火花放电

火花放电也是在通常气压下发生的自激导电.它和弧光放电的不同点是:电极间距离较大,放电时两个电极都是冷的,放电的点燃电压很高.当两个电极的电压达到点燃电压后,气体被击穿成为导体,但碰撞电离并不是在两个电极之间的全部空间内进行,而只是在个别发光的通道上进行.发光通道决定于离子偶然聚集的情况,在放电最容易的路径上形成火花线.火花线上电子和离子的剧烈运动引起气体压强和温度急剧增加,因而发生噼啪声,这是火花放电的特征之一.天空中的闪电便是自然界中大规模的火花放电(图 3.9.3).

3. 辉光放电

辉光放电是在低气压下发生的自激导电现象. 要研究辉光放电现象, 可用一长玻璃管, 在其两端各装上一个电极, 将玻璃管的一个支管与抽气机接通, 使管中的气体逐渐被抽走, 当管内气体的压强降低到约 1mmHg 时, 在两个电极上加上一百伏到数百伏的电压, 管内即出现美丽的发光现象, 这就是辉光放电. 这时管内有下列光区: (1) 覆盖阴极表面的第一阴极光层, (2) 第一暗区(实际是微光区, 又叫克鲁克斯暗区), (3) 阴电辉(又叫第二阴极光层), (4) 第二暗区(又叫法拉第暗区), (5) 阳电辉, 如图 3. 9. 4 所示.

图 3. 9. 4 辉光放电

放电管内充以不同的气体, 则发生不同颜色的光辉, 例如氩气呈紫红色, 氖气呈血红色.

辉光放电的特点是: 电流小, 温度不高, 两个电极间的电压几乎全部集中在阴极附近的狭窄区域内. 而且在正常辉光放电过程中, 其电压不随电流变化.

利用辉光放电的发光现象可制成商店装饰用的霓虹灯和仪表上显示数字的数码管. 利用辉光放电过程中的稳压特性可制成稳压管.

思考题

3.1 电路如图所示, 设 A、B 两点的电位差 $U_A - U_B$ 固定. 当 R_1 由小变大时, R_1 和 R_2 中通过的电流分别怎样变化?

思考题 3.1 图

思考题 3.2 图

3.2 电路如图所示, 当电位器 R 的滑动头 C 向 B 端移动时, R_0 中通过的电流怎样变化?

3.3 在电流密度 $j = 0$ 的地方电荷体密度是否可能等于零?

3.4 对于非线性电阻欧姆定律是否成立? 关系式 $U_1 - U_2 = IR$ 是否成立?

3.5 截面不等的两根铜棒串接成如图所示的样子, 若在两端加上电压 $U_1 - U_2$, 问: (1) 通过两根棒的电流强度是否相同? (2) 两根棒中的电流密度是否相同? (3) 两根棒中各点的场强是否相同?

思考题 3.5 图

思考题 3.6 图

3.6 一铜线表面敷有银层,若在导线两端加上电压,银层和铜线中的电流密度是否相同?

3.7 发热功率可写成 $P_{\text{热}} = I^2 R$ 和 $P_{\text{热}} = \frac{(U_1 - U_2)^2}{R}$,从前一式子来看发热功率和电阻成正比,而从后一式子来看发热功率和电阻成反比,这是否矛盾?

3.8 220V40W 和 220V500W 两只白炽灯.哪只灯泡的电阻大?若把它们并联后接在电源上,哪只灯泡亮?若把它们串联后接在电源上又是哪只灯泡亮?

3.9 既然电子的定向漂移速度很小,为什么开关一接通屋内的电灯立刻就亮了?

3.10 设有一根导线,截面的直径为 d ,长为 l .在导线两端加有电压 $U_1 - U_2$,试分别讨论以下情形对自由电子漂移速度的影响:(1)若 $U_1 - U_2$ 增到 $2(U_1 - U_2)$, (2)若 l 增到 $2l$, (3)若 d 增到 $2d$.

3.11 在如图所示的三种情形中, A 点的电位 U_A 是否都大于 B 点电位 U_B ? 若已知 $U_A > U_B$, 电流是否一定从 A 流向 B?

思考题 3.11 图

3.12 一段包含电源的电路,如果它两端有电位差,这段电路中是否一定有电流流过?两端电位差为零是否一定没有电流通过?

3.13 电动势与电位差有何区别?

3.14 若把电动势和内阻不等的两个电源并联起来,然后与一电阻联接.这两个电源是否都向电阻提供能量?有无可能一个电源提供能量,另一个吸收能量?或者一个电源供给能量,另一个不吸收能量也不供给能量?

3.15 能否直接用电压表精确测出电源的电动势?为什么?

3.16 若把一个 6—8V 的灯泡接在某一电源上时,灯泡发出正常明亮的光,但当把十个这样的灯泡并联在同一电源上时,发现灯光暗淡,试分析其原因.

3.17 两段材料不同但截面均匀且相等的导线串联起来,在其中通过恒定电流,则两种材料的交界面处是否一定带电?带电的正负与二材料的电阻率,其中电流的方向有无关系?若有,各是什么关系?

思考题 3.17 图

* 3.18 一热电偶如图所示,设 $T_2 > T_1$, $n_A > n_B$. 问: (1) 热电偶中温差电流的方向, (2) 除焦耳热外,回路中哪儿吸收热量? 哪儿放出热量?

习 题 三

3.1 为了节约用铜,导线可改用铝线,但铝线不坚固,所以用钢线作为心线,成为钢心铝线. 设这种电线长 1000m, 电线外直径为 6mm, 心线直径为 2mm. 已知 $\rho_{\text{钢}} = 15 \times 10^{-8} \text{ m}$, $\rho_{\text{铝}} = 2.8 \times 10^{-8} \text{ m}$. 计算这段电线的总电阻.

3.2 以钨做灯丝的电灯泡上注明 220V 60W, 用电桥测得 0 时灯丝电阻 $R_0 = 60$, 钨丝的电阻温度系数 $\alpha = 5.0 \times 10^{-3} \text{ 1/}$, 问电灯点亮时灯丝的温度是多少度?

3.3 图中 A 为电导率很大的导体, B 和 C 是电导率分别为 σ_1 和 σ_2 的导电物质, 它们的厚度分别为 d_1 和 d_2 , 导体的横截面积为 S. 设通过这导体的电流强度为 I, 电流在横截面上的分布均匀. 求: (1) 两层导电物质中的电场强度; (2) 两层导电物质交界面上的电荷面密度; (3) 在 B 和 C 两层导电物质上的电位降落.

3.4 半径分别为 a 和 b ($b > a$) 的两个同心金属球壳, 其间充满电阻率

习题 3.3 图

为 的导电物质. 设金属球壳间的电压为 V , 求: (1) 导电物质中电流密度的分布; (2) 两个金属球壳间的电阻.

3.5 导体的形状为一圆台(见图), 两个底面的半径分别为 a 和 b , 相距为 l . 导体的电阻率为 ρ . 设通过导体的电流为 I , 而且电流在导体横截面上均匀分布. 求: (1) 导体两个底面间的电压; (2) 这段导体的电阻.

习题 3.5 图

习题 3.6 图

3.6 设一接地电极为半球形的导体, 电极的半径为 a , 埋在地下如图所示. 大地可看成均匀导电的物质, 其电阻率为 ρ , 电极本身的电阻忽略不计, 证明: 此电极的接地电阻为 $R = \frac{\rho}{2a}$

3.7 一个 $1k\ 40W$ 的电阻允许通过的最大电流是多少 A? 允许加在这个电阻上的最大电压是多少 V? 若在这个电阻上加上 $100V$ 的电压时, 电阻的发热功率是多少?

3.8 试求下列情形中电流的功率和发热功率: (1) 导线两端的电压 $U_1 - U_2 = 2V$, 通过导线的电流强度 $I = 1A$; (2) 一蓄电池正以 $I = 1A$ 的电流在充电, 电池正负极间的电压 $U_+ - U_- = 2V$, 电池的电动势为 $E = 1.3V$; (3)

一蓄电池组的电动势 $E = 2.6\text{V}$, 它正以 $I = 1\text{A}$ 在放电, 路端电压 $U_+ - U_- = 2\text{V}$.

3.9 一电路如图所示, 每个灯泡的功率都是 100W , 电炉的功率是 1.5kW , 保险丝的额定电流为 3A . 当电炉接入电路后四个灯泡的亮度发生什么变化? 这是为什么?

习题 3.9 图

3.10 一个功率为 100W 的电烙铁, 其额定电压是 $220/110\text{V}$, 其电阻丝有中心抽头 C 如图. 当电源是 220V 时, 用 A 、 B 两端接电源. 若电源是 110V 时, 应该怎样接电源? 在上述两种接法中流过电阻丝的电流是否相同? 通过电源的电流是否相同?

习题 3.10 图

3.11 已知铜的原子量为 63.75 , 密度为 $8.9\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$, 假定铜导线中每个铜原子都提供一个自由电子, 电子电荷的大小为 $1.6 \times 10^{-19}\text{C}$, 阿伏伽德罗常数 $N_0 = 6.02 \times 10^{23}$, (1) 技术上为了用电安全, 规定铜线内电流密度最大值不超过 $6\text{A} \cdot \text{mm}^{-2}$, 求电流密度取上述极限值时铜线内自由电子的漂移速

率的大小; (2) 用 $v = \sqrt{\frac{8kT}{m}}$ 计算 $T = 300\text{K}$ 时铜导线内电子热运动的平均速率 v ; (3) 热运动速率是漂移速率的多少倍?

3.12 一蓄电池组在充电即将结束时, 充电的电流强度为 $I_1 = 3\text{A}$, 这组蓄电池的路端电压 $U_1 = 4.25\text{V}$; 当这组蓄电池开始放电时, 放电电流 $I_2 = 4\text{A}$, 电池组的路端电压为 $U_2 = 3.90\text{V}$. 求这电池组的电动势和内阻.

3.13 一电路如图所示, 已知: $R_1 = 30$, $R_2 = R_5 = R_6 = 10$, $R_3 = R_4 = 20$, 流过 R_4 的电流 $I_4 = 1.25\text{A}$ 电源内阻忽略不计, 求电源的电动势.

习题 3.13 图

3.14 一电路如图所示, 已知: $E_1 = 100\text{V}$, $E_2 = 40\text{V}$, $R = 10$, 电源内阻忽略, $C_1 = C_2 = 5\mu\text{F}$. 求: 各电容器上所带电量.

习题 3.14 图

3.15 电路如图, 已知: $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R = 5$, $E_1 = 12\text{V}$, $E_2 = 8\text{V}$, $E = 12\text{V}$, 电池内阻均为 $r = 1$. 求: (1) a 、 b 两点的电位差; (2) 若把 a 、 b 两点用

习题 3.15 图

导线连接起来, 求通过各个电池的电流强度和电池的端电压.

3.16 一电路如图, 已知 $E_1 = 2\text{V}$, $E_2 = 5\text{V}$, 电源内阻忽略不计. $R_3 = 20$, 欲使电动势为 E_1 的电源没有电流通过, R_1 、 R_2 、 R_4 的阻值应如何取?

习题 3.16 图

3.17 如图, 已知 $R_1 = 6$, $R_2 = 4$, $R_3 = 2$, $I_1 = 1\text{A}$, $I_3 = 2\text{A}$, $E_1 = 20\text{V}$, 各电源的内阻均为 $r = 1$. 求: E_2 和 E_3 以及 a 、 b 两点的电位差.

3.18 一晶体三极管电路如图, 其中 e 为发射极、 b 为基极, c 为集电极.

(1) 今测得通过电源的电流 $I = 1.35\text{mA}$, 集电极电流 $I_c = 1.00\text{mA}$, 发射

习题 3.17 图

习题 3.18 图

极电流 $I_e = 1.05\text{mA}$. 求其它各支路中的电流强度.

(2) 电源的电动势 $E = 9\text{V}$, 内阻忽略, $R_e = 3\text{k}$, $R_c = 2.2\text{k}$, $R_1 = 17\text{k}$. 求: 电阻 R_2 上的电位降以及晶体管各极之间的电位差.

3.19 当负载取用的电流较大时, 为了避免损坏电池, 常采用二个电池并联供电, 如图所示. 设 $E_1 = 1.40\text{V}$, $E_2 = 1.42\text{V}$, $r_1 = 0.05$, $r_2 = 0.07$, 负载电阻 $R = 2$. 求: (1) 通过各个电池的电流强度; (2) 负载电阻 R 上的电压.

习题 3.19 图

习题 3.20 图

3.20 一电路如图, 已知 $E_1 = 1\text{V}$, $E_2 = 2\text{V}$, $E_3 = 3\text{V}$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 3$, 求: (1) 通过各个电源的电流; (2) 每个电源的输出功率.

3.21 AB 两所建筑物间有一双芯电缆(即电缆内有二根彼此绝缘的导线), 其中一条导线的绝缘层在 P 点损坏而接了地(见图). 为了找出接地点

的位置, 在 B 所用粗铜棒 KK 将电缆的两根导线短路, 在 A 所接一桥式探测

习题 3.21 图

装置(图中 G 、 R_1 、 R_2 和 E 的部分). 实验发现当 $\frac{R_1}{R_2} = 3$ 时, 电流计 G 指零. 已知 AB 两所相距 $L = 2000\text{m}$, 二根导线的电阻相同, 且沿长度均匀分布. 求 P 点与 B 所的距离.

3.22 一电路如图, 求 ab 间的电阻.

习题 3.22 图

* 3.23 试论证如果由 A、B、C 三种金属构成闭合回路, 而 C 与 A、B 接头处温度相同(图 3.8.6), 则回路中温差电动势与由 A、B 两种金属构成回路时的温差电动势相同.

第四章 恒定电流的磁场

§ 4.1 磁场 磁感应强度

4.1.1 基本磁现象 磁性的起源

磁学是电磁学的重要组成部分. 早在公元前几百年人类就观察到了磁现象. 我国是世界上最早发现并利用磁现象制作指南针的国家, 在磁学发展史上留下了光辉的一页. 早期, 人们一直把磁和电看作两个毫无关联的现象而独立地加以研究, 直到 1819—1820 年间丹麦科学家奥斯特(Oersted)首次发现了电流的磁效应才启发人们去研究二者的联系, 从而推动了电磁学的迅速发展.

归纳观察到的基本磁现象综述如下:

一种含 Fe_3O_4 的矿石能够吸引铁以及钴、镍等金属. 若把它制成条形, 两端能吸附大量的铁屑, 表现出极强的吸力. 人们把这种吸铁的性质称为磁性, 具有磁性的物体称为磁体, 磁体上磁性集中的部位称为磁极. 如果把磁铁做成条形小磁针, 悬吊或支撑起来使之可以在水平面内自由转动, 则它的一端总是指向地球的北方, 另一端指向地球的南方. 前者称为磁铁的北极, 后者称为磁铁的南极.

磁体之间有相互作用. 任意二磁体的磁极相互靠近时, 同性磁极相互排斥, 异性磁极相互吸引. 小磁针总是沿地球南北极指向的事实表明, 地球本身就是一个巨大的天然磁体, 而地磁的南极应在地理北极附近, 地磁的北极则在地理南极附近.

地磁南北极轴与地理南北极轴(即自转轴)并不重合, 二者的夹角以极长的周期变化, 近年代约为 13° .

1819 年奥斯特发现当一条沿南北方向放置的直导线中通有电流时, 导线正下方附近原先沿南北指向的小磁针会偏转, 而电流反向时, 小磁针的偏转也反向, 即载流导线对磁铁有作用. 进一步的实验表明, 磁铁对载流导线有力作用, 二载流导线(或线圈)之间有力作用, 一段载流直螺线管的行为和一根条形磁铁相似, 如图 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 所示. 为了证实二载流线圈之间的作用力的确源于电流, 安培(Ampere)曾设计了这样的实验: 用双线并绕制成两个线圈且在其中通以相等相反的电流, 如图 4.1.4 所示, 观察它们对其他载流线圈的作用, 结果发现没有任何力或力矩作用. 除了导线中电流的情况之外, 物理学家还采用使附着于物体之上的电荷宏观运动(例如, 使带电圆盘转动)的方法, 观察到它的磁效应. 技术上可获得电子射线束之后, 还发现电子射线束可使它附近小磁针偏转以及磁铁可使电子束偏转. 所有这些现象表明, 电流或运动的电荷和磁铁一样产生磁效应.

安培认为一切磁现象都起源于电流. 为了解释磁铁的磁效应,

图 4.1.1 磁铁对载流导线的作用

图 4.1.2 两载流导线间作用

图 4.1.3 载流直螺线管与条形磁铁等效

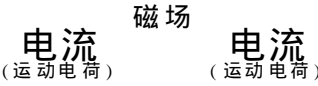
图 4.1.4 并绕线圈

他提出了分子电流的假说,认为磁铁内部存在着基本的磁性单元,每一单元是一小的环形电流,称为分子电流,磁铁的磁性是这些分子电流的磁性的宏观表现.近代物理的发展支持了这一看法.原子内部有电子的绕核运动,电子本身还存在着自旋,环形分子电流可看作是这些电子运动的经典模型.因此,电子的运动,尤其是电子

的自旋运动成为物质磁性的基本起源. 这样, 无论磁铁之间, 磁铁与电流之间, 电流与电流之间的作用都可归结为电流(或运动电荷)之间的作用, 本书除§ 4.6 外都按这一观点讨论问题.

4.1.2 磁场

在电学中我们已经知道, 按照近距作用的观点, 两个静止电荷之间的相互作用是通过电场实现的. 与此类似, 相隔一定距离的二电流之间的作用也是通过场来实现的, 这种场叫磁场. 电流(或运动电荷)在其周围激发磁场; 磁场的基本特征是对处于其中的电流(或运动电荷)有力作用. 它们之间的这一相互联系可图示为



和电场不同, 磁场只对运动着的电荷有力作用, 而电场则无论对静止或运动电荷均有同样的力作用. 这是这两种场的基本区别.

4.1.3 磁感应强度

磁感应强度是为了描述磁场的基本性质而引入的物理量. 通常简称为磁感强度.

由于运动电荷、载流导线或闭合载流线圈在磁场中都会受到力或力矩的作用, 原则上可以用三者中的任何一种来定义磁感应强度. 为了便于和电场强度的定义对比, 本书采用运动电荷受力的定义.

在一给定磁场中设有一试验用运动点电荷, 电量为 q , 速度为 v . 实验发现, 电荷所受磁力的大小和方向均随电荷运动方向而变, 但存在着下述规律: (1) 对场中给定点存在一特定方向, 当电荷沿此方向运动时受力为零, 称此方向的直线为零力线; (2) 若电

如果和电学中电场强度对应, 此处原应称为磁场强度, 但由于历史的原因, 已有另一物理量被定义为磁场强度, 故人们将它定名为磁感应强度.

荷沿与零力线夹角 θ 的方向运动时, 所受磁力 F 的大小与电荷的电量 q , 运动速率 v , $\sin \theta$ 三者成正比, 即比值 $F/qv\sin \theta$ 与试验电荷无关; (3) 磁力的方向垂直于电荷运动方向和零力线所决定的平面, 当试验电荷的运动方向反向, 或其电荷符号相反时, 受力方向随之反向, 如图 4.1.5. 对场中不同点, 零力线方位及比值 $F/qv\sin \theta$ 不同. 因此我们定义磁场中某点的磁感应强度 B 是矢量, 它的大小等于试验电荷在该处所受磁力 F 与电荷电量 q , 运动速率 v 以及电荷运动方向与零力线夹角的正弦 $\sin \theta$ 之比, 即

$$B = \frac{F}{qv\sin \theta} \quad (4.1.1)$$

图 4.1.5 试验电荷

B 的方向沿零力线, 其指向规定如下: 运动正电荷所受磁力的方向与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向一致(对图 4.1.5 中 B 的方向沿水平向左).

在 SI 中, B 的单位为 T(特斯拉), $1\text{T} = 1\text{N} \cdot \text{s}/\text{C} \cdot \text{m}$, 即规定使速率为 1m/s , 电量为 1C 的电荷受到的最大磁力为 1N 时的磁感应强度为 1T . 特斯拉的单位比较大, 物理上还常采用另一单位 Gs(高斯), $1\text{T} = 10^4\text{Gs}$. 地磁场的 B 大约为零点几高斯, 通常实验室用强磁场的 B 可达 $1 \sim 2\text{T}$, 运用超导技术后可获得高达 20T 的超强磁场.

4.1.4 磁力线

和在电学中用电力线描述电场相似,对给定磁场,我们也可绘制一系列空间有向曲线来形象地描述磁场的分布.绘制时使曲线上任一点的切线方向与该点磁感强度 B 的方向相同,并使通过该处单位垂直面积上的曲线的条数等于该处磁感强度 B 的大小.按此规定画出的有向曲线称为磁感应线,简称 B 线,通常叫作磁力线.由磁力线的疏密和走向可形象地表示出磁场的强弱及方向的空间分布.某些典型电流的磁场的磁力线可参见§ 4.2 中图 4.2.3, 4.2.4, 4.2.7 等.

§ 4.2 电 流 的 磁 场

本节讨论载有恒定电流的导线产生磁场的规律.

4.2.1 毕奥-萨伐尔(Biot-Savart)定律

任意一载流导线可以分割为无限多段线元,每一段载流线元称为电流元 Idl ,其大小等于该线元上流过的电流 I 与线元长度 dl 之积,方向沿该处电流流向.

毕奥-萨伐尔定律给出一段电流元产生磁场的规律,它是作为电流产生磁场的基本规律而提出的.定律内容如下:真空中离电流元 Idl 距离为 r 处的场点,由该电流元产生的磁感强度为

$$dB = \frac{\mu}{4} \frac{Idl \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.2.1)$$

式中 \hat{r} 为由电流元指向场点的单位矢量, $\mu = 4 \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A}$ (H/m) 叫真空磁导率.若 \hat{r} 与 Idl 间夹角为 θ ,式(4.2.1)给出磁感应强度 dB 的大小为

$$dB = \frac{\mu}{4} \frac{Idl}{r^2} \sin \theta$$

dB 的方向垂直于 Idl 和 \hat{r} 决定的平面, 指向由右手定则确定. 即使右手四指由 Idl 沿夹角小于 θ 的方向弯向 \hat{r} , 则大拇指指向为 dB 方向, 如图 4.2.1(b) 所示. 按式(4.2.1), 电流元产生的磁场以该电流元为轴线对称分布.

图 4.2.1 电流元的磁场

至于整个载流导线回路在空间任一点产生的磁感应强度则为各电流元在该点产生的磁感应强度的矢量和, 即

$$B = \oint_L \frac{\mu}{4} \frac{Idl \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.2.2)$$

符号 \oint 表示沿闭合回路进行积分.

式(4.2.1)在磁学中的地位与点电荷的场强公式在电学中的地位相当.

实际中不可能获得单独的恒定电流元, 因而式(4.2.1)不是由实验直接得出的结果. 它是 1820 年毕奥和萨伐尔二人对载流长直导线产生的磁场进行实验研究, 发现它的强度跟场点到导线的距离成反比(参见本章附录 4-), 随后不久拉普拉斯(Laplace)把整

个载流导线的作用看作是各电流元作用的矢量和, 根据毕奥-萨伐尔的结果从数学上反推得出的. 几乎和拉普拉斯同时, 安培设计了几组精巧的实验, 研究恒定电流回路之间的作用, 并按它们是电流元之间相互作用叠加从理论上推得与式(4-2-1)相同的公式. 式(4.2.1)的正确性体现在把式(4.2.2)用于计算各种给定形状的载流导线回路的磁场, 得到与实验一致的结果.

4.2.2 典型电流磁场的计算

作为毕奥-萨伐尔定律的应用, 这里计算几种简单而典型的电流的磁场.

载流直导线的磁场

一段有限长的直导线上通有恒定电流 I . 设场点 P 与导线垂直距离为 a , 垂足 O 将导线分为 L_1 、 L_2 两部分. 以 O 为坐标原点, 在导线上与 O 相距 l 处取一电流元 $I dl$, 由式(4.2.1), $I dl$ 在 P 点产生的磁场的大小为

$$dB = \frac{\mu}{4} \frac{I dl}{r^2} \sin$$

dB 方向垂直于线段元 dl 与 P 点决定的平面, 即垂直于此直导线与 P 点决定的平面. 因此导线上各电流元在 P 处的磁感强度方向相同, 在计算整个载流导线的磁场时矢量

图 4.2.2 直电流
的磁场的计算

叠加化为标量叠加, 故 P 点的磁感强度

$$B = \int_L \frac{\mu}{4} \frac{I dl}{r^2} \sin$$

由图可见式中 r 、 l 、三者都是变量, 计算时需要统一为一个变量. 由几何关系知

$$r = \frac{a}{\sin} = a \csc$$

$$l = a \cot(\theta_1 - \theta_2) = -a \cot \theta_2$$

对后一式微分, 有 $dl = a \csc^2 \theta_2 d\theta_2$, 将 dl, r 换为变量 θ_2 , 代入积分式得

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a \csc^2 \theta_2 d\theta_2}{\csc^2 \theta_2} \sin \theta_2 \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

式中 θ_1, θ_2 分别为场点 P 相对载流直导线两个端点的位矢与导线的夹角.

由上面计算结果可讨论场中 B 的分布. 若取场点 P 在以 O 为中心, a 为半径的圆周上, 则可知该圆周上各点的 B 的大小相等, 方向都沿着圆周的切线. 又若将 P 点沿平行于直导线方向平移至以导线中垂面为对称面的另一点, 则 B 的大小方向均不变. 因此, 有限长载流直导线的磁场的 B 线是一系列以该直导线为中心轴线的圆, 其圆平面与导线垂直, 且这些圆的疏密对导线的中垂面呈对称分布, 如图 4.2.3(a).

令式(4.2.3)中 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 即导线为无限长, 则得

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (4.2.4)$$

此即无限长载流直导线产生的磁场, 其磁感强度与场点到导线的距离成反比变化. 实际情况中, 如果场点到载流导线两端的距离远大于场点到导线的垂直距离就可近似得到式(4.2.4)的结果. 即这种情况下可以把导线看作无限长.

式(4.2.4)也正是毕奥和萨伐尔在 19 世纪由实验测得的结果.

图 4.2.3 载流直导线的磁力线

载流圆形线圈轴线上的磁场

半径为 R 的圆形线圈中通以恒定电流 I (习惯上称为圆电流). 现计算轴线上与圆心相距 r_0 的场点 P 处的磁感强度.

在圆环上任取电流元 $I dl$, 由于 $dl \ll r$, 它在 P 点产生的磁感强度大小为

$$dB = \frac{\mu}{4} \frac{I dl}{r^2}$$

方向如图 4.2.4(a) 所示. 由于电流的分布相对于其轴线对称, 可在圆环上取与 $I dl$ 对称的电流元 $I dl$, 它产生的场强大小为

$$dB = dB = \frac{\mu}{4} \frac{I dl}{r^2}$$

图 4.2.4 圆电流的磁场

方向与 dB 对称.

由矢量叠加可知, 合场强必定沿轴线, 因此

$$\begin{aligned}
 B &= \int_L dB \cos = \int_L \frac{\mu I}{4} \frac{dl}{r^2} \cos \\
 &= \frac{\mu I}{4} \int_L \frac{\cos}{r^2} dl \\
 &= \frac{\mu I R^2}{2(R^2 + r_0^2)^{3/2}} \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

式(4.2.5)的结果是将积分式中 $\cos = R/r$, $r = \sqrt{R^2 + r_0^2}$ 代入后得

出的. B 的方向沿轴线向右.

当场点在轴线上圆环的另一侧与 P 对称的位置时, 场强大小、方向均不变. 圆环中心处的磁感强度是轴上各点中磁场最强处, 其值为

$$B_0 = \frac{\mu I}{2R}$$

至于轴外的场强, 已非简单的积分运算能求得, 不属本课程的要求, 不再赘述. 图 4.2.5(b) 给出在过圆环中心与圆环面垂直的平面上其磁力线分布图. 将此图绕轴线旋转即可得到磁力线的空间图形.

图 4.2.5 螺线管轴线上磁场的计算

若场点到圆心距离 r_0 远大于圆环半径 R 时, $R^2 + r_0^2 \approx r_0^2$, 式 (4.2.5) 可近似写为

$$B = \frac{\mu I R^2}{2r_0^3}$$

$$= \frac{\mu I R^2}{2 r_0^3}$$

引入面积矢量 $S = R^2 \hat{n}$, 其中 \hat{n} 为圆面的法线单位矢量, 其指向与电流流向成右手螺旋关系, 并令 $m = IS$ 称为该载流线圈的磁矩, 则上述结果可用矢量形式表示为

$$B = \frac{\mu m}{2 r_0^3}$$

将此式与电学中一偶极矩为 p 的电偶极子在其电荷连线的延长线上相距 r_0 处产生的电场强度公式

$$E = \frac{p}{2 r_0^3}$$

比较可知, 磁矩为 m 的小圆形电流产生磁场的规律与电偶极矩为 p 的电偶极子产生电场的规律相似.

均匀密绕载流直螺线管轴线上的磁场

导线均匀紧密地缠绕在圆管形框架上, 单位管长上匝数为 n , 导线中通以电流 I . 由于导线均匀密绕, 可以把其中的电流看成是并排的封闭圆电流. 设 P 为管轴线上一点. 在螺线管上截取一段与 P 的垂直距离为 z , 长为 dz 的短管, 则该短管上的电流相当于电流为 $I n dz$ 的圆形电流, 由式(4.2.5)可知它在 P 点产生的磁感强度的大小为

$$dB = \frac{\mu (I n dz) R^2}{2 r^3}$$

方向沿 z 轴. 对整个螺线管积分可得 P 点的磁感强度, 即

$$B = \int dB = \frac{\mu n I R^2}{2} \int \frac{dz}{r^3}$$

由图中几何关系, $r = \frac{R}{\sin \theta} = R \csc \theta$, $z = R \cot \theta$. 对后一式微分有 $dz = -R \csc^2 \theta d\theta$, 设图 4.2.5 中螺线管两端对 P 点的半张角分别为

1、2, 代入上积分式有

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\mu n I R^2}{2} \int_1^2 \frac{R \csc^2}{R^3 \csc^3} d \\
 &= \frac{\mu n I}{2} \int_1^2 \frac{1}{\csc^3} d \\
 &= \frac{\mu n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

若令上式中 $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \pi$, 即螺线管为无限长, 则得

$$B = \mu n I \quad (4.2.7)$$

即无限长螺线管轴线上各点 B 大小相等, 方向相同. 实际上若螺线管长度比管直径大许多, 则管内中部附近相当大范围轴线上的 B 均可按式(4.2.7)近似求得. 对于轴线上位于螺线管两端的点,

有 $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 = \pi$ 或 $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, 由式(4.2.6)有

$$B = \frac{1}{2} \mu n I$$

即细长螺线管两端轴线上的磁感强度为中部磁感强度的一半. 图 4.2.6 给出 L (管长) = $5D$ (管直径) 时轴线上 B 的分布曲线. 可见在中点 M 附近长约 $3D$ 的区域都可认为 B 均匀(相差仅为 5%).

图 4.2.6 $L = 5D$ 时轴线上 B 的分布

整个载流直螺线管的磁场的磁力线如图(4.2.7). 用右手握住

螺线管, 四指沿电流流向, 则姆指指向为管内磁力线方向.

图 4.2.7 载流直螺线管的磁力线

4.2.3 匀速运动点电荷的磁场

当一点电荷 q 以速度 v 匀速运动时, 若速率 v 远小于真空中光速, 则点电荷在空间任一点产生的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu}{4} \frac{qv \times \hat{r}}{r^2} \quad (4.2.8)$$

其中 r 是该瞬时点电荷位置到场点的距离, \hat{r} 是由点电荷指向场点的单位矢量. 电荷 q 为代数量, 对正电荷 $q > 0$, 对负电荷 $q < 0$.

导体中的电流是其中自由电荷定向运动(又称漂移)形成的, 因此式(4.2.8)与式(4.2.1)理应一致, 可以从其中一式推得另一式. 下面

图 4.2.8 运动点电荷的磁场

我们从式(4.2.1)出发导出式(4.2.8)。

图 4.2.9

取物理无限小的电流元 $I dl$, 即导线长度 dl , 截面 dS 从宏观上均可看作无限小, 但微观上其中包含着大量的载流子. 设 dS 处电流密度为 j , 其中载流子的电荷为 q , 漂移速度为 v (为方便计, 图中画出正载流子的情况), 数密度为 n , 则电流元 $I dl = j dS dl = nqv dS dl$, 由于 dl 的方向与电流密度 j 的方向相同, 上式改写为

$$I dl = nqv dS dl$$

式中 $ndS dl$ 正是该电流元体积中载流子总数 N , 如果把整个电流元在某点产生的磁场看成这 N 个载流子在该点产生的磁场的矢量和, 并且注意到这些载流子具有相同的漂移速度, 对场点具有同一宏观位置, 则以载流子总数 N 去除式(4.2.1)就应是每一载流子, 即运动电荷所产生的磁感强度, 因此我们有

$$\begin{aligned} B_q &= \frac{dB}{ndS dl} \\ &= \frac{1}{ndS dl} \frac{\mu}{4} \frac{(qndS dl v) \times \hat{r}}{r^2} \\ &= \frac{\mu}{4} \frac{qv \times \hat{r}}{r^2} \end{aligned}$$

它正是我们预期的结果. 如果把上述推导的程序颠倒, 则可由式(4.2.8)推得式(4.2.1). 事实上式(4.2.8)完全可以利用电磁场的

相对论变换从点电荷的电场公式独立地导出(参看本书第七章 § 7.3), 因而这从另一侧面证明了毕奥-萨伐尔定律的正确性.

§ 4.3 磁通连续方程和安培环路定理

和关于静电场的高斯定理和环路定理对应, 在磁学中存在着关于磁感应强度对闭合面的通量以及它对闭合路径的环流的两个定理, 本章讨论这两条定理.

4.3.1 磁通量 磁通连续方程

在电学中我们引入电通量研究电场分布的整体规律, 与此类似在磁学中引入磁通量, 以研究磁场分布的整体状况.

对任一给定曲面, 磁感应强度 B 在其上任一面元处的法线分量与该面元 dS 之积对该曲面 S 的积分定义为该表面上的磁通量 Φ_m , 即

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S B \cos \theta dS \quad (4.3.1)$$

磁通量是代数量, 其正负符号由磁感应强度及相应曲面法线之间的夹角决定. 对闭合曲面, 规定其上面元的法线指向闭合面外部.

根据磁通量的定义, 空间某处的磁感强度 B 数值上等于该处单位垂直面积上的磁通量. 因此, 有时, 尤其在电工技术中, 又称 B 为磁通量密度, 简称磁通密度.

在 SI 中, 磁通量的单位为 Wb(韦伯), $1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$.

根据磁感应线画法的规定, 面元 dS 上的元磁通 $B \cdot dS$ 在几何上可表示为穿过该面元的磁感应线条数. 对于闭合曲面, 若某处 $B \cdot dS > 0$, 表明有磁力线自该处穿出; 若 $B \cdot dS < 0$, 表明有磁力线自该处进入闭合面.

研究一切恒定电流的磁场发现, 它的磁通量满足下述规律: 对

任一给定的闭合曲面, 其上的磁通量恒为零, 即对任一闭合曲面有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.3.2)$$

式(4.3.2)可以由毕奥-萨伐尔定律出发, 从数学上给出严格证明, 由于证明过程较繁, 本书不拟进行, 这里仅借助磁力线给予说明. 由毕奥-萨伐尔定律, 一段电流元 $I d\mathbf{l}$ 产生的磁场是以 $I d\mathbf{l}$ 为轴对称分布的, 如果画出电流元产生的磁场的磁力线, 它们应是一

系列以 $d\mathbf{l}$ 的延长线为轴线的圆, 如图 4.3.1 所示. 由于这些 \mathbf{B} 线是闭合曲线, 对这一磁场中任何闭合曲面, 穿入的磁力线条数与穿出的条数必然相同, 即电流元的磁场对任一闭合曲面的磁通量贡献恒为零.

图 4.3.1 电流元的磁场的磁力线

因为空间任意形状载流导线的磁场都可看作是其上诸电流元

的磁场的叠加, 则场中任一闭合曲面上的磁通量可看作是这些电流元的磁通量的叠加. 现已知每一电流元对闭合曲面的磁通量贡献为零, 所以闭合曲面上总磁通量也必为零, 即式(4.3.2)对任何电流的磁场均适用.

通常称式(4.3.2)为磁通连续方程或称为磁感强度 \mathbf{B} 的高斯定理. 它是关于磁场性质的基本定理之一.

4.3.2 安培环路定理

电学中我们曾得到关于静电场的环路定理 $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. 与此对应, 下面研究对于磁感应强度 \mathbf{B} 沿闭合路径的曲线积分

$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 是否也存在某种规律.

理论推导得出:对真空中恒定电流的磁场,磁感应强度沿任一闭合路径的曲线积分(即曲线上任一线元处 B 的切向分量与此线元 dl 之积对整个闭合路径积分)等于穿过此闭合路径的电流的代数和乘以真空磁导率 μ ,以数学式表示为

$$\oint_L B \cdot dl = \mu I_{\text{内}} \quad (4.3.3)$$

式(4.3.3)称为安培环路定理.

定理中所谓“穿过”闭合路径 L 的电流是指通过以 L 为边界的任一曲面的电流,亦即与环路 L 相互套链的闭合电流.如图 4.3.2(a)中,以 L 为边界的曲面既可以是图中阴影所示的 S_0 面,也可以是以 L 为边缘的帽形 S_1 面等.由于恒定电流的连续性,从 S_0 面通过的电流与从 S_1 面通过的相同,同为 I_1 和 I_2 .在图中还可清楚地看到 I_1 、 I_2 二闭合电流都和环路 L 相互套链.

图 4.3.2 安培环路定理示意

在计算电流的代数和时,应选定环路积分的方向,凡与选定的计算方向成右手关系的电流为正,反之为负.如图 4.3.2(a)中

$I_{\text{内}} = I_2 - I_1$,若环路积分方向与图示方向相反,则 $I_{\text{内}} = I_1 - I_2$.形状复杂的载流回路,若电流不止一次地穿过环路 L ,则每

穿过一次应计算一次。如图 4.3.2(b) 中, 穿过 L_1 的电流为 $2I$, 穿过 L_2 的电流的代数和为 I (穿过的三次中的两次流向相反)。

定理的证明涉及较多的空间几何, 在本章末的附录 4- 中给出, 这里仅就无限长载流直导线的磁场这一特例验证其正确性。

情况一 环路位于垂直于载流直导线的平面, 包围该电流, 如图 4.3.3。

图 4.3.3 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ 的证明

在 L 上任取线元 $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{l}$ 与直导线间距离为 r 。由无限长载流直导线的磁场公式(4.2.4), 该处磁感强度大小 $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$, 方向沿半径为 r 的圆周切向, 设 $d\mathbf{l}$ 与 \mathbf{B} 夹角为 θ , 则

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L B \cos\theta dl$$

式中 $\cos\theta dl = ds = r d\phi$ 为相应圆上一段弧元, $d\phi$ 为 $d\mathbf{l}$ 对圆心的张角。故上式可写为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2r} \oint r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2} \oint d\phi$$

则整个闭合路径 L 上的积分为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2} \oint d\phi = \mu_0 I$$

积分 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 为整个平面闭合曲线对面上曲线内任一点所张的角度, 其值为 2π , 故最后可得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I$$

在证明过程中若选取的环路积分方向与图 4.3.3 所示相反, 则各 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 的值为负, 积分与上述结果符号相反, 而其他关系不变, 因而最后结果为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \mu I$$

如果约定把 I 看作代数量并采用前述符号规则, 可知式(4.3.3)包含了上述两种结果.

情况二 环路位于垂直于载流直导线的平面, 不包围该电流, 如图 4.3.4.

图 4.3.4 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 的证明

由导线上 O 点引出夹角为 α 的两条射线与闭合曲线 L 相切于 a 、 b 二点, 从而把 L 分为 L_1 和 L_2 两段. 再由 O 点引出夹角为 $d\alpha$ 的二条射线, 分别在 L_1 和 L_2 上截出二线元 $d\mathbf{l}_1$ 、 $d\mathbf{l}_2$. 类似于情况一中的证明, 有

$$B_1 j \varpi dl_1 = \frac{\mu I}{2} d = - B_2 j \varpi dl_2$$

因为 L_1 、 L_2 上各对线元分别与各角元 d 一一对应, 故分别对 L_1 、 L_2 积分应有

$$\int_{L_1} B_1 j \varpi dl_1 = \frac{\mu I}{2} = - \int_{L_2} B_2 j \varpi dl_2$$

对整个闭合路径 L 的积分为

$$\int_L B j \varpi dl = \int_{L_1} B_1 j \varpi dl_1 + \int_{L_2} B_2 j \varpi dl_2 = 0$$

它也正是式(4.3.3)用于此种情况的结果.

特别需要指出, 安培环路定理只能用于闭合电流的磁场. 这一点读者从本章附录 4- 的定理证明中可以明确看出. 前述无限长直载流导线可以看成是在无限远处闭合, 因而在其磁场中安培环路定理适用. 对任一闭合载流导线回路, 从叠加的角度考虑, 其磁场可看成组成回路的各段载流导线的磁场的矢量和, 但其中每一段载流导线单独产生的磁感强度沿任一闭合路径的曲线积分却不满足式(4.3.3).

安培环路定理是研究恒定电流的磁场的又一基本定理. 在电流分布具有特殊对称性的情况下, 可以根据此定理方便地求得磁场分布, 反之若已知磁场分布亦可由此定理求得电流的分布.

4.3.3 电流分布呈均匀对称时磁场的计算

作为安培环路定理的应用, 下面计算几种特殊对称分布的电流的磁场.

无限长均匀载流直圆柱体(柱形电流)的磁场

设柱形导体半径为 R , 其中均匀流有电流 I , 相应电流密度 j

$$= \frac{I}{R^2}.$$

首先分析其磁场分布的特征. 由电流分布具有轴对称性容易

判断,在与中心轴相距 r 的各处,磁感强度 B 的大小应相等. B 的方向分析如下,在柱体上沿轴向剖取截面为 dS 的一细窄条,它可看作是一无限长载流导线,它在场点 P 产生的磁感强度 dB 方向已知,如图 4.3.5(a) 所示,再在柱体上相对于 OP 与 dS 对称的位置上取一等面积元 dS ,它产生的磁感强度 $dB = dB$, dB 的方向亦如图 4.3.5(a) 中所示.整个柱体均可分成如此一对对的对称分布电流,由矢量合成可知 P 点的总磁感强度必与 P 点对轴的位矢 \vec{OP} 垂直,即 B 沿以 O 为中心 $OP = r$ 为半径的圆周的切线方向.

这样,过场点 P 作半径为 r 的圆周,以它为积分的环路,可得

$$\oint_L B \cdot dl = B \cdot 2\pi r$$

为了计算穿过环路的电流,分两种情况: 图 4.3.5 无限长均匀载流柱体的磁场

1) 场点在圆柱外,即 $r > R$

$$I_{\text{内}} = I$$

由环路定理,有

$$\begin{aligned} B \cdot 2\pi r &= \mu_0 I \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned} \quad (4.3.4-a)$$

2) 场点在圆柱内,即 $r < R$

$$I_{\text{内}} = \frac{r^2}{R^2} I = \frac{r^2}{R^2} I$$

同理有

$$B_{\varphi} = \mu \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu I}{2 R^2} r = \frac{\mu}{2} j_{\varphi} r$$

将此结果表示为矢量式, 可写为

$$B = \frac{\mu}{2} j_{\varphi} \times r \quad (4.3.4-b)$$

式中 r 为场点相对中心轴的位置矢量.

B 的大小随场点到轴的距离 r 变化的曲线如图 4.3.5(b) 所示. 柱体外的磁场相当于把全部电流集中在中心轴上时一条无限长载流直导线的磁场.

无限长均匀密绕载流直螺线管的磁场

根据电流相对管的中心轴呈对称分布, 且管为无限长可判断得知, 与轴线距离相同的各场点的 B 的大小相同, 且与其轴向位置无关. 而 B 的方向应与轴线平行, 对此分析如下.

设 B 有沿轴向、径向、圆环切向三个分量 B_z 、 B_r 、 B_{φ} . 以 z 为轴作半径为 r , 高为 h 的封闭圆柱面, 如图 4.3.6(a) 左侧图所示. 对此闭合面计算其磁通量应有

$$\oint_S B \cdot dS = \oint_{\text{侧面}} B \cdot dS + \oint_{\text{左底}} B \cdot dS + \oint_{\text{右底}} B \cdot dS$$

因两底面的磁通仅和 B 的 z 向分量 B_z 有关, 而由对称性可知这二底面的磁通等值反号, 即其代数和为零, 而侧面磁通仅取决于 B_r , 故

$$\oint_S B \cdot dS = \oint_{\text{侧面}} B \cdot dS = \oint_{\text{侧面}} B_r dS = 2\pi r h \cdot B_r$$

由磁通连续方程有

$$\oint_S B \cdot dS = B_r 2\pi r h = 0$$

图 4.3.6 长直载流螺线管的磁场

故有 $B_r = 0$, 即磁感强度 B 不含有径向分量. 再以 z 为轴作半径为 r 的圆周, 如图 4.3.6(a) 右侧所示. 对此圆周计算 B 的环流, 它只与 B 有关, 有

$$\oint_L B \cdot dl = B \cdot 2\pi r$$

由于穿过此环路的电流为零, 由环路定理得

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{\text{内}} = 0$$

即 $B = 0$. 至此可以确认 B 只有轴向分量 B_z .

在对 B 的大小分布及方向作出分析后则可进一步利用安培环路定理和已求得的管轴线上的磁场求出管内外任一点的 B 的值.

先求管内任一点 P 的磁感强度. 过 P 作一矩形回路, 使其 ab

对管外场点, 在把螺线管电流看作是并排的封闭圆形电流的情况下, 可以认为穿过此环路的电流亦为零. 实际螺线管管外环流 $\oint B \cdot dl = \mu_0 I = 0$.

边位于轴线, 平行边 cd 通过 P , 如图 4.3.6(b) 左侧图. 对此环路求 B 的环流, 因 bc 、 da 二段上 B 的线积分分别都是零, 则有

$$\oint_L B \cdot dl = B_0 \overline{ab} - B(r) \overline{cd}$$

其中 B_0 为轴上的磁感强度, $B(r)$ 为 P 处磁感强度. 因为穿过此环路的电流为零, 由安培环路定理得

$$B_0 \overline{ab} - B(r) \overline{cd} = 0$$

而 $\overline{ab} = \overline{cd}$, 故 $B(r) = B_0$

上式表明管内磁感强度大小与场点到轴的距离无关, 为均匀场, 其大小即为 § 4.2 中求得的轴线上的场强公式 (4.2.7). 因此管内任一处有

$$B_{\text{内}} = \mu n I$$

$B_{\text{内}}$ 的方向沿轴线, 与管上电流成右手螺旋关系.

对管外场点 P , 同样过 P 作矩形回路, 如图 4.3.6(b) 右侧的 L . 设 $ab = cd = l$, 则此时穿过环路的电流为 $n l I$, 与前类似对此环路用安培环路定理可得

$$\oint_L B \cdot dl = B_0 l - B(r) l = \mu n l I$$

因此有

$$B(r) = B_0 - \mu n I$$

而由式 (4.2.7) $B_0 = \mu n I$, 故得

$$B_{\text{外}} = 0$$

即管外无磁场.

至此我们求得了无限长直载流螺线管管内外空间的磁场.

关于 B 方向的分析中, 其径向分量 $B_r = 0$ 的结果也可由对称性分析得出. 为此先设有 B_r 分量, 并采用下述二步操作: 先将螺线管绕通过场点与 z 轴垂直的轴线旋转 180° ; 即使图 4.3.6(a) 中螺绕管左右端翻转, 此时螺线管电流与图示方向相反, 然后再使翻转

后螺线管电流反向. 经此二步, 管中电流分布恢复原状. 而场点的 B_r 量经第一步操作后方向未变, 第二次操作电流反向, B_r 理应随之反向. 最后的情况是经此二步操作, 电流分布复原, 而 B_r 方向却发生了改变. 显然这个结果从物理上看是错误的, 我们只能排除存在 B_r 的假设, 即有 $B_r = 0$. 至于 $B = 0$ 的结论却不能简单地由对称性分析得出.

无限大均匀载流平板(无限大面电流)的磁场

设有一大的导体薄平板, 其上均匀流有电流(可看作面电流), 此面电流密度(即垂直于电流方向的单位长度上流过的电流)为 i , i 处处大小方向相同.

由电流在无限大平面上均匀分布, 可以判断它在距平板等距离处产生的 B 大小相同. 类似前面对无限长载流直圆柱的磁场的分析, 将平面电流分成一对对对称的细窄长条电流, 它们产生的磁场叠加后方向必然与此平板平行且与电流方向垂直, 且平板两侧 B 方向相反. 如图 4.3.7(a) 所示.

过场点 P 及其对侧对称点 P' 作矩形回路, 使回路二对边 ab 、 cd 与平板平行, 如图 4.3.7(b). 对此环路写出 B 的环路定理, 并注意到在 bc 和 da 两段上 B 处处与路径垂直, 因而其路径积分为零, 我们得到

$$\oint_L B \cdot dl = 2B l = \mu i l$$

$$B = \frac{1}{2} \mu i$$

如果规定 \hat{n} 为载流平板的外法线单位矢量, 即板的左右侧外法线方向相反, 则可将平板两侧磁感强度大小方向统一表示为矢量式:

$$B = \frac{\mu}{2} i \times \hat{n}$$

即无限大均匀平面电流在平面两侧产生方向相反的均匀磁场.

实际情况中, 若场点到载流平板边缘的距离远大于它们到板

图 4.3.7 无限大面电流的磁场

的垂直距离时就可按上式计算磁感强度.

§ 4.4 磁场对运动电荷的作用

4.4.1 洛伦兹(Lorentz)力

本书 § 4.2 中已指出, 由实验可以确定, 电量为 q , 速度为 v 的运动电荷在磁场中所受的力 f 由下式给出

$$f = qv \times B \quad (4.4.1)$$

其中 q 为代数量, 正电荷 $q > 0$, 磁力 f 的方向与 $v \times B$ 的方向相同; 负电荷 $q < 0$, 磁力 f 的方向与 $v \times B$ 的方向相反, 如图 4.4.1. 磁力的大小为

$$f = qv \sin \theta$$

其中 θ 是速度 v 与磁感强度 B 之间的夹角. 通常称式(4.4.1)为洛伦兹公式, 相应的力叫洛伦兹力.

由于洛伦兹力的方向始终和电荷的运动方向垂直, 因此它只可能使带电粒子的运动方向发生改变, 而不能改变粒子速度的大

图 4.4.1 洛伦兹力的方向

小. 磁力的这一特征使技术上能广泛地应用磁场来改变或控制带电粒子的运动轨迹.

4.4.2 带电粒子在均匀磁场中的运动

首先分几种情况讨论只受均匀磁场作用时带电粒子的运动特征

1) 粒子初速度与磁场平行

由式(4.4.1), 洛伦兹力 $f = 0$, 粒子保持匀速直线运动状态.

2) 粒子初速度与磁场垂直, 即 $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$

由式(4.4.1)可知, 此时 f , v , B 三者相互垂直, 即 B 同时与 f , v 垂直, 粒子应在与 B 垂直的平面内运动. 由牛顿定律可知, 粒子切向及法向运动方程分别为

$$m \frac{dv}{dt} = f_t = 0$$

$$m \frac{v^2}{r} = f_n = qvB$$

即粒子应作匀速率圆周运动, 如图 4.4.2, 其轨迹半径

$$R = \frac{mv}{qB}$$

式中 m 、 q 分别为粒子质量和电量. 粒子运动一周所需时间

$$T = \frac{2R}{v} = \frac{2m}{qB}$$

T 与粒子运动速度大小及回旋半径 R 无关.

3) 粒子速度 v 与磁感强度 B 之间有一夹角

图 4.4.2

将粒子的速度分解为平行于 B 的分量 v_{\parallel} 和垂直于 B 的分量 v_{\perp} , 由前述两种特例可知, 粒子一方面以 v_{\parallel} 匀速前进, 一方面以 v_{\perp} 作匀速率圆周运动. 两个分运动合成的结果, 使粒子沿螺旋线

图 4.4.3 带电粒子在均匀磁场中的螺旋运动

运动, 如图 4.4.3. 螺旋半径

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \theta}{qB} \quad (4.4.2)$$

螺距

$$H = v_{\parallel} T = v \cos \theta \frac{2m}{qB} \quad (4.4.3)$$

利用情况 2 所述的运动可制成质谱仪. 使电荷相同, 质量不同

的同位素粒子束, 以同一初速度垂直射入均匀磁场, 由于质量不同, 它们的圆轨道半径不同, 从而可在感光胶片的不同位置得到对应于不同质量的谱线, 如图 4.4.4.

图 4.4.4 质谱仪原理图

利用情况 3 所述的运动可实现带电粒子的聚焦. 一束电子射线, 若各电子速率基本相

同, 但各电子运动方向相对射线方向有一小的分散角, 则射线直接射到屏幕上时, 将会分散为一个较大的圆斑. 但如果在电子束通过区域沿射线方向施加一均匀磁场, 这些电子将依分散角不同而沿不同半径的螺旋线运动. 由于分散角很小, 式(4.4.3)中 $\cos \theta \approx 1$, 各电子的螺距几乎相同, 并且在每运动一周后所有电子应具有和出射处相同的径向位置, 如图 4.4.5. 因此, 如果在距离电子束源为螺距 H 的整数倍处放置屏幕, 就可以得到会聚得相当好的斑点. 这种因磁场的作用而使分散的电子束再度会聚的现象称为磁聚焦. 它广泛地用于电真空器件, 尤其是显像管和电子显微镜中.

图 4.4.5 均匀磁场对电子束的聚焦

值得指出的是, 由于洛伦兹力始终与带电粒子的运动方向垂

直, 根据狭义相对论的动力学规律, 在这种特例下, 高速粒子受力与其运动之间的关系形式上与牛顿第二定律相同, 但其中的质量应是相对论性质量. 又由于电荷是相对论不变量, 当高速粒子进入磁场中在磁力作用下运动时, 只需把前述讨论所得各公式中的粒子质量代换成相对论性质量 $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ 即可. 也就是说前述诸公式对低速及高速粒子均适用.

4.4.3 霍耳效应

1879 年美国物理学家霍耳(Edvin Hall)发现, 当在一块长方体导体上通以恒定电流, 并在垂直于电流方向施加磁场时, 在导体的另一对侧面之间将出现电位差. 如图 4.4.6, 电流沿 x 方向, 磁场沿 y 方向, 则导体上下二表面间出现电位差. 实验测定此电位差 V_H 与电流强度 I 、磁感强度 B 成正比而与导体板沿 B 方向的厚度 h 成反比, 写成数学式为

图 4.4.6 霍耳效应

$$V_H = R_H \frac{IB}{h} \quad (4.4.4)$$

其中比例常量 R_H 叫霍耳系数.

霍耳效应可以由运动电荷在磁场中受到洛伦兹力加以说明. 导体中通有电流时, 其中载流子具有相应的漂移运动. 对正载流子其漂移速度沿电流方向; 对负载流子其漂移速度方向逆电流方向. 这些运动的载流子在磁场中受到洛伦兹力的作用而使运动方向发

关于这一点的讨论见本书第七章*§ 7.4.

生偏转,以致在导体的相应的侧面上产生电荷堆积,直到由此产生的静电场力与洛伦兹力平衡为止,如图 4.4.7.这就是在导体相应两侧出现电位差的原因.

图 4.4.7 霍耳效应的说明

设载流子电荷为 q , 数密度为 n , 对图 4.4.6 所示情况, 电流密度

$$\mathbf{j} = \frac{I}{S} \hat{x} = \frac{I}{l_2 h} \hat{x}$$

而载流子漂移速度 \mathbf{u} 与电流密度 \mathbf{j} 之间的关系为 $\mathbf{j} = nq\mathbf{u}$, 因而漂移速度

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{j}}{nq} = \frac{I}{nql_2 h} \hat{x}$$

载流子在 $\mathbf{B} = B\hat{y}$ 的磁场中受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{f}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{IB}{nl_2 h} \hat{z}$$

设载流子偏转引起电荷堆积而建立的电场强度为 E_H , 达到平衡后应有

$$qE_H + \mathbf{f}_m = 0$$

$$\text{即 } E_H = - \frac{\mathbf{f}_m}{q} = - \frac{IB}{qn l_2 h} \hat{z}$$

相应, 在垂直于 z 轴的两侧面(图中的上下二表面)之间的电位差

值的大小

$$V_H = E_H l_2 = \frac{IB}{nqh} \quad (4.4.5)$$

通常称 V_H 为霍耳电压, 相应的电场叫霍耳电场.

式(4.4.5)给出与实验一致的结果. 与式(4.4.4)相比较可得霍耳系数

$$R_H = \frac{1}{nq} \quad (4.4.6)$$

上式表明, 霍耳系数取决于单位体积中载流子数目(即载流子浓度)以及载流子所带电荷.

由图 4.4.7 及上述推导不难看出, 导体的两个侧面的电位那一面高与载流子电荷的正负有关. 当载流子电荷为正时(如 p 型半导体中), 情况如图 4.4.7(a)所示, u 与 I 同向, 即沿 x 正向, 所受洛伦兹力 f_m 向上, 正电荷堆积于上表面, 因而上表面电位较高; 当载流子电荷为负时(如通常的金属导体或 n 型半导体中), 情况则如图 4.4.7(b)所示, u 与 I 逆向, 即沿 x 负向, 但所受洛伦兹力 f_m 仍向上, 负电荷堆积于上表面, 因而上表面电位比下表面低.

金属中是电子导电, 在图 4.4.7 中应是如图(b)所示, 电位上低下高. 但是, 实验发现某些金属的霍耳电压却表现出与图(b)相反的情况. 这是一种“反常”霍耳效应. 对此, 必须用量子力学观点和固体的能带理论才能解释.

霍耳效应广泛地用于半导体材料的研究. 测量霍耳电压可确定导电材料中载流子电荷的正负; 测定霍耳系数可确定材料中载流子浓度, 从而研究温度、杂质等因素对载流子浓度的影响, 进而深入探求材料导电的机理.

霍耳效应还可用来方便地测定磁场. 用霍耳系数已知的材料制成小薄片状元件, 其上通以设定电流, 测量时只需将元件置入待测磁场, 利用电压表读出元件上霍耳电压的数值, 由式(4.4.4)即

可确定元件所在处的磁感强度. 实际制作的仪器, 已将电压数值换算成相应的磁感强度值直接标度在电表上, 从而可由电表示数直接读出 B 值. 由于元件可以制作得很小, 它几乎可以在磁场中“逐点”进行测量.

如果将图 4.4.6 所示霍耳效应实验中的导体换成一对平行金属板, 并使由外界压强维持一定流速的等离子体从板间流过以代替导体中的传导电流, 如图 4.4.8, 则同样会发生类似霍耳效应的现象. 具有相同方向流速的正负离子受洛伦兹力的推动分别朝相反方向偏转而堆积在二金属板上, 从而在二板之间形成电位差. 如果从二金属板引出电极, 接入负载, 就可以作为电源供电(想想看, 维持回路电流的非静电力是什么? 该如何计算此电源的电动势?) 这种发电的方式称为磁流体发电.

图 4.4.8 磁流体发电原理

一种以离子状态存在的气态物质, 其中正负离子的电荷密度几乎处处相同. 具有与通常气体完全不同的物理性质. 宇宙物质中 90% 以上以这种状态存在. 故称为与气、液、固并存的物质第四态.

* 4.4.4 非均匀磁场的磁约束

在§ 4.4.3 中我们已看到, 一般情况下带电粒子在均匀磁场中作螺旋运动, 在垂直于磁场的方向上, 带电粒子的运动被限制在半径为 R 的圆周上. 从这个意义上可以说带电粒子的横向运动受到了磁场的约束. 如果使带电粒子进入非均匀磁场, 一般地说粒子仍会“螺旋”前进, 但螺距和回旋半径都在改变, 且这种旋进以 B 线为引导. 在一定条件下, 除横向约束外非均匀磁场还可使粒子的纵向运动也受到约束. 这里对此作定性的介绍.

设一轴对称非均匀磁场, 磁力线如图 4.4.9(a) 所示. 磁场沿 z 轴增强. 当带电粒子朝着磁场增强方向运动时, 磁场的作用将使粒子的轴向(即纵向)运动减速. 为了使读者对此有一物理图象, 我们讨论一特殊情形: 正粒子在 z 轴附近以平行于 z 轴的初速度射入磁场. 由于磁场的不均匀, 磁感强度同时具有径向分量 B_r 和轴向分量 B_z , 前者对粒子的作用使它获得横向速度 v , 后者的作用使之产生回旋运动, 如图 4.4.9(a) 所示. 回旋过程中粒子所受磁力中与 $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_r)$ 相应的分力的方向与粒子的轴向分速度 v_z 方向相反, 如图 4.4.9(b), 因而将使粒子的轴向速度减小. 由此可见, 对于一沿磁场增强方向入射的带电粒子, 这一非均匀磁场的作用将使粒子的横向速度增大而纵向速度减小. 如果粒子电荷符号相反, 或 B 线方向相反(但仍沿 z 向增强), 则仅是粒子回旋方向改变, 而上述结论不变. 读者不妨对照图 4.4.9 自己思考这种情况粒子运动的变化和结论.

一般情况下, 即粒子以任一初速方向射入非均匀磁场, 带电粒子运动的细节相当复杂. 深入的理论指出, 运动中带电粒子因其回旋运动而具有的磁矩将保持不变. 设其回旋半径为 R , 只要磁场空间变化率不大, 可近似有 $R =$

$\frac{mv}{qB}$. 粒子回旋运动对应的电流为

$$I = \frac{v}{2R} i \propto q$$

由磁矩定义可求得其回旋运动磁矩为

$$I R^2 = \frac{1}{2} qv R = \frac{mv^2}{2B}$$

磁矩不变, 即量 $\frac{mv^2}{2B}$ 保持不变. 式中因子 $\frac{1}{2} mv^2$ 正是粒子横向作回旋运动的

图 4.4.9 非均匀磁场的磁约束

动能. 因此, 当粒子朝磁场增强的方向前进时, 其横向运动动能增大. 然而由于洛伦兹力对带电粒子不做功, 粒子总动能应保持不变, 横向运动动能增大则纵向运动动能必相应减少, 即纵向速度减小. 如果带电粒子初始纵向速度不太大, 或磁场区足够长, 粒子在经过足够长的纵向距离后其纵向速度可减为零, 然后反向运动. 这种情况就好像粒子受到了“镜面”的反射而返回. 具有这一作用的磁场称为“磁镜”.

根据上述道理, 如果磁场分布是两端强, 中部弱, 如图 4.4.10 所示, 则无论带电粒子最初是朝着哪个方向运动, 只要其纵向速度不太大, 它就会被限制在二端部之间来回运动, 从而其纵向运动被约束. 起这种作用的磁场被形象地称为磁捕集器. 它相当于二平行放置的“磁镜”.

图 4.4.10 磁捕集器

地磁场的分布为南北两极强,赤道附近弱,是一个天然的磁捕集器.它捕集宇宙射线中的带电粒子,使它们在南北极之间往返作回旋运动而辐射电磁波,从而形成地球辐射带.早在1905年物理学家从观察到的极光现象就曾预言这种辐射带的存在,1958年范艾仑分析了人造卫星探测器的资料终于证实,在距离地面高度为1~2个地球半径和3~4个地球半径处存在内外两个辐射带.

§ 4.5 磁场对载流导线的作用

4.5.1 安培力公式

19世纪20年代安培通过实验研究了恒定电流回路之间的相互作用后,把载流回路之间的相互作用看成是其上各电流元相互作用的叠加,从数学分析求得二电流元之间作用力的公式.如图

图 4.5.1 电流元之间的作用

4.5.1, 电流元 $I_2 dl_2$ 受到电流元 $I_1 dl_1$ 的作用力为

$$dF_{12} = I_2 dl_2 \times \frac{\mu}{4} \frac{I_1 dl_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r^2}$$

式中 $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ 为由电流元 $I_1 dl_1$ 引向电流元 $I_2 dl_2$ 的单位矢量.如果把括号内的式子看成是电流元 $I_1 dl_1$ 在 $I_2 dl_2$ 所在处产生的磁感强度,则上式可拆成两个式子

$$dB_{12} = \frac{\mu}{4} \frac{I_1 dl_1 \times r_{12}}{r^2}$$

$$dF_{12} = I_2 dl_2 \times dB_{12}$$

第一个式子正是式(4.2.1), 后一个式子则代表一段电流元在磁场中受到的磁力的公式, 作为普遍公式给出时去掉脚标, 并把受力的电流元 $I dl$ 所在处的磁感强度用 B 表示, 则可写为

$$dF = I dl \times B \quad (4.5.1)$$

而整段载流导线在磁场中所受磁力, 则为各电流元所受磁力的矢量和, 即

$$F = \int_l (I dl \times B) \quad (4.5.2)$$

通常称上二式为安培力公式, 称载流导线所受磁力为安培力.

由于导线中传导电流是载流子的漂移运动形成的, 不难推想电流元所受安培力理应是其中载流子受到的洛伦兹力的总效果, 因而可由式(4.4.1)导出式(4.5.1). 设电流元长为 dl , 横截面为 dS , 其中载流子数密度为 n , 所带电荷为 q . 由于载流子的热运动方向无序, 对整段线元受力无贡献, 只考虑其漂移速度 u , 如图 4.5.2. 每个载流子因漂移运动受到的洛伦兹力为

$$f = qu \times B$$

整段电流元中所有载流子受力的总和为此力乘以线元中载流子的总数, 即

$$dF = (n dl dS) q u \times B$$

而式中 $nqu = j$ 为线元中电流密度, 按规定, 电流元的线元 dl 方向与 j 的方向相同, 因此有

$$dF = dS dl j \times B = j dS dl \times B = I dl \times B$$

图 4.5.2 安培力与洛伦兹力的关系

此即为式(4.5.1),正是我们预期的结果.

下面举例计算载流导线的受力.

例 1 均匀磁场中放置一半径为 R 的半圆形导线,其位置如图 4.5.3 所示.已知磁感强度为 B ,导线中电流为 I ,导线两端的连线与 B 夹角 $= 30^\circ$;求此段圆弧

图 4.5.3 例 1 用图

所受磁力.

解 由式(4.5.2),此半圆弧导线受力为

$$F = \int_{(a)}^{(b)} (Idl \times B)$$

由于磁场均匀, B 可移至积分符号之外,因而有

$$F = I \int_{(a)}^{(b)} dl \times B$$

式中 $\int_{(a)}^{(b)} dl$ 为半圆弧上各有向线元 dl 的矢量和,它等于由半圆一端 a 到另一端 b 的矢量 \vec{ab} , 因此

$$F = I \int_{(a)}^{(b)} dl \times B = I \vec{ab} \times B$$

此式表明半圆形载流导线所受磁力与一段连接其两端的载流直导线的磁力相同,其大小为

$$F = I \vec{ab} \times B \sin \alpha = IRB$$

方向与纸面垂直指向纸内.

例 2 一无限长直载流导线旁共面放置一载流矩形线框.直导线中电流为 I_0 ,线框中电流为 I ,线框尺寸与位置如图 4.5.4 所

示, 其 ab 边与直导线平行. 试求线框各边受到长直载流导线的磁

图 4.5.4 例 2 用图

场的作用力.

解 无限长直载流导线在距轴线 r 处的磁感强度

$$B = \frac{\mu I_0}{2r}$$

为非均匀磁场.

对 ab 段, 因其上各电流元与直导线距离相同, 所在处 B 的大小方向均相同, 且与 ab 垂直, 故磁力大小为

$$F_1 = I l_1 \frac{\mu I_0}{2r_0}$$

方向与 ab 垂直, 指向右. 同理可求 cd 段受磁力为

$$F_3 = I l_1 \frac{\mu I_0}{2(r_0 + l_2)}$$

方向与 F_1 相反.

bc 段上各电流元处的 B 值不同, 其上任一与直导线距离 r , 长为 dr 的电流元受力大小为

$$dF_2 = I dr \frac{\mu I_0}{2r}$$

各电流元受力方向相同, 因此全段所受磁力为

$$\begin{aligned} F_2 &= \int dF_2 = \frac{\mu I I_0}{2} \int_{r_0}^{r_0 + l_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu I I_0}{2} \ln \frac{r_0 + l_2}{r_0} \end{aligned}$$

F_2 的方向垂直 bc 向上.

同理可求 da 段所受磁力

$$F_4 = \frac{\mu I I_0}{2} \ln \frac{r_0 + l_2}{r_0}$$

方向与 F_2 相反.

因此整个矩形载流线框所受磁力的合力

$$F_{\text{合}} = F_1 - F_3 = \frac{\mu I I_0}{2} l_1 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + l_2} \right)$$

方向垂直于直导线向右.

4.5.2 均匀磁场对载流线圈的作用

为简单计, 先讨论矩形载流线圈的情形. 由于矩形线圈的每一边都是处于均匀磁场中的载流直导线, 由式(4.5.2)知各边受力可表示为

$$F = I l \times B$$

其中 l 为大小等于该段导线长度, 方向同电流流向的矢量. 矩形线圈的二个相对边框中流过的电流等值而平行反向, 导线长度相等, 无论线圈的位置如何放置, 二者所受磁力必定大小相等, 方向相反, 因而整个载流线圈在均匀磁场中所受磁力的合力必定为零, 即

$$F_i = 0 \quad (4.5.3)$$

但是这些磁力将会对载流线圈产生力矩. 我们采用由特殊到

一般的方法求得载流线圈受到的磁力矩.

情形一: 线圈平面与磁场垂直, 即平面法线与 B 平行. 这时由安培力公式定出各边受到的磁力均在线圈平面之内, 如图 4.5.5(a). 由图可知, 载流线圈所受力矩为零.

图 4.5.5 特殊位置的矩形载流线圈

情形二: 线圈平面与磁场平行, 即平面法线与 B 垂直, 如图 4.5.5(b). 由安培力公式, bc 、 da 二段因电流与 B 平行, $\mathbf{k} \times \mathbf{B} = 0$, 故不受磁力; ab 、 cd 所受磁力大小相等为

$$F_1 = F_3 = I l_1 B$$

方向垂直于纸面, 指向如图所示. F_1 、 F_3 形成力偶. 这一对力偶的力矩的大小为

$$M = l_2 F_1 = I l_1 l_2 B = ISB$$

其中 S 为线圈面积. 我们规定线圈平面法线单位矢量 \hat{n} 与电流成右手螺旋关系并定义线圈磁矩 $\hat{m} = IS\hat{n}$, 则磁力矩的大小可写为

$$M = mB$$

一般情况下线圈平面法线与磁感应强度有任一夹角, 如图 4.5.6(a). 这时, 可以把 B 分解为两个分量, 一个沿平面法线为 B_n , 另一个与平面平行为 B_t , 如图 4.5.6(b). 与此相应把磁场对线

圈各边的作用力分解为图 4.5.5 的(a)、(b)两种情况. 因而只有与

图 4.5.6 任意位置的矩形载流线圈

B_t 分量对应的一对磁力构成力偶, 它所产生的磁力矩的大小为

$$\begin{aligned} M &= l_2 I l_1 B_t = I S B \sin \\ &= m B \sin \end{aligned}$$

若线圈中电流与图示方向相反时, 即载流线圈的法线单位矢量 \hat{n} 及磁矩 m 反向, 则磁力与图示方向相反, 因而力矩方向相反. 用一矢量式可以同时给出此矩形载流线圈在均匀磁场中所受磁力矩的大小和方向, 有

$$M = m \times B \quad (4.5.4)$$

显然式(4.5.4)包含了图 4.5.3(a)、(b)所示的两种特例的情况.

上述结论适用于任何形状的平面载流线圈, 即均匀磁场中任何平面载流线圈所受磁力的合力恒为零, 所受磁力矩由式(4.5.4)给出. 对于前一点, 由式(4.5.2)式并利用均匀磁强的特点容易证明. 因为对整个载流线圈, 其磁力的合力

$$F_i = \int_l (I d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$$

而 B 为常量, 可移至积分号之外, 故有

$$\mathbf{F}_i = I \int_l d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

式中 $\int_l d\mathbf{l}$ 表示沿闭合线圈对各线元矢量求和, 它恒为零, 故 $\mathbf{F}_i = 0$.

关于线圈所受的磁力矩, 可仿照前文所述情况一、二两种特例讨论, 如图 4.5.7(a)、(b) 所示. 对图(a) 情况, 各电流元受力一定

图 4.5.7 任意形状平面载流线圈所受磁力矩

都在线圈平面内, 它们是汇交力系, 因而力矩为零. 在情况(b) 时, 可沿平行于 \mathbf{B} 方向画出若干相距很近的平行直线, 设想由它们在线圈上截出的每一对电流元与相邻二平行直线组成一细长载流线圈, 其中流过电流 I . 对于每一条直线有相邻二细窄线圈的电流反向流过, 其作用相互抵消, 因而整个载流线圈所受磁力矩可以看成这许多细窄线圈所受磁力矩之和. 取其中阴影所示的一窄线圈分析其磁力矩. 将此线圈的一对电流元 $I d\mathbf{l}$ 及 $I d\mathbf{l}$ 分别分解为与 \mathbf{B} 垂直和平行的二个分量, 如图 4.5.5(c) 所示. 由图明显可见, 只有一对垂直分量 $I d\mathbf{l}$ 和 $I d\mathbf{l}$ 才受到磁力并形成力偶, 相应的力矩大

小为

$$dM = rIdl \times B$$

其中 r 为两电流元间距离, 且 $rdl = dS$ 正是该细窄条的面积. 由于各窄条力矩的方向相同, 整个线圈所受磁力矩是各元力矩大小之和, 即

$$M = \int dM = \int_S IdSB = ISB = mB$$

结果与矩形线圈在情况二中的磁力矩公式相同. 当线圈法线与磁场成任意夹角时, 同样可按照对矩形线圈的讨论方法, 将问题分解为图 4.5.7(a)、(b) 所示二特例, 而将上式中 B 以 B 沿线圈平面的分量 B_t 取代之, 从而最后证明式(4.5.4) 适用.

由式(4.5.4)可以看出, 只有当线圈平面与 B 垂直, 即 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$ 时载流线圈所受磁力矩为零, 此时线圈处于平衡位置. 对 $\theta = \pi$ 的状态只要线圈稍微偏离此位置, 则磁力矩的作用将使偏离继续加大, 因此 $\theta = \pi$ 是线圈的不稳定平衡位置.

当载流线圈在磁场中转动时, 磁力矩将对线圈做功. 设线圈法线单位矢量 \hat{n} 与 B 的夹角由初始位置 θ_1 转到 θ_2 , 由式(4.5.4) 磁力矩使线圈朝 θ 角减小的方向转动, 由此可求得磁力矩的功为

$$\begin{aligned} A &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ISB \sin \theta d\theta \\ &= IBS(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \end{aligned}$$

式中 $BS \cos \theta_1$ 、 $BS \cos \theta_2$ 正是线圈始末位置处穿过线圈的磁通, 因此有

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \Delta \Phi \quad (4.5.5)$$

因此载有恒定电流的线圈在磁场中转动过程中磁力矩所作的功等于线圈中电流与穿过线圈的磁通的增量之积. 磁力矩的功又可以线圈的磁矩 m 表示为

$$A = m_2 \cdot B - m_1 \cdot B$$

式中 m_1 、 m_2 分别为线圈在始末位置时的磁矩. 由于此功的数值与转动过程无关, 相应可引入一由载流线圈在磁场中位置决定的势能 W_m , 并令

$$A = - (W_{m2} - W_{m1}) = m_2 j\alpha B - m_1 j\alpha B$$

如果令磁矩 m 与磁感强度 B 垂直时势能为零, 则具有磁矩 m 的线圈在均匀磁场 B 中的势能为

$$W_m = - m j\alpha B \quad (4.5.6)$$

即此势能等于磁矩与磁感应强度的标量积的负值.

技术上利用通电线圈在磁场中受力矩偏转且磁力矩正比于线圈中电流的原理制成磁电式电表来测定电流; 又利用磁力矩会驱使载流线圈转动制成直流电动机. 为了使线圈能连续转动, 在输入电流处加入换向装置, 使线圈每转过 180° 其中电流反向一次.

物质的原子中存在电子轨道运动的磁矩和电子自旋磁矩, 在研究磁场对原子中电子运动的影响时, 可以用式 (4.5.4) 和 (4.5.6) 进行讨论.

在非均匀磁场中载流线圈不仅受磁力矩作用, 而且所受磁力的合力亦不再为零, § 4.5.1 中例 2 便是一例, 这种情况下线圈受力计算比较复杂, 此处不再作一般性讨论.

4.5.3 “安培”的定义

“安培”是国际单位制中电学量的基本单位, 它是按照二平行载流长直导线之间作用的磁力定出的.

如图, 真空中二相距为 a 的导线上通有相同的电流 I , 则其中一根导线在另一根导线处产生的磁感强度为

$$B = \frac{\mu I}{2 a}$$

方向垂直于该导线, 由式 (4.5.1) 可知单位长度导线上受力

$$\frac{dF}{dl} = IB = \frac{\mu I^2}{2a}$$

SI 中规定, 在两条相互平行、无限长的细直导线中通以强度相同的恒定电流, 若二导线处于真空中且间距为 1m 时, 每米长度的导线上受到的磁力为 $2 \times 10^{-7} \text{N}$, 则导线中电流强度为 1 安培(A). 这就是电流强度单位——安培的定义. 其他的电学量单位均是由 A 直接或间接导出的. 例如电量的单位库仑(C), 是规定为当 1A 的电流通过导体时, 1s(秒)内从导线截面上通过的电量. SI 中各导出电磁学量的定义方程、量纲式及单位见本书后附表.

图 4.5.8 安培的定义

附录 4- 毕奥-萨伐尔关于长直电流的磁场的实验

毕奥-萨伐尔的实验示意如附 4- 图. 在带孔的水平圆盘中心竖直放置载流长直导线. 圆盘上沿径向对称放置一对完全相同的条形磁铁. 长直电流的磁场对二磁铁的 N 极的力大小相等, 方向相反, 设力大小为 f_1 , 它们产生的力矩为 $2f_1r_1$. 同样, 电流的磁场对二磁铁的 S 极的磁力大小为 f_2 , 构成另一对力偶矩, 其大小为 $2f_2r_2$, 方向与前一力偶矩的方向相反. 若磁力的大小与距离成反比, 即电流产生的磁场的强度与距离成反比, 则二磁铁所受合力矩为零, 圆盘不偏转; 否则圆盘会转动, 而圆盘的转动将由悬挂在它上方的小镜的扭转测量出来. 毕奥和萨伐尔在他们的实验中没有发现圆盘的任何偏转. 这一实验事实表明载流长直电流的磁场的

强度的确与场点到导线的距离成反比.

附录 4- 安培环路定理的证明

这里从毕奥-萨伐尔定律出发证明安培环路定理.

设空间存在一通有恒定电流 I 的闭合电路 L , 它在周围激发磁场. 在磁场中任作一闭合的几何路径 L' . 由毕奥-萨伐尔定律, 在路径 L' 上任一点 P , 闭合电流 I 在该处产生的磁场为各段电流

附 4- 图

元 $I d\mathbf{l}$ 产生的磁场的矢量叠加, 即

$$\mathbf{B} = \oint_L \frac{\mu}{4} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

式中 $\hat{\mathbf{r}}$ 为由 $I d\mathbf{l}$ 指向 P 的单位矢量, r 为二者之间的距离, 如附 4- .1 图. 在 P 处沿环路 L' 取一路径元 $d\mathbf{l}'$, 则有

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}' = \oint_L \frac{\mu}{4} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{l}' = \frac{\mu I}{4} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{l}'$$

由矢量乘法法则, 上式可改写为

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}' = \frac{\mu I}{4} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (4- .1)$$

磁感应强度 \mathbf{B} 沿闭合路径 L' 的环流即为式(4- .1)的环路积分.

我们先讨论式(4- .1)的积分式中几何量的意义.

首先我们注意到, 以电流回路 L 为边界的面积(设为 S_0)对 P 点张一立体角 Ω . 此立体角等于 S_0 上各面元 dS_0 对 P 所张立体角

附 4- .1 图

附 4- .2 图 闭合电流回路对
P 所张立体角

$d\Omega$ 的总和. 我们规定 dS_0 的方向与电流 I 的流向成右手螺旋关系, 由立体角定义有

$$d\Omega = \frac{dS_0 \cdot \hat{r}_0}{r_0^2}$$

式中 \hat{r}_0 为由 dS_0 引向 P 的单位矢量, r_0 为二者的间距, 如附 4- .2 图. 因而我们有

$$= \oint_{S_0} \frac{dS_0 \cdot \hat{r}_0}{r^2}$$

由此定出的 Ω 是代数量, 它的正负由 dS_0 与 \hat{r}_0 的夹角决定.

在计算 B 的环流时, 意味着不断改变场点 P 的位置. 当 P 沿 L 位移 dl 时, 电流回路 L 对场点所张立体角随之变化. 对于这一变化, 我们可以从另一角度来考虑, 即假想 P 点不动而令整个电流回路 L 有一反向位移 $(-dl)$. 对 L 上任一电流元 $I dl$, 位移过程中将在空间扫过一面积元, 此面积元的大小为 $|dl \times dl|$ 而量

$$\left(-\frac{dl \times dl}{r^2} \right) \cdot \hat{r}$$

则为所扫过的面积元对 P 点所张的立体角. 因而量

$$d\Omega = \oint_L \frac{(-d\mathbf{l}) \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (4-1.2)$$

是整个电流回路 L 位移 $(-d\mathbf{l})$ 所扫过的窄带(如附 4-1.3 图阴影带所示)对 P 点所张的立体角. 实际上这也就是当回路 L 位移 $(-d\mathbf{l})$ 时所引起的以电流回路 L 为边界的任一曲面对场点 P 所张立体角的改变量. 回到讨论问题的出发点, 式(4-1.2)就是回路 L 不动, 场点 P 沿环路 L 位移 $d\mathbf{l}$ 而引起的相应立体角的改变. 将

附 4-1.3 图 $\frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ 的几何意义

式(4-1.2)代入式(4-1.1), 有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{4} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{r}} = - \frac{\mu I}{4} d\Omega$$

因此, 磁感强度对环路 L 的环流为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\mu I}{4} d\Omega \quad (4-1.3)$$

式中 $d\Omega$ 应是当 P 沿闭合路径 L 移动一周时, 电流回路所围曲面对场点所张立体角的改变量. 为了求得 $d\Omega$, 可分两种情况讨论.

闭合路径与电流回路相套链时

如附 4- .4 图, 以 L 为边界作任一曲面 S . 在闭合路径 L 上取无限接近的二点 P 和 P' , 并使二者分别位于 S 面的两侧. 由于此二点无限接近, 当使场点由 P 沿路径 L 移动到 P' (或反向由 P' 移动到 P), 则可以认为已沿闭合路径移动一周. 由图可见, 对图中

附 4- .4 图 $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ 的计算

电流回路 L , 有 $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} > 0$, $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} < 0$, 且

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4$$

当令场点沿 L 由 P 移动到 P' , 则有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - 4$$

代入式(4- .3) 式有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\mu I}{4} \oint_L d\mathbf{l} = \mu I \quad (4- .4-a)$$

若令场点由 P 沿 L 移动到 P' , 即环路积分的方向与图示方向相反, 则

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4$$

代入式(4- .3) 得

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = - \mu I \quad (4-1.4-b)$$

闭合路径与电流回路互相不套链时

如附 4-1.4 图中闭合路径 L^* 。类前, 同样在 L^* 上取无限接近的二点 P 和 P' , 显然以电流回路 L 为边界的任一曲面 S 对此二点所张立体角相等, 即

$$\Omega_P = \Omega_{P'} = 0$$

则
$$\oint_{L^*} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (4-1.4-c)$$

综合(a)、(b)、(c)三式的结果, 如果令 $I_{\text{内}}$ 表示穿过给定闭合路径 L 的电流, 或与 L 相套链的电流并且规定 $I_{\text{内}}$ 为代数量, 即当电流流向与环路积分方向符合右手螺旋关系(如附 4-1.4 图所示)时 $I_{\text{内}}$ 取正, 反之取负, 则三式可合并为一式, 为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I_{\text{内}} \quad (4-1.4)$$

如果空间存在若干个闭合电路, 其中各通以电流 I_1, I_2, \dots, I_N 。则由叠加原理可知, 场中任一处磁感应强度为各闭合电流单独产生的磁感应强度的叠加, 即

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_i$$

则 \mathbf{B} 沿任一闭合路径 L 的环流

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \sum_i \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_i \oint_L \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l}$$

按式(4-1.4), 对附 4-1.5 图所示情况, 有

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu(I_1 - I_2) = \mu I_{\text{内}}$$

此即普遍情况下的安培环路定理。

如果载流导线绕成螺旋状, 以至电流不只一次地穿过闭合路径 L , 如附 4-1.6 图所示。我们可以假想在电路的 a 、 b 二点间连一

附 4- .5 图

附 4- .6 图

导线, 从而把此电流分成 $aMba$ 和 $abca$ 两个回路, 由于 ab 段中有相等相反的电流流过, 此二分回路激发的磁场叠加后与原单一回路的磁场是相同的. 对每一分回路用式(4- .4), 将所得二式相加, 考虑到 $B = B_1 + B_2$, 对图示情况可得

$$B \oint dl = \mu 2I$$

这一结果表明, 当同一电流不只一次穿过环路时, 每穿过一次应计入一次.

至此, 我们由毕奥—萨伐尔定律对安培环路定理给出了普遍的证明.

思 考 题

4.1 二根外形完全相同的条形铁, 其中一根是磁铁, 另一根是没有磁性的普通铁, 你能不用任何其他物品而将二者区分开吗?

4.2 定义磁感强度 B 时, 为什么我们不仿照电场强度 E 的定义, 规定 B

的方向就沿着运动正电荷所受磁力的方向?

4.3 一条形磁铁, 在空间产生磁场. 如果我们作一封闭的几何曲面, 把磁铁的某一极(例如 N 极)包围在内, 则通过此闭合面的磁通量多大?

4.4 一载流导线为一任意形状的闭合平面曲线, 试判断平面上曲线内任一点 P 的磁感应强度的方向.

思考题 4.4 图

4.5 二半径相同的圆形线圈彼此平行地放置, 且其圆心的连线与圆平面垂直. 二线圈中通以大小相等, 流向相同的电流. 试由对称性分析在二圆心连线的中垂面上任一点的磁感强度 B 的方向.

4.6 某些电路中需要用导线缠绕电阻(称为线绕电阻), 为了尽可能减少电阻工作时产生的磁效应, 你该如何绕制电阻?

4.7 一段长为 L 的直导线中通以电流 I, 若在导线的中垂面上以导线为中心作一半径为 r 的圆周, 试计算由这段载流导线产生的磁感强度 B 沿此圆周的曲线积分 $\oint_L B \cdot dl$, 它满足安培环路定理吗? 为什么?

4.8 一圆形导线中通有恒定电流. 在此圆形回路所在平面上作一与回路同心的圆周, 由电流分布相对过圆心的轴线对称分布, 可知圆周上各点磁感强度 B 的大小相等; 对此圆周运用安培环路定理, 有 $\oint_L B \cdot dl = 0$. 有人据此写出 $\oint_L B \cdot dl = B \cdot 2\pi r = 0$, 并得出结论, 圆形电流所在平面上处处 $B = 0$. 试判断他的结论是否正确并说明理由.

4.9 一直螺线管中通有电流 I, 在与管轴线垂直的平面上作一圆周, 且整个圆周都在螺线管外, 则此螺线管电流产生的磁感应强度沿此圆周的曲线积分 $\oint_L B \cdot dl$ 等于多少?

4.10 有人说:“只要绕组是螺旋形的, 则一长直载流螺线管管外的磁场就决不会为零.”对此, 你有何想法?

4.11 真空中是否存在这样的磁场分布: 在某区内 B 线为一系列平行直线, 而在此区边界之外 B 突然降为零(如图所示)? 为什么?

4.12 赤道上地磁场的方向沿水平面指向北, 假想从赤道地面发射一质

子,使它受地磁场作用沿赤道绕地球作圆周运动,则此质子初速度应朝向何方?

4.13 一长直载流导线上任一电流元受到其余部分电流的磁力多大?一圆形载流导线回路上一电流元受到回路其他部分电流的磁力沿什么方向?

4.14 一磁矩为 m 的线圈处于磁感强度为 B 的外磁场中,设 m 与 B 间有任一夹角 θ . 则当线圈绕其法线为轴转动时,安培力作多少功?若线圈位置转动使磁矩方向翻转,则安培力又作多少功?

思考题 4.11 图

4.15 在霍耳效应中霍耳电压应是霍耳电场的场强与导体片沿此方向的长度的乘积,为什么式(4.4.4)中的霍耳电压却与这一尺寸无关?

习 题 四

4.1 一长直导线弯成直角形,其中电流强度为 I . 求位于其一边延长线上,且与弯角处相距 l 的一点 P 处的磁感强度.

习题 4.1 图

4.2 边长为 a 的正方形线框,其中通以恒定电流 I , 求线框中心处磁感强度的大小.

4.3 一很长的金属导线中部弯成半径为 r 的半圆弧,两侧与圆弧共面,

其走向分别如图(a)、(b)所示向远处伸延. 试求两种情况下圆心 o 处的磁感强度.

习题 4.3 图

4.4 由截面均匀的铁铝合金丝制成一圆环, 在环上二点 P、Q 沿径向引出导线与远处的电源相连. 试求圆环中心 O 处的磁感应强度.

4.5 二半径同为 R 的圆环形线圈, 平行共轴放置, 其环心相距也为 R. 线圈中通以相同的电流 I. 试分别计算两环的环心及其连线中点的 B 值. 由此可以看到两端与中部磁场强度相差不过 10%. 这样的线圈组称为亥姆霍兹线圈. 它可在二线圈之间中部区域获得相当好的均匀磁场.

习题 4.4 图

4.6 根据经典模型, 原子中电子绕核作匀速率圆周运动, 它可以等效为一个圆形电流. 据此推导电子轨道运动的磁矩 m 与其轨道角动量 L 之间的关系.

4.7 氢原子中电子可认为沿半径 $a = 0.053 \text{ nm}$ ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) 的圆周绕核运动, 它与核间的库仑力提供所需的向心力. 按此模型估算氢原子中电子的轨道运动在其中心产生的微观磁场的磁感强度. (电子质量 $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 电量 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

4.8 一无限长金属薄柱壳, 半径为 R, 柱面上沿轴向均匀通有电流, 其面电流密度为 i , 今在柱壳上沿轴向开有缺口, 缺口情况分别如截面图(a)、(b), (a)中缺口宽度 $\ln R$, (b)中缺口为半圆柱. 试求两种情况下轴线上任一点 P 的磁感强度的大小及方向.

4.9 半径为 a 的薄圆盘上均匀带有总量为 Q 的电荷. 现圆盘绕通过其

习题 4.8 图

中心且垂直于盘面的轴线均匀转动,角速度为 ω . 求圆盘中心的磁感强度的大小.

4.10 当超导体所处的磁场超过某临界值时就会失去超导电性. 这一特性限制了超导线上通过的电流大小. 今有一处于 4.2K 的铅制超导线, 其直径为 1mm, 临界磁场为 550Gs. 试估算此超导线允许通过的最大电流强度值.

4.11 内外半径分别为 r_1 、 r_2 的无限长厚柱壳中沿轴向均匀流有电流强度 I , 试求空间磁感强度分布, 并画出其 $B \sim r$ 曲线(r 为场点到柱壳轴线的距离).

4.12 一无限长同轴电缆, 内部为一半径为 a 的实心圆柱导体, 外部为同轴的薄柱壳, 半径为 b . 二者中沿轴向均匀流有强度同为 I 但流向相反的电流, 试求空间各区磁感强度分布.

4.13 一截面为矩形的环形螺线管, 其内外半径分别为 a 、 b , 高为 h , 如图所示. 其上均匀密绕有 N 匝线圈, 线圈中通有电流强度 I . 求

- (1) 管内外磁感强度
- (2) 管截面上的磁通

习题 4.13 图

4.14 真空中存在某一磁场区, 其中 B 线为相互平行的直线, 试证明: 无论是同一条 B 线上各点, 还是垂直于 B 线

方向上各点的磁感强度均相等,即此区一定是均匀磁场.

4.15 厚度为 h 的金属大平板内沿平行于板面方向均匀流有电流,体电流密度为 j . 试求板内外磁感强度的分布并绘出 $B \sim x$ 曲线(x 为场点到板厚度的平分面的距离).

习题 4.15 图

4.16 二无限大平行平面上均匀流有恒定电流,面电流密度大小同为 i , 求下述两种情况下,二平面之间及外侧空间磁感强度大小.

(1) 二电流平行同向

(2) 二电流平行反向

4.17 一无限大均匀载流平面,当它置于一均匀外磁场中后,平面两侧磁力线分布如图,大小分别为 B_1 、 B_2 . 试求此均匀外场的磁感强度 B_0 及平面上电流密度 i 的大小及方向.

习题 4.17 图

习题 4.18 图(截面图)

4.18 一圆柱形长导体内部挖出一完整的圆柱状空洞,二者轴线平行,相对位置如图所示.若此导体中沿轴向均匀流有电流,方向垂直纸面向外.试证此空洞中磁场为均匀场并画出其 B 线方向.

4.19 运动电子以水平初速 v 进入一磁场和电场的联合作用区.已知电

场方向竖直向下,欲使电子运动方向保持不变,所用的磁场的方向应如何?试绘出 v 、 E 、 B 三者的矢量关系(不计重力).若 $v = 1.0 \times 10^6 \text{ m/s}$, $E = 100 \text{ V/cm}$,求满足上述要求所需的最小磁感强度值.

4.20 设有一粒子在 $B = 1.2 \text{ T}$ 的均匀磁场中,沿半径 $R = 0.45 \text{ m}$ 的圆周运动,试计算此粒子的速率和旋转周期.已知粒子的质量 $m = 6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}$,电荷为 $+3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$.

4.21 估算地磁场对显像管中电子束的影响.设电子束自电子枪中射出时获得 $1.5 \times 10^4 \text{ eV}$ 的动能,其速度方向水平沿南北方向;该处地磁场的竖直分量向下,大小为 $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$,若显像管无磁屏蔽措施,则当电子沿南北方向的行程为 30 cm 时,地磁场将使电子束朝什么方向偏转,偏转距离多大?

4.22 厚度 $d = 1 \text{ mm}$ 的铜片处于磁感强度 $B = 1.5 \text{ T}$ 的均匀磁场中, B 的方向及铜片中电流流向如图.设铜片中电流强度为 200 A ,已知铜的霍尔系数 $R_H = 0.55 \times 10^{-4} \text{ cm}^3/\text{C}$,求

- (1) 铜片中霍尔电场的方向;
- (2) 单位体积铜中载流子(自由电子)数目;
- (3) 铜片两侧的霍尔电压数值.

习题 4.22 图

4.23 北京正负电子对撞机(BEPC)中电子可加速获得动能为 $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV}$,该电子在半径 $R = 35 \text{ m}$ 的储存环中作圆周运动.试求

- (1) 电子的动量 p (提示:按相对论高能条件的近似公式 $E \approx cp$ 计算);
- (2) 维持此电子圆运动所需的磁感强度 B .

4.24 图 4.4.8 所示磁流体发电原理图中,设离子电荷为 q ,流速为 u ,二金属电极板面积为 A ,间距为 d ,试求它的电动势并证明当电极接通负载

而形成恒定电流时, 其最大输出功率为 $P_{\max} = \frac{1}{4} u^2 B^2 V$. 式中 $V = Ad$, 为磁流体的电导率.

4.25 安培秤如图所示. 由天平测定作用于在已知磁场中载流线圈上的力从而可测量电流. 设右臂刚性矩形线圈共 5 匝, 伸入磁场的 bc 边与 B 线垂直且水平, 长度 $l = 10.0\text{cm}$, 磁感强度 $B = 0.5\text{T}$. 当线圈中未通电时天平已调

平衡, 通电后需在左臂增加质量 $m = 9.0\text{g}$ 的砝码才能再达平衡. 试求线圈中通过的电流 I 的流向及大小.

4.26 如图载流平面导线置于强度为 B 的均匀磁场中, 导线中电流强度为 I , I 及 B 的方向如图. 若半圆弧的半径为 R , a 与 b 连线与 B 垂直. 求此均匀磁场对半圆弧 ab 段导线的作用力的大小及方向.

习题 4.26 图

4.27 如图所示, 粗细均匀的导线弯成一边有缺口的正方形, 三边长为 l . 导线的 oa 、 do 段沿水平固定, 整个导线可绕水平轴 oo 转动. 将此载流导线置于均匀磁场中, 磁感强度为 B , 方向竖直向上. 当导线偏转至 ab 、 cd 二边与

竖直线夹角为 θ 时, 导线所受磁力矩恰与重力矩平衡. 若导线单位长度质量为 m , 求其中电流强度 I 的大小.

习题 4.27 图

4.28 如图, 强度为 B 的均匀磁场中置入半径为 R 的刚性平面圆线圈, 其中通以电流 I . 不计任何其他力, 试求因均匀磁场作用的磁力而在导线中引起的张力.

4.29 一半径 $R = 10\text{cm}$ 的半圆形闭合线圈, 置于磁感强度 $B = 0.5\text{T}$ 的均匀磁场中, 磁场的 B 线与线圈平面平行, 线圈中通以 $I = 10\text{A}$ 的电流. 求线圈所受磁力矩的大小; 若线圈在磁力矩作用下转过 90° ; 磁力矩作多少功?

习题 4.28 图

第五章 磁 介 质

人们发现,当把物质放入磁场时,物质将会因磁场的作用而磁化并且反过来影响磁场.从这个角度来研究物质时常把它们称为磁介质.本章讨论磁介质的磁化性质和它们对磁场产生的影响,并进而得出有磁介质存在时的磁场的规律.

§ 5.1 磁介质的磁化

5.1.1 物质的磁化及其微观机制

实验发现,原先不具磁性的物质放入外磁场后会或多或少地呈现出磁性.例如,在一载流螺线管中填满某种磁介质时,管内磁场较填充前将会有不同程度的增强或减弱,又如由磁介质做成细长状物,在中点悬吊起来,置于强磁铁的磁极附近,则样品会受到吸引或排斥.这种物质因外磁场作用而呈现磁性的现象,叫作物质的磁化.放入磁场后能使磁场略有增强并且在磁极附近受到吸引的物质叫顺磁质,而使磁场减弱并且在磁极附近受到排斥的物质叫抗磁质.还有一类物质置入外磁场而能大大增强磁场并在磁极附近受到强烈吸引,通常称之为铁磁质.常见的顺磁质有铝、锰、铬及空气等,抗磁质有铋、铜、银及氢气等,铁磁质有铁、钴、镍及其合金和氧化物等.

对于磁化的机理,历史上曾有两种观点,一种是分子电流的观点,一种是磁荷的观点.前一种观点与物质微观结构的近代理论以及迄今为止的实验一致.本书中主要按照这一观点讨论磁介质.

根据安培分子电流假说,在研究磁化问题时,可以认为物质的每一分子(或原子)等效于一个小的环形电流,称为分子环流,等效环流具有的磁矩叫分子磁矩.所谓分子(或原子)的磁矩实际是它内部电子的轨道磁矩、自旋磁矩和核磁矩等各种微观磁矩的总和.通常情况下,由于核磁矩很弱,主要是电子的磁矩起作用.和电介质类似,从磁结构上磁介质可分为两大类.一类在无外场时,原子中各类磁矩之和均为零,称为无矩分子,抗磁质即属此类;另一类在无外场时已具有固有的分子磁矩,但由于热运动,各分子磁矩的方向无序,因而对外不显磁性,顺磁质即属此列.在外磁场作用下,两种磁介质的磁化表现出不同的磁性,分述如下.

具有固有磁矩的分子,置于外磁场中时,磁场将对每个分子施以磁力矩,由第四章中§ 4.5.2 的讨论可知,这个力矩的作用将力图使分子的固有磁矩的方向转至与外磁场方向一致,只是由于热运动的无序性的原因,各分子固有磁矩不可能完全规则排列,但达到平衡后,平均说来会具有与外磁场方向相同的磁矩,因而最终介质表现出顺磁性.当介质所处的温度升高时,热运动的无序作用增强,因而顺磁性会有所削弱,也就是说顺磁性与介质的温度有明显的关系.

无矩分子的磁化机制稍复杂些,这里按经典图象给予说明.由于无外场时原子内各电子的磁矩互相抵消,可设原子内有一对相等相反的电子轨道磁矩,它们分别对应着二电子沿相反方向绕核作圆周运动;由于电子带负电,其轨道磁矩的方向与轨道角速度方向相反,如图 5.1.1(a) 所示,这时电子与核之间的库仑力是电子绕核运动的向心力,即

$$f_e = m_e r^2$$

为便于讨论,设所加外磁场 B_0 与轨道磁矩平行.因而电子除库仑力外还受到沿轨道径向的洛伦兹力 f_m 的作用.设 f_m 出现后,电子

图 5.1.1 抗磁性的微观机制

的轨道半径不变, 而只改变其运动速率 v (或角速度). 对图中左侧情况, f_m 指向圆心, 电子的运动速率应加快, 从而获得与原角速度方向相同的附加角速度, 相应产生一与 B_0 方向相反的附加磁矩, 由于 B_0 方向与 B_0 的相同, 附加磁矩方向与 B_0 方向相反. 同理可分析图 5.1.1(a) 中右侧所示的电子绕核转动情况. 此时, f_m 沿半径向外, 电子运动应减慢, 从而获得与原角速度方向相反的附加角速度, 但由于此电子的原角速度方向与 B_0 反向, 因而附加磁矩的方向仍然和外磁场 B_0 的方向相反, 如图 5.1.1(b) 中右侧图所示. 一般情况下, 外加磁场 B_0 与轨道磁矩方向成任一角度, 这时外磁场将会导致电子产生以 B_0 线为轴的进动, 但上述定性的结论仍然正确, 此处不再赘述. 因此, 无矩分子磁化的结果将使分子获得与外磁场方向相反的附加磁矩, 从而表现出抗磁性. 通常称这种磁

这一假设与量子论的定态假说相符.

洛伦兹力对电子是不作功的. 电子速率的变化是由于使介质处于外磁场的过程中激发的感生电场对电子做功的结果.

化获得的分子磁矩为感生磁矩.

实际上,顺磁质的分子在磁场中同样会出现感生磁矩,只不过这一效果远小于其分子固有磁矩在外磁场中转向的效果,因而顺磁质表现出顺磁性.

关于铁磁质的磁化机理,由于涉及其内部的特殊磁结构及其特殊的磁化性质,将在稍后的节次中专门介绍.

5.1.2 磁化强度

为了描述介质的磁化状况,引入磁化强度这一物理量.在介质中任取一宏观小体积元 V ,其中分子磁矩之和 $m_{\text{分}}$ 与此体积元之比称为该处介质的磁化强度,以 M 表示,

$$M = \frac{m_{\text{分}}}{V} \quad (5.1.1)$$

即磁化强度等于单位体积内分子磁矩之和.显然,磁化强度的大小反映了该处介质磁化的强弱程度.

在国际单位制中,磁化强度的单位为 A/m (安/米).

由于方向无序的分子磁矩对磁化强度无贡献,为方便起见,以后我们讨论磁化的宏观规律时,无论对哪一种介质分子的磁化都可以认为,磁化后介质内某一体积元中的每一分子(或原子)具有方向与该处磁化强度 M 的方向相同的平均磁矩 $m_{\text{平均}}$,因而可将介质中某处的磁化强度表示为

$$M = nm_{\text{平均}}$$

其中 n 为该处单位体积内分子环流的个数.下面将会看到,这样的简化处理丝毫不会影响到所得结论的普遍性.

5.1.3 束缚电流(磁化电流)

介质磁化时,在介质内出现宏观磁矩的同时,介质的某些部位

还会出现宏观电流. 我们以长直载流螺线管中的均匀磁介质的均匀磁化为例说明这一问题. 在管内均匀磁场的作用下介质沿轴向均匀磁化, 各处介质分子具有大小相等, 方向均沿轴向的平均分子磁矩, 如图 5. 1. 2(a). 这时, 介质体内任一处都有相邻的二分子电流在此处沿相反方向通过, 二者的磁效应互相抵消, 而流经介质表面的那些分子电流则不能抵消, 从而在讨论其磁效应时可以认为形成了沿介质表面环向流动的宏观电流, 如图 5. 1. 2(b) 所示. 为了与导体中载流子的定向流动所形成的电流(称为传导电流或自由电流)相区别, 称介质因磁化而显示出的宏观电流为束缚电流或磁化电流.

图 5. 1. 2 均匀磁化时的磁化电流

应当指出, 图 5. 1. 2 所示是均匀磁化的特例, 这时束缚电流只出现于介质表面. 一般情况下, 由于介质的某种不均匀性, 不仅介质表面而且在介质体内也有束缚电流. 自然, 束缚电流与介质的磁化强度有直接的关系. 下面我们来推导二者的关系.

首先推导束缚体电流与磁化强度的关系.

在介质体内任取一截面 S , 其周界为 L , 如图 5. 1. 3(a). 在计算通过面 S 的束缚电流时, 由图可见, 只有那些与周界 L 相套链

的分子环流对此有贡献,而那些整个环流都穿过 S 面的分子,则由于每一分子电流各往返一次通过 S 面使其总贡献为零.因此,我们只需计算与界面 L 相套链的分子环流.为此,在边界处任取一长度为 $d\mathbf{l}$ ($d\mathbf{l}$ 应远大于分子的线度)的线段元,设 $d\mathbf{l}$ 所在处的磁化强度为 \mathbf{M} .以 $d\mathbf{l}$ 为轴线,该处平均分子环流的圆面积 $S_{\text{分}}$ 为底作一斜柱体,如图 5.1.3(b).按磁矩的定义, $S_{\text{分}}$ 的法线为分子磁矩 $\mathbf{m}_{\text{平均}}$ 的方向,即平行于 \mathbf{M} 的方向.由图可见,凡其中心位于此小柱体内的分子环流均与 $d\mathbf{l}$ 相链并将穿过 S 面一次.设平均分子环流的电流为 $I_{\text{分}}$,单位体积内分子环流的个数为 n ,则相应的束缚电流为此体积元中分子环流总个数与 $I_{\text{分}}$ 之积,即

$$dI = (nS_{\text{分}} \cdot d\mathbf{l}) I_{\text{分}}$$

图 5.1.3 束缚体电流与磁化强度的关系

式中 $nI_{\text{分}} S_{\text{分}} = n\mathbf{m}_{\text{平均}}$ 正是单位体积中的分子磁矩之和,即磁化强度 \mathbf{M} ,故有

$$dI = \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}$$

对 S 面的整个周界积分,可求得从 S 面通过的束缚电流为

$$I = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1.2)$$

式(5.1.2)表示, 通过介质体内任一曲面 S 的束缚电流强度等于磁化强度 M 沿该面周界 L 的曲线积分. 上式中若 $I > 0$, 表明 I 的流向与环路积分的计算方向成右手螺旋关系, 当 $I < 0$ 时, 则反之.

至于介质表面的情况, 如前图 5.1.2 中的分析, 由于表面两侧介质不同, 在厚度约为分子线度的表面层内有束缚电流流动, 因为这个厚度极薄, 宏观上可以作为面电流处理. 通常, 介质表面上不同地点有不同的束缚面电流密度. 普遍地推导束缚面电流密度 i 与磁化程度 M 涉及较繁的矢量微分计算, 这里不打算介绍. 我们只就真空中一沿轴向均匀磁化的介质棒这一特例给出结果. 设介质棒的磁化强度为 M , M 的方向及相应的束缚面电流流向如图 5.1.4(a) 所示. 在介质表面某处作一细窄的矩形 $abcd$, 使 ab 、 cd 两边平行于 M 且分别位于介质内外侧无限接近表面层, 如图 5.1.4

图 5.1.4 束缚面电流密度与磁化强度的关系

(b). ab 、 cd 二边边长为宏观无限小 1. 对 $abcd$ 围成的面积元应用式(5.1.2). 先考虑 M 沿周界 $abcd$ a 的曲线积分. 由于 cd 位于真

空中, 该处 $M = 0$; bc、cd 二段长度为分子线度, 远小于 l , 在整个环路积分中可略去这二段的值, 因而有

$$\oint_L M \cdot dl = M \int_{ab} dl = M l$$

根据面电流密度定义, 由矩形 abcd 所截出其横截线长度为 l 的表面层上流过的束缚面电流为

$$I = i l$$

将二者代入式(5.1.2), 有

$$I = i l = \oint_L M \cdot dl = M l$$

即 $i = M$

考虑到该处面电流密度和磁化强度的方向, 二者的关系可用矢量式表示为

$$i = M \times n \quad (5.1.3)$$

式中 n 是该处介质表面的外法线单位矢量. 式(5.1.3)可确定此介质棒表面任一处的束缚面电流密度 i . 例如, 在介质棒的两端面, 由于 M 垂直于端面, 即 $M \times n = 0$, 因此二端面上 $i = 0$; 至于介质棒的侧面, 则由于处处均匀磁化, 面电流密度 i 的大小各处相同, 方向如图 5.1.4(c)所示. 这些都是我们对磁化定性分析所预期的结果.

尽管我们这里是从特例入手导出了式(5.1.3), 但它是一普遍公式, 即当介质与真空交界时, 介质表面束缚面电流密度恒等于该处磁化强度与介质表面外法线单位矢量的矢量积.

对于两种磁介质交界的表面层, 由式(5.1.3)不难理解应有

$$i = (M_2 - M_1) \times n_{21} \quad (5.1.4)$$

式中 n_{21} 是由介质 2 指向介质 1 的界面法线单位矢量. 而 M_1 、 M_2 分别为界面处两侧介质中的磁化强度.

当已知磁介质的磁化强度 M 时, 根据式(5.1.2)及(5.1.3)可

求出介质中任一处的束缚电流, 例如由式(5.1.2)不难证明, 当介质均匀磁化, 即介质体内磁化强度 M 处处为常矢量时, 介质体内必定处处束缚电流为零, 具体的证明留给读者作为练习自己去做.

例 如图 5.1.5, 一均匀磁化介质球, 磁化强度为 M , 求它的束缚电流密度分布.

解 由式(5.1.2)可知, 因均匀磁化, 体内无束缚电流, 电流只分布在球的表面.

在球面上任取一点 a , 该处法线与 M 夹角为 θ , 由式(5.1.3)得该处束缚电流密度大小为

$$i = M \sin \theta$$

图 5.1.5 均匀磁化球的束缚面电流

方向如图示, 垂直于纸面指向读者. 由于介质表面外法线方向相对 M 的分布是以过球心 O 并平行于 M 的直线为轴旋转对称的, 可知束缚电流的电流线是一系列位于球面上以此对称轴为中心轴的圆周. 当 $\theta = 0$ 时, $i = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时, $i = M$ 为最大. 即电流线分布中部密, 两侧疏, 如图 5.1.5(b) 所示.

§ 5.2 有介质时的磁场

当磁场中存在磁介质时, 介质因磁化而出现束缚电流, 它和自由电流一样也将激发磁场, 从而使空间总的磁场发生变化, 本节讨论有介质存在时磁场的规律以及简单情况下磁场的计算。

5.2.1 磁场强度 H 和 H 的环路定理

有介质存在时空间的磁场是自由电流(通常为导体中的传导电流)的磁场 B_0 和束缚电流的磁场 B 两部分叠加而成, 即空间任一处有 $B = B_0 + B$ 。然而由前面关于磁化的物理过程的分析可以看出, 磁化电流 I 又必定与介质所处的磁场中磁感强度 B 有关。尽管当自由电流以及磁介质给定(即它们的分布和介质性质给定)时, 从物理上讲场的分布是确定的, 但这种计算上的循环却给问题的求解带来困难。和在静电学中为了避开对束缚电荷(极化电荷)的计算而引入辅助量 D 类似, 这里我们也设法避开对束缚电流的计算。

根据电流产生电场的基本观点, 从宏观上讨论束缚电流产生磁场的规律自然应与第四章中所述的规律相同。因此, 我们合理地把安培环路定理推广至有介质时的情况, 即此时仍有

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 I_{\text{内}}$$

但此时穿过环路 L 的电流 $I_{\text{内}}$ 应同时包括自由电流 I_0 和束缚电流 I' 二部分。为了明确起见, 把定理写为

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 (I_{\text{内}0} + I_{\text{内}}') \quad (5.2.1)$$

由式(5.1.2), 穿过环路 L 的束缚电流为

$$I_{\text{内}}' = \frac{1}{\mu_0} \oint_L B \cdot dl$$

将此式代入式(5.2.1), 以 μ 遍除方程两端并将项 $M \oint dl$ 移至方程右端, 可得如下结果

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu} - M \oint dl = I_{\text{内}0}$$

令
$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - M \quad (5.2.2)$$

则有
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{内}0} \quad (5.2.3)$$

按式(5.2.2)定义的量 \mathbf{H} 称为磁场强度, 方程(5.2.3)叫做 \mathbf{H} 的环路定理. 定理表明, 磁场强度 \mathbf{H} 沿闭合路径的曲线积分唯一地由穿过环路的自由电流的代数和决定. 在真空情况下, 由于空间处处 $M=0$, 由式(5.2.2)有 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$, 方程(5.2.3)与方程(4.4.2)相比, 仅仅是常量因子 μ 从方程的一端换到了另一端, 即方程(5.2.3)回到了方程(4.4.2). 因此可以认为方程(5.2.3)是普遍情况下的安培环路定理. 从分子电流观点看, 磁场强度 \mathbf{H} 仅仅是我们引入的一个辅助量, 引入它描述磁场, 可以得到普遍情况下关于磁场分布整体与自由电流间关系的一条基本规律. 当然, 读者应当注意的是, 式(5.2.3)仅仅表明 \mathbf{H} 的环流只由穿过环路的自由电流决定. 一般说来, 环路上各点的 \mathbf{H} 不仅与全部自由电流有关, 还和全部束缚电流有关.

\mathbf{H} 的量纲和单位与磁场强度 M 相同. 在 SI 中 \mathbf{H} 的单位为 A/m. 物理学中有时还使用另一单位: Oe(奥斯特). 它与 A/m 的换算关系为

$$1\text{A/m} = 4 \times 10^{-3} \text{Oe}$$

关于磁场分布的整体规律的另一定理是磁通连续方程, 它在

按磁荷观点, \mathbf{H} 是描述磁场的基本物理量, 在历史上磁荷观点先于分子电流观点出现, 故称 \mathbf{H} 为磁场强度. 详见本章*§ 5.6.

有介质时仍然成立, 即仍有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.2.4)$$

式(5.2.3)和(5.2.4)构成有磁介质存在时恒定磁场的基本方程, 如果再已知介质的磁化规律就可以求解有介质时的磁场. 在自由电流及磁介质具有相同的某些特殊对称分布的情形下, 单利用 \mathbf{H} 的环路定理可以方便地求出磁场.

5.2.2 介质的磁化规律

研究有介质时的磁场, 必须了解介质的磁化规律. 实验研究给出, 除铁磁质外多数介质, 只要所处的磁场不太强, 其磁化强度 \mathbf{M} 与磁感强度 \mathbf{B} 之间为线性关系, 由 \mathbf{H} 的定义式(5.2.2)可知, \mathbf{M} 与 \mathbf{H} 之间亦为线性关系. 对各向同性介质, 其磁化规律可以由下述矢量式表示为

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (5.2.5)$$

式中比例常量 χ_m 称为介质的磁化率, 由介质的物理性质决定. 由于 \mathbf{M} 与 \mathbf{H} 的量纲相同, χ_m 为无量纲的纯数. 式(5.2.5)表明对多数各向同性介质(除铁磁质外), 其磁化强度与该处磁场强度成正比, 方向在同一直线上. 满足这一磁化规律的介质通常又称为线性介质.

将式(5.2.4)代入式(5.2.2), 我们得到 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 之间的关系为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

令 $\mu = 1 + \chi_m$, $\mu_r = \mu / \mu_0$, 前者称为介质的相对磁导率, 后者称为其磁导率, 则有

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

或

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (5.2.6)$$

即对各向同性线性介质, 其中任一点的磁感强度与该处磁场强度成正比 .

真空的 $\chi_m = 0, \mu = 1, \mu = \mu_0$; 抗磁质的 $\chi_m < 0, \mu < 1, \mu < \mu_0$; 顺磁质的 $\chi_m > 0, \mu > 1, \mu > \mu_0$, 但这两种介质的磁化率 χ_m 的绝对值都很小, 因而其 μ 值都接近于 1. 某些常见的顺磁质、抗磁质的磁化率 χ_m 见表 5.2.1. 因而抗磁质中其磁化强度 M 与磁场强度 H 反向, 顺磁质中 M 与 H 同向; 而无论抗、顺磁质, 其中 B 与 H 始终同向 .

对铁磁质, 上述线性关系不成立, 其磁化规律将在本章§ 5.3 中介绍 .

表 5.2.1 某些磁介质的磁化率 χ_m

顺 磁 质		抗 磁 质	
材料	χ_m (室温)	材料	χ_m
锰	12.4×10^{-5}	铋	$- 1.70 \times 10^{-5}$
铬	4.5×10^{-5}	铜	$- 0.108 \times 10^{-5}$
铝	0.82×10^{-5}	银	$- 0.25 \times 10^{-5}$
空气(1atm20)	30.36×10^{-5}	氢(20)	$- 2.47 \times 10^{-5}$

对于各向同性且均匀的顺(抗)磁介质, 无论其磁化是否均匀, 只要体内没有传导电流存在, 介质体内束缚电流密度处处为零, 束缚电流只出现在介质表面 . 这一结论证明如下 . 在磁介质中任取一截面积 S , 其周界为 L . 由式(5.1.2), 通过此面积 S 的束缚电流为

$$I = \int_L M \cdot dl$$

由介质磁化规律, $M = \chi_m H$, 代入上式, 得

$$I = \int_L \chi_m H \cdot dl$$

由于介质性质均匀(注意不是磁化均匀), 周界上各处有相同的磁化率, χ_m 可移到积分号之外, 再考虑到介质内部无传导电流并利用 H 的环路定理可得:

$$\oint_L H \cdot dl = 0$$

由于 S 是在介质体内任取, 不仅其位置和方位任意, 其大小也可以取得任意小, 这样可得: 介质体内任一微小截面 S 上通过的束缚电流均为零, 即体内束缚电流密度 j 处处为零. 命题得到证明.

如前所述, 利用介质磁化规律及介质中磁场的方程, 可以由已知自由电流及介质在空间的分布确定空间的磁场, 下例举两个简单例子进行计算.

例 1 一均匀密绕长直螺线管, 单位长度匝数为 n , 通以恒定电流 I , 管内充满某种均匀磁介质, 其相对磁导率为 $\mu(>1)$. 试求管内外各点总磁感强度 B 及由束缚电流产生的磁感强度 B .

解 由于传导电流在管内产生的磁场均匀, 介质性质亦均匀且充满磁场, 故知介质将均匀磁化. 由 § 5.1.3 中图 5.1.4 的讨论, 因介质磁化出现的束缚电流为均匀连续分布于圆柱侧面的环形电流, 它相当于一长直螺线管. 故空间任一处磁场可看作二载流长直螺线管的磁场的叠加. 由此可知管外空间磁场 $B_{\text{外}} = 0$, 而管内的 B , 从而 H 处处均匀且沿轴向. 作一矩形环路, 使其中二个相对边平行于轴且分别位于管内外, 如图 5.2.1. 由 H 的环路定理有

$$\oint_L H \cdot dl = H \int_{ab} dl = H l = (nI) l$$

上式是利用了环路的 cd 段上 $H_{\text{外}} = 0$, bc 、 da 二段上 $H \cdot dl$, 从而 $H \cdot dl = 0$ 得出的. 由此可解得

$$H = nI$$

由式(5.2.5)求得

图 5.2.1 例 1 用图

$$B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu nI = \mu B_0$$

式中 B_0 为螺线管中传导电流在管内产生的磁场。因此上式表明当均匀介质充满磁场时, 介质内磁场为传导电流产生的磁场 B_0 的 μ 倍。若 $\mu > 1$ (本题即如此), 则 $B > B_0$, 即磁场增强; 若 $\mu < 1$, 则 $B < B_0$, 即磁场减弱。

由磁场叠加原理 $B = B_0 + B$ 。对本题顺磁质情况, B_0 与 B 二者方向平行同向, 故求得束缚电流在管内产生的附加磁场

$$\begin{aligned} B &= B - B_0 = (\mu - 1)B_0 \\ &= (\mu - 1)\mu_0 nI \end{aligned}$$

为了求得 B , 可以采用另一解法。由式(5.2.4)得磁化强度

$$M = \chi_m H = (\mu - 1)nI$$

又由式(5.1.3)知介质表面束缚面电流密度为

$$i = M = (\mu - 1)nI$$

运用与之等效的长直密绕螺线管磁场公式, 可知束缚电流在管内产生的附加磁场

$$B = \mu_0 i = \mu_0 (\mu - 1)nI$$

与前一解法结果相同。

例 2 一半径为 R 的长薄壁金属圆筒, 其上沿轴向均匀流有传导电流 I_0 , 筒的外壁紧包着一层均匀的各向同性介质柱壳。壳层厚度为 d , 介质的相对磁导率为 μ (设 $\mu > 1$)。求金属筒外空间各区的磁感强度及介质表面上的束缚电流密度。

解 由于传导电流和磁介质具有相同的均匀轴对称分布, 可

知此时的磁场分布亦是均匀轴对称的, 即在与轴相同距离处的 H 大小应相等, 方向沿垂直轴线且以轴线为中心的圆周切向. 作如图所示半径为 r 的圆形环路 L , 由 H 的环路定理, 在 $r > R$ 的区间,

$$\oint_L H \cdot dl = H \cdot 2\pi r = I_0$$

因而

$$H = \frac{I_0}{2\pi r}$$

在介质内部 $R < r < R + d$ 的各点

$$B = \mu \mu_0 H = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi r} = \mu B_0$$

在介质外部 $r > R + d$ 处处为真空

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = B_0$$

即介质内的磁场为传导电流的磁场的 μ 倍, 而介质外磁场不变.

由于介质均匀, 体内又无传导电流, 故束缚电流只出现在柱壳的内外表面. 根据式

图 5.2.2 例 2 用图

(5.2.4) 在介质柱壳内表面处磁化强度的大小

$$M_{\text{内}} = (\mu - 1)H_{\text{内}} = (\mu - 1) \frac{I_0}{2R}$$

介质柱壳外表面处磁化强度的大小为

$$M_{\text{外}} = (\mu - 1) \frac{I_0}{2(R + d)}$$

由题设 $\mu > 1$ 可知 M 的方向与 H 方向相同, 即柱壳内外表面的 M 均沿圆周切线, 并与电流方向成右手螺旋关系. 又由式(5.1.3)可

进而求得介质柱壳内外表面的束缚面电流密度的大小分别为

$$i_{\text{内}} = \odot \mathbf{M}_{\text{内}} \times \mathbf{n}_{\text{内}} \odot = \frac{(\mu - 1)I_0}{2R}$$

$$i_{\text{外}} = \odot \mathbf{M}_{\text{外}} \times \mathbf{n}_{\text{外}} \odot = \frac{(\mu - 1)I_0}{2(R + d)}$$

由于 $\mathbf{n}_{\text{外}}$ 的方向是沿径向离开轴, 而 $\mathbf{n}_{\text{内}}$ 的方向是沿径向指向轴, 因此 $i_{\text{内}}, i_{\text{外}}$ 方向相反, 前者沿轴向向上, 即与传导电流方向相同, 后者沿轴向向下, 与传导电流反向, 如图 5.2.2 所示.

由于内外表面上电流密度各自均匀, 相应柱壳的内外表面上的束缚电流大小为

$$I_{\text{内}} = i_{\text{内}} 2R = (\mu - 1)I_0$$

$$I_{\text{外}} = i_{\text{外}} 2(R + d) = (\mu - 1)I_0$$

即磁化的结果使介质柱壳内外表面(柱面)上有相等相反的均匀电流 I 通过.

按照求得的束缚电流分布, 我们可以从磁场叠加原理, 即空间磁场为传导电流的场和束缚电流的场叠加再去验证前面求得的磁场结果. 此时束缚电流为半径分别为 R 和 $R + d$ 的二均匀柱面电流. 由无限长柱面电流产生的磁场可知, 在介质柱壳外空间, 二束缚柱面电流的磁场互消抵消, 有 $B = 0$, 故 $B = B_0$; 而在介质壳内空间, B 仅由内柱面上束缚电流产生, 其大小为

$$B = \frac{\mu I_{\text{内}}}{2r} = \frac{\mu(\mu - 1)I_0}{2r}$$

而且 B 的方向与 B_0 方向相同, 因此总磁场

$$B = B_0 + B = \frac{\mu I_0}{2r} + \frac{\mu(\mu - 1)I_0}{2r} = \frac{\mu \mu I_0}{2r}$$

所得结果与前面一致. 这正是我们所预计的.

从以上二例的计算可以看到, 在对称的特殊条件下, 应用 H 的环路定理可以避开对束缚电流的计算直接而方便地求得电流的磁场. 这正反映了引入 H 及其环路定理处理问题的优越之处. 二例中我们又都计算了束缚电流 I 产生的磁场 B 并按叠加原理

再度求得磁场,这样做的目的是使读者对有介质时磁场的产生有一清晰的物理图象.

需要指出的是,从上述二例计算结果中读者可以看到,空间任一点的 H 与单有传导电流存在时的 $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$ 相同,即 H 与束缚电流无关.但是,这仅仅是在均匀介质充满整个磁场或介质分布具有与传导电流分布相同的对称性的条件下的结果,读者不应把它误作普遍结论而随意推广.作为恒定磁场与静电场规律的一种类比,读者不妨将这种情况与静电学中当有电介质存在时电位移 $D = \epsilon_0 E_0 = D_0$ 的情况加以比较.

5.2.3 磁场的边界条件

在两种磁介质的分界面,或磁介质与真空的分界面上,界面二侧的磁场量满足一定的关系,通常称为边界条件.

磁介质界面上的边界条件有两条:一为在界面上任一点,界面二侧磁感强度 B 的法向分量连续,另一为当界面上无自由电流时,在界面上任一点,界面二侧磁场强度 H 的切向分量连续,这两个条件分别可以从磁场的两个基本规律导出,下面我们分别进行推证.

图 5.2.3 磁介质界面的边界条件

B 的法向分量连续

设界面某处两侧无限接近界面处的磁感应强度分别为 B_1 和 B_2 . 在该处作一扁盒状闭合面, 使它的上下底面与该处界面平行, 且无限接近界面, 底面积为 S , 如图 5.2.3 左侧所示. 将 B 的高斯定理用于图示闭合面, 应有

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B_1 \int_{\text{上}} \mathbf{n}_1 \cdot d\mathbf{S} + B_2 \int_{\text{下}} \mathbf{n}_2 \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{侧}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

由于两底面无限接近界面, 侧面面积与 S 相比为高阶小量, 侧面的磁通量 $\int_{\text{侧}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 可略去, 再注意到 $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$, 取 \mathbf{n}_1 为界面法线单位矢量 \mathbf{n} , 即令 \mathbf{n} 由介质 2 指向介质 1, 可得

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= (B_1 - B_2) \int_S \mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} \\ &= (B_{1n} - B_{2n}) S = 0 \end{aligned}$$

即 $B_{1n} = B_{2n}$ (5.2.6)

式(5.2.6)表明界面处 B 的法向分量是连续的.

H 的切向分量连续

设界面某处无限接近界面的二侧的磁场强度分别为 H_1 和 H_2 , 界面上无传导电流. 在界面处作一矩形环路, 使它的二个相对边与界面平行且无限接近界面, 其长度为线段元 l , 如图 5.2.3 中 $abcd$. 先计算 H 沿此环路的曲线积分. 由于 bc 和 da 二段长度与 l 相比为高阶小量, 在计算线积分时可略去; 再注意到环路积分中从 a 到 b 的线元方向与从 c 到 d 的线元方向相反, 取界面处切线方向单位矢量为 \mathbf{t} 如图所示, 我们有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_1 - H_2) \int_L \mathbf{t} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t}) l$$

由于交界面上没有传导面电流, 即 $j_0 = 0$, 根据 H 的环路定理可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (H_{1t} - H_{2t}) l = 0$$

即 $H_{1t} = H_{2t}$ (5.2.7)

式(5.2.7)表明, 当介质分界面上没有传导面电流时, 磁场强度 H 的切向分量是连续的.

上述推导过程并未涉及介质的具体性质, 因此是在介质分界

面处普遍成立的边界条件。

对于满足 $B = \mu H$ 的磁介质可由边界条件进一步得出分界面上两侧磁感应强度的大小和方向的关系。设介质 1 和介质 2 的磁导率分别为 μ 和 μ_2 , 界面某处二侧磁感强度分别为 B_1 、 B_2 , 它们和界面法线间夹角分别为 α_1 、 α_2 。由几何关系有

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1t}/B_{1n}}{B_{2t}/B_{2n}}$$

图 5.2.4 B 线的折射

将边界条件 $B_{1n} = B_{2n}$ 代入, 并注意到 $B = \mu H$, 可得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}}$$

而又由边界条件 $H_{1t} = H_{2t}$, 最后可得

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu}{\mu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (5.2.8)$$

从上述讨论可知, 对于各向同性的线性磁介质, 其分界面上两侧磁感强度 B 的各分量满足关系式

$$B_{1n} = B_{2n}$$

$$B_{1t}/B_{2t} = \mu/\mu_2$$

且 B 的方向与界面法线之间夹角的正切之比等于二介质的磁导率之比, 即满足式(5.2.8)。

如果我们画出磁场的 B 线, 则这些 B 线在介质的分界面上是连续的, 但是它们的方向在界面处却会发生突变, 即所谓“折射”。当 B 线由 μ 值小的一方进入到 μ 值大的一方时, “折射”后的 B 线

将偏离法线。这种情况和光线在两种媒质界面处发生折射有类似之处,因此人们通常称式(5.2.8)为B线的折射定理。

§ 5.3 铁磁质和铁磁性

铁磁质是实际应用最多的磁介质,它具有特殊的磁化性质,需要专门给予介绍。

5.3.1 铁磁质的磁化曲线

为了研究铁磁质的磁化规律,通常是测定材料中的磁感强度B与相应的磁场强度H,由此得到二者的关系曲线,即B-H曲线,通常称为磁化曲线。测量装置原理如图5.3.1。将样品制成截面均匀的细圆环,其上均匀绕有励磁电流线圈,其中电流方向、大小都可以调节改变。此外还绕有一与冲击电流计G相连的副线圈。细环样品中H的大小可以认为是均匀的,由H的环路定理,H的大小为

$$H = \frac{N_1 I_1}{l}$$

式中 l 为细环的平均周长, N_1 为励磁线圈匝数, I_1 为线圈中电流。因此,测定 I_1 ,即可测出H,调节 I_1 的大小也就改变了H的大小。对于样品中的磁感强度B的测量则要利用电磁感应原理。当施加励磁电流时将在副线圈中激起感应电流,使用与副线圈相连的冲击电流计可测量感应电流的电量,由此可测出B值,其测量原理可参阅本书第六章中有关的内容。

实验发现,铁磁质的磁化与该介质磁化的历史有关。当铁磁质从未磁化状态(即 $H=0, B=0$)开始磁化时,若逐渐加大励磁电流增大H,B随之非线性地增加,其变化关系如图5.3.2(a),当H大于某一值 H_s 之后,B-H曲线变成斜率几乎为零的直线,即B值在达到某一值 B_s 后,几乎不再增加,此即所谓磁饱和现象。图5.3.2(a)的整个磁化曲线叫起始磁化曲线或称基本磁化曲线。

在铁磁材料达到磁饱和后,如果逐渐减小H,B不再沿起始

图 5.3.1 B-H 曲线的测定

图 5.3.2 铁磁质的磁化曲线

磁化曲线返回, 而是沿另一曲线, 如图 5.3.2(b) 中 ab 段曲线减小. 当 H 减小至零时, B 值并不为零, 这时的值 B_r 叫剩磁感强度.

若使 H 反向并由零逐渐增大其绝对值, 介质中 B 沿曲线 bc 段逐渐减小至零, 使材料中 $B = 0$ (通常称为退磁) 的反向磁场强度值 H_c 叫作矫顽力. 使反向磁场自 H_c 值继续增强, 材料中 B 的方向开始反向且数值随之由零增大, 直至达到反向饱和, 如图 5.3.2 (b) 中 cd 段. 反向饱和后逐渐减小反向磁化场 H 的大小至零再沿原方向逐渐增强 H 再度达到饱和, B 值沿曲线 $defa$ 变化. 在磁化场 H 往复变化一周的过程中整个磁化曲线构成一闭合曲线. 由于磁化过程中 B 的变化与起始磁化曲线相比始终落后, 因此称这一回线为磁滞回线. 若铁磁质已磁化但未达到饱和, 即材料处于起始磁化曲线上的某一磁化状态, 使磁场强度由此状态对应值往复变化一周, 将会得到另外的磁滞回线, 如图 5.2.3 (b) 中诸虚线所示. 不同的虚线对应起始磁化曲线上不同的磁化状态.

根据 H 的定义式 $H = \frac{B}{\mu} - M$, 从实验测得的 $B-H$ 关系曲线可以推知铁磁质的磁化强度 M 与磁场强度 H 间的关系, 据此绘出的 $M-H$ 曲线形状与图 5.3.2 相似. 其差别是: 当达到磁饱和后 M 值不再增大, 即饱和后的 $M-H$ 曲线段为平行于 H 轴的直线; 且在相应的磁滞回线中, 当材料中 B 已退磁为零时, M 值并不为零, 即欲使磁化强度恢复为零所需的反向磁场强度值应大于图 5.3.2 中对应的 H_c 值. B 和 H 之间或 M 和 H 之间存在着的非线性关系、磁饱和以及磁滞现象是铁磁质磁化性质的重要特征.

温度对铁磁材料的磁化性质有重要影响. 对每种铁磁材料存在着一个临界温度 T_c , 当材料所处的温度高于此临界值时, 其铁磁性质完全消失, 介质表现为普通的顺磁性. 这个临界温度称为居里点.

5.3.2 铁磁质的磁导率及分类

对铁磁质而言, B 与 H 之间已没有普通磁介质中的线性关

系,甚至不是单值对应关系,即 $B = \mu H$ 的线性关系不再成立. 在研究铁磁材料的磁化性质时,人们也引入磁化参量——磁导率. 人们定义铁磁材料的基本磁化曲线上任一点的 B 与 H 的比值为材料在该状态下的磁导率 μ 即

$$\mu = \frac{B}{H}$$

相应的比值 $\mu/\mu_0 = \mu_r$ 为材料的相对磁导率. 显然 μ 和 μ_r 都不是常量. 起始磁化曲线上 B/H 的最大比值和当 H 趋于零时的比值分别称为铁磁质的最大磁导率 μ_m 和起始磁导率 μ_0 , 如图 5.3.3(a) 所示. 一般铁磁质的最大相对磁导率的值为 $10^2 \sim 10^6$, 可见铁磁质磁化后具有很强的磁性. 铁磁质的 μ 值随 H 而变, 其 $\mu-H$ 曲线如图 5.3.3(b).

特别需要指出的是, 由于磁滞回线中 B 与 H 间的非单值关系, 对于处于回线上任一状态的铁磁

图 5.3.3 铁磁质的磁导率

材料再谈磁导率是没有意义的. 也就是说上述 μ 的定义以及由此而得的 $B = \mu H$ (μ 不是常量), 只能用于讨论处于基本磁化曲线状态的铁磁材料.

依照磁滞回线的特征, 铁磁质可分为二类, 一类的矫顽力小因

而磁滞回线形状“瘦长”，称为软磁材料，另一类的矫顽力大因而磁滞回线形状“粗胖”，称为硬磁材料。两类材料的磁滞回线形状分别如图 5.3.4(a)、(b)所示。属于软磁材料的有纯铁、硅钢片、铁镍合金、铁钴合金以及软磁铁氧体等。属于硬磁材料的有铝镍钴合金、稀土钴、碳钢以及硬磁铁氧体等。

图 5.3.4 软磁和硬磁材料的磁滞回线

硬磁材料主要用于制作永磁体，因而用于需要永磁体的电子电器设备如电表、扬声器及录音机等。它的主要技术参数是剩磁和矫顽力 H_c 。变压器、电感元件、继电器及电磁铁中的铁芯的主要作用是增强磁场且要求切断电源后无剩磁，因此应当选择高磁导率和矫顽力小、剩磁小的软磁材料。还有的材料其磁滞回线接近矩形，称为矩磁材料，它们常用作数字磁记录材料或制成计算机中的记忆元件。

某些软磁及硬磁材料的磁性参量见表 5.3.1 及表 5.3.2。

表 5.3.1 某些软磁材料的磁性能参数

材料	成份(%)	μ_m	$H_c(A/m)$	$B_s(T)$	$T_c(^{\circ}C)$
电解纯铁	杂质 0.05	20 000	7.2	2.15	770
电工纯铁 (普通)	Si: 0.20 Al: 0.50 杂质 0.1	6 000	96		
硅钢 (热轧)	Si: 4 余为 Fe	8 000—10 000	4.0	2.0	690
铁镍合金 (1J50)	Ni: 49—51 余为 Fe	31 500—45 000	16	1.5	450
铁镍合金 (1J79)	Ni: 78—80 余为 Fe	150 000—200 000	2.0	0.75	560
铁铝合金 (1J6)	Al: ~ 6	3 000—6 000	32 ~ 48	1.35	730
铁铝合金 (1J16)	Al: 16	25 000—100 000	7.2	/	400
铁钴合金 (1J22)	Co: 50 V: 1.4 ~ 1.8 余为 Fe		150	2.4	980

表 5.3.2 某些硬磁材料的磁性能参数

材料	成份(%)	$B_r(T)$	$H_c(A/m)$	$T_c(^{\circ}C)$
铝镍钴合金 52 (铸造, 定向结晶)	Al: 8, Ni: 14 Co: 24, Cu: 3 余为 Fe	1.30	56×10^3	890
铝镍 9(粉末 烧结, 各向同性)	Al: 13, Ni: 26 Cu: 3 余为 Fe	0.5	35×10^3	760
铝镍钴 25(粉末烧 结, 各向异性)	Al: 9, Ni: 14 Co: 25, Cu: 3, 余为 Fe	1.05	46×10^3	890
钐钴(125) (各向异性)	Sm: 37 余为 Co	0.82—0.95	$(500—660) \times 10^3$	~ 725
铁氧体 10T (各向同性)	$BaO \cdot 6Fe_2O_3$	0.20	$(128—160) \times 10^3$	450
铁氧体 35 (各向异性)	$BaO \cdot 6Fe_2O_3$	0.40—0.44	$(176—224) \times 10^3$	450

对于磁滞回线面积狭窄的软磁材料, 在计算这种材料中的磁场时常可略去磁滞而把它的 $B-H$ 曲线简化为基本磁化曲线, 从而可以应用 $B = \mu H$ 的关系进行计算. 有时在粗略的估算中更进一步把磁化曲线简化为直线. 然而对于永磁体而言, 由于磁化状态是处于磁滞回线上, 只能应用普遍关系式 $H = \frac{B}{\mu} - M$ 讨论问题. 具体例题可参阅本章 § 5.4 及 § 5.5.

当铁磁材料反复磁化时供给励磁电流的电源要消耗额外的能

量。理论上可以证明 对于单位体积的铁磁质,在反复磁化一周过程中消耗的能量正比于该材料的 $B-H$ 回线所围成的面积。由于这种能量损耗是因磁滞而产生,因此叫作磁滞损耗。软磁材料 $B-H$ 回线面积较小因而其磁滞损耗较小。磁滞损耗的能量最终将以热量的形式放出,对于工作于交变电流条件下的带铁心的电磁元件,如变压器、电感器等,铁心反复磁化引起的磁滞损耗是有害的,在可能条件下应尽量选用磁滞回线面积小的软磁材料。

5.3.3 铁磁性的微观解释

对铁磁质的实验研究发现,和其他磁介质不同,铁磁质内部存在着一个个小的自发磁化区域,即使没有外磁场作用,在各小区域内的分子磁矩仍是完全有序排列的,我们把这些自发磁化的小区域称为磁畴。量子力学的理论指出,磁畴的形成是由于铁磁质中相邻原子的某些电子之间的量子交换相互作用,使这些电子的自旋磁矩在小范围内同向排列所致,因而铁磁质的磁性主要来源于它内部的电子自旋磁矩。磁畴的存在可以用实验方法显示。一种较简便的方法是将铁磁材料样品的表面抛光,然后在它上面撒上细铁粉,则铁粉可将磁畴的边界显示出来。通常磁畴大小的线度在微米到毫米量级不等。

在无外磁场时,由于热运动的无序性,各磁畴中自发磁化磁矩的方向无序,如图 5.3.5 所示,因而介质不显磁性。当介质放入外磁场中时,由于外磁场的作用,那些磁矩方向与外磁场方向夹角较小的磁畴边界向外扩张;随着外磁场的增强,除边界继续移动外磁畴的磁矩方向开始逐渐转向外磁场方向;当几乎所有磁畴的磁矩方向都沿外磁场方向排列时,介质的磁化达到了饱和。上述磁化的各阶段如图 5.3.6(b)(c)(d) 所示。由于各磁畴内分子磁矩已

证明需用到本书第六章中电磁感应定律,故作为附录列于本章之后。

图 5.3.5 无外磁场时磁畴
磁矩的方向无序

完全排列有序,铁磁质磁化后的磁化强度远大于顺磁质分子磁矩转向磁化后的磁化强度,因而表现出很强的磁性.磁化时磁畴的上述变化是不可逆的,当外磁场撤消时,材料中的杂质和内应力将阻碍其中的磁畴复原,这是造成磁滞现象的主要原因.当介质经历反复磁化时,则

由于磁畴磁矩方向反复变化及磁畴壁来回移动所遇到的阻力导致了磁化过程中材料的发热,即产生磁滞损耗.

(a) 无外场 (b) 磁畴边界移动 (c) 磁畴的磁矩转向 (d) 磁饱和

图 5.3.6 铁磁质的磁化

在铁磁质磁化过程中磁畴的变化会引起材料中晶格间距的变化,从而伴随有样品长度和体积的改变,这种现象叫作磁致伸缩.反之,若在铁磁质样品上施加机械力使之长度伸缩,则会引起样品磁性的变化,这便是它的逆效应.磁致伸缩可用于制作超声换能器或检测微小的机械振动.

由铁磁质的磁畴结构还可以解释居里点的存在.这是因为材料所处的温度愈高,其内部微观粒子的热运动愈加剧,当温度升高达到某一临界值后,热运动的剧烈程度大到足以破坏电子自旋磁矩的有序排列,即使磁畴解体,从而铁磁性消失.因此,居里点对

应着磁畴解体的温度。不仅如此,如果铁磁材料受到极剧烈的机械振动,也可能造成其磁畴结构的破坏而丧失铁磁性。

§ 5.4 磁 路

由于铁磁质磁化后具有很大的磁化强度,或者说由于它具有极高的磁导率,当磁场中存在铁磁质时,将极大地影响并改变磁场的分布。本节主要讨论实践中应用甚广的闭合铁心及带有极窄空气隙的铁心的情况。

5.4.1 铁磁质与非铁磁质的边界 磁路

现在讨论软磁材料或一般地说,铁磁材料处于基本磁化曲线上的磁化状态时,铁磁质与真空(或非铁磁质)边界处磁场分布的特征。这种情况下只需把磁导率 μ 看作不是常量,仍可运用 $B = \mu H$ 的关系讨论问题。

设分界面的一侧为铁磁质(介质 2),另一侧为真空或非铁磁质(介质 1)。由边界条件式(5.2.8),界面上两侧磁感应强度的方向满足折射定理,即有

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

由于二种介质磁导率相差悬殊, $\mu_1 \approx 1$ 而 μ_2 可达数千甚至数十万,因而除 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 的特殊情况外,一般总有 $\alpha_1 \gg \alpha_2$, 且常常是 $\alpha_2 \approx 0$,

即铁磁质一侧的 B 线几乎与界面平行,而外侧 B 线则接近与界面垂直。同时铁磁质内侧磁感线的密集程度远大于外侧,即磁感强度在铁磁质内远大于在其外,如图 5.4.1。这种磁感应线分布的特征可以形象地比喻为“磁感应线沿铁走”,或定性地说:铁磁质具有把磁感应线聚集于自己内部的性质。

图 5.4.1 铁磁质与非铁磁质的边界

利用上述铁磁质与非铁磁质边界处磁场分布的特征,如果我们把铁磁材料制成闭合或基本闭合的形状,就会使磁感应线基本上聚集在铁心内部.图 5.4.2(a)(b)绘出一空心载流线圈和一具有闭合铁心的相同载流线圈的磁场的比较.对于前者,它在周围空间各处激发磁场, B 线散布于空间,如图 5.4.2(a)所示.而对后者,空间磁场主要是由铁心磁化后束缚电流的磁场决定,由前面的讨论可知,材料磁化的结果不仅使铁心内空间的磁场大大增强,而且这时绝大部分 B 线都集中于铁心内部且沿着铁心走向,如图 5.4.2(b)所示.如果铁心中开一缺口,即留有一段空气隙,则 B 线分布如图 5.4.2(c)所示, B 线仍主要集中于铁心.这样,闭合的铁心或开有狭窄空气隙的铁心成为 B 线的主要通路.与闭合电路中导线成为传导电流的通路相类比,人们把前者称为磁路.当然,与传导电流只在电路中流动不同,在磁路的情况下,磁路外部也有 B 线,通常称为漏磁;并且在磁路中并没有什么物质在“流动”.磁路一词源于对 B 线与传导电流线(即 j 线)都闭合且集中分布情况的形式类比.

5.4.2 磁路的计算

磁场的基本规律用于给定的磁路时,在合理的近似下可以方便地求得磁场,并可以得出磁路近似计算的定理.

先讨论简单的无分支闭合铁心的磁路.如图 5.4.3. 设铁心

图 5.4.2 磁路

平均周长为 l , 且铁心截面均匀即 $S_1 = S_2 = S$. 线圈匝数为 N , 其中所通励磁电流为 I , 铁心材料的 $B-H$ 曲线已知, 即 $\mu(H)$ 已知. 在铁心上任取二截面 S_1 、 S_2 , 若略去磁路外部的漏磁, 由磁通连续方程应有

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

图 5.4.3 闭合铁心磁路的计算 设铁心截面上磁感应强度 B 处处均匀, 上式可写为

$$B_1 S_1 = B_2 S_2$$

即

$$B_1 = B_2 = B$$

因而铁心内各处有

$$H_1 = H_2 = H$$

以铁心平均周线为闭合环路, 由于铁心内 B 线(因而 H 线)基本上沿周线走向, 由 H 的环路定理有

$$\oint_L H \, dl = Hl = NI$$

因而铁心中磁场强度为

$$H = \frac{NI}{l}$$

将已知材料对应的磁导率 μ 值代入, 得铁心中的磁感应强度大小为

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{l}$$

整个磁路中任一横截面上的磁通为

$$\Phi = BS = \frac{\mu NI}{l} S = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} \quad (5.4.1)$$

如果我们令 $R_m = \frac{l}{\mu S}$ 叫作磁阻, $E_m = NI$ 叫作磁动势, 则式(5.4.1)

的形式与简单闭合电路的欧姆定律 $I = \frac{E}{R}$ 的形式完全相似, 故通常称式(5.4.1)为简单磁路的欧姆定理。

如果在铁心上开一小切口, 使它成为带有空气隙的磁路时, B 线由铁心经过气隙略向外弯曲, 即气隙处 B 线的截面 S_0 略大于铁心截面 S 。若气隙宽度 l_0 远小于铁心周长 l , 可近似认为 $S_0 \approx S$, 如图 5.4.4。与前面闭合铁心的计算类似, 不计漏磁并认为同一截面上 B 均匀, 设气隙中磁感强度为 B_0 , 则由磁通连续方程可得

图 5.4.4 带气隙磁路的计算

$$\Phi = BS = B_0 S_0$$

考虑到 $S \approx S_0$, 可得

$$B = B_0$$

铁心中的磁场强度 $H = \frac{B}{\mu}$

空气的磁导率 $\mu = \mu_0$, 因此气隙中磁场强度

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$$

同样以磁路的平均周线为环路, 由 H 的环路定理可得

$$\oint_L H \cdot dl = H l + H_0 l_0 = NI$$

即
$$\frac{B}{\mu} l + \frac{B}{\mu_0} l_0 = NI$$

由此求得铁心以及气隙中的磁感强度

$$B = \frac{NI}{l/\mu + l_0/\mu_0}$$

在上面的计算中, 还作了铁心长度 $l \approx l_0$ 的近似。

据此, 铁心中的磁通

$$\begin{aligned} \Phi_m = BS &= \frac{NI}{l/\mu S + l_0/\mu_0 S} \\ &= \frac{NI}{l/\mu S + l_0/\mu_0 S_0} \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

式(5.4.2)中分母正是把整个闭合磁路看作是磁阻分别为 $R_{m1} = l/\mu S$ 的铁心和 $R_{m2} = l_0/\mu_0 S_0$ 的气隙二者串联的总磁阻, 即

$$R_m = R_{m1} + R_{m2} = \sum_i R_{mi}$$

而式(5.4.2)可改写为如下形式

$$\Phi_m = \frac{NI}{\sum_i R_{mi}} = E_m \quad (5.4.3)$$

式(5.4.3)与无分支闭合电路的回路电压方程相对应。式中 E_m 叫磁动势, 以励磁电流的安匝数计算。

当磁路中存在分支时, 一般说来各分支中的磁通量不相同。以图 5.4.5 所示磁路为例, 如果不计漏磁, 由磁通连续方程可知三

个支路中的磁通满足

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

即

$$\Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0$$

亦即, 在磁路的分支处各分支的磁通的代数和为零. 这一关系正与电路中基尔霍夫的节点电流方程相对应. 这种磁路与电路的对比, 可使我们将熟悉的电路计算方法移植过来计算磁路. 例如对于图 5.4.5 所示磁路就可以看作是 b、c 二段磁阻并联后再与 a 段磁阻串联而成.

图 5.4.5 有分支的磁路

从式(5.4.2)可以看到, 当在铁心上开有空气隙时, 由于空气磁导率 μ 远小于铁磁质的磁导率 μ , 尽管间隙可以做得很小, 气隙的磁阻也足可与铁心磁阻相比拟, 甚至更大, 从而对铁心中的磁感强度和磁通产生相当大的影响. 例如, 设铁心周长 $l = 100\text{cm}$, 所开气隙 $l_0 = 1\text{mm}$, 所用铁心为工业纯铁, 其 $\mu = 10000$, 则空气隙的磁阻与铁心磁阻之比为

$$\frac{R_{m2}}{R_{m1}} = \frac{l_0/\mu}{l/\mu} = \frac{l_0}{l} \propto \mu = 10$$

与不开口的情况相比, 如果 NI 不变, 并且在粗略估算中认为 μ 是常量, 则开气隙后磁路的磁阻将增大 10 倍, 相应, 铁心中的 B 值则大约减至原值的 $\frac{1}{10}$.

应当指出, 上述磁路的计算公式是从磁场的基本定理—— H 的环路定理和磁通连续方程出发, 作了许多近似(例如不计漏磁, 认为 B 线沿着铁心周线走向以及铁心截面上各处 B 均匀等)而得

出的, 因此实际上只是一种估算. 然而这种估算对有关的工程技术问题又是十分必要的.

例 如图 5.4.4 一电磁铁铁心的平均周长 $l = 1\text{m}$, 截面均匀, 铁心材料为高硅钢, 其 B - H 曲线如图 5.4.6, 今要求在铁心上开出宽度 $l_0 = 5\text{mm}$ 的空隙, 并在气隙中产生 8000Gs 的磁场. 试求所需励磁电流的安匝数.

图 5.4.6 高硅钢的 B - H 曲线

解 由于气隙很窄, 忽略气隙中 B 线的弯曲, 认为磁路中气隙截面与铁心截面相同. 则由磁通连续方程不计漏磁时铁心中 $B = 8000\text{Gs}$. 由 B - H 曲线可得对应的磁场强度

$$H_{\text{铁}} = 1.85\text{A/cm} = 185\text{A/m}$$

而空气隙中磁场强度

$$H_0 = \frac{B}{\mu}$$

以磁路平均周线为闭合路径, 由 H 的环路定理有

$$H_{\text{铁}} l + H_0 l_0 = NI$$

故所需励磁电流安匝数为

$$\begin{aligned} NI &= 185 \times 1 + \frac{8000 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-7}} \times 5 \times 10^{-3} \\ &= 3.37 \times 10^3 \text{ 安匝} \end{aligned}$$

5.4.3 磁屏蔽

在外磁场中放入铁磁质闭合壳体时, 由于铁磁质有使磁感线在其内部聚集的特点, 可使壳内空腔中的磁场大大削弱. 图 5.4.7 绘出了均匀外磁场中置入铁质球壳后 B 线的大致分布. 也就是说一闭合的铁磁质壳体可以有效地减弱外界磁场对壳内空腔的影响, 即具有磁屏蔽的作用. 闭合铁壳的磁屏蔽也可以粗略地从磁阻的角度给予说明. 图 5.4.7 可以看作是由铁球壳上下二半部分以及壳内空气空腔三者的并联磁路. 容易想到此时空气空腔的磁阻远大于铁壳的磁阻, 并联磁阻中

图 5.4.7 磁屏蔽

磁通量与其磁阻成反比, 因而空腔内的磁场远比铁壳体内弱得多.

和闭合导体空腔内静电场为零不同, 外磁场中闭合铁磁质壳体空腔中的磁场并不为零, 因而磁屏蔽的效果远不如静电屏蔽的效果. 要较好地实现磁屏蔽除了选择高磁导率的材料做成实体的闭合壳之外, 还应将壳体做得足够厚或进行多层磁屏蔽.

* § 5.5 磁荷观点

磁荷观点在磁学的早期发展中起过重要作用, 尽管迄今为止

实验中并未发现自由磁荷, 并且磁荷是否存在一直是物理学界探索的问题之一, 但是无论磁荷存在与否, 用磁荷观点讨论问题尤其是讨论永磁体的磁场时仍不失为一种方便的方法, 因此有必要在这里对它作一概要的介绍。

5.5.1 磁荷观点概述

按照磁荷观点, 磁介质的分子可以看成是由正负磁荷组成的磁偶极子, 磁体之间的相互作用是由于在磁体的两磁极处积累了正负(束缚)磁荷所致。正磁荷与 N 极对应, 负磁荷与 S 极对应。磁荷在其周围激发磁场, 磁场对处于其中的磁荷有力的作用。

磁荷之间相互作用的基本规律是真空中两个点磁荷间作用的库仑定律, 它的形式和点电荷之间的静电库仑力形式完全相同, 只是将电荷量 q 换为磁荷量 q_m , 真空电容率 ϵ_0 换为真空磁导率 μ_0 , 即有

$$f_{12} = \frac{1}{4\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r^2} r_{12} \quad (5.5.1)$$

磁荷观点中描述磁场的基本物理量是磁场强度 H , 它的定义是单位正点磁荷在该处所受的力, 即

$$H = \frac{f_m}{q_m} \quad (5.5.2)$$

磁场强度服从叠加原理。从两个基本定律以及 H 的定义出发可以得出关于 H 的一系列定理, 它们的形式和在静电学中关于电场强度 E 的定理完全对应并且形式相同。因而完全可以采用和静电学相对应的方法来研究静磁学问题。

介质放入磁场时, 受外磁场作用介质分子变成有序取向的磁偶极子, 这称为磁极化。磁极化的强弱用磁极化强度 J 描述。它定义为单位体积内分子磁偶极矩之和, 即

$$J = \frac{p_{m\text{分子}}}{V}$$

磁极化的结果将使介质体内某些部位及表面出现磁荷。介质体内任一闭合面 S 内的体束缚磁荷 q_m 及介质表面束缚磁荷面密度 σ_m 与磁极化强度的关系为

$$q_m = \int_S J \cdot dS \quad (5.5.3)$$

$$\sigma_m = J \cdot n \quad (5.5.4)$$

其中 n 方向由介质表面指向介质外。

和在有电介质时引入电位移 $D = \epsilon_0 E + P$ 相同, 在有磁介质时引入一辅助量 B , 其定义式为

$$B = \mu_0 H + J \quad (5.5.5)$$

引入 B 后, 从磁荷理论导出有关 B 对闭合面的通量应满足

$$\int_S B \cdot dS = \sum_{\text{内}} q_{m\text{自由}}$$

然而迄今的实验表明, 任何磁场中 B 对闭合面的通量均为零, 即

$$\int_S B \cdot dS = 0$$

两相对比可知, 对任何闭合面其中包围的自由磁荷的代数和恒为零。即自然界不存在单一的自由磁荷, 即磁单极。理论物理学家狄喇克曾在理论上预言了磁单极的存在, 许多实验物理学家至今仍在不懈地进行着探测磁单极的努力。

5.5.2 分子电流观点与磁荷观点的对比与联系

为了便于比较两种观点涉及的物理量, 我们列表于后。

两种观点涉及的磁场是同一个场, 将 $H = \frac{B}{\mu_0} - M$ 改写为 $B = \mu_0 H + \mu_0 M$ 并与 $B = \mu_0 H + J$ 相比较可知, 磁化强度与磁极化强度间的关系为

$$J = \mu M \quad (5.5.6)$$

式(5.5.6)是联系关于物质磁性的两种观点——分子电流观点与

	分子电流观点	磁荷观点
描述磁场的基本量	B(磁感应强度)	H(磁场强度)
磁介质分子	分子环流 分子磁矩 $m = I_{\text{分}} S$	磁偶极子 ---^1 $-q_m \quad +q_m$ 磁偶极矩 $p_m = q_m l$
磁(极)化的强度	M(磁化强度)	J(磁极化强度)
描述磁场的辅助量	$H = \frac{B}{\mu} - M$	$B = \mu H + J$

磁荷观点的桥梁。

我们绘出真空中磁偶极子产生的磁场的 H 线与小环形电流产生的磁场的 B 线,如图 5.5.1 所示。由图可见,二者在较远的场区有相同的分布。因此,对远区场而言一个磁偶极子与一小环形电流相当。分别写出二者在轴线上远处(距离 r)的磁场,则有磁偶极子的磁场强度为

$$H = \frac{p_m}{2 \mu r^3}$$

环形电流的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu m}{2 r^3}$$

用真空中 $B = \mu H$ 的关系代入磁偶极子轴线上场的公式并与后式对比可知,在产生磁场上,磁偶极子的偶极距 p_m 与环形电流的磁矩 μm 相当。

图 5.5.1 磁偶极子与环形电流磁场的比较

5.5.3 磁荷观点的应用

用磁荷观点讨论磁体的磁场可以籍助静电学中已知电荷的电场的结果,因而十分方便,下面举二个例子.

例 1 均匀磁化永磁棒中的磁场

如图 5.5.2(a) 设圆柱状的永磁体是沿轴向均匀磁化的磁体,其磁化强度为 M . 由磁荷观点,相应的磁极化强度为 $J = \mu M$. 由式(5.5.3)及(5.5.4)可知,此磁棒体内无磁荷,磁荷只出现在与 J 垂直的两端面,相应的磁荷面密度分别为 $\pm \sigma_m$, 而

$$\sigma_m = J = \mu M$$

它所产生的磁场的 H 线与一对均匀带有等量异号电荷的平行圆平面所产生的电场 E 线相同,因此籍助于与后者类比可绘出其 H 线分布如图 5.5.2(b). 在磁铁内部各处有 $B = \mu H + J$, 外部为 B

图 5.5.2 例 1 用图

$= \mu H$, 由此可得到相应的 B 线分布如图 5.5.2(c) 所示. 由图可见在永磁体内部除轴线上外, 各点 B 、 H 、 $M(J)$ 三者的方向各不同, 即使在中轴线上其 H 与 B 的方向亦是相反的. 此永磁棒的磁场的 B 线在棒内外连续, 而 H 线则发自正磁荷终于负磁荷, 在棒的二端面的内外两侧走向相反.

如果令此永磁体长度远小于截面半径, 即变为均匀磁化的薄磁片, 则此时的磁荷分布可看作是磁荷在二彼此相距很近的大面积上均匀分布. 因此, 除边缘外磁片内磁场为均匀磁场, 其大小

$$H = \frac{m}{\mu_0} = M$$

方向与 M 相反, 即 $H = -M$. 由 $B = \mu H + J$ 可得内部磁感强度

$$B = \mu(-M) + \mu M = 0$$

如果运用分子电流观点讨论此问题, 则由束缚面电流密度 $i = M \times n$ 可以确定此时束缚电流为分布于薄片侧面上的半径相当大的环形电流. 它在环平面中心部分的 $B = \frac{\mu i t}{2R}$, 由于薄片厚度 t 远小于半径 R , 故 $B \rightarrow 0$. 与磁荷观点结果一致.

例 2 均匀磁化球中的磁场

如图 5.5.3(a) 介质球均匀磁化, 其磁化强度为 M , 相应磁极化强度为 $J = \mu M$. 与静电学中均匀电极化的电介质球对比, 可知此时球面上磁荷面密度为

$$\sigma_m = J \cos \theta = \mu M \cos \theta$$

如图 5.5.3(b) 所示.

图 5.5.3 均匀磁化球内磁场(例 2)

利用已计算过的均匀极化球的束缚电荷在球内产生的电场的结果, 即电场为均匀场, 且场强为

$$E = - \frac{P}{3 \epsilon_0}$$

可知此时磁化后磁荷在介质球内产生的磁场也是均匀场, 其磁场强度

$$H = - \frac{J}{3 \mu} = - \frac{1}{3} M$$

因而球内磁感强度

$$B = \mu H + J = \frac{2}{3}J = \frac{2}{3}\mu M$$

本例中如果我们按照分子电流观点去求球表面上束缚电流密度 i ，并计算此束缚面电流在球内产生的磁感强度，则计算要比上述方法困难得多。

例 3 计算电磁铁的起重力

设有如图 5.5.4 的电磁铁，由其二磁极处磁场吸引衔铁。当二者相接触时吸力最大，称为最大起重力。已知二者接触的总面积为 S ，铁心中的磁感强度为 B （由磁动势及磁阻定出）。设轭铁与衔铁由同一材料组成，磁铁中磁场强度值远小于其磁化强度值。求最大起重力。

图 5.5.4 例 3 用图

解 为求最大起重力，可设想磁极与衔铁分开一无限小距离。此时，二者的相对表面可按二无限大平行平面处理，且该二处磁感强度 B 值可认为相等，从而其磁场强度 H 值相等。由磁荷观点可知，磁极与衔铁的相对表面出现均匀分布的等量异号磁荷，如图 5.5.4(b) 所示。磁荷面密度的大小为

$$\sigma_m = J_n = \mu M$$

因磁铁中有 $H_n M$, 则

$$B = \mu(H + M) = \mu M$$

代入前式, 有

$$m = \frac{B}{\mu}$$

对比静电学中类似的情况可知, 二相对表面间为均匀磁场, 其强度为

$$H_0 = \frac{m}{\mu}$$

而单位面积上磁荷所受相互吸引力为

$$\frac{F}{S} = \frac{1}{2} \mu H_0^2 = \frac{m^2}{2\mu}$$

$$\text{故起重力 } F = \frac{m^2}{2\mu} \mu S = \frac{B^2 S}{2\mu}$$

令衔铁与磁极间距离趋于零, 即令式中 B 为衔铁与轭铁接触形成闭合磁路时的磁感强度, 则由上式求出的 F 为最大起重力。

通过此例读者可以看到, 运用磁荷观点求磁体间的作用力非常方便。与此类似, 我们还可以将一小平面载流线圈等效为一个磁偶极子来讨论它在非均匀磁场中受到的磁力, 这可以大大简化计算(见本章习题 5.16)。

附录 5- 铁磁质的磁滞损耗

铁磁质沿磁滞回线反复磁化时, 会有额外的能量消耗。这里, 我们针对图 5.3.1 所示情况计算这一损耗。

先讨论磁化的一个元过程。设铁磁质由磁滞回线上某一状态 a 变化到 b , 其内部磁感强度有一增量 dB 。根据电磁感应定律, 这一变化将在励磁磁线圈中激发感应电动势, 其大小为

参见本书 § 6.1.

$$= N \frac{d}{dt} = N \frac{d(BS)}{dt} = NS \frac{dB}{dt}$$

励磁电路中电源要维持励磁电流 I , 需克服这一电动势做功, 其值为

$$dA = \mathcal{E} I dt = N I S dB$$

改写上式, 得

$$dA = \frac{NI}{l} \mu_0 S l dB = n I V dB$$

式中 l 为环形样品的中心周长, 而 $V = S l$ 为样品体积. 注意到环形样品中磁场强度为

$$H = nI$$

附 5- .1 图 磁滞损耗

以 V 除等式两端, 可得在此元

过程中使单位体积铁磁质磁化时, 电源所做的功为

$$\frac{dA}{V} = H dB$$

式中 $H dB$ 恰为附 5- .1 图中阴影 $abfg$ 面积. 同理, 当铁磁质从图中曲线上 c 点变化到 d 点时, 过程中电源克服感应电动势做功的大小则等于 $cdgf$ 所围面积. 但此时有

$$dB_{cd} = - dB_{ab}$$

故这两个元过程中电源所做的功符号相反, 其代数和等于二面积之差, 即等于磁滞回线内为 $abcd$ 所围的窄条面积. 同样, 可讨论回线上其他一对对元过程. 注意到当某两个对应元过程分别位于一、二象限或三、四象限时, 两个元过程中不仅 dB 反号, H 也反向 (即电流反向), 故两个元过程中电源克服感应电动势做功之和为二面积相加. 因而仍等于回线被平行于横轴的两条直线 (B 及 $B + dB$ 为定值) 所截取的窄条面积. 因此, 当使单位体积铁磁质反复磁化一周时, 励磁电源克服感应电动势所做的功为

$$A = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

即数值上等于其 $B-H$ 回线所包围的面积。显然, 如果没有磁滞现象, 将有 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B} = 0$ 。也就是说这个功是因磁滞现象而额外损耗的, 因此称为磁滞损耗。

附录 5 - 超导体

近年来, 关于超导体的研究取得了很多重大进展, 这是因为超导体有许多独特的物理性质, 在许多方面有重要应用。这里我们介绍这些性质和应用。

5- .1 超导体的基本性质

一、超导电性

1911 年荷兰科学家昂内斯 (K. Onnes) 在研究极低温下金属电阻与温度的关系时首次发现在液氦 (4.2K) 中的水银样品的电阻消失。这种低温下物质具有零电阻的性质叫作超导电性。具有超导电性的物质叫超导体。电阻突然消失的温度 T_c 叫作超导态与正常态之间的转变温度。 T_c 是物质常数。迄今发现有 28 种元素及数千种合金和化合物具有超导电性。超导元素的 T_c 值在 10K 以下。一些常见的金属及合金的 T_c 值见本书第三章表 3.2。

处于超导态的物质具有理想导电性, 即其直流电阻为零。其中一旦激起超导电流 (简称超电流) 无需能源就能持久地维持下去。1917 年曾有人在铅环中激发了数百安的超电流, 历时二年半而未发现有可观察的电流衰减。当然, 所谓零电阻是就测量而言, 就现代测量技术可以确定, 超导体的电阻率低于 $10^{-25} \Omega \cdot m$ 。而导电性很好的非超导金属铜在低温下电阻率则为 $10^{-12} \Omega \cdot m$! 二者成为鲜明的对比。

二、完全抗磁性

在昂内斯发现超导电性二十多年之后, 迈斯纳(W. Meissner)由实验发现, 无论使超导体先处于其转变温度以下而后置于外磁场中, 或是先将正常态的超导体置于外磁场中再降温至转变温度以下, 只要外磁场不超过某一限度, 超导体将把磁力线全部排出其体外. 也就是说处于超导态的物质实体内磁通密度处处为零, 亦即超导体具有完全抗磁性. 这一效应称为迈斯纳效应.

完全抗磁性仅仅取决于超导体所处的温度和磁场值, 而与达到这一状态的方式无关. 这一事实表明它和超导电性是超导体的两个彼此独立而又密切联系的基本性质.

我们可以通过一个有趣的实验来演示超导体的完全抗磁性. 实验时, 使铅($T_c = 7.2\text{K}$)碗浸于液氦之中, 然后将一细长条形磁铁放在碗上方附近, 这时将会看到磁铁因铅碗的抗磁性产生的斥力而悬浮在碗的上方.

超导体的完全抗磁性的机制与普通抗磁质不同, 它是由超导体的超电流产生的附加磁场屏蔽了外磁场所致. 由电流与磁场的关系可知, 为了保证体内磁场处处为零, 屏蔽电流只能出现于超导体的表面.

事实上, 外磁场是会渗透入超导体表面一定深度的. 人们规定, 磁场由超导体表面向内衰减为表面值的 $1/e$ 时的深度叫渗透深度, 通常为 $10^{-7}\text{m}—10^{-8}\text{m}$. 相应, 超导体的表面电流也是存在于这一表面层中.

三、临界磁场和临界电流

实验发现, 对于处于温度 $T < T_c$ 的多数金属超导体, 如果所处的磁场超过某一临界值时, 其超导电性和完全抗磁性同时消失. 这一破坏其超导电性的最低磁场强度值 H_c 叫做临界磁场. 将超导体做成细长棒, 在其上缠绕通电励磁线圈, 测定其 $B-H$ 曲线的形状如附 5- . 1 图. 由图可见, 当 $H > H_c$ 时, 样品内部 B 正比

于 H ,即处于正常态 .

材料一定时, H_c 的值与材料所处的温度有关 . H_c 随绝对温度 T 的升高大致呈抛物线下降, 如附 5- .2 图 . 当 $T = T_c$ 时 $H_c = 0$. 可见, 只有当超导体所处温度低于其转变温度时, 才有可能观察到完全抗磁性和超导电性 .

附 5- .1 图

附 5- .2 图 H_c - T 曲线

当超导体中流有电流时, 即使没有外加磁场, 如果电流强度超过某一临界值时, 超导电性也会消失, 这一电流值叫作临界电流 I_c . 临界电流的存在, 可以理解为是由于超电流自身产生的磁场不能超过临界磁场 . 据此, 例如对于一超导直导线, 可按载流长直导线表面处的磁场强度 $H = \frac{I_c}{2R} = H_c$ 来估算其临界电流值 . 通常情况下给出的是材料的临界电流密度 .

以上关于临界磁场的效应仅是超导体中的一种的情况 . 这类超导体叫第一类超导体, 其特点是当 $H > H_c$ 时, 超导电性和完全抗磁性同时消失 . 后来发现还有另一类超导体, 存在着两个临界磁场值 . 较小的一个值 H_{c1} 叫作下临界磁场, 当 $H < H_{c1}$ 时具有完全抗磁性, 较大的一个值 H_{c2} 叫上临界磁场, 当 $H > H_{c2}$ 时, 超导电性消失; 而当磁场强度处于 H_{c1} 和 H_{c2} 之间时, 材料处于超导态与正常态的混合状态之中 . 少数金属、许多合金及化合物超导体

属于此列,称为第二类超导体. 它们的 H_{c2} 都较高. 通常讲临界磁场是指 H_{c2} . 第二类超导体工作时处于混合态, 因此磁场可渗入其体内, 且体内也有电流流通.

一些超导材料的临界磁场值如表 5- . 1. 如果将临界磁场以磁感强度 B_c 表示, 则由 $B = \mu H$, 表中所列 H_c 之奥斯特(Oe)的数值恰好就是相应的以高斯(G)为单位的 B_c 值.

表 5- . 1 0K 时某些材料的 H_c 值 (外推值)

第一类超导体	-Ti	Rm	Mo	Al	Re	In	Pb	Nb
$H_c(\text{Oe})$	56	66	98	99	193	293	803	1950
第二类超导体	Mo-50Re		Nb-25Ti		Pb-50Bi		Nb ₃ Al	
$H_{c2}(\text{Oe})$	27×10^3		73×10^3		30×10^3		300×10^3	

5- . 2 BCS 理论

BCS 理论是通过研究超导体中电子的运动来阐明超导电性的量子理论. 它是由巴丁(J. Barden)、库柏(L. N. Cooper)和施里弗(J. R. Schrieffer)三人于 1957 年共同建立的, 因此以三人姓氏的第一个字母组合称为 BCS 理论.

BCS 的基本点是金属中某些电子之间通过与晶格的作用而发生吸引作用, 由于这种吸引使它们两两结合成对. 这种电子对叫作库柏对, 超导态时超电流的载流子是库柏对. 关于库柏对的形成可按下述图象简单说明. 事实上, 金属中自由电子并不很自由, 一个电子会稍稍吸引它周围晶格上的正离子, 这会牵动点阵振动, 而被牵动的晶格又吸引它附近另外的电子, 因此最终两个电子之间通过与晶格正离子的相互作用而间接存在着吸引力. 通常温度下, 这种吸引没有任何作用, 而在几度 K 的低温下, 热运动已很微弱, 它便变得突出起来. 量子理论指出, 电子气中那些动量

相反而同时自旋也相反的一对电子之间, 这种吸引远强于其它情况。当这类电子间的吸力超过其间的静电斥力时, 则它们便组合成对而形成库柏对。库柏对中二电子间距约为 10^{-6}m , 即大约是晶格常数的 10^4 倍, 所以它们并不是紧密地靠在一起, 而只是其运动状态发生密切关联的一对对的电子。在接近绝对零度时, 几乎所有可能参与导电的电子都结合成库柏对。

需要强调指出的是, 吸引作用和库柏对都是电子气的集体效应。一个电子对的内部的吸引强弱取决于电子气中全部电子的状态分布。这就使得全体库柏对协同地处于有序化状态。这种有序化的结果形成了库柏对的动量凝聚态。即, 当超导体处于静电平衡时, 所有库柏对中每对的总动量都是零, 而当其中有电流通过时, 作为载流子的库柏对, 每对都具有相同的某一非零动量。在下一情况下, 当库柏对中一个电子因与晶格作用而使动量改变了 p 时, 则另一个电子将亦因晶格作用而获得 $(-p)$ 的动量改变, 从而使每一库柏对保持其原动量不变, 也就是说导体对电流没有电阻, 材料表现出超导电性。当温度升高时, 由于热激发, 一些库柏对被拆散, 余下的库柏对内部的吸引也减弱。当到达某一温度值 T_c 时, 库柏对全部被拆散, 超导电态消失而转入正常态, 这个温度就是临界温度。此外 BCS 理论对迈斯纳效应, 临界磁场等都有说明, 并且其计算结果与实验也基本一致, 这里就不一一叙述了。由于 BCS 理论成功地解开了超导之谜, 巴丁等三人于 1972 年荣获诺贝尔物理学奖。

5- .3 宏观量子效应

一、冻结磁通及磁通量子化

将超导体制成中空的圆柱或环状等几何结构, 在其所处温度 $T > T_c$ 时施加轴向磁场, 再将温度降至 T_c 之下, 这时超导实体内磁通被排出, 但中空的孔道中的磁通却基本保持不变; 即使撤去外

磁场, 孔道中的磁通仍不变, 由超导体表面被激发的超电流所维持. 这种现象叫作磁通冻结. 实践和理论均已证明, 冻结磁通是量子化的, 其最小单位为

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2.07 \times 10^{-15} \text{Wb} \quad (5-1)$$

ϕ_0 称为磁通量子.

二、约瑟夫森效应

1962 年当时身为剑桥大学研究生的约瑟夫森 (B. D. Josephsen) 从理论上预言: 对于两超导体之间隔有绝缘层的结构 (SIS 结), 只要绝缘层足够薄 (1 ~ 3nm), 则超导电子对可以穿过绝缘层而形成超导隧道电流, 如附 5-3 图. 这种 SIS 结称为超导隧道结, 或约瑟夫森结, 相应的电流叫约瑟夫森电流. 和约瑟夫森电流有关的有如下的效应.

1. 当电流值较小时, 电流可以无阻地通过绝缘层, 结的两端无电压. 即零电压下有直流超电流通过结. 而当电流值超过某一上限值时, 结两端会出现电压. 这一上限值 I_m 称为超导隧道结的临界电流. 通常称这一效应叫直流约瑟夫森效应.

附 5-3 图

2. 在超导隧道结的两端加一恒定电压 V , 则结上不仅有直流超电流, 而且存在频率为

$$f = \frac{2e}{h} V = 483.6 \times 10^{12} \text{V(Hz)} \quad (5-2)$$

的交流超电流并辐射此频率的电磁波. 通常称这一效应为交流约瑟夫森效应.

3. 直流效应中结的临界电流 I_m 对磁场敏感, 那怕一高斯的磁场也会引起 I_m 的明显改变. 而且随着外磁场的增大, I_m 由最大减至零, 再到较小的极大值, 再到零, 而呈周期性起伏. 这种效应称为超导量子干涉效应.

以两个约瑟夫森结并联, 如附 5- . 4 图(a), 则结的临界电流随穿过环孔的磁通的变化如附 5- . 4 图(b). 其变化的周期为磁通量子 Φ_0 . 附 5- . 4 图(a) 所示结构称为超导量子干涉器 (SQUID), 它是利用超导量子干涉效应制成的实用型器件.

附 5- . 4 图 超导量子干涉器

4. 以某种频率 ω 的电磁波照射约瑟夫森结, 则结中电流 I 随结两端直流电压 V 变化的 I - V 特性曲线上出现等电压的电流阶梯, 如附 5- . 5 图. 出现电流跳跃的电压值为

$$V = n \frac{h}{2e} \omega \quad (5- . 3)$$

式中 $n=0, 1, 2, \dots$ 为整数. 这一现象称为微波感应台阶现象.

在约瑟夫森作出理论预言的第二年, 就有人观察了零电压下的超导隧道电流, 以后陆续观察到了以上诸效应. 约氏效应为超导体在实验技术中的应用开辟了新的广阔前景.

附 5- . 5 图 感应台阶现象

5- . 4 超导体的应用

超导体的应用很广,不可能一一列举,其主要方面介绍如下

一、超导磁体和超导电缆

由于超导体中传输电流时几乎没有焦耳热损耗,又由于第二类超导体中可以有很高的电流密度(可达 10^5 A/cm^2)。因此利用超导体制成磁体,可以以很小的功率在相当大的空间产生很强的磁场,而磁体本身可做得重量轻,体积小。例如产生 5T 的磁场,常温电磁铁重达 20 吨,而采用超导磁体则重不过几公斤。目前利用超导磁体可产生高达 30T 的强磁场,若用常温型电磁铁需耗电 7MW,而用前者则只需 15kW。因而尽管超导材料较贵,磁体制造工艺较复杂,且需附属低温设备,但用作强磁场的磁体,其总固定投资也不会高于常温型,而运行费用却远低于后者。从 1961 年第一次研制成功超导磁体以来,已研究成功的有用于核物理和高能物理实验的粒子加速器、气泡室中的磁体,用于电力工业的单极直流电机中的磁场线圈等。交流超导电机的研制还处于实验室阶段。目前,在实验中已制成单机容量为 5MW 的交流超导发电机。

磁流体发电中需要在较大空间产生强磁场, 这个任务可由超导磁体完成. 苏美合制的 U-25B 磁流体发电设备在 1977 年冬就已向莫斯科供电.

此外, 还可利用安装在行进列车底部的超导磁体和路基导体环中感应涡流之间的磁性排斥力制成磁悬浮列车, 从而大大提高车速. 日本于 1979 年制造了时速达 504km 的超导磁悬浮实验车.

利用超导体制成超导电缆, 可用于电力传输. 与常规传输相比不仅可大大减少传输能损, 而且由于超导电缆体积小、重量轻可以埋设在地下, 还因为超导电缆的容量大, 所以不必高压传输. 现在对超导电缆的研究, 距离实用还有相当长的一段路要走.

二、超导开关

在超导态到正常态的转变中, 超导体性质有迅速的变化, 而且这种变化可由多种方式控制, 如磁控(H_c)、热控(T_c)、电流控制(I_c)等, 所以利用超导体可以做成各种超导开关.

三、超导磁屏蔽

利用完全抗磁性, 将超导体做成有一定厚度(远大于其渗透深度)的中空封闭壳, 则可由壳表面的屏蔽超电流的附加磁场完全抵消外磁场, 从而对壳内空腔实现磁屏蔽. 例如超导量子干涉仪工作时, 整个装置就都置于超导磁屏蔽壳内.

四、超导量子器件

1. 利用交流约瑟夫森效应, 根据式(5- . 2)可制作特定频率的辐射源或微波发生器.

2. 利用微波感应台阶现象, 监测电压基准.

由式(5- . 3)可知, 在确定了台阶编号 n 之后, 感应台阶电压 V_n 的测定就转化为对频率 ω 的测定, 而世界各国对频率的测量都可以测得很准, 只要物理常数 e/h 值精确度高, V_n 就可以精确地测定.

监测电压基准的方法是: 选定某一标号 n 的台阶, 精确测定相应的电压 V_n 值, 用它来标定标准电池的电动势. 之后, 对同一标准电池在不同时间内标定, 并将此标准电池与基准电池组相比较, 则可通过标准电池电动势的改变, 察知电压基准发生的变化. 这种方法监测的对比精度可达 10^{-8} .

3. 超导量子干涉器(SQUID)

利用超导量子干涉现象可以做成灵敏度极高的磁强计和直流电压计. 在如附 5- . 4 图(a)所示双结 SQUID 上加一恒定电流 I_0 , 使 I_0 取合适的值, 例如在结的临界电流的最大值与最小值之间. 当穿过环孔的外磁通变化时, 由于临界电流发生周期性变化, 使得结两端输出电压随之也发生相同的周期性变化. 作为磁强计使用时, 将待测磁场沿干涉器环的轴向由零加到待测值或反之, 记录结两端电压变化的周期数 N , 则相应的磁通变化为

$$\Delta \Phi = N \Phi_0$$

式中磁通量子 Φ_0 已知, 如果环孔面积已知, 则可定出轴向磁场 B . 用这种磁强计可以检测弱到 10^{-15}T 的轴向磁场.

作为电压计使用时, 先将待测电压 V_x 加在一已知电阻 R_0 与超导线圈串联的电路路上, 则流过超导线圈的电流为 $I_x = V_x / R_0$. 再把线圈与 SQUID 相耦合, 测出由 I_x 产生的磁场, 便能推算出 I_x 并进而定出 V_x . 这种电压计能测量小至 10^{-19}V 的电压.

思 考 题

5.1 把顺磁质和抗磁质分别做成小细条, 用细线悬吊在通电螺线管端部附近, 发现其中一个受吸力, 另一个受斥力. 哪一个是顺磁质, 哪一个是抗磁质.

5.2 判断下列说法是否正确, 并简述理由.

(1) 均匀磁化的任何介质体内一定无束缚电流.

- (2) 只要介质处处均匀, 无论磁化是否均匀, 介质体内一定无束缚电流 .
 (3) 无论顺磁质还是抗磁质, 其体内任一点的 B 与 H 的方向一定相同 .

5.3 围绕对 H 的环路定理的理解, 有下述说明, 试判断其正误 .

- (1) 凡闭合曲线内没有传导电流穿过, 则此曲线上各点的 H 必为零 .
 (2) 凡闭合曲线上处处 $H = 0$, 则一定无传导电流穿过此曲线 .
 (2) H 只取决于传导电流 .

5.4 对有介质时的磁场, 有人进行了下述论证, 请你对此作出分析判断 .

“ 任何磁场均满足 $\oint B \cdot dl = 0$

$$\text{而 } H = \frac{B}{\mu}$$

$$\begin{aligned} \oint B \cdot dl &= \oint \mu H \cdot dl \\ &= \mu \oint H \cdot dl = 0 \end{aligned}$$

而 $\mu \neq 0$, $\oint H \cdot dl = 0$

即磁场中任一闭合曲面上 H 的通量必为零 . ”

5.5 一圆柱形金属棒内均匀流有传导电流 I , 设材料各向同性且处处均匀 . 若考虑材料的磁化, 则它的磁化是否均匀? 材料体内是否一定存在束缚电流? 为什么?

5.6 如图带气隙的电磁铁 . 若气隙极窄, 试比较气隙中与铁芯中的 B 、 H 的大小; 若气隙稍大, 气隙与铁心中 B 的大小相比较又如何? 保持线圈匝数不变, 铁芯周长不变, 但适当加宽气隙, 则铁芯中的 H 是否改变? 为什么?

5.7 在上题图中令铁芯闭合 . 已知若以铁芯的中心周长 L 为闭合环路, 不计漏磁, 可得

$$\oint H \cdot dl = HL = NI$$

因此有 $H = \frac{NI}{L}$

有人另作如图虚线所示环路, 其铁内部分的长度为 a , 他对此环路用环路定理, 并因不计漏磁, 环路积分的铁外部分 $\oint_{\text{外}} H \cdot dl = 0$, 故有

思考题 5.6(5.7) 图

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_a a = NI$$

由此得

$$H = \frac{NI}{a}$$

显然, 结果与前面提到的相矛盾. 问题出在何处?

习 题 五

5.1 一环状磁介质细棒, 沿环向均匀磁化, 其磁化强度大小处处相等, 为 M , 求

- (1) 磁化后束缚电流分布;
- (2) 由束缚电流产生的附加磁场 B .

5.2 一材料均匀的各向同性介质中通有传导电流. 设介质相对磁导率为 μ , 试求此介质体内因磁化而出现的束缚电流密度 j 与传导电流 j_0 间的关系.

习题 5.1 图

5.3 一无限长的圆柱形金属, 其中沿轴向均匀通有传导电流 I . 该金属材料为顺磁质, 相对磁导率为 μ , 圆柱半径为 R . 试求

- (1) 空间磁场强度 H 和磁感强度 B 的分布及 $B-r$ 、 $H-r$ 曲线;
- (2) 磁介质内任一点的磁化强度 M ;

(3) 磁介质中的磁化电流分布 .

5.4 如图, 一厚度为 $2a$ 的无限大金属板中均匀通有传导电流, 体电流密度为 j_0 . 板的一侧是磁导率为 μ , 厚度为 b 的无限大磁介质板, 另一侧为真空. 金属本身的磁导率为 μ . 试求空间各区 B 的大小的分布 .

习题 5.4 图

5.5 一均匀密绕的环形螺线管, 其中心周长 $L = 40\text{cm}$, 线圈总匝数 $N = 500$, 其中通电流 $I = 0.1\text{A}$. 求

- (1) 当管中为真空时, 管内的 H_0 、 B_0 ;
- (2) 当管内均匀充满相对磁导率为 $\mu = 600$ 的铁氧体时管内的 H 和 B ;
- (3) 在(2)情况下磁介质的磁化强度 M 和束缚电流产生的磁感强度 B .

5.6 在电磁铁的轭铁与空气(可认为 $\mu = 1$)的分界面上, 铁中磁感强度 $B = 0.8\text{T}$, 方向与界面法线夹角 89° ; 而轭铁的相对磁导率 $\mu = 8000$, 求界面空气侧中 B 的方向与界面法线的夹角及 B 的大小 .

5.7 真空中有一均匀磁场 B_0 , 若在此均匀磁场中置入一无限大各向同性均匀磁介质板. 板平面与 B_0 夹角为 , 介质相对磁导率为 μ . 试求介质板内外 B 的大小及方向 .

5.8 已知某铁磁材料的 $B-H$ 曲线如图. 求其最大磁导率并绘制其 $\mu-H$ 曲线 .

5.9 一个铁原子的磁矩为 $1.8 \times 10^{-23} \text{A} \cdot \text{m}^2$. 今有一长为 8.0cm , 横截面为 1.0cm^2 的铁棒. 假设此铁棒中全部铁原子的磁矩都沿棒的长度方向整齐排列, 即铁棒已达磁饱和状态. 求此铁棒的磁化强度和总磁矩. 按细长棒近似计算束缚电流在棒中心产生的磁感强度值 .

5.10 一计算机用数码记录的磁芯由矩磁材料做成, 其矫顽力为 2Oe .

习题 5.7 图

习题 5.8 图

磁芯为一截面为矩形的小圆环, 其内外直径分别为 $d_1 = 0.5\text{mm}$, $d_2 = 0.8\text{mm}$. 现磁芯已沿环向磁化. 欲使磁芯中的磁化方向反转, 则在穿过环心的长直导线上需通过的脉冲电流的峰值 i_{\max} 应为多大.

习题 5.10 图

5.11 参照本章图 5.4.5 所示磁路, 证明由二磁阻分别为 R_{m1} 和 R_{m2} 的二磁路并联后, 其等效磁阻 R_m 由下式决定:

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_{m1}} + \frac{1}{R_{m2}}$$

5.12 一闭合铁环, 其中心周长 $l = 125\text{cm}$, 环上所绕励磁电流的安匝数为 500, 此铁环材料的磁导率 $\mu = 400$. 不计漏磁.

(1) 求铁环内的磁感强度 B ;

(2) 若在铁环上锯出宽度 $l_0 = 2.0\text{mm}$ 的空气隙, 再求铁环中的 B 值.

5.13 某带气隙的简单磁路. 其铁芯磁路长 $l = 15\text{cm}$, 空气隙宽 $l_0 = 2.0\text{mm}$, 铁芯横截面积 $S = 0.60\text{cm}^2$, 铁芯的 $B-H$ 曲线如题 5.8 图给出. 现要求在空气隙中产生 $\Phi = 3.0 \times 10^{-5}\text{Wb}$ 的磁通, 不计漏磁, 求所需励磁电流的安匝数.

* 5.14 一细长的永磁棒, 沿棒的长度方向均匀磁化, 磁化强度为 M .

习题 5.14 图

(1) 由分子电流观点求图中所示铁棒中部、两端面处, 铁与空气交界面两侧各点的 B 和 H ;

(2) 按磁荷观点求束缚磁荷分布并再求以上六点的 B 、 H .

* 5.15 一截面均匀开有一极窄缺口的环形永磁体细棒, 沿环向匀强磁化, 其磁化强度大小为 M , 试分别由分子电流观点及磁荷观点, 求缺口中 B 的大小.

* 5.16 设有一磁矩为 m 的小环形电流置于非均匀磁场中. m 的方向与其中心处外磁场方向平行. 把小环形电流等效为一磁偶极子, 证明它

习题 5.15 图

在非均匀磁场中所受磁力的合力为 $F_m = p_m \frac{dH}{dl}$.

其中 $p_m = \mu_0 m$ 为等效磁偶极矩, dH/dl 为 H 的大小沿磁矩方向的变化率. 并讨论当 p_m 与 H 同向或反向这两种情况下 F_m 的指向.

* 5.17 如图 5.5.4 中电磁铁两磁极截面为边长 $l = 20\text{cm}$ 的正方形, 衔铁被吸上时磁铁中 $B = 0.50\text{T}$, 求此时电磁铁的起重力.

第六章 电磁感应

在此之前的各章只讨论了不随时间变化的电场及磁场. 从本章开始将讨论变化电磁场的一些规律.

自从 1821 年丹麦科学家奥斯特发现“电能够产生磁”以后, 一些科学家从朴素的唯物主义和自发的辩证法思想出发, 很快就着手研究“磁能否产生电”. 杰出的英国科学家法拉第(Faraday) 经过十年坚持不懈的研究, 终于首先在 1831 年发现了电磁感应现象, 并总结出电磁感应的基本定律.

电磁感应规律的发现, 在理论上开始了人类对电磁现象本质认识的新阶段; 在实践上它为电与磁的广泛应用奠定了基础. 只要举出这样一个事实就足以说明问题了: 从电磁感应规律的发现到今的一个半世纪中, 尽管人类发现了各种新能源, 但在生产上生活上利用这些能源时, 绝大多数情形总还离不开靠电磁感应的规律将它们转换为电能这一环节. 至于在其它电工技术、电子技术、量测技术等方面用到这一规律的更是不胜枚举.

本章将在介绍电磁感应现象的基础上引出电磁感应定律, 并列举一些应用. 接下去对电磁感应的两类典型分别加以讨论. 然后对电路中常遇到的自感、互感现象加以研究, 在此基础上讨论磁场的能量. 最后考虑由于电磁感应现象引起的直流电路中的过渡过程.

§ 6.1 电磁感应

6.1.1 电磁感应现象

下面, 我们通过三个具有代表性的实验来演示电磁感应现象

并分析其共同规律.

演示实验一: 如图 6. 1. 1(a) 所示, 把线圈 L 和电流计 G 连接成一闭合回路, 用一磁棒插入线圈 L, 发现在磁棒插入过程中电流计 G 的指针有偏转. 这表明在磁棒插入过程中回路中出现电流. 如磁棒插入线圈后不动, 电流计指针将回到零点, 如图 6. 1. 1(b) 所示. 这表明, 在磁棒相对线圈静止时, 线圈回路中没有电流. 在磁棒从线圈 L 中抽出的过程中, 电流计指针又发生偏转, 但偏转方向与插入过程的偏转方向相反. 这表明磁棒抽出过程回路中的电流方向与磁棒插入过程回路中的电流方向相反. 如加快磁棒插入或抽出速度, 则指针偏转加大, 说明回路中电流加大.

(a) 磁棒插入过程 (b) 磁棒不动 (c) 磁棒抽出过程

图 6. 1. 1 磁棒相对线圈运动时的电磁感应现象

固定磁棒不动, 使线圈相对磁棒运动, 例如使线圈 L 向着磁棒朝上运动或离开磁棒向下运动, 同样可以观察到上述现象.

演示实验二: 如图 6. 1. 2 所示, 用一个通有恒定电流的线圈 L 代替磁棒, 重复上面的实验, 可观察到同样的现象.

演示实验三: 如图 6. 1. 3 所示, 把线圈 L 放在线圈 L 中不动, 线圈 L 通过开关 K 和一电池相连. 当将 K 合下时, 发现电流计指针偏转一下, 然后回到零点. 当将 K 打开时, 发现电流计指针朝反

方向偏转一下, 又回到零点. 这表明在线圈 L 通电或断电过程中线圈 L 中出现了电流.

图 6.1.2 载流线圈与另一线圈
有相对运动时的电
磁感应现象

图 6.1.3 载流线圈中电流变化时,
在另一线圈中引起的电
磁感应现象

这三个表面上看来不同的实验存在着共同点. 当磁棒(或载流线圈 L)相对线圈 L 运动时, 线圈 L 所在处的磁场随时间变化, 因而通过线圈 L 的磁通量亦随时间在变化. 在实验三中, 在开关 K 合下或打开的过程中, 通过线圈 L 的电流大小是随时间变化的, 故这电流产生的磁场是一个随时间变化的磁场, 因而通过线圈 L 的磁通量也是变化的. 在线圈 L 中电流达稳定值后, 电流的磁场不再变化, 因而通过线圈 L 的磁通量也不再变化. 同样, 在实验一、二中, 在磁棒(或载流线圈 L)相对线圈 L 不动时, 通过 L 的磁通量不随时间改变, L 中就不出现电流. 上述三个实验是具有代表性的, 归纳它们的共同点, 并由大量的实验证实存在着如下的普遍规律: 不论什么原因, 当通过闭合导体回路的磁通量发生变化时, 在导体回路中就会产生电流, 这种现象称为电磁感应现象, 产生的电流称为感应电流.

6. 1. 2 法拉第电磁感应定律

1. 感应电动势的大小

我们知道, 闭合回路中要产生电流, 这回路中必须存在某种电动势. 透过出现感应电流的现象, 可以看到, 这实质上表明: 当通过导体回路的磁通量发生变化时, 回路中产生了某种电动势, 其大小与磁通量的变化快慢有关. 这种由磁通变化出现的电动势叫作感应电动势. 至于感应电动势是否引起电流以及引起的感应电流有多强, 则取决于导体回路是否闭合以及回路中电阻的量值. 因此, 在电磁感应现象中, 感应电动势是比感应电流更为本质的物理量. 自然, 电磁感应的规律应该表述为感应电动势与磁通变化的关系.

法拉第对电磁感应现象作了精心的研究, 总结出电磁感应定律如下: 闭合回路中的感应电动势 E 与穿过此回路磁通量随时间的变化率 $\frac{d}{dt}$ 成正比, 即

$$E \propto \frac{d}{dt}$$

2. 感应电动势的方向——楞次定律

由前面演示实验可以看出, 感应电动势的方向亦是由磁通量的变化情况所决定的. 例如在演示实验一中, 在磁棒插入线圈过程中, 穿过线圈的磁通在不断增加, 这时线圈中感应电流的方向由电流计指针偏转方向可知为如图 6. 1. 4(a) 所示的方向. 由右手定则可知感应电流产生的附加磁场的方向与原磁场(指出现感应电流前的磁场)的方向相反. 确切些说, 感应电流产生的附加磁通要削弱正在增加的原来的磁通. 即当线圈中磁通增加时, 感应电流产生

以后将会学到, 在给定感应电动势后, 感应电流的强弱一般说应由回路中所有元件如电容量 C 、自感系数 L 、电阻值 R 等共同决定.

的附加磁通要反抗线圈中磁通的增加. 在磁棒从线圈中抽出的过程中, 通过线圈的磁通不断减少, 实验测出这时线圈中的感应电流方向如图 6. 1. 4(b) 所示. 可以看出感应电流的磁场的方向与原磁场方向一致. 确切些说, 感应电流产生的磁通要补偿线圈中磁通的减少. 即当线圈中磁通减少时, 感应电流产生的附加磁通要反抗线圈中磁通的减少.

图 6. 1. 4 感应电流的磁场的磁力线(图中用虚线表示)方向

俄国物理学家楞次分析了大量电磁感应实验, 把上述规律概括为: 线圈中感应电流的方向, 总是使其产生的附加磁通去反抗线圈中磁通的变化. 这就是楞次定律. 由此规律可以确定感应电流的方向, 进而确定感应电动势的方向.

用楞次定律确定感应电动势方向时, 可按以下步骤进行: 第一步判明原来磁场的方向以及穿过线圈的磁通的变化趋势(增或减); 第二步根据楞次定律确定感应电流产生的附加磁通的方向; 最后根据右手定则由附加磁通方向定出感应电流的方向, 亦就是感应电动势的方向. (如果线圈不闭合, 仍可设想它闭合由上述办法来定出感应电动势的方向, 因为感应电动势的方向与线圈是否

闭合无关.)

现在我们来研究线圈与磁场有相对运动而引起的电磁感应现象中的机械作用, 这样我们可以得到楞次定律的另一表述, 且可看出楞次定律与能量守恒定律的一致性.

还是以图 6. 1. 4 所示的磁棒插入线圈的实验为例. 在磁棒插入过程中, 线圈中感应电流的附加磁场对磁棒要有作用力. 由楞次定律定出的附加磁场的方向向上, 根据磁极在磁场中受力的规律, 或者把有感应电流的线圈看成另一磁棒, 如图 6. 1. 4(a) 所示, 再由磁极间相互作用力的规律, 都不难得出结论: 感应电流的机械作用是反抗磁棒的插入. 同理, 在磁棒从线圈中抽出时, 不难分析出磁棒与线圈相互吸引, 如图 6. 1. 4(b) 所示, 即感应电流的机械作用是反抗磁棒的抽出. 对其它的因磁场与导体有相对运动而引起的电磁感应现象, 结论亦相同. 这样, 归纳起来, 可得楞次定律的另一表述: 感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因. 这里所说的“效果”, 既可以理解为感应电流产生的附加磁通, 又可理解为感应电流引起的机械作用. 同样, 这里所说的“原因”, 既可指原磁通的变化, 也可指引起磁通变化的相对运动或回路形状改变等其它情况.

应该指出, 在有些只要定性判断感应电流引起的机械作用的场合, 用楞次定律的后一表述更为方便. 这点以后将会逐渐认识到.

用能量守恒和转化定律来分析电磁感应现象, 就可发现感应电流取楞次定律所述方向并非偶然. 如前所述, 当闭合导体回路的磁通量发生变化时, 回路中要出现感应电流, 这电流在回路中要产生焦耳热. 由能量守恒和转化定律, 这部分热量只能从其它形式能

实际上这是指线圈与产生磁场的场源如磁铁或载流导线等有相对运动的情况, 正文中是一种简化的说法.

量转化而来. 在演示实验一中, 由楞次定律, 在磁棒插入线圈或从中抽出的过程中, 外力必须反抗电磁斥力或引力做功. 正是通过外力做功的方式, 把外界其它形式的能量转化为线圈中的电能, 然后再转化为焦耳热. 假如感应电流的方向与楞次定律所定的方向相反, 那么磁棒在插入过程中将受到吸引力, 在抽出过程将受到排斥力, 这样磁棒运动过程中电磁力将对它做功, 而线圈中又产生焦耳热, 这显然违背能量守恒与转化定律. 因此, 感应电流的方向遵守楞次定律是能量守恒的必然结果.

3. 电磁感应定律

现在我们要把感应电动势的大小与方向用一个统一的式子来表述. 这无论对于电路计算以及进一步研究电磁理论都是必要的.

我们已经知道 $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$

这儿 \mathcal{E} 与 Φ 都是代数量, 它们可取“+”或“-”. 对于给定的回路, 感应电动势的方向只有两种可能: 沿着回路某一绕行方向或反之. 这样我们就可用感应电动势 \mathcal{E} 值的正或负来表示它的方向, 即任意选定一个绕行方向作为回路的正方向, 当回路中感应电动势的实际方向与回路正方向一致时 \mathcal{E} 取正值, 感应电动势实际方向与回路正方向相反时 \mathcal{E} 取负值. 同理, 对于磁通量, 我们规定让右手四指弯曲指尖顺着选定的回路正绕行方向, 姆指竖起的指向作为穿过回路所包面积的通量的正方向(即回路正方向与通量正方向构成右手螺旋关系, 见图 6. 1. 5), 当磁力线顺着通量正方向穿过回路时, Φ 取正值, 反之取负值.

仅就电磁感应定律本身, 人们可以有两种选择, 即让回路与通量的正方向符合右手或左手螺旋关系(以后简称右手或左手关系). 考虑到电磁感应定律往往要与其它电磁基本规律(如安培环路定律)联用, 这就要求保持有关电磁场基本方程中正方向规定的一致性, 这样选用右手关系比较合适. 这在学完本篇最末一章麦克斯韦方程组内容后会更清楚.

有了上述规定, 按照楞次定律, E 与 $\frac{d}{dt}$ 的正负号之间该有怎样的关系? 我们以图 6. 1. 6 所示的两种情形为例讨论. 选回路正方向如图 6. 1. 5, 则对应的通量正方向由右手定出如图示. 在图 6. 1. 6(a) 情形, $\Phi > 0$, 且随磁棒接近回路磁通在增加, 即 $\frac{d\Phi}{dt} > 0$. 由楞次定律知这时回路中感应电动势方向应如图(a)所示, 与回路正方向相反, 感应电动势应取负值, 即 $E < 0$. E 与 $\frac{d\Phi}{dt}$ 值的正负符号相反. 对(b)情形, $\Phi < 0$, 随着 S 极的接近, 回路磁通量的绝对值在增加, 所以 $\frac{d\Phi}{dt} < 0$. 同样由楞次定律可知这时回路中感应电动势的方向与回路正方向一致, 即感应电动势应取正值, $E > 0$. E 与 $\frac{d\Phi}{dt}$ 的正负符号仍是相反.

图 6. 1. 5 回路正向与通量
正向构成右手螺旋关系

图 6. 1. 6 感应电动势实际方向与
回路正方向的关系

对于其它电磁感应现象有相同的结论. 因此在右手关系的规定下, 综合感应电动势大小和方向的规律, 电磁感应定律的数学表

达式应写成:

$$E = - K \frac{d}{dt}$$

式中 K 为比例系数, 其值取决于式中各量选用的单位. 在国际单位制中, 时间单位为秒, 电动势单位为伏特, 令 $K = 1$, 这样定出的磁通量的单位叫韦伯(Wb). 即如果回路中磁通量每秒钟改变 1 韦伯, 实验测出这时回路中的感应电动势为 1 伏特. 于是法拉第电磁感应定律可写成

$$E = - \frac{d}{dt} \quad (6.1.1)$$

这就是包含 E 的大小和方向的电磁感应定律的 SI 表达式.

一般地说, 回路可以是多匝线圈. 这样, 当通过线圈的磁通量发生变化时, 各匝都将出现感应电动势. 由于线圈中各匝间是串联的, 所以整个线圈总的感应电动势应等于各匝中感应电动势之和.

设线圈有 N 匝, 用 E_1, E_2, \dots, E_N 分别表示第一匝、第二匝、... 第 N 匝的感应电动势, $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$ 分别表示各匝的磁通量, 则总的感应电动势 E 应为

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$$

分别对各匝用电磁感应定律, 可得

$$\begin{aligned} E &= - \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt} - \dots - \frac{d\Phi_N}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} (\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N) \end{aligned}$$

或写成
$$E = - \frac{d}{dt} \quad (6.1.2)$$

式中 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_N$

称为全磁通或磁通链数.

有一种实用上常见的情形是通过线圈各匝的磁通量相等均为 Φ , 则

$$= N$$

线圈的总感应电动势为

$$E = - \frac{d}{dt}(N \quad) \quad (6.1.3)$$

例 1 一长方形导线回路, 由开口线框及活动边 ab 组成. ab 边长 $l = 0.2\text{m}$. 放在一均匀磁场中, 磁场方向如图 6.1.7 所示, $B = 0.15\text{Wb/m}^2$. 现 ab 边以速度 $v = 3\text{m/s}$ 向右平移, 求回路 $abcd$ 中的感应电动势.

图 6.1.7 开口线框与活动边 ab 组成的回路

解 设回路正方向为沿 $abcd$ 绕向如图中虚线所示方向, 则由右手关系可定出 的正向为从纸面指向读者方向. 那么在图示位置, 穿过回路的磁通量与规定的正方向相反, 应为负值, 其值为

$$= - Blx$$

式中 x 是 ab 边与 cd 边的距离. 由电磁感应定律

$$\begin{aligned} E &= - \frac{d}{dt} = - \frac{d}{dt}(- Blx) = Bl \frac{dx}{dt} = Blv \\ &= 0.15 \times 0.2 \times 3 = 0.09\text{V} \end{aligned}$$

$E > 0$ 表示感应电动势方向与回路正向一致. 在活动边 ab , E 的方

向是从 a 指向 b.

如果 ab 边向左运动, 即 $\frac{dx}{dt} < 0$, 则 ab 边中 \mathcal{E} 的方向如何? 请读者自己解答.

例 2 一螺线管长 $L = 40\text{cm}$, 管直径 $d = 4\text{cm}$, 线圈匝数 $N_1 = 1000$, 通有电流 $I_1 = 2\text{A}$, 方向如图. 在螺线管中部套有线圈 2, 线圈匝数 $N_2 = 100$. 现将电流 I_1 在 $t = 0.001\text{s}$ 时间内均匀减到零, 问在这过程中线圈 2 中的感应电动势的大小及方向.

图 6.1.8 例 2 用图

解 本题中是由于 I_1 变化引起螺线管中磁场变化, 从而在线圈 2 中产生感应电动势的.

由右手定则可知 I_1 在管中产生的磁通 方向如图所示, 选择线圈 2 的回路正向如图中虚线所示, 则由右手关系可得 的正向与实际磁通的方向一致, 所以穿过线圈 2 的磁通量为正值, 其值为

$$\begin{aligned} N_2 &= N_2 B \frac{d^2}{4} = N_2 \mu \frac{N_1}{L} I_1 \frac{d^2}{4} \\ &= \frac{\mu N_1 N_2 d^2}{4L} I_1 \end{aligned}$$

由电磁感应定律

$$\mathcal{E}_2 = - \frac{d}{dt} (N_2) = - \frac{\mu N_1 N_2 d^2}{4L} \frac{dI_1}{dt}$$

由题意知 $\frac{dI_1}{dt} = \frac{0-2}{0.001} = -2 \times 10^3 \text{ A/s}$, 与其它已知量一起代入上式

$$E_2 = \frac{4 \times 10^{-7} \times \times 10^3 \times 10^2 \times 4^2 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^3}{4 \times 0.4} \\ = 0.789 \text{ V}$$

$E_2 > 0$, 表示线圈 2 中实际 E 方向与回路正向一致.

当然亦可另选回路正方向, 但算出的结果应与上面一致. (感应电动势的大小及方向是一个客观的物理事实, 它不因回路正向的选择这一主观因素而改变.) 建议读者可试作一下.

从上面两个例题可以看出有了电磁感应定律, 我们只要设回路正方向, 由右手关系定出 Φ 的正方向, 然后用 $E = -\frac{d\Phi}{dt}$ 这一式子来计算, 最后得出的结果中 E 的大小方向都包含在内了. 因为在电磁感应定律中已包括了楞次定律的内容, 所以, 不必再由楞次定律去定 E 的方向. 在这两个简单例题中这一方法的优点还不太明显, 在以后学到较复杂的问题如交流电路计算后就可进一步体会到它的优点. 这儿请读者不妨考虑一下如果例 2 中给出的 I_1 是随时间变化的函数, 要求 E_2 各时刻的方向 (一般是随时间变化的), 不用电磁感应定律表达式你将怎么办?

§ 6.2 电磁感应的应用

电磁感应的应用是多方面的, 这里介绍比较典型的三个方面的应用.

6.2.1 交流发电机的简化原理

交流发电机就是根据电磁感应原理制成的机器, 它能把机械能直接转化为电能.

图 6.2.1 是发电机的简化原理图. 图中 abcd 是一个绕 N 匝的矩形线圈, 它可以绕固定转轴 oo 在均匀磁场中转动. 当线圈转

图 6.2.1 发电机简化原理图

动时, 通过线圈的磁通量不断变化, 在线圈中产生感应电动势. 线圈的两引线端 1、2 分别与两个金属滑环焊接, 滑环与线圈一起转动, 并通过电刷与外电路相连构成闭合回路, 这样感应电动势在回路中引起电流, 例如可使灯泡发光.

根据电磁感应定律不难算出线圈中的感应电动势. 设均匀磁场的磁感强度为 B, 线圈的面积为 S, 其匀速转动的转速为 f. 选 abcd 绕行方向作为回路的正方向, 则由右手关系不难确定磁通的正方向. 对平面线圈, 我们可确定线圈平面的正法线方向 n, 如图 6.2.2 所示(这是侧视图). 线圈在任意位置的磁通量为

$$\Phi = BS \cos \theta$$

式中 θ 为 n 与 B 的夹角. 在 $\theta = 0$ 即如图 6.2.2(a) 所示位置开始计时, 则在任一时刻 t

$$\theta = 2\pi f t$$

所以 $\Phi = BS \cos 2\pi f t$

这是 Φ 与 t 的关系式. 由电磁感应定律

图 6.2.2 在磁场中的转动线圈

$$\begin{aligned} E &= - N \frac{d\Phi}{dt} = NBS 2\pi f \sin 2\pi f t \\ &= E_m \sin 2\pi f t \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

式中 $E_m = 2\pi f NBS$ 是电动势的最大值. 这样我们就得到了 E 与 t 的关系式, 用曲线表示, 如图 6.2.3 所示. 可以看到, 不仅 E 的大小, 而且 E 值的正负隔一定时间亦要改变, 即 E 的方向每隔一定时间要发生变化. 这种大小和方向都在变化, 且随时间变化的规律

图 6.2.3 交变电动势

可用正弦(或余弦)函数表示的电动势称为交变电动势, 简称交流电. 式(6.2.1)中 f 称为交流电的频率. 我国各电厂发出的交流电

的频率是每秒 50 周.

当上述转动的线圈和外电路接通出现感应电流时, 这个载流线圈在磁场中将受到安培力的作用. 不难分析, 安培力的力矩将阻碍线圈的转动. 为了保持线圈在磁场中匀速转动, 需要外界对线圈做功. 这在工程上一般是通过动力机(如汽轮机、水轮机等)来实现的. 在动力机带动发电机转动过程中动力机将对它做功. 所以从能量观点看, 发电机是把机械能转化为电能的装置.

上面讨论的只是交流发电机的简化模型. 实际发电机在结构上要比它复杂. 但基本原理还是电磁感应定律.

6. 2. 2 涡电流

在许多电磁设备中常常有大块的金属存在(如电机和变压器的铁芯), 当这些成块的金属处在变化的磁场中或相对于磁场运动时, 金属内部也会出现感应电流.

如图 6. 2. 5 所示, 一个圆柱形金属块处在载流线圈产生的交变磁场中. 我们可以把金属圆柱看成是由一层层半径不同的薄圆筒组成, 每一层圆筒相当于一个闭合回路. 这些回路在图示的交变磁场中, 通过它们的磁通量都在不断变化, 所以在每一层金属圆筒中将出现感应电动势, 并在回路中形成感应电流. 从圆柱形金属上端俯视, 电流的流线呈涡旋状, 所以把这种感应电流叫做涡电流, 简称涡流.

实际发电机由于工程上的考虑, 线圈是固定的(即所谓定子), 磁场在转动, 且磁场由通电的电磁铁(转子)产生, 如图 6. 2. 4 所示. 转子转动后线圈切割磁力线, 线圈中感应电动势的“波形”(即 $E-t$ 曲线)与转子和定子间的气隙中磁场强弱沿圆周的空间分布曲线相似. 由于正弦波形电动势的一系列优点(如它是最基本的波形, 其它形式的波形可由它叠加而成; 易变压, 且变压后波形不变等), 工程上设计时总是使磁场沿气隙圆周在空间上尽可能接近正弦分布, 且通过定子中空间各处线圈的合适连接, 以保证电动势波形的正弦性. 所以请读者不要从正文的交流发电机简化原理中误以为交变电压取正弦波形是偶然的.

图 6.2.4 实际发电机的简化剖面图

图 6.2.5 金属内的涡电流

由于大块金属的电阻很小, 所以涡电流的强度(指各层合强度)可相当大, 它在金属内会放出大量的焦耳热; 另外涡流在磁场中还将受到安培力, 即所谓涡流的机械效应. 下面我们分别介绍涡流的热效应及机械效应的应用, 以及在有些场合如何限制它.

工业上利用涡流的热效应, 可制成各种类型的感应电炉, 图 6.2.6 是它的构造示意图. 当坩锅外的线圈通以高频交流电时, 放在锅内的金属块便处于交变磁场中, 金属块内因电磁感应产生涡流释放大量焦耳热, 而使自身熔化. 这种加热和冶炼方法有独特的优点, 热量不是从外面传进去, 而是在金属内部各处同时加热, 因

图 6.2.6 感应电炉示意图

此加热效率高. 必要时还可以把要冶炼的金属放在真空中, 以避免高温下金属在空气中被氧化. 在冶金工业中, 常用感应加热的方法熔化活泼或难熔金属以及冶炼特殊合金. 此外, 在制造电子管时, 为了排除管内金属电极上吸附的气体, 也常应用感应加热的方法隔着玻璃壳使电极升温以使吸附的气体放出, 同时对管抽气, 就可以把电极上吸附的气体除去.

但是在某些场合, 涡流的热效应是有害的. 例如, 变压器或电机的铁芯在交变磁场中会产生涡流而发热. 这不仅浪费大量电能而且因温度升高可能导致邻近的绝缘材料绝缘性的破坏, 在这些情形就要尽量减少涡流发热. 一般采用以下两个措施: 一、选用电阻率较高的磁性材料(如硅钢或铁氧体等)做变压器或电机的铁芯, 以减少涡流; 二、用片状的表面绝缘的硅钢片迭合起来代替整块的铁芯, 并使片与磁力线平行, 如图 6. 2. 7(b) 所示. 由于涡流被限制在各薄片内, 涡流回路的电阻远较整块铁芯的电阻大, 这样可使涡流减少因而发热大大减少. 图 6. 2. 7 是块状与片状铁芯中涡流的示意图.

(a)

(b)

图 6. 2. 7 块状与片状铁芯中的涡流

如前所述, 涡流在磁场中将受到安培力, 这就引起涡流的机械效应. 由楞次定律可知, 涡流所受的力总是要反抗载(涡)流物体与磁场的相对运动. 利用这一点可让涡流起阻尼作用. 例如把一铜片悬挂在电磁铁的两极间, 如图 6. 2. 8 所示. 在电磁铁的线圈未通电时, 铜片可自由摆动. 当电磁铁线圈一通电, 摆动的铜片会很快停止摆动, 这是由于铜片中涡流在磁场中所受的力要阻止铜片与电磁铁的相对运动的缘故. 涡流的这种阻尼作用称为电磁阻尼. 利用涡流的这种效应可以制成各种电磁阻尼器. 如在电表常利用电磁阻尼使线圈较快地停止摆动, 以利读数. 电气火车中所用的电磁制动器也是根据同样道理制成的.

图 6. 2. 8 涡流的阻尼作用

阻尼作用是涡流机械效应的表现之一, 它的另一种表现是电磁驱动. 例如把一个马蹄形磁铁放在靠近金属圆盘处(但不接触), 如图 6. 2. 9 所示. 磁铁与圆盘都可绕各自的轴旋转(两轴在同一直线上). 当磁铁旋转时, 金属盘中产生涡流, 由楞次定律可知, 这涡流所受的安培力将反抗圆盘与磁铁的相对运动, 因而圆盘会跟着

磁铁转动起来, 这就是电磁驱动. 由于电磁驱动是电磁感应引起的, 所以金属圆盘的转速总是小于磁铁的转速, 或者说两者的转动是异步的. 异步电动机就是根据这个道理制成的.

6. 2. 3 测量磁通

测量磁感强度 B 的一种方法是先测出磁通量 Φ , 然后根据 Φ 与 B 的关系算出 B 的大小. 下面说明利用电磁感应测量磁通量的原理.

图 6. 2. 9 电磁驱动的演示

如图 6. 2. 10 所示装置, 当开关 K 合下时, 环形螺线管中穿过截面的磁通在时间 T 内由 0 增至 Φ , 这将在线圈 2 中引起感应电动势. 若线圈 2 绕有 N 匝, 则感应电动势的大小为

$$E = N \frac{d\Phi}{dt}$$

线圈 2 的回路中的感应电流为

$$i = \frac{E}{R} = \frac{N}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

式中 R 为线圈 2 和冲击电流计组成的回路的总电阻. 冲击电流计是一种测量冲击电量的电表; 用它可以测出在短时间内由于感应电流而通过电流计的电量 Q . 下面我们就来找 Q 与 Φ 的关系. 由上式可得

图 6. 2. 10 冲击法测磁场的装置

$$d = \frac{R}{N} dt$$

对等式两边积分

$$\int_0^T d = \frac{R}{N} \int_0^T i dt$$

$$\text{即} \quad = \frac{R}{N} Q$$

由冲击电流计的读数可知 Q 的值, 所以上式等号右边诸量都可
知, 这样就可算出 $\int_0^T i dt$, 再由 $B = \frac{\Phi}{S}$ 求出磁感强度 B . 这种测磁通
的办法叫冲击法.

§ 6.3 动生电动势

在前面讨论电磁感应定律时, 我们并没有去区分引起电磁感
应现象的不同方式(例如是线圈在磁场中运动, 还是磁场变化等),
因为它们产生感应电动势的规律是一样的. 现在要对不同起因的
电磁感应现象分别加以研究, 以便对电磁感应有进一步的认识.

人们对大量电磁感应现象加以分析, 发现都可归于两种基本
类型: 一类是在恒定磁场中运动的导体内产生的感应电动势, 称
为动生电动势. 这就是本节所要讨论的. 另一类是导体不动, 因磁
场随时间变化而产生的感应电动势, 称为感生电动势. 这部分放到
下节去讨论.

6.3.1 动生电动势的量值、方向

设有一段导线 ab , 长度为 l , 在磁感强度为 B 的匀强磁场中
以速度 v 向右运动, B 、 l 、 v 三者互相垂直, 如图 6.3.1 所示. 该

在变化磁场中运动导体的电磁感应可看成由这两种基本类型组成.

导线与开口导线框构成闭合回路 $abcd$ ，对此回路用电磁感应定律就不难得到回路的电动势。由于开口导线框并未运动，所以其中无动生电动势，这样闭合回路的电动势亦就是导线 ab 中的电动势。在图 6.3.1 所示位置，穿过回路的磁通量为

图 6.3.1 直导线在均匀磁场中运动

$$\begin{aligned} &= BS = Blx \\ \text{而} \quad E &= \left| \frac{d}{dt} \right| = \left| \frac{d}{dt} (Blx) \right| \\ &= Bl \left| \frac{dx}{dt} \right| \\ &= Blv \end{aligned}$$

这就是运动导线中动生电动势的量值。可以看出，动生电动势量值上等于导线在单位时间内切割的磁力线数，或者说等于导线在单位时间内扫过面积的磁通量。

导线内电动势的方向：由 $E = - \frac{d}{dt}$ 或楞次定律不难判断出（建议读者自做） E 在回路中沿逆时针方向，在 ab 段是从 b 指向 a 的，即 $\times B$ 的方向。于是我们得到了一段直导线在均匀磁场中平移，且 B 、 l 、 v 三者互相垂直时导线中的动生电动势的量值及方向。既然导线中有电动势，所以运动着的导线 ab 相当于一个电源，注意到电源内电动势方向是从低电势指向高电势的，那么 a 端电势高，相当于电源的正极， b 端电势低，相当于电源的负极。

6.3.2 动生电动势的本质

导体在磁场中运动而产生的动生电动势，亦可以用金属电子

理论解释. 如图 6. 3. 2 所示, 当导线 ab 以速度 v 往右运动时, 导线内的每一个自由电子被带动也就有定向速度 v , 这样, 每个自由电子在磁场中将受到洛伦兹力

$$f_m = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

其大小为 $f_m = evB$

方向沿导线从 a 指向 b , 如图 6. 3. 2

所示, 式中 e 为电子电量的绝对值.

自由电子在洛伦兹力的作用下将不断沿导线从 a 端移向 b 端, 于是在

a 端将出现正电荷, b 端出现负电荷. 这些电荷在导线内产生的电场

E 方向从 a 指向 b , 于是电子又受到

电场力 $f_e = -eE$, 方向从 b 指向

a , 与 f_m 反向, 如图 6. 3. 2 所示. 只

要 $f_e < f_m$, 自由电子将继续从 a 移

至 b , 但随着 a 端及 b 端带电量的增加, f_e 将增加, 到平衡时这两个力应相等, 即

$$eE = evB$$

这时导线内各处静电场场强为 $E = vB$, ab 两端的电势差

$U_a - U_b = El = vBl$, 导线 ab 相当于一个电源, a 端为正极, b 端为负极, 且它是开路的, 所以 ab 两端的电势差就等于导线的电动势, 即

$$E = U_a - U_b = vBl \quad (6.3.1)$$

电动势的方向由 b 指向 a , 与 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向一致. 这一结果与前面由电磁感应定律算出的结果完全一致. 这表明在恒定磁场中运动的导体中的感应电动势是由洛伦兹力引起的. 洛伦兹力起着分离正负电荷, 让电子克服静电力从低电势能处移到高电势能处, 以维持一定电势差的作用. 这里洛伦兹力就是电源中的非静电力. 我们亦可从电动势的定义, 直接得出上述结果. 由电动势的定义可知

$$E = \frac{dA_{\text{非}}}{dq} = \int_L E_k \cdot dl \quad (6.3.2)$$

式中 E_k 是与非静电力相联系的场强, 积分路径 L 应沿电源内从负极到正极. 对上述 v 、 B 、 l 三者互相垂直的情形, 导线内 E_k 处处一样

$$E_k = vB$$

且 $E_k \perp l$, 故上式化为

$$E = vBl$$

与(6.3.1)式相同. 对普遍的情形, 如果导线非直线, 各线段元 dl 运动速度不一, 磁场亦不均匀等, 这时

$$E_k = v \times B$$

动生电动势应该由下式计算

$$E = \int_L (v \times B) \cdot dl \quad (6.3.3)$$

式中 v 和 B 是导线上任一线段元 dl 所在处的速度和磁感强度, 积分路径沿导线.

例 1 长度为 L 的金属棒, 在磁感强度为 B 的均匀磁场中匀速转动. 其转轴 O 在棒的一端且与棒垂直, 转动角速度为 ω , ω 的方向与 B 的方向一致, 如图 6.3.3 所示. 求棒内的动生电动势.

解 现在棒内各段的线速度不同, 需分段考虑, 然后积分求和. 在金属棒上以 O 为原点沿棒方向建立坐标轴 r 如图.

图 6.3.3 例 1 用图

任取一段 dr , 其线速度为 v , dr 线元离轴 O 的距离为 r , 则 $v = \omega r$, v 的方向如图所示. v 、 dr 、 B 三者互相垂直. 由(6.3.3)式可知这段导

线元内的动生电动势为

$$dE = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与 $d\mathbf{r}$ 方向一致,

$$dE = Bvdr = B r dr$$

整个金属棒内的动生电动势 E 为

$$E = \int_0^L B r dr = \frac{1}{2} B L^2$$

E 的方向与坐标轴 r 的正方向一致, 即从 O 指向 a .

例 2 一金属杆 ab 长为 L , 质量为 m , 沿两条光滑的倾斜的平行金属导轨向下滑动, 两条导轨所在平面与水平面的夹角为 θ , 两导轨的低端通过电阻 R 相连, 如图 6.3.4 所示. R 值远大于杆及导轨的电阻值. 整个装置放在均匀磁场中, 其磁感强度 B 方向铅垂向下. 金属杆从静止开始下滑, 求经过时间 t 达到的速度.

解 金属杆在磁场中下滑时杆内将出现动生电动势, 闭合回路 $abcd$ 中将有电流, 这样载流金属杆 ab 就会受到安培力. 杆下滑过程某时刻所受的重力、安培力以及导轨的支承力将决定杆的加速度, 知道了加速度及初始运动状态, 就可求出任一时刻的速度.

设金属杆在下滑过程某时刻具有的速度为 v , 则杆中的动生电动势为

$$E = BLv \cos \theta$$

由闭合电路欧姆定律, $abcd$ 回路中的电流为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{BLv \cos \theta}{R}$$

杆上所受安培力 f 的大小为

$$f = ILB = \frac{B^2 L^2 v \cos \theta}{R}$$

方向水平向右, 如图 6.3.5 所示. 光滑导轨的支承力 N 垂直斜面, 因此作用于杆上沿导轨向下方向的合力为

$$mg \sin \theta - f \cos \theta$$

图 6.3.4 例 2 用图

图 6.3.5 金属杆的受力图

由牛顿第二定律

$$mg \sin \alpha - \frac{B^2 L^2 \cos^2 \alpha}{R} v = m \frac{dv}{dt}$$

即

$$g \sin \alpha = \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 L^2 \cos^2 \alpha}{mR} v$$

令 $K = \frac{B^2 L^2 \cos^2 \alpha}{mR}$, 这是与时间无关的量, 上式可写成

$$\frac{dv}{dt} + K v = g \sin \alpha$$

其解为

$$v = \frac{g \sin \alpha}{K} + C_1 e^{-Kt}$$

由初始条件 $t = 0$ 时 $v = 0$, 得

$$C_1 = - \frac{g \sin \alpha}{K}$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} v &= \frac{g \sin \alpha}{K} (1 - e^{-Kt}) \\ &= \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 L^2 \cos^2 \alpha} \left(1 - e^{-\frac{B^2 L^2 \cos^2 \alpha}{mR} t} \right) \end{aligned}$$

这就是杆从静止开始, 下滑了时间 t 时具有的速度.

由上面的解可以看出, 随着时间增加, 杆下滑速度变快, 等到足够长的时间后($t \rightarrow \infty$), 杆速趋于稳定值, 速度不再增加, 所以这稳定值亦是最大值. 由前式可得

$$v_{\max} = \frac{mgR \sin \theta}{B^2 L^2 \cos^2 \theta}$$

6.3.3 能量关系

现在来分析由于出现动生电动势而在回路中引起感应电流后的能量转换情况. 还是以在匀强磁场中平移的直导线与一固定的开口导体框架构成闭合回路为例来讨论. 如图 6.3.6 所示, ab 段导线在外力作用下在磁场中向右运动, 其中将出现动生电动势. 在闭合回路中引起感应电流 I_i 后, ab 段导线在磁场中受到安培力 F 的作用, 其方向如图示, 大小为

$$F = B I_i l$$

要维持导线 ab 向右匀速运动, ab 上加的外力 $F_{\text{外}}$ 必须恰能克服安培力而作正功. 外力的功率

$$p_{\text{外}} = F_{\text{外}} v = B I_i l v$$

而运动导线 ab (电源) 提供的电动率为

图 6.3.6 运动导线 ab 所受的安培力

图 6.3.7 直导线在安培力作用下运动

$$p_{\text{电}} = EI_i = BlvI_i$$

可以看到两者相等,这说明电源在回路中提供的电能是由外界提供的机械能转换而来.实际上这就是发电机的工作原理.要使发电机不断输出电能,外界就得不断提供机械能,汽轮机或水轮机等动力机械就起着提供机械能的作用.

如果回路中另有电源维持电流,则安培力的作用使 ab 段导线向右运动,如图 6.3.7 所示,请读者自己分析其能量转换关系.不难看出,这实际上就是电动机的工作原理.

6.3.4 关于洛伦兹力是否对运动电荷作功的问题

我们知道,运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力恒与电荷的运动方向垂直,所以洛伦兹力对运动电荷是不作功的.但从前面的讨论可以看到作为洛伦兹力的宏观表现的安培力却可以作功.还有动生电动势在闭合电路中激起电流时,与动生电动势相应的非静电力——洛伦兹力将对运动电荷作功.那末洛伦兹力对运动电荷究竟作不作功?为获得正确的结论,有必要对图 6.3.6 中导线 ab 内电子的运动情况以及相应的洛伦兹力作比较仔细的分析.

图 6.3.8(a) (即图 6.3.6) 中运动导线 ab 段中有电流 I , 因此 ab 段导线中的电子除了有与导线一起运动的速度 v 外,还有相对于导线的自 a 向 b 方向运动的速度 u (漂移速度),电子运动的合速度为 $v_{\text{合}}$, 与 v 成 θ 角,如图 6.3.8(b) 所示.这样电子实际上所受的洛伦兹力 f 将与 $v_{\text{合}}$ 垂直,方向如图 6.3.8(b) 所示.即

$$f = -e(u + v) \times B$$

将洛伦兹力 f 分解成与导线 ab 平行的分量 f_{\parallel} 以及与导线 ab 垂直的分量 f_{\perp} , 则

这里都是指电子的整体或定向运动速度,而没有去考虑电子的热运动速度.由于热运动速度的不规则性,对大量电子来说,由它引起的洛伦兹力的总和必为零.

图 6.3.8 考虑电子的漂移速度后, 电子所受的洛伦兹力的方向

$$\mathbf{f} = \mathbf{f} + \mathbf{f}$$

计算洛伦兹力对一个电子的功率

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_{\text{合}} &= (\mathbf{f} + \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\text{而 } \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = f \cos \theta \sin \theta = f v \sin \theta \cos \theta$$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -f v = -f \sin \theta \cos \theta = -f v \sin \theta \cos \theta$$

可以看出, 两者绝对值相等, 一正一负, 故总功率为零. 即洛伦兹力并未对运动电子做功.

以上分析的是一个电子的情况, 再进一步计算对 ab 段导线中所有自由电子的功率, 问题也许会更清楚些. 同样分析考虑 \mathbf{f} 与 \mathbf{f} 的功率, 注意到 ab 段导线中共有的自由电子数为 nSl (n 为导体单位体积中的自由电子数, S 为导线截面积), 则

$$\begin{aligned} N &= nSl \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} = nSl \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ &= nSl \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = I \mathbf{E} \cdot \mathbf{l} \end{aligned}$$

此即动生电动势提供的功率. 而

$$\begin{aligned} N &= -nSl \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -nSl \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \\ &= -nSl \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = -I \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} = -F_{\text{安}} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

此即安培力的功率. 可以看出

$$N + N = 0$$

二者功的总和即洛伦兹力的功恒为零. 可见安培力作功及动生电动势的非静电力做功与洛伦兹力不作功并不矛盾. 值得提出的是, 从前面的讨论可以看到洛伦兹力虽然对运动电荷不作功, 但它在能量转化中起了重要的中介作用.

上面讨论的是发电机工作状态, 我们得到 $N > 0$, $N < 0$ 的结果. 请读者思考对电动机工作状态这两个功率哪个是正值, 哪个是负值? 试比较之.

§ 6.4 感生电动势

本节讨论另一类电磁感应现象, 即导体不动, 因空间磁场随时间变化而引起的感应电动势——感生电动势. 对于因导体相对磁场运动而引起的动生电动势, 其非静电力来源于洛伦兹力. 现在导体不动, 与感生电动势相联系的非静电力显然不可能是洛伦兹力. 那么这是一种什么力呢?

6.4.1 感应电场(涡旋电场)

麦克斯韦分析了这一类电磁感应现象, 作出假设, 其实质是变化的磁场总要在空间激发感应电场, 而不管有无导体存在. 导体的存在出现感应电流只是使感应电场的作用表现出来而已. 即变化磁场要激发电场这一客观事实不因空间有无导体存在而改变.

应该注意, 法拉第建立的电磁感应定律是对一个回路而言的,

麦克斯韦当时采用的是以太的模型. 真空中亦有以太, 变化磁场在以太中激发电场. 详见“ A Dynamical Theory of The Electromagnetic Field ” Part 1. Introductory 由 Royal Society Transaction, Vol. CLV (Received October 27, 1864).

而上述麦克斯韦的假设并无此限制；即认为不论空间有无导体，有无回路，不论是在真空或介质中它都是适用的。这一假设（包括其推论）为无数事实所证实而被公认为是反映客观规律的理论。

根据电磁感应规律，可以建立感应电场与变化的磁场间的定量关系。对闭合回路，由电动势定义可知回路中的感生电动势 \mathcal{E} 应为

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l}$$

式中 $\mathbf{E}_{\text{感}}$ 表示感应电场强度。由电磁感应定律

$$\mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \Phi = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 S 是以闭合回路 L 为边界的曲面。于是

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.4.1)$$

由于回路不动，磁通量的变化完全由磁场随时间变化引起，所以 (6.4.1) 或可改写为

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.4.2)$$

式中 L 应理解为空间的任意闭合曲线（相对于观察者是静止的），上式就是感应电场与变化磁场的定量关系式。由此可以看出根据麦克斯韦感应电场假说感应电场的环流不等于零，与静电场不同，感应电场不是保守力场。它的力线是一些无头无尾的闭合曲线，所以感应电场又称为有旋或涡旋电场。

麦克斯韦将上述关系作为电磁场的基本方程之一，即将它推

这里要用到关于感应电场性质的假设

$$\oint_S \mathbf{E}_{\text{感}} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

广, 对任何电磁场都有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.4.3)$$

式中等号右边“-”号的出现也是由于闭合曲线 L 的正环向与 S 面上通量的正向采用右手关系而引起的. 对恒定磁场, 则上式等号右边为零, 于是

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

这时电场无感应的成分, \mathbf{E} 即静电场的场强. 因此可把静电场的环路定理看成是(6.4.3)式的一个特例.

一般说来, 已知空间各点 \mathbf{B} 随时间的变化关系, 要求空间各点的 $\mathbf{E}_{\text{感}}$ 在数学上是比较麻烦的, 但是少数具有对称性的简单情况是例外. 下面举一个例.

例 在亥姆霍兹线圈中心轴线上放一个半径 $r = 0.01\text{m}$ 的小线圈, 如图 6.4.1 所示, 在小线圈附近的磁场可认为均匀. 现在亥姆霍兹线圈中通以 50Hz 的交变电流, 在小线圈中心处 \mathbf{B} 的最大值是 $B_m = 5 \times 10^{-2}\text{T}$. 试求小线圈处的感应电场强度.

图 6.4.1 例图

解 小线圈所在处的磁场与时间的关系是

$$B = B_m \sin(2\pi \times 50t) = B_m \sin 314t$$

由(6.4.3)式

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

现 L 为沿小线圈的圆形曲线, 选正绕向如图所示, S 为小线圈所包围的面积, 则

$$\frac{dB}{dt} = 314 B_m \cos 314t$$

考虑到小线圈与轴的对称性, 圆形闭合曲线 L 各处 E_l 相等, 这样 (6.4.3) 式就可写成

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E}_l \cdot d\mathbf{l} &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\ E_l \cdot 2\pi r &= - \frac{d}{dt} (B_m \cos 314t \cdot \pi r^2) \\ E_l &= - \frac{1}{2} r \frac{dB}{dt} \cos 314t \\ &= - \frac{1}{2} \times 0.01 \times 314 \times 5 \times 10^{-2} \cos 314t \\ &= - 0.0785 \cos 314t \text{ V/m} \end{aligned}$$

根据感应电场力线闭合的性质, 可知 E_l 就是 E (即感应电场强度都是沿 L 的切线方向的), 即

$$\mathbf{E}_{\text{感}} = - 0.0785 \cos 314t \text{ V/m}$$

其方向沿圆形小线圈各点的切线方向. 由于磁场是交变的, 感应电场亦是交变的. 当 $E < 0$ 时, 表示 E 的力线方向与 L 的正向相反, 如图 6.4.2 所示. 如小线圈闭合, 则此感应电场将在线圈中激起感应电流, 而感应电场强度沿 L 的线积分就等于小线圈内的感应电动势. 应该注意, 感应电场取决于空间磁场随时间的变化, 与小线圈是否存在无关, 没有小线圈, 闭合曲线 L 上的感应电场仍如前式所示.

图 6.4.2 $\mathbf{E}_{\text{感}}$ 的方向

前面我们把感应电动势分成动生的和感生的两类, 分别加以讨论. 这种分法在一定程度上只有相对的意义. 例如图 6.1.1 所示的情形, 对线圈为静止的参照系来说, 磁棒的运动引起空间磁场的

变化, 所以线圈中的感应电动势应该认为是感生的. 但对随磁棒一起运动的参照系来说, 磁棒是静止的, 空间磁场无变化, 而线圈在运动, 所以线圈中的感应电动势被认为是动生的. 即由于运动的相对性, 可能会出现这样的情况: 同一电磁感应现象, 在某个参照系内看是感生的, 在另一参照系内看, 则是动生的. 但是, 应当指出, 参照系的变换只能在一些特殊情形里消除动生和感生电动势的界限, 在普遍情况下感生电动势是不能通过参照系变换归结为动生电动势的. 也就是说感生电动势的出现揭示了变化磁场产生电场这一重要的物理本质. 从而把电场与磁场更紧密地联系在一起.

6. 4. 2 电子感应加速器

电子感应加速器是一种利用感应电场使电子加速的设备. 从原理上看, 这是一个能使我们比较直观地“感到”感应电场存在的例子. 它的主要部分构造如图 6. 4. 3 所示, 在电磁铁两极的间隙中放有一个环形的真空室, 电磁铁的线圈中通以频率为每秒几十周的强大交变电流, 使两极的磁场交替变化, 因而在环形真空室内产生很强的感应电场. 用电子枪把电子注入环形室内, 这些电子便在感应电场作用下被加速. 由于电子还受到洛伦兹力的作用, 可以提供维持圆周运动的向心力. 只要磁场分布合适, 电子将在真空室内沿圆形轨道运动, 如图 6. 4. 3(b) 所示.

在电磁铁线圈中电流变化一周的时间内, 只有 $1/4$ 周期可以用于加速电子. 为了说明这一点, 我们把磁场变化的周期分成四个相等的区间, 如图 6. 4. 4 所示. 我们规定 B 向上作为正方向, 这样由右手关系环形真空室中回路的正方向应为逆时针方向(俯视). 在第一个 $1/4$ 周期内 B 增加, $\frac{dB}{dt} > 0$. 由(6. 4. 1)式可知感应电场的方向为顺时针的, 如图 6. 4. 4 所示. 其它几个 $1/4$ 周期内的感应电场同样可分析得出, 如图中所示. 若电子注入环形室是沿逆时针

方向运动, 则只有第一或第四个 $1/4$ 周期内电子可被加速. 再考虑到维持在环形室内运动, 洛伦兹力 f_B 的方向应指向“环心”, 第四个 $1/4$ 周期 B 的方向不符合要求, 这样只有第一个 $1/4$ 周期可以利用. 在第 2 个 $1/4$ 周期以内, 电子将被减速, 因此在第一个 $1/4$ 周期末以前就应把电子引离轨道供实验用. 由于电子射入时的速度很大, 在 $1/4$ 周期内已可绕行几十万圈, 所以能获得相当高的能量. 目前, 利用电子感应加速器可把电子的能量加速到几十兆电子伏特.

应该注意, 感应加速器中电子在感应电场作用下速率在不断增加, 要维持在恒定的圆形轨道

图 6.4.3 电子感应加速器示意图

上运动, 这就要求其向心力(磁场提供的洛伦兹力)作相应的增加, 为此, 对电磁铁气隙中的磁场分布有一定要求. 下面我们来进行简单的计算.

设某瞬时电子在距环心为 R 的圆周上以速度 v 运动, 此时圆周上的磁感强度为 B_R , 电子作圆周运动的向心加速度是由洛伦兹力提供的, 切向加速度则由感应电场力产生, 如图 6.4.5 所示. 由牛顿第二定律, 列出径向分量式

$$evB_R = m \frac{v^2}{R}$$

或写成

$$ReB_R = mv \tag{6.4.4}$$

图 6.4.4 在磁场变化的周期内,
感应电场方向的变化

图 6.4.5 电子在感应加速器
中的受力图

同样, 列出切向分量式

$$eE_{\text{感}} = \frac{d(mv)}{dt} \quad (6.4.5)$$

而感应电场强度的绝对值为

$$E_{\text{感}} = \frac{1}{2R} \left| \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right| \quad (6.4.6)$$

式中 S 是圆形轨道所包围的面积. 引入 B , 令

$$B = \frac{\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{R^2}$$

很明显, B 为 S 面内磁感强度在面上的平均值. 现 (6.4.6) 式可改写为

$$E_{\text{感}} = \frac{1}{2} R \frac{dB}{dt} \quad (6.4.7)$$

将 (6.4.7) 式及 (6.4.4) 式分别代入 (6.4.5) 式两边, 可得

$$\frac{1}{2} R \frac{dB}{dt} = R \frac{dB_R}{dt}$$

即

$$\frac{dB_R}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$\text{或} \quad B_R = \frac{1}{2}B \quad (6.4.8)$$

(考虑到初始条件 $t=0$ 时 $B=0$, $B_R=0$). 要注意上式中 B 、 B_R 都是随时间在变化的, 这是各时刻都要满足的关系. 这个关系表明, 如每时每刻轨道上的磁感强度值等于轨道内磁感强度平均值的一半, 则能使电子在加速过程中维持在稳定的圆形轨道上.

电子感应加速器主要用于核物理研究. 也可用它来产生硬 X 射线供工业上探伤或医学上治疗癌症.

§ 6.5 自 感

前面讨论了电磁感应的基本规律, 下面将用电磁感应基本规律去分别研究电路中常遇到的两种电磁感应现象——自感与互感.

6.5.1 自感现象

从电磁感应定律, 我们知道不论何种原因, 穿过线圈的磁通量发生变化时, 线圈中就要出现感应电动势. 对于一个通有电流的线圈, 电流将在线圈内外产生磁场, 因而有磁通量穿过线圈自身. 那末, 当线圈中电流改变时, 这个磁通量也要变, 线圈回路中就将出现感应电动势. 这种由于线圈中电流变化而在线圈自身激起感应电动势的现象叫做自感现象, 相应的电动势称自感电动势. 由楞次定律, 可知自感电动势总是企图阻止电流的变化, 即当电流增加时, 自感电动势将阻碍电流增加; 而当电流减少时, 自感电动势将阻碍电流减少.

自感现象可以用下列实验来演示, 在图 6.5.1(a) 所示电路中, S_1 和 S_2 是两个相同的灯泡, 分别与一个线圈 L 和电阻 R 串联 (让电阻阻值与线圈 L 的阻值相同, 以使稳定后两灯泡亮度一

样). 这两个支路并联, 并通过开关 K 与电源相联. 开关 K 最初是打开的, 当 K 合下时可以看到 S_2 立刻就亮, S_1 逐渐变亮, 表明线圈 L 支路中的电流 I_1 比电阻 R 支路中的电流 I_2 增加得慢. 那是由于 I_1 增加时, L 中将产生阻碍电流增加的自感电动势的缘故. 这是电路接通时的自感现象.

图 6.5.1 自感现象的演示

用如图 6.5.1(b) 所示电路可以观察电路断开时的自感现象. 开关 K 原来是接通的, 灯泡 S 以一定的亮度发光. 选择线圈 L 的阻值较灯泡 S 的阻值小, 以使 $I_1 > I_2$. 当拉开 K 时, 可以看到灯泡 S 不是马上熄灭, 而是猛然一亮然后逐渐熄灭. 这是因为 K 断开时, 电流将减少, 在 L 的支路中将出现阻碍电流 I_1 减少的自感电动势, 所以 I_1 不能马上降为零. 由于 K 已断开, I_1 只能通过 S 支路而闭合, 因此灯泡不会马上熄灭. 又因 $I_1 > I_2$, 这就使灯泡比 K 接通时更亮. 当然由于 K 断开后两支路都与电源脱离, 流过线圈及灯泡回路的电流将逐渐减少到零, 表现为灯泡逐渐熄灭.

由此可见, 自感电动势总是要阻碍电流的变化, 这正是楞次定律所要求的.

6.5.2 自感系数

我们知道,线圈中电流所激发的磁感强度与电流强度成正比,因此,通过线圈本身的磁通链也正比于线圈中的电流强度,即

$$\Phi = LI \quad (6.5.1)$$

式中 L 为比例系数,称为线圈的自感系数或简称自感.它的量值由线圈的形状、大小、匝数以及线圈所在空间的磁介质的性质决定,与电流强度无关.(6.5.1)式是自感系数的定义式,从此式可知,自感系数 L 在数值上等于单位电流流过线圈时,通过线圈自身的磁通链.当线圈中的电流改变时, Φ 也随之改变.按电磁感应定律,线圈中的自感电动势为

$$E = - L \frac{dI}{dt} \quad (6.5.2)$$

由上式可看出,线圈的自感系数 L 在数值上也等于电流强度随时间的变化率为 1 单位时,在线圈自身产生的感应电动势.因此,对于相同的电流变化率,自感系数越大的线圈所产生的自感电动势亦越大.可见自感系数可以反映线圈自感作用的强弱.

(6.5.2)式是将 $\Phi = LI$ 代入 $E = - \frac{d\Phi}{dt}$ 而得到的.由电流产生磁场的规律可知前一式中 I 的正向与 Φ 的正向符合右手螺旋关系,而后一式中已规定了 E 的正向与 Φ 的正向要满足右手螺旋关系.由此可见(请注意!)在 $E = - L \frac{dI}{dt}$ 式中 E 的正向必须与选定

这是指不存在铁磁质的情形.如存在铁磁质,则一般说 Φ 与 I 不成正比关系(见铁磁质一章), $\Phi = \mu(I)I$. 那时我们往往用 $L = \frac{d\Phi}{dI}$ 来定义自感系数,这个 L 一般不是常数而是 I 的函数.显然,在 Φ 与 I 成正比时,两种定义是一致的,而且与后面自感电动势的表达式 $E = - L \frac{dI}{dt}$ 也一致.

的 I 的正向一致. 换句话说, 只有选定 I 的正向作为 E 的正向时, 自感电动势才能写成 $E = -L \frac{dI}{dt}$ (等式右边有“-”号). 对于有自感的电路列回路方程时必须记住这一点.

自感系数的单位, 可以由(6.5.1)式或(6.5.2)式来确定. 在国际单位制中, 自感系数的单位是亨利, 用符号 H 来表示, 由(6.5.1)式

$$1H(\text{亨}) = \frac{1Wb(\text{韦伯})}{1A(\text{安})}$$

就是说如果线圈流过 1 安培电流, 通过线圈自身的磁通链为 1 韦伯, 那么我们把这样的线圈的自感系数称为 1 亨利. 由(6.5.2)式

$$1H(\text{亨}) = \frac{1V \cdot s(\text{伏} \cdot \text{秒})}{1A(\text{安})}$$

请读者自己验证两者是一致的. 亨利简称亨, 由于此单位较大, 有时常用毫亨(mH)或微亨(μH)作自感的单位.

6.5.3 计算举例

一般线圈自感系数的计算比较复杂, 实际工作中常用实验的方法来测定. 对于一些简单的情形, 可按下列步骤来计算: 先设线圈中的电流强度 I , 然后由毕奥-萨伐尔定律或安培环路定律求出空间的磁场分布, 接着由磁场分布算出线圈各匝的磁通量, 再求和得到线圈的磁通链, 最后由定义式把 除以 I 得到自感系数 L . 不妨画一个计算自感系数 L 的简单“程序图”:

$$I \rightarrow B \rightarrow L$$

建议读者把它与求电容量 C 的程序相对照, 可以发现两者十分相似.

下面举几个例题来说明.

例 1 一个均匀密绕的螺线管, 长度为 $l = 30\text{cm}$, 管的截面积 $S = 6\text{cm}^2$, 线圈的总匝数 $N = 1500$. 管中充满相对磁导率为 μ 的非

铁磁性磁介质. 求这个螺线管的自感系数.

解 设线圈中通以电流 I , 则由安培环路定律可得螺线管中部的磁感强度为

$$B = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I$$

由于此螺线管的长度比其宽度大很多, 把管内的磁场看作均匀而按各匝线圈的 都是一样的来计算, 不致引起太大误差. 这样

$$\begin{aligned} \Phi &= N \cdot B = NBS \\ &= \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} SI \end{aligned}$$

由(6.5.1)式

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu \mu_0 n^2 V \quad (6.5.3)$$

式中 $n = \frac{N}{l}$ 是单位长度的匝数, $V = Sl$ 是管的体积. 可以看出线圈的自感系数与电流强度无关(无铁磁质情形), 只和线圈的结构有关. 对长直螺线管, 其自感系数正比于管的体积和单位长度上匝数的平方. 将数值代入上式, 注意到非铁磁质 $\mu = 1$, 有

$$\begin{aligned} L &= \mu \mu_0 N^2 \frac{S}{l} = 1 \times 4 \times 10^{-7} \times (1500)^2 \times \frac{6 \times 10^{-4}}{0.3} \\ &= 5.66 \times 10^{-3} \text{H} = 5.66 \text{mH} \end{aligned}$$

由于实际上管端部的磁场与中部不同, 请读者考虑上述计算结果比实际值要大些还是小些?

对于细的螺绕环, 计算结果也是式(6.5.3)(式中各量意义不变). 由于不存在端部效应, 且环是“细”的, 环内各点 B 、 H 值可认为相同, 这个表达式要精确得多.

如果长直螺线管中充满铁磁质, 则(6.5.3)式中 μ 应是铁芯的相对磁导率. 由于 $\mu \gg 1$, 所以有铁芯的线圈的自感系数将大大增加. 但应注意, 由于铁磁物质 μ 不是常量, 而与磁场强度 H 、因

而与电流有关. 也就是说有铁芯时线圈的自感系数与电流有关, 而非恒量.

例 2 一同轴传输线由两个薄壁金属长圆筒组成. 设内外筒半径分别为 R_1 、 R_2 , 如图 6. 5. 2 所示. 电流由内筒一端流入, 从外筒流回. 筒间充满相对磁导率为 μ 的非铁磁质. 计算这传输线单位长度的自感.

解 设电流 I 方向如图, 由安培环路定律可求得两筒间任一点 P 的磁感强度为

$$B = \frac{\mu \mu_0 I}{2 r}$$

图 6. 5. 2 例 2 用图

所以通过图 6. 5. 2 中画斜线面积

的磁通量为

$$\begin{aligned} &= \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \frac{\mu \mu_0 I l}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu \mu_0 I l}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

传输线单位长度的自感为

$$\frac{L}{l} = \frac{\Phi}{I l} = \frac{\mu \mu_0}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (6. 5. 4)$$

在 6. 5. 2 小节注 中已指出, 对有铁磁质存在的情形, 用 $L = \frac{d\Phi}{dI}$ 来定义自感系数. 现 Φ 与 I 不是正比关系实质上是铁磁质 B 与 H 不成正比的反映. 可引入微分磁导率 $\mu = \frac{dB}{dH}$ 来代替一般磁导率, 这样可保持自感系数表达式与非铁磁质时相同, 但要注意对铁磁质微分磁导率亦非恒量.

实际上对非铁磁质 $\mu = 1$, 所以一般可以不把 μ 写上.

例 3 两根平行的长直输电线, 每根导线的半径为 a , 两导线中心的间距为 D , 且 $D \gg a$. 计算这两根输电线单位长度的自感. (电流方向一来一往).

解 设输电线上流过的电流为 I , 其流向如图 6.5.3 所示. 两输电线间离导线 2 为 y 的任一点的磁感强度 B , 由安培环路定律及叠加原理可得

$$B = \frac{\mu I}{2y} + \frac{\mu I}{2(D-y)}$$

图 6.5.3 例 3 用图

方向垂直纸面向外. 通过两输电线间画斜线面积的磁通量为

$$\begin{aligned} &= \int_a^{D-a} B dy = \frac{\mu I l}{2} \int_a^{D-a} \frac{dy}{y} + \frac{\mu I l}{2} \int_a^{D-a} \frac{dy}{D-y} \\ &= \frac{\mu I l}{2} \ln \frac{D-a}{a} \end{aligned}$$

由于 $D \gg a$, 忽略导线内部的磁通, 即认为上式的 就是穿过 l 段两输电线的总磁通, 则

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2} \ln \frac{D-a}{a}$$

两输电线单位长度具有的自感为

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu}{l} \ln \frac{D-a}{a} \quad (6.5.5)$$

自感现象在电工、无线电技术中有广泛的应用. 利用线圈具有阻碍电流变化的性质, 可以限制或稳定电路中的电流. 例如日光灯电路中就利用镇流器(带铁芯的线圈)的自感作用来点亮日光灯以及限制电流. 滤波器中自感起到稳定电流的作用. 电子电路中也常用它与电容器构成谐振电路以产生电磁振荡(在学习电磁振荡时再详细讨论).

自感现象亦有它不利的一面. 例如切断具有自感的大电流电路时, 由于自感的作用, 开关处会产生强烈的电弧, 可以引起设备及人身事故, 必须有相应的措施才能避免, 即所谓“灭弧”. 如何才能“灭弧”是电力工程中的专门课题.

§ 6.6 互 感

6.6.1 互感现象

现在来讨论两个载流线圈由于电流变化而互相引起的电磁感应. 如图 6.6.1 所示的两个线圈, 当线圈 1 中的电流变化时所激发的变化磁场, 会在线圈 2 中产生感应电动势; 同样, 线圈 2 中的电流变化时, 也会在线圈 1 中产生感应电动势. 这种电磁感应现象称为互感现象, 相应的电动势称为互感电动势.

6.6.2 互感系数

与研究自感时类似, 我们亦可以引入适当的物理量来描写两

例如用强大气流去吹断电弧, 或设计开关结构使电弧出现时受强大安培力作用把电弧拉出开关等.

图 6. 6. 1 两个线圈之间的互感

线圈间的互感. 由毕奥-萨伐尔定律可知, 线圈 1 中的电流 I_1 所产生的磁场通过线圈 2 的磁通链 Ψ_{21} 与 I_1 成正比, 即

$$\Psi_{21} = M_{21}I_1 \quad (6. 6. 1)$$

同样, I_2 产生的磁场通过线圈 1 的磁通链 Ψ_{12} 与 I_2 成正比,

$$\Psi_{12} = M_{12}I_2 \quad (6. 6. 2)$$

上两式中的 M_{21} 和 M_{12} 是比例系数, 分别称为线圈 1 对 2 的互感系数和线圈 2 对 1 的互感系数, 它们取决于线圈的形状、大小、匝数、磁介质的空间分布特别是线圈间的相对位置, 而与线圈中的电流无关. 在 § 6. 7. 2 中我们将证明 $M_{12} = M_{21}$, 所以可用一个量 M 表示两个线圈的互感系数, 简称互感. 即

$$M = M_{12} = M_{21} \quad (6. 6. 3)$$

而不去区分它是线圈 1 对线圈 2 还是 2 对 1 的互感系数. 由 (6. 6. 1) 和 (6. 6. 2) 两式可以看出, 两个线圈间的互感系数 M 数值上等于一个线圈流过单位电流时通过另一线圈的相应的磁通链. 所以 $M_{12} = M_{21}$ 就表明若两线圈中的电流强度相同, 则它们的磁场分别

指空间没有铁磁质的情况
同样指无铁磁质的情况.

在另一线圈中通过同样的磁通链. 即当 $I_1 = I_2$ 时, $\Phi_{21} = \Phi_{12}$.

当线圈 1 中的电流 I_1 改变时, 通过线圈 2 的相应的磁通链 Φ_{21} 将随之改变, 由电磁感应定律, 线圈 2 中的互感电动势 为

$$E_{21} = - M \frac{dI_1}{dt} \quad (6.6.4)$$

同样, 当线圈 2 中电流 I_2 改变时, 线圈 1 中的互感电动势为

$$E_{12} = - M \frac{dI_2}{dt} \quad (6.6.5)$$

由上面两式可以看出, 两个线圈的互感系数 M , 数值上还等于其中一个线圈中电流变化率为 1 单位时, 在另一个线圈中产生的互感电动势. 某两个线圈的互感系数大, 则在相同电流变化率的条件下, 这两个线圈中的互感电动势也就大. 由此可知互感系数反映了两个线圈的相互感应的能力, 或磁的联系的紧密程度.

从(6.6.1)式容易看出, 互感系数的单位与自感系数的单位相同. 在国际单位制中, 它的单位是亨利. 两线圈中如果一个线圈的电流为 1 安培时, 其磁场穿过另一线圈的磁通链为 1 韦伯, 这样两个线圈的互感系数为 1 亨利.

两个线圈的互感系数通常是用实验测定的, 只有对一些简单的情形才能计算. 计算步骤与计算 L 的步骤相似, 即:

$$I_1 \quad B_1 \quad \Phi_{21} \quad \Phi_{12} \quad M$$

例 一长直螺线管, 长为 l , 管的截面积为 S , 上面绕有匝数为 N_1 的线圈 1. 在管的中部绕有匝数为 N_2 的线圈 2, 如图 6.6.2 所示. 计算 1、2 两线圈的互感系数.

解 设线圈 1 中的电流为 I_1 , 则它在螺线管中部产生的磁感强度为

$$B_1 = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$

本课程限于讨论 M 不随时间改变的情况.

图 6.6.2

通过线圈 2 每匝的磁通 Φ_{21} 为

$$\Phi_{21} = B_1 S = \mu \frac{N_1}{l} I_1 S$$

通过线圈 2 的磁通链 Ψ_{21} 为

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} I_1 S$$

故两个线圈的互感系数为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} S \quad (6.6.6)$$

互感现象在电工和无线电技术中有着广泛应用. 电工或电子线路中的各种变压器就是利用互感作用制成的. 用它可以把电能或电信号方便地从一个电路传递到另一电路, 而且在传递过程可以随我们的要求改变电压、电流. 在有些场合, 互感作用也会带来麻烦, 例如两条电话线会因为互感而发生串音; 靠近输电线的电话线因互感而出现交流声等. 电子线路中也会由于各回路间的互感而影响正常工作, 这时应设法尽量减少各回路间的互感, 要寻求解决办法也离不开对互感本质的了解.

6.6.3 互感系数与自感系数的关系

两个线圈之间的互感系数与其各自的自感系数有一定的联系, 现在我们来推导具体的关系式.

有两个线圈 1 和 2, 设线圈 1 的匝数为 N_1 , 自感系数为 L_1 , 流过电流 I_1 ; 线圈 2 的匝数为 N_2 , 自感系数为 L_2 , 流过电流 I_2 . 电流 I_1 的磁场通过线圈 1 本身的磁链为 Ψ_{11} , 通过线圈 2 的磁链为 Ψ_{21} ; 电流 2 的磁场通过线圈 2 本身的磁链为 Ψ_{22} , 通过线圈 1 的磁链为 Ψ_{12} . 由(6.6.1)式和(6.6.2)式, 可知两线圈的互感系数 M 为

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$

而

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1}$$

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2}$$

消去 I_1 、 I_2 得

$$L_1 L_2 = \frac{\Psi_{11}}{\Psi_{21}} \frac{\Psi_{22}}{\Psi_{12}} M^2$$

或

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}} \frac{\Psi_{12}}{\Psi_{22}} L_1 L_2 \\ &= \frac{N_2}{N_1} \frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}} \frac{N_1}{N_2} \frac{\Psi_{12}}{\Psi_{22}} L_1 L_2 \end{aligned}$$

式中 Ψ_{21} 表示平均说来 I_1 的磁场通过线圈 2 每匝的磁通量, Ψ_{11} 表示平均说来 I_1 的磁场通过线圈 1 每匝的磁通量, Ψ_{12} 与 Ψ_{21} 的意义类同. 令

$$k^2 = \frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}} \frac{\Psi_{12}}{\Psi_{22}}$$

则上式可写成

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

或

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (6.6.7)$$

这就是两个线圈的互感系数与其各自的自感系数的关系, k 称为这两个线圈的耦合系数. 从磁场的性质不难看出 $\Psi_{21} \leq \Psi_{11}$; 因为 I_1 的磁场在自身线圈 1 中每匝形成的平均磁通总不会小于它在别的

线圈 2 中每匝形成的平均磁通. 同样 $\Phi_{12} = \frac{M_{12}}{N_2}$. 这样 $M_{11} = \frac{21}{11}$, $M_{22} = \frac{12}{22}$, 所以 $0 < k < 1$. 耦合系数的具体数值取决于两线圈的结构及其相对位置和磁介质性质.

若电流 I_1 的磁场通过线圈 1 每匝的磁感线全部穿过线圈 2 各匝, 即 $\Phi_{21} = \Phi_{11}$; 且 I_2 的磁场通过线圈 2 每匝的磁感线全部穿过线圈 1 各匝, 即 $\Phi_{12} = \Phi_{22}$, (这种情形叫无漏磁, 将两个线圈密排并缠在一起就能做到这一点) 则 $k=1$, 称为完全耦合. 此时两个线圈的互感系数与各自的自感系数关系比较简单, 即

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

§ 6.7 磁场的能量

从静电学我们知道, 在带电系统的形成过程, 外力必须克服电场力作功, 外界通过作功的方式把能量转化为电场的能量. 我们从平板电容器(后推广到一般)推出电场能量密度为 $w_e = \frac{1}{2} E^2 = \frac{1}{2} D \cdot E$. 那末, 磁场有无能量? 可以类似地考察磁场建立过程的功能关系. 一个电路从合闸到电流达稳定值的建立磁场的过程中, 电源总要克服感应电动势而作功, 电源多消耗的这一部分能量转化成什么能量了? 反之, 当电路由稳定电流状态(即空间有磁场)撤去电源, 到电流降为零(即磁场消失), 如图 6.5.1(b)所示情形, 由于感应电动势的存在, 不管快或慢, 总要经历一段时间. 那末在这一过程中向电路提供的能量又是哪儿来的? 显然, 只能有这样的结论: 磁场具有能量, 所以建立磁场过程外界要提供能量, 磁场消失

详见本章§ 6.8.

过程这能量又会放出来.

下面来定量推导载流线圈的磁场能量的表达式,并在特例下得出磁能密度公式.

6.7.1 自感磁能 磁能密度

计算一个自感系数为 L , 通有电流 I 的线圈的磁场的能量. 从上面分析可知, 磁场能量应等于电流从零增加到 I 过程电源反抗自感电动势所作的功. 用 i 表示其中某一瞬时的电流值, 则此瞬时的自感电动势为

$$E_L = - L \frac{di}{dt}$$

在 dt 时间内, 电源反抗自感电动势作的功为

$$dA = - E_L i dt = L i di$$

电流从零达到 I 值的整个过程, 电源反抗自感电动势所作的功为

$$A = \int dA = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} LI^2$$

可以看出, 这功与电流 i 随时间的变化情况无关, 即此功与建立磁场的过程无关. 由功能关系, 可知电流达稳定值时磁场的能量 W_m 应等于电源反抗自感电动势所作功之和, 即

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (6.7.1)$$

这就是自感为 L , 通有电流 I 的线圈的磁场的总能量, 简称自感磁能.

与电场类似, 磁场能量亦应按一定体密度分布在空间, 磁场能量及其体密度亦应该可以用描述磁场的量 B 、 H 来表示. 为计算简便, 我们从细螺绕环的磁场这一特例导出磁能密度公式. 从(6.5.3)式, 知细螺绕环的自感系数为

$$L = \mu \mu_0 n^2 V$$

由(6.7.1)式可以得到通以电流 I 的细螺绕环磁场的能量为

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \mu \mu_0 n^2 V I^2$$

但对细螺绕环, 环内 $H = nI$, $B = \mu \mu_0 nI$. 代入上式得

$$W_m = \frac{1}{2}BH V = \frac{1}{2}B \mu_0 H V$$

这儿 V 是环的体积, 而我们知道螺绕环的磁场集中在环内, 所以 V 亦是磁场占有的空间体积. 又因为是细环, 可以认为环内磁场各点有相同的 B 、 H 值, 因此单位体积内的磁能, 即磁能密度为

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2}B \mu_0 H \quad (6.7.2)$$

这就是磁能密度公式. 虽然它是在细环的特例中导出的, 但可以证明, 普遍地对各处 B 、 H 不相同的磁场, 上式仍然成立. 当然, 此时各点 B 、 H 不同, 因而各点的磁能密度亦不同, 磁场的总能量应是磁能密度的体积分, 即

$$W_m = \int w_m dV = \frac{1}{2} \int B \mu_0 H dV \quad (6.7.3)$$

积分应遍及全部磁场空间, 这样我们就把磁场能量与 B 、 H 联系起来了.

前面已得到载流线圈的磁场能量可写成 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$, 如果我们用式(6.7.3)求出了 W_m , 那么我们可以通过 W_m 与 L 的关系式来计算线圈的自感. 下面就用这种方法重新计算同轴传输线的自感系数.

例 一同轴传输线由两个半径分别为 R_1 、 R_2 的薄金属圆筒组成, 两筒间充满相对磁导率为 μ 的磁介质(见图 6.5.2). 计算这传输线单位长度的自感系数.

解 设内筒上通以电流 I , 由外筒流回. 由安培环路定律, 根据场分布的轴对称性, 可求得两筒间任一点的磁场强度为

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

同一点的磁感强度为

$$B = \mu \mu_0 H = \frac{\mu \mu_0 I}{2r}$$

由(6.7.2)式, 任一点的磁能密度为

$$w_m = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{1}{2} \frac{\mu \mu_0 I^2}{(2r)^2}$$

所以在长度为 1 的传输线内磁场的能量为

$$\begin{aligned} W_m &= \int_{R_1}^{R_2} w_m dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \frac{\mu \mu_0 I^2}{(2r)^2} 2\pi r l dr \\ &= \frac{\mu \mu_0 I^2 l}{4} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

而 W_m 又等于 $\frac{1}{2} LI^2$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} LI^2 &= \frac{\mu \mu_0 I^2 l}{4} \ln \frac{R_2}{R_1} \\ L &= \frac{\mu \mu_0 l}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \end{aligned}$$

单位长度的自感为

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu \mu_0}{2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

与以前计算的结果一致.

6.7.2 互感磁能

下面我们进一步讨论磁场是由两个载流线圈共同产生的情形. 设线圈 1 和 2 的自感分别为 L_1 、 L_2 , 电流值各为 I_1 、 I_2 , 两线圈的互感为 M , 考察电源在磁场建立过程作的功. 由于互感的存在, 两线圈的电流从零增加到稳定值 I_1 、 I_2 的过程中, 各自的电源除了要供给电路中因焦耳热消耗的电能和反抗自感电动势做功外, 还要反抗互感电动势做功. 在 dt 时间内线圈 1 的电源反抗互感电动势作的功为

$$\begin{aligned} dA_1 &= - E_{12} i_1 dt \\ &= M \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M i_1 di_2 \end{aligned}$$

在线圈 2 中电流从 0 到 I_2 的整个过程, 线圈 1 中电源反抗互感电动势作的功为

$$A_1 = \int_0^{I_2} M i_1 di_2$$

式中 i_1 、 i_2 分别表示过程中任一瞬时两线圈中的电流值. 同样线圈 2 的电源反抗互感电动势作的功为

$$A_2 = \int_0^{I_1} M i_2 di_1$$

所以两个电源反抗互感电动势作功的总和为

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^{I_2} M i_1 di_2 + \int_0^{I_1} M i_2 di_1 \\ &= M \int_0^{I_1, I_2} (i_1 di_2 + i_2 di_1) = M \int_0^{I_1, I_2} d(i_1 i_2) \\ &= M I_1 I_2 \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

和自感一样, 两个线圈中电源反抗互感电动势作功而额外提供的能量也是转化为磁场的能量. 一旦断开电源, 这部分磁能便通过互感电动势作功而全部释放出来. 由此可见, 当两个线圈中各有电流 I_1 、 I_2 时, 除了每个线圈各储有自感磁能(或固有磁能) $\frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$ 外, 它们之间还储有另一部分磁能 $M I_1 I_2$, 即所谓互感磁能(或相互作用能). 所以两个载流线圈的磁场所储存的总能量为

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (6.7.5)$$

由于 $M_{12} = M_{21} = M$, 上式亦可写成对称的形式

$$W_m = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \frac{1}{2}M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2}M_{21} I_2 I_1 \quad (6.7.6)$$

同样的方法用到 n 个载流线圈, 可以得到

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^n M_{ij} I_i I_j \quad (6.7.7)$$

式中 L_i 是第 i 个线圈的自感, M_{ij} 是第 i 与第 j 个线圈间的互感.

应该指出, 自感磁能只能是正值, 而互感磁能由于是一种相互作用能, 因而它的值可正可负.

现在来证明 $M_{12} = M_{21}$. 我们知道, 能量是状态的函数, 磁能亦

我们把两个载流线圈的磁能用各自的磁感强度、磁场强度来表示, 这样不难看出互感磁能可以是正值, 亦可以是负值.

由叠加原理可知

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 \\ H &= H_1 + H_2 \end{aligned}$$

式中 B_1 、 B_2 分别表示每个载流线圈单独存在时空间某点的磁感强度, B 表示两载流线圈同时存在时该点的磁感强度. 对磁场强度, 各量代表的意义相同. 将上面两式代入 (6.7.3) 式, 得

$$W_m = \frac{1}{2} \int B_1 \cdot dH_1 dV + \frac{1}{2} \int B_2 \cdot dH_2 dV + \frac{1}{2} \int (B_1 \cdot dH_2 + B_2 \cdot dH_1) dV$$

$$B_1 = \mu_0 \mu H_1$$

$$B_2 = \mu_0 \mu H_2$$

$$B_1 \cdot dH_2 + B_2 \cdot dH_1 = 2\mu_0 \mu H_1 \cdot dH_2$$

于是磁场能量 W_m 可写为

$$W_m = \frac{1}{2} \int B_1 \cdot dH_1 dV + \frac{1}{2} \int B_2 \cdot dH_2 dV + \mu_0 \mu H_1 \cdot dH_2 dV \quad (6.7.8)$$

由 (6.7.1) 和 (6.7.3) 两式可知

$$\frac{1}{2} \int B_1 \cdot dH_1 dV = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

$$\frac{1}{2} \int B_2 \cdot dH_2 dV = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

把 (6.7.8) 式与 (6.7.5) 式对照, 便可看出

$\mu_0 \mu H_1 \cdot dH_2 dV$ 就是两载流线圈的互感磁能. 即

$$M I_1 I_2 = \mu_0 \mu H_1 \cdot dH_2 dV \quad (6.7.9)$$

从上式不难看出, 若磁场中各处 H_1 与 H_2 的夹角为锐角, 则互感磁能为正值. 若磁场中各处 H_1 与 H_2 的夹角为钝角, 则互感磁能为负值. 请读者自己进一步说明其物理意义. 当然式中的 I_1 、 I_2 亦可正可负, 与前面相对应, 当 I_1 、 I_2 产生的磁场是互相加强时, 两者取同一符号; 反之, 则 I_1 、 I_2 的符号相反.

不例外. 也就是说磁能的量值与如何达到这一状态的过程无关. 这样对两个载流线圈的磁场, 我们选择两个特殊的易于计算的过程来达到同一状态, 分别计算电源克服互感电动势作的功(应等于互感磁能)就不难证明 $M_{12} = M_{21}$.

两个线圈最初都无电流, 先考虑这样的过程: 让线圈 1 接通电源时保持线圈 2 开路, 等线圈 1 中的电流从零增加到稳定值 I_1 后, 再把线圈 2 与电源接通, 使其中电流也从零增加到稳定值 I_2 . 当然, 由于互感作用, 在线圈 1 中将产生互感电动势. 为便于计算, 改变线圈 1 中电源的电动势, 使 I_1 保持不变, 这样, 在线圈 2 中将无互感电动势, 所以在此过程中只有线圈 1 中的电源反抗互感电动势做功, 其值为

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int E_{12} I_1 dt = - M_{12} \int \frac{di_2}{dt} I_1 dt \\ &= - \int_0^{I_2} M_{12} I_1 di_2 = - M_{12} I_1 I_2 \end{aligned}$$

式中 i_2 为过程中某一瞬时线圈 2 中的电流值. 显然, 电源反抗互感电动势做功而消耗的能量, 以互感磁能的形式贮存于磁场中.

现在我们选择另一个顺序与前次相反的建立电流的过程: 先使线圈 2 接通电源, 保持线圈 1 开路, 等线圈 2 中的电流达到稳定值 I_2 后再连接线圈 1 的电源, 使其中电流从零增加到稳定值 I_1 . 与前一建立电流过程类似. 在线圈 1 电流增加过程, 改变线圈 2 中电源的电动势以维持 I_2 不变. 所以在此过程中只有线圈 2 中的电源反抗互感电动势做功, 其值为

$$\begin{aligned} A_2 &= - \int E_{21} I_2 dt = - M_{21} \int \frac{di_1}{dt} I_2 dt \\ &= - \int_0^{I_1} M_{21} I_2 di_1 = - M_{21} I_2 I_1 \end{aligned}$$

它亦应等于互感磁能. 上述两个不同过程其末状态是一样的, 因此这两个算出的互感磁能应相等, 即

$$M_{12}I_1I_2 = M_{21}I_2I_1$$

$$M_{12} = M_{21}$$

因此, 我们可以用一个量 M 来表示线圈 1、2 间的互感系数, 而不必去区分是线圈 1 对 2 还是 2 对 1 的互感系数.

§ 6.8 过渡过程

我们已经知道自感有阻碍电流变化的作用, 因此对于有自感的电路, 当接通或拉断电源时, 电流不会立即达到稳定值, 而要经过一个变化的中间过程, 这个过程称为过渡过程. 本节将讨论简单的 L-R 电路的过渡过程, 同时把 C-R 电路的过渡过程亦放在本节一并讨论.

6.8.1 L-R 电路的过渡过程

一个由自感系数为 L 的线圈和阻值为 R 的电阻串联而成的 L-R 电路如图 6.8.1 所示. 当把开关 K 倒向 1 接通电源后(电源电动势为 E , 内阻可忽略), 如前所述, 由于自感的作用, 电流将经历从零逐渐增大到稳定值的过渡过程. 根据电磁感应以及电路的基本规律, 不难求得电流随时间变化的关系.

选择电路的正方向(即电动势和电流的正向)如图所示. K 合向 1 后, 由闭合电路的欧姆定律得

$$E + E_L = IR$$

式中自感电动势

$$E_L = -L \frac{dI}{dt}$$

由上两式得

图 6.8.1 L-R 电路

$$E - L \frac{dI}{dt} = IR$$

$$\text{或} \quad L \frac{dI}{dt} + IR = E \quad (6.8.1)$$

用分离变量法求解此微分方程. 将上式写成

$$\frac{dI}{I - \frac{E}{R}} = - \frac{R}{L} dt$$

两边积分, 得

$$\ln \left(I - \frac{E}{R} \right) = - \frac{R}{L} t + C$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad I - \frac{E}{R} &= e^{-\frac{R}{L}t + C} \\ &= Ce^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned} \quad (6.8.2)$$

式中 C 为积分常数, $C = e^C$, 它的值由初始条件决定. 选电源与电路刚接通瞬间作为时间零点, 由于接通电源前电路中无电流, 而自感电路中又不允许电流发生突变(否则自感电动势将为无限大, 由 $E_L = -L \frac{dI}{dt}$ 很易看出这一点), 所以 $t = 0$ 时 I 应等于零. 将此条件

$$\text{代入(6.8.2)式可得} \quad C = - \frac{E}{R}$$

代入(6.8.2)式, 得

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (6.8.3)$$

这就是接通电源后, L - R 电路中电流与时间的关系式, 画成 I - t 曲线如图 6.8.2 所示. 可以看出电流从零增加到稳定值 $\frac{E}{R}$, 或快或慢都要经历一个过渡过程. 自感 L 与电阻 R 的比值决定 L - R 电路中电流增长的快慢. $\frac{L}{R}$ 值小, 电流增长快; $\frac{L}{R}$ 值大, 则电流增长慢. 而 $\frac{L}{R}$ 具有时间的量纲, 所以人们把 $\frac{L}{R}$ 称为 L - R 电路的时间常数, 用

符号表示, 即 $\frac{L}{R}$. 由(6.8.3)式, 可以算出, 当 $t = \frac{L}{R}$ 时

$$I = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) = 0.632 \frac{E}{R}$$

图 6.8.2 不同 $\frac{L}{R}$ 值的电流增长曲线

即 $\frac{L}{R}$ 等于电流从零增加到稳定值的 63.2% 所需的时间. 同样由(6.8.3)式, 可以算出当 $t = 5 \frac{L}{R}$ 时 $I = 0.993 \frac{E}{R}$. 即经过 $5 \frac{L}{R}$ 的时间可以认为过渡过程基本结束. 所以时间常数 $\frac{L}{R}$ 是标志 L-R 电路过渡过程持续时间长短的特征量.

现在来讨论当如图 6.8.1 中所示电路中电流已达稳定值 $\frac{E}{R}$ 后, 把开关 K 从 1 迅速倒向 2 后 L-R 电路中的过渡过程. 这时电路中只存在自感电动势 E_L . 仍选如图电路正方向, 由闭合电路欧姆定律及自感电动势规律, 得

$$-L \frac{dI}{dt} = IR$$

其解为 $I = C e^{-\frac{R}{L}t}$ (6.8.4)

C 可由起始条件定出, 选开关 K 倒向 2 瞬时作为计时起点, 同样由于电流不能突变的理由, $t = 0$ 时 $I_0 = \frac{E}{R}$, 代入(6.8.4)式, 可得

$C = \frac{E}{R}$, 这样(6.8.4)式就可写成

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \quad (6.8.5)$$

这就是 L-R 电路中断开电源且被一导线短接后电路中电流随时间变化的关系式. 画成 I-t 曲线如图 6.8.3 所示, 它表明 L-R 电路断开电源, 且被导线短接后, 电流按指数规律下降, 且下降的快慢也是由时间常数 $\frac{L}{R}$ 决定的. $t = \frac{L}{R}$ 时, 电流下降到初始值 $\frac{E}{R}$ 的 36.8% .

图 6.8.3 不同 $\frac{L}{R}$ 值的电流衰减曲线

总之, 不论是接通或是断开电源, L-R 电路的电流都不能突变, 而要经历一个过渡过程才能趋于稳定. 电流变化的快慢或者说过渡过程持续时间的短长, 由电路中自感与电阻的比值 $\frac{L}{R}$ 决定. $\frac{L}{R}$ 小则电流变化快, 过渡过程持续时间短; 反之, $\frac{L}{R}$ 大则电流变化慢, 过渡过程持续时间长.

6.8.2 C-R 电路的过渡过程

一个由电容量为 C 的电容器和阻值为 R 的电阻串联而成的 C-R 电路如图 6.8.4 所示. 先研究 C-R 电路接通电源的情形. 设

在接电源前电容器极板上不带电, 将开关 K 倒向 1, 在电源作用下电容器开始充电. 设在 t 时刻电容器两极板上带有的电量分别为 q 、 $-q$, 如图 6. 8. 4 所示, 此时电路中沿回路正向的电流为 I . 根据闭合电路中总的电动势应该等于总的电势降落的规律, 取电路正向如图 6. 8. 4 所示, 有

图 6. 8. 4 C-R 电路

$$E = \frac{q}{C} + IR \quad (6. 8. 6)$$

在如图 6. 8. 4 所示的 I 、 q 情形

$$I = \frac{dq}{dt}$$

代入(6. 8. 6)式, 得

$$E = \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt}$$

同样用分离变量法, 加上初始条件 $t = 0$ 时 $q = 0$ 不难解得

$$q = EC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (6. 8. 7)$$

亦可由能量守恒定律来导出此式. 设 t 到 $t + dt$ 时间内电容器极板上电量的增量为 dq , 则在 dt 时间内电源提供的能量为 $E dq$, 电阻上产生的焦耳热为 $I^2 R dt$, 电容器电场能量的增量为 $\frac{q}{C} dq$, 由能量守恒定律

$$E dq = I^2 R dt + \frac{q}{C} dq$$

在图 6. 8. 4 所示的 I 、 q 的情形

$$dq = I dt$$

代入上式, 化简可得

$$E = IR + \frac{q}{C}$$

可以看出, 电容器上带电量增长的快慢是由电路中电阻和电容的乘积 RC 所决定. RC 值小, 电量增长快, RC 值大, 电量增长慢. q - t 曲线如图 6.8.5 所示. 乘积 RC 具有时间的量纲, 称为 C - R 电路的时间常数, 一般用 τ 表示, 即 $\tau = RC$. 例如对 $C = 1$ 微法, $R = 10$ 千欧的 C - R 电路, 时间常数 $\tau = 10 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} = 0.01$ 秒. 的物理意义与 L - R 电路中的情况类似.

图 6.8.5 不同 RC 值的电量增长曲线

将(6.8.7)式两边对时间 t 求导, 可得

$$I = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6.8.8)$$

这就是 C - R 电路充电过程电流随时间变化的关系式. 请读者自己画出 I - t 曲线, 并讨论之.

现在来研究 C - R 电路的放电过程, 将图 6.8.4 电路中开关由 1 倒向 2, 电容器即通过电阻 R 放电. 设过程中 t 时刻, 电容器带电量为 q , 电流为 I , 仍选图 6.8.4 所示的电路正方向, 由电路规律, 知

$$\frac{q}{C} + IR = 0$$

对图示的 I 、 q 情形, 有

$$I = \frac{dq}{dt}$$

代入前式得

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt}R = 0$$

不难解此方程, 再根据初始条件 $t=0$ 时 $q_0 = CE$, 可得

$$q = CEe^{-\frac{1}{RC}t} \quad (6.8.9)$$

画出 $q-t$ 曲线如图 6.8.6 所示. 从式子或曲线可以看出 C-R 电路中放电过程电容器带电量下降的快慢也是由时间常数 RC 决定的 (建议读者由 (6.8.9) 式求 $I-t$ 关系式, 并讨论电流的实际方向).

图 6.8.6 不同 RC 值的电量衰减曲线

总之, C-R 电路在电容器的充电或放电过程, 电容器的带电量不能突变 (为什么? 请读者思考). 电容器带电量变化的快慢由时间常数 (即 RC) 决定. 小电量变化快, 大则电量变化慢.

将 L-R 电路与 C-R 电路加以比较, 应该注意到 L-R 电路中电流不能突变 (原因前面已谈到), 而 C-R 电路中电流可以突变 (如电容器充电过程一接电源电流就从 0 突变到 $\frac{E}{R}$ 值), 但电容器上的电量不能突变. 这是两种过渡过程的不同点.

思考题

6.1 在图所示的变压器中,当原线圈 1 的电流 I 减小时,副线圈 2 的感应电动势是什么方向?

思考题 6.1 图

思考题 6.2 图

6.2 如果使图中回路 1 的电阻 R 增大,则在回路 2 中感应电流将是什么方向?

6.3 已知图所示电路处于垂直于纸面方向的磁场内.将活动导线 ab 向左移动,在回路中引起图示方向的感应电流,请指出此磁场 B 的指向,并说明感应电流能量的来源.

思考题 6.3 图

思考题 6.4 图

6.4 把一铜片放在磁场中如图所示.如果将铜片从磁场中拉出或推入,都会感到有阻力.试说明此阻力的来源.

6.5 如图所示装置中, A 是闭合的铝环, B 是开口的铝环, AB 间用一绝缘棒相联, 当用一条形强磁铁的任何一极接近 A 环时, 将看到 A 环被推开; 而把磁极移开 A 环时, A 环被吸引. 若把磁极移近或离开 B 环时, B 环却丝毫不动. 试解释上述现象.

思考题 6.5 图

6.6 一块金属在均匀磁场中平移, 金属中有无涡流? 如一块金属在均匀磁场中转动, 则又如何?

6.7 设有一导体薄片和磁场方向垂直, 如图所示. (a) 如果磁感强度 B 突然改变, B 的变化在导体薄片后 P 点附近能否立即检查得出来? 为什么? (b) 如果导体的电阻率为零, 这个变化在 P 点能否检查出来? 为什么? (c) 如果磁感强度 B 作高频周期性变化, 而导体薄片是由低电阻率的材料作成, 则 P 点附近区域内几乎觉察不到磁场的改变, 即此高频磁场几乎为该导体薄片所屏蔽, 试解释之. (d) 这样的导体薄片(非铁磁材料)能否屏蔽恒定磁场?

思考题 6.7 图

6.8 线圈的自感系数取决于哪些因素?

6.9 有 N 匝串联的线圈, 应怎样放置这些线圈才能获得最大的自感系

数?

6.10 在图所示的电路中, S_1 、 S_2 是两个相同的灯泡, L 是一个自感系数相当大的线圈, 其电阻值与电阻 R 相同. 当开关 K 接通和断开时, 灯泡 S_1 、 S_2 亮暗的顺序是怎样的? 为什么?

思考题 6.10 图

6.11 把一只灯泡和一个线圈串联, 然后将其先后接到端电压相同的直流电源和交流电源上, 问灯泡的亮度是否相同? 为什么?

6.12 能否说:“自感电动势的方向总是和电流的方向相反”? 为什么?

6.13 怎样绕制线圈才能使线圈的自感系数几乎等于零?

6.14 两个线圈相串联后的自感系数(指把此两串联的线圈当作一个线圈时的等效自感系数)是否和这两个线圈的相对位置有关? 为什么?

6.15 怎样绕制两个线圈才能使它们之间的互感系数最大? 两个线圈的互感系数与哪些因素有关? 两个线圈如何放置可使它们的互感系数最小?

6.16 什么情况下自感磁能是磁场的总能量? 什么情形下自感磁能只是磁场能量的一部分?

6.17 A 与 B 是两个长螺线管, 有相同的直径和长度, 且都只绕一层线圈, 相邻各匝互相紧挨, 中间的绝缘层厚度可忽略. 若管 A 用较细的导线绕成, 那么哪一个螺线管的自感系数大? 哪一个螺线管的时间常数大?

习 题 六

6.1 将一矩形导线框置于一均匀磁场中如图所示, 磁感强度 B 的方向

与框平面法线 n 成 θ 角, 框的宽度为 l , 导线框中可滑动段 cd 以速度 v 沿长度方向运动. 求回路 $abcd$ 中的感应电动势.

6.2 一个半径 $r = 0.1\text{m}$, 具有一根辐条的铜环在均匀磁场中转动, 如图所示. 转速 $n = 100$ 周/秒, 磁场的方向与铜环平面垂直, $B = 1\text{T}$. 有两个电刷分别与环边及轴相连, 再与安培计(内阻不计)及电阻构成回路如图. $R = 10\ \Omega$, 问安培计上读数是多少? 为维持铜环匀速转动, 外力的功率应多大? 若辐条有两根, 结果又如何? (铜环及辐条的电阻可忽略不计).

习题 6.1 图

习题 6.2 图

6.3 在磁感强度 $B = 0.84\text{T}$ 的均匀磁场中, 有一边长为 $a = 5\text{cm}$ 的正方形框在旋转. B 的方向与转轴垂直, 框是由截面积 $S = 0.5\text{mm}^2$ 的铜线绕若干匝而成, 线的两端相连. 当框旋转时, 线圈中最大感应电流 $I = 1.9\text{A}$. 求:

(a) 框每秒转几周;

(b) 将铜线换成同样粗细的铁线, 匝数不变, 要使感应电流仍如铜线时一样, 则框的转速应是多少? (铜的电阻率 $\rho_{\text{铜}} = 1.6 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, 铁的电阻率 $\rho_{\text{铁}} = 8.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$).

6.4 一长直导线通以电流 $I = 5\text{A}$, 在与其相距 $l = 5\text{cm}$ 处放一长方形线圈, 其长 $b = 8\text{cm}$, 宽 $a = 4\text{cm}$, 直导线与线圈处在同一平面内, 且与长为 b 的边平行, 如图所示. 若线圈以 $v = 3\text{cm/s}$ 的速度沿垂直于直导线的方向向右运动, 求这时刻线圈中的感应电动势.

6.5 仍如上题图所示的装置, 但线圈静止, 长直导线中通以交变电流 $I = I_0 \sin \omega t$. 求(只要文字解):

(a) 任一时刻通过线圈的磁通量;

(b) 任一时刻线圈中的感应电动势;

(c) 在同一图上画出 $I-t$ 、 $\Phi-t$ 、 $\mathcal{E}-t$ 三条曲线, 并写出 $t_1 = \frac{1}{2}$ 及 $t_2 = 1$ 两时刻的磁通量和感应电动势.

6.6 有一均匀磁场, 磁感强度为 B , 其大小以恒定变化率 $\frac{dB}{dt}$ 改变. 今把一块质量为 m 的铜块拉成半径为 r 的导线并弯成一个半径为 R 的圆形回路 ($R \gg r$), 且放置成与 B 垂直. 试证明这回路中的感应电流与导线的粗细及回路的半径无关, 其表达式为

$$I = \frac{m}{4} \frac{dB}{dt}$$

习题 6.4 图

式中 ρ 为铜的电阻率, ρ_m 为铜的密度.

6.7 有一随时间变化的均匀磁场, 磁感强度 $B = B_0 e^{-t/K}$, 式中 B_0 、 K 为常量. 磁场中放有一边可滑动的矩形导线框, 框宽为 l , 磁感强度方向如图所示. 设 $t = 0$ 时 cd 边与 ab 重合. 若 cd 边以匀速率 v 向右运动, 求任一时刻导线框中的感应电动势.

习题 6.7 图

6.8 一个 N 匝的线圈与一电阻 R 构成一闭合电路, 如果通过这线圈每匝的磁通量由 Φ_1 变到 Φ_2 , 试证不论通量的变化方式如何, 通过电路的电量为

$$q = \frac{N(\Phi_2 - \Phi_1)}{R}$$

6.9 有一个随时间变化的均匀磁场, 限制在圆柱体内, B 的方向垂直纸面向里, 如图所示. 现磁感强度以恒定变化率 10^{-2} T/s 减小, 如把电子放在磁场中 a 、 o 、 b 三点, 试求电子的瞬时加速度. ($r = 5$ 厘米)

6.10 在半径为 R 的圆柱内有一随时间变化的均匀磁场, B 的方向垂直纸面向里, 其变化率为 $\frac{dB}{dt}$. 有一长为 l 的金属棒 ab 放置如图所示, 求证金属

棒内的感生电动势为

$$E_b = \frac{dB}{dt} \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}^2}$$

习题 6.9 图

习题 6.10 图

6.11 要使真空仪器的金属部件所吸附的气体放出, 可以把它放在有高频电流流过的线圈中, 用涡流使金属加热来做到, 如图所示. 设线圈匝数 N

习题 6.11 图

$= 30$ 匝, 长为 $l = 0.2\text{m}$, 高频电流 $I = I_0 \sin 2\pi f t$, 式中 $I_0 = 25\text{A}$, $f = 10^5\text{Hz}$. 被加热的电子管阳极为一半径 $r = 4\text{mm}$ 而壁很薄的圆筒, 其长度远小于线圈的长度. 当涡流在阳极圆筒壁上绕中心轴流动时, 电阻为 $R = 5 \times 10^{-3}$ (由阳极形状尺寸及材料所决定). 近似认为线圈中心的磁场与无限长螺线管内磁

场相同, 且不计涡流的磁场 . 求:

- (a) 阳极中涡流的最大值;
- (b) 阳极每秒产生的焦耳热;
- (c) 当高频电流的频率增加一倍时, 每秒的发热量增加到几倍.

6. 12 在长直导线附近有一正方形线圈绕平行于长直导线的轴 OO 以匀角速度 ω 旋转 . 设线圈的边长为 $2a$, 轴 OO 与长直线相距为 b , ($b > a$), 且通过正方形两对边的中心, 长直线上流有电流 I_0 . 求正方形线圈中的感应电动势 .

6. 13 如图所示, 一金属棒 CD 以速率 $v = 2\text{m/s}$ 平行于一长直导线运动 . 已知 $I = 40\text{A}$, $a = 10\text{cm}$, $l = 90\text{cm}$, 求棒中的感应电动势, 哪一端的电势高?

6. 14 如图所示, 一长度为 $l = 0.5\text{m}$ 的金属棒 CD 水平放置, 绕铅垂轴 OO 旋转, 轴与 C 端相距 $a = 0.1\text{m}$, 转速为每秒 10 转 . 该处地磁场在铅垂方向的分量为 $B_1 = 0.5 \times 10^{-4}\text{T}$, 方向向上 . 求 CD 两端的电势差 .

习题 6. 13 图

习题 6. 14 图

6. 15 法拉第圆盘发电机由一个在磁场中转动的导体圆盘组成 . 设圆盘的半径为 R , 盘的中心轴与均匀外磁场的方向平行, 盘的角速度为 ω , 求盘边缘与盘心的电势差 . 当盘转向相反时, 它们的电势高低是否也反过来?

6. 16 一密绕 400 匝的线圈, 自感系数为 8mH . 当线圈中流过 $I = 2.5\text{A}$ 电流时, 通过每匝线圈的磁通量为多少?

6.17 在环状铁芯上绕有 $N = 10^3$ 匝线圈, 设环的平均半径为 $R = 8\text{cm}$, 环的截面积为 $S = 1\text{cm}^2$, 铁芯材料的相对磁导率 $\mu = 500$. 求这线圈的自感系数.

6.18 有一自感系数为 1.2H 的线圈, 当通过它的电流在 10^{-3}s 内由 0.5A 增加到 5A 时, 线圈内的自感电动势有多大?

6.19 在长 60cm , 直径 5cm 的空心纸筒上绕多少匝导线, 才能得到自感系数为 $6.0 \times 10^{-3}\text{H}$ 的线圈?

6.20 在半径为 $r_1 = 20\text{cm}$ 、匝数 $N_1 = 100$ 的圆形线圈 1 中心轴线上平行放置另一个半径 $r_2 = 1\text{cm}$ 、匝数 $N_2 = 10$ 的小圆线圈 2, 两线圈圆心相距 $d = 0.2\text{m}$, 如图所示. 可以近似认为大线圈中电流在小线圈处产生的磁场是均匀的, 求这两个线圈的互感系数.

习题 6.20 图

6.21 同上题, 如大线圈是断开的, 小线圈通以交流电 $I_2 = I_{20} \sin 2\pi ft$, 式中 $I_{20} = 2\text{A}$, $f = 2 \times 10^3\text{Hz}$. 求大线圈中互感电动势的最大值.

6.22 如图所示, 一矩形线圈长 $a = 20\text{cm}$, 宽 $b = 10\text{cm}$, 共 100 匝, 放在一长直导线旁, 相距 $c = 10\text{cm}$, 它们处在同一平面内. 求它们的互感系数. 若把长直导线平移到矩形线圈中心位置, 它们的互感又是多少?

6.23 一环形铁芯, 环的截面积 $S = 2\text{cm}^2$, 均匀密绕一初级线圈, 每厘米绕 $n_1 = 10$ 匝, 通以电流 1A . 另有一次级线圈共有 $N_2 = 10$ 匝, 如图所示, 铁芯材料的相对磁导率 $\mu = 700$ (在初级线圈中通以 1A 电流时). 求:

(a) 初级与次级线圈间的互感系数 (在 $I = 1\text{A}$ 时);

(b) 如在初级线圈中通以电流 $I = 1\text{A}$, 而把次级线圈与冲击电流计

习题 6.22 图

习题 6.23 图

B、G 相连, 次级电路中总电阻值 $R = 100 \Omega$. 问: 当初级线圈中电流反向时, B、G 中通过多少电量?

6.24 一长直导线, 通以电流 I , 旁边有一矩形线圈, 长为 l , 宽为 $2a$, 与长直导线处在同一平面内, 长直导线与线圈转轴 OO 平行, 相距为 d ($d > a$) 如图所示. 当线圈绕 OO 轴转过 180° 时, 线圈中流过的电量是多少?

6.25 两线圈的自感系数分别为 L_1 、 L_2 , 其互感系数为 M . 试证: 当两个线圈串联时, 串联线圈的等效自感系数 $L = L_1 + L_2 \pm 2M$, 说明什么情况下用加号, 什么情况下用减号.

6.26 有两个相同的线圈, 自感均为 L , 且彼此相距甚远. 若把这两

习题 6.24 图

个线圈并联, 则等效自感将是多少?

6.27 两线圈顺接时等效自感为 1.0H , 保持两线圈的相对位置不变, 将它们反接则等效自感为 0.4H . 求这两个线圈的互感.

6.28 在银河系的星际空间中, 一般认为磁场为 10^{-10}T 数量级. 除了每立方厘米大约有一个热运动速率为 10^3m/s 数量级的氢原子外, 这个空间没有更多的东西了. 问: 在该空间某一给定体积 V 内, 贮存的磁场能量是多少? 并与该体积内物质的动能相比较.

6.29 两根足够长的平行直导线, 间距为 20cm , 导线中都通以 20A 的电流, 流向相反. 导线的半径均为 10mm . 求:

(a) 两导线单位长度的自感系数(看成一个线圈, 电流一来一往);

(b) 若将导线分开到相距 40cm , 磁场对单位长度导线作的功; 单位长度磁能的改变量, 是增加还是减少? 为什么?

6.30 由两个很长的同轴圆筒构成的传输线, 内筒半径为 1mm , 外筒半径为 7mm . 有 100A 的电流由外筒流出, 内筒流回, 筒的厚度均可忽略, 筒间介质的相对磁导率 $\mu = 1$, 求:

(a) 介质中磁能密度表达式;

(b) 每米传输线所贮的磁能.

6.31 一长直导线, 通有电流 I , 电流均匀分布在导线截面上. 证明: 此导线内部单位长度贮存的磁能为 $\frac{\mu I^2}{16}$.

6.32 电阻为 0.01Ω , 自感为 0.5mH 的线圈接到内阻可忽略的 12V 电源上, 问合上开关后经过多长时间电流才能达到其稳定值的 90% ? 这时有多少能量贮存于磁场中? 合上开关到该时刻电源提供了多少能量?

6.33 一线圈的自感 $L = 3.0\text{H}$, 电阻 $R = 10\Omega$, 把 $U = 3.0\text{V}$ 的恒定电压加到线圈两端, 在电压加上 0.3s 后, 求此瞬时

(a) 线圈中的电流;

(b) 电源供给的功率;

(c) 电阻的焦耳热功率;

(d) 磁场能量的增长率, 并判断在此时刻附近极短时间 dt 内能量是否守恒.

6.34 一自感为 L , 电阻为 R 的线圈与一无自感的电阻 R_0 串联, 然后与

电源连接如图所示。已知 $E = 20\text{V}$, $R = 150\ \Omega$, $L = 5.0\text{H}$, $R_0 = 50\ \Omega$ 。

(a) 求开关 K_1 合下 0.5 时(τ 为电路的时间常数), 线圈两端的电势差 U_{bc} 和电阻 R_0 的电势差 U_{ab} ;

(b) 在电路中电流已稳定后, 合下开关 K_2 , 求经过 0.01s 后通过 K_2 的电流值及方向。

习题 6.34 图

6.35 有一电路如图所示, R_1 、 R_2 、 L 和 E 都已知, 且电源和线圈的内阻可不计。

(a) 求当 K 接通后, U_{ab} 与时间的关系;

(b) 电流达稳定值后, 打开 K , 再求 U_{ab} 和时间的关系。

习题 6.35 图

6.36 如图所示的一对互感耦合的 LR 电路。证明在无漏磁的情形, 两个回路充放电的时间常数都是

$$= \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}$$

习题 6.36 图

6.37 3.0×10^6 的电阻与 $1.0 \mu\text{F}$ 的电容串联后和一个 $\mathcal{E} = 4.0\text{V}$ 的电源相连, 试求电路接通后 1.0s 时刻

- (a) 电容上电荷随时间的增长率;
- (b) 电容贮存能量的速率;
- (c) 电阻上的热功率;
- (d) 电源提供的功率 .

第七章 电磁场方程组

在本卷的前五章研究的电场、磁场都是恒定的,即不随时间变化的.上一章“电磁感应”中开始讨论非恒定情况,研究了变化电磁场的一个方面,即变化着的磁场激发电场的规律;那么它的另一方面,即变化着的电场与磁场又有什么关系呢?这正是本章首先要讨论的问题.

在人类对电磁现象认识的历史上,上述认识上的飞跃可不是轻易地完成的.在 19 世纪以前,人们认为电与磁是互不相关的,到 19 世纪初期发现电流的磁效应及磁场对载流导线的作用后,开始认识到电场、磁场出自同一源泉——电荷,但电场与磁场的直接关系仍然未被认识.到 19 世纪 30 年代法拉第发现电磁感应定律后,经过约 30 年,麦克斯韦继承了法拉第从场的观点考虑电磁学问题的方法,分析了此规律,抓住本质,提出感应电场的概念,即变化着的磁场要激发电场,从而揭开了电场与磁场联系的一个方面.可以看到正是在变化的情形,电场与磁场的联系才明显地表现出来.在研究从库仑到法拉第等前人成果的基础上,深信电场、磁场有着密切联系且具有对称性的麦克斯韦,为解决安培环路定理用到非恒定电路的矛盾,促使他提出随时间变化的电场将激发磁场的假说——即位移电流假说,从而揭示了电场与磁场间联系的另一面.在此基础上他全面地高度概括地总结了 19 世纪中叶以前的电磁学理论,把这些规律统一到非恒定的普遍情况,建立了完整的电磁理论体系——后人称之为麦克斯韦方程组(或电磁场方程组).

受时代的局限,麦克斯韦当时用的是以太模型.

它的正确性为实践所证实,因而被公认为是宏观电磁理论的基础,是人类认识电磁运动规律史上的一个里程碑.

本章将先引入位移电流概念,在此基础上介绍麦克斯韦方程组,最后讨论电场与磁场的相对性,以使我们 对电场磁场的统一性有进一步了解 .

§ 7.1 位 移 电 流

7.1.1 简单回顾

位移电流假说是麦克斯韦为了使得安培环路定理能推广到非恒定情形而提出的.为了说明位移电流的概念,本节中先简单回顾对安培环路定理的理解,接着指出把它用到非恒定情形出现的矛盾,最后看到引入位移电流后这矛盾就可解决.

对恒定电流的磁场,安培环路定理的数学表达式为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (7.1.1)$$

图 7.1.1 在恒定电流的磁场中用安培环路定理

有关从麦克斯韦方程组导出电磁场波动方程以及电磁波的性质等内容将在本教程的《波动与光学》卷中讨论.

式中 I 是闭合曲线 L 所包围的电流的代数和(或说成与闭合曲线 L 相环套的电流). 确切些应该说 I 是穿过以闭合曲线 L 为边界的任意曲面的传导电流强度. 如图 7.1.1 所示, 在恒定电流磁场中作一闭合曲线 L , 对于以 L 为边界的曲面 S_1 , 穿过它的电流为 I , 由安培环路定理, 可知

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{或} \quad \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S})$$

由于电流恒定, 电流线连续, 穿过电路各截面的电流相等, 所以对另一个同样以 L 为边界的曲面 S_2 , 穿过它的电流亦是 I , 由安培环路定理同样可得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{或} \quad \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S})$$

可以看到, 对恒定电流, 由于电流是连续的(电流线是闭合的), 在这种恒定电流磁场中用安培环路定理不会出现问题.

7.1.2 用到开口电路时的矛盾

问题出在把安培环路定理用到非恒定的开口电路的情形. 考察如图 7.1.2 所示的有电容的开口电路. 在电容器充电过程中某时刻电流强度为 I , 电流方向如图. 以闭合曲线 L 为边界作一曲面 S_1 , 很明显穿过 S_1 面的电流为 I , 如安培环路定理仍成立, 则有

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

同样以 L 为边界作另一曲面 S_2 , 让 S_2 通过电容器极板中空间而不与电路中任一导体截面相交, 如图 7.1.2 所示. 那末对 S_2 来说, 由于传导电流在极板处中断, 穿过它的电流为零. 如安培环路定理仍成立, 则得

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

上面两式的左边是同一时刻的磁场强度 \mathbf{H} 沿同一闭合曲线 L 的

图 7.1.2 在非恒定情形用安培环路定理

环流, 是同一物理量, 只能有一个值. 而两等式的右边却不相等, 出现了矛盾, 这个矛盾的直接原因是电流不再连续. 这样看来原来的安培环路定理对非恒定情形不再成立. 那么在非恒定情形, 磁场强度 H 的环流应与什么物理量相联系?

7.1.3 位移电流

对于这样的矛盾, 人们可以在已有知识的基础上分析产生矛盾的原因, 根据自己的想法提出假说, 从理论上来解决它. 当然这一假说是否符合客观规律得靠实践来检验. 如前所述, 出现上述矛盾的根源在于开口电路中电流的不连续性. 麦克斯韦注意到极板处电流的不连续引起极板上电量的变化, 而这又导致板间电场的变化. 设想在电容极板间亦有某种“电流”(自然这儿已不是指原来的电荷在导体中流动意义上的电流)通过, 它与电场的变化相联系, 且它在量值上与同时刻电路中的传导电流相等, 即保持“电流”闭合, 那么这个开口就被“连上”, 形式上这个矛盾就可以解决.

具体来说, 对于如图 7.1.2 所示情况, 电容器正在充电, 极板上的电量 q 在随时间增加, 因而两极板间的电场亦在随时间增强, 所以穿过极板间某一面(如 S_2)的电通量将随时间增加. 下面我们

就来找传导电流 I 与板间电通量变化的定量关系.

如图 7.1.3 所示, 电容正在充电, 仍取 S_1 曲面通过导线, S_2 曲面通过电容器极板间空间, 则 S_1 、 S_2 两曲面构成一闭合面 S , 对它用高斯定理 得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

图 7.1.3 推导电容充电时传导电流与电通量增加的关系用图

由于导体的电导率较大, 一般说来导体内的 E 、 D 都远较电容器极板间的 E 、 D 为小, 故通过 S_1 面的电位移通量可忽略, 从而上式可改写为

$$\oint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$$

等式两边对时间求导, 得

$$\frac{d}{dt} \oint_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt}$$

而 $\frac{dq}{dt} = I$, 所以有

麦克斯韦认为在非恒定情形高斯定理仍然成立, 详见下节.

在学过本节第四部分“全电流”概念后, 可知这样处理并不意味着位移电流概念有什么近似性.

$$\frac{d}{dt} \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = I \quad (7.1.2)$$

或
$$\frac{d \mathbf{D}}{dt} = I \quad (7.1.3)$$

即穿过 S_1 面的传导电流 I 量值上等于穿过 S_2 面的电位移通量的时间变化率 $\frac{d \mathbf{D}}{dt}$. 麦克斯韦把这个量叫做位移电流. 亦就是说, 在电容器极板处中断的传导电流 I 被位移电流 $\frac{d \mathbf{D}}{dt}$ “接替”, 形式上保持着“电流”的连续性, 如图 7.1.4 所示. (图上画的是充电的情形, 请读者自己画出电容器放电时的传导电流及位移电流的方向), 这样就消除了引起矛盾的根源.

图 7.1.4 板间位移电流“接替”传导电流

普遍说来, 在非恒定情形, 对任一以闭合曲线为边界的曲面, 可能同时有传导电流及位移电流穿过它. 自然, 那时磁场强度 H 的环流应服从如下规律

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d \mathbf{D}}{dt} \quad (7.1.4)$$

式中 I 是穿过以 L 为边界的任意曲面 S 的传导电流, \mathbf{D} 是穿过同一曲面的电位移通量. 考虑到

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

$$D = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

而 S 面相对观察者是静止的, 因此

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S}$$

于是(7.1.4)式可写成

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.1.5)$$

可以说这是经麦克斯韦推广的安培环路定理, 它是麦克斯韦方程组中的一个方程. 它的正确性由麦克斯韦方程组的推论与无数实验结果相符而得到证实.

麦克斯韦称 $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ 为位移电流密度, 它与 \mathbf{j} 以同等地位出现在上式右端, 这反映位移电流密度 $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ 与传导电流密度 \mathbf{j} 按相同的规律激发磁场, 或者说位移电流与传导电流在激发磁场这一点上是等效的, 这就是(7.1.5)式所揭示的新的规律的物理内容. 也正是由此才把 $\frac{d\mathbf{D}}{dt}$ 称为“电流”. 这意味着对“电流”这一概念的推广, 即推广后的“电流”已不是指“电荷的流动”, 而要从以(7.1.5)式表达的规律激发磁场这一角度来理解.

现在再来分析位移电流的组成, 以便进一步理解位移电流的实质. 电介质中任一点的电位移矢量 \mathbf{D} 与该点的场强 \mathbf{E} 及同一点的介质极化强度 \mathbf{P} 间存在如下关系:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

因此

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (7.1.6)$$

首先看看 $\frac{d\mathbf{P}}{dt}$ 表示什么? 设介质单位体积内有 N 个偶极子, 某一时

刻平均说来每个偶极子具有电矩 p , 在 t 时间内由于场强的变化每个偶极子的电矩由 p 变为 $p + \Delta p$, 相应的介质极化强度由 Np 变为 $N(p + \Delta p)$. 偶极子平均电矩的变化可以等效为偶极子的正电荷发生位移 l 造成的, 即

$$\Delta p = q \Delta l$$

这样, 极化强度对时间的变化率为

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(p + \Delta p) - Np}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} N q \frac{\Delta l}{\Delta t} = N q v$$

由于 Nqv 表示单位时间内通过垂直于 v 的单位面积的电量, 因此

$\frac{\Delta p}{\Delta t}$ 相当于电流密度. 由于 q 的移动不能超过原子或分子的范围,

故可称之为束缚电流密度. 就是说 $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ 反映了电介质内与极化强度变化对应的束缚电荷定向移动形成的电流密度. 当然, 在真空中由于 p 恒为零, $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ 就等于零.

再来看(7.1.6)式右边第一项 $\epsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t}$ 的意义, 它只由电场强度的变化率决定. 如前所述, 真空中位移电流只由这一项组成, 可以说 $\epsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t}$ 是位移电流的基本部分, 它完全由电场随时间的变化率决定而与电荷的定向移动毫无关系. 因此麦克斯韦位移电流假说的物理实质简单说来就是变化着的电场能激发磁场.

由此看来, 位移电流和传导电流除了按相同的规律激发磁场外, 其他方面是不同的. 真空中的位移电流不伴有电荷的任何运动, 谈不上产生焦耳热, 即使在介质中, 由于 $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ 项的存在, 位移电流会产生热效应, 然而这和传导电流通过导体产生焦耳热的性质

为方便起见, 这儿用无极分子的位移极化来说明, 但结论对有极分子亦成立.

也不同,两者的发热遵循不同的规律.

7.1.4 全电流

麦克斯韦把通过空间任一截面的传导电流与位移电流之和称为通过该截面的全电流,即

$$I_{\text{全}} = I_{\text{传导}} + I_{\text{位移}}$$

全电流在任何情况下都连续,这一性质证明如下:将D的高斯定理表达式两端对时间求导可得

$$\oint_s \frac{D}{t} j_{\text{D}} dS = \frac{dq}{dt}$$

由电量守恒定律知

$$\oint_s j j_{\text{D}} dS = - \frac{dq}{dt}$$

将上两式相加,得

$$\oint_s j + \frac{D}{t} j_{\text{D}} dS = 0$$

而 $j + \frac{D}{t} j_{\text{D}}$ 正是全电流密度,上式说明此量通过任意封闭面的通量(即 $I_{\text{全}}$)为零.可见全电流不会中断,或者说全电流总是连续的.

应该注意,传导电流可以有间断(如在电容器极板处),位移电流亦可不连续(如从介质到导体,位移电流量值将变小),但电路中任一截面上二者之和却总是连续的.

引入全电流概念后,(7.1.4)式可写为

$$\oint_L H j_{\text{D}} dl = I_{\text{全}} \quad (7.1.7)$$

上式称为全电流定律.安培环路定理是它的一个特例,即对场是恒定的情形, $\frac{D}{t} = 0$, 则 $I_{\text{全}} = I_{\text{传}}$, 于是(7.1.7)式就回到安培环路

在此以前的 I 都是指传导电流 $I_{\text{传}}$.

定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{传}} \quad (\text{或写成 } I)$$

如空间电场是随时间变化的, 但电路中各截面有 $I_{\text{位移}} \approx I_{\text{传导}}$, 即指电场变化不太快的所谓似稳情况, 亦可用上式来解磁场问题而不致引起太大的误差。

例 1 如图 7.1.5 所示, 半径 $R = 0.1\text{m}$ 的两块圆形平板平行放置, 构成平板电容器, 两板间距 $d \ll R$ (为避免图占太大面积, 所以未完全按比例画). 如充电过程某时刻电容器两板间的场强时间变化率为 $\frac{dE}{dt} = 10^{13} \text{ V/m} \cdot \text{s}$; 求此时刻: (1) 两板间的位移电流; (2) 两板间离中心线为 $r = 2\text{cm}$ 处 P 点的磁感强度.

解 (1) 由于 $d \ll R$, 可以认为两板间电场均匀, 且可忽略边缘的电通量, 所以两板间的位移电流为

$$\begin{aligned} I_{\text{位}} &= \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(R^2 E)}{dt} \\ &= R^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \\ &= 3.14 \times (0.1)^2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{13} \\ &= 2.78\text{A} \end{aligned}$$

(2) 由于全电流对中心线是对称的, 所以它激发的磁场对中心线亦应是对称的, 因此离中心线等距离处的磁感强度(或磁场强

对电路中的导体有 $j_{\text{传}} = \frac{E}{\rho}$, 式中 ρ 为导体的电阻率, $j_{\text{传}}$ 为传导电流密度. 而

同一处的位移电流密度为 $j_{\text{位}} = \frac{dD}{dt}$. 通常, 可认为金属的极化强度 $p \approx 0$, 因而 $D = \epsilon_0 E +$

$p = \epsilon_0 E$. 所以 $j_{\text{位}} = \frac{dD}{dt} = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$. 对交变电场 $E = E_0 \sin \omega t$, 则 $j_{\text{传}} = \frac{E_0}{\rho} \sin \omega t$, $j_{\text{位}} = \epsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t$. 二者峰值之比 $j_{\text{位max}}/j_{\text{传max}} = \epsilon_0 \omega \rho$. 一般金属导体的电阻率 ρ 的数量级为 $10^{-8} \sim 10^{-6} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$, 代入 ϵ_0 的数值, 则 $j_{\text{位max}}/j_{\text{传max}} \approx 10^{-19}$. 可见除非 ω 极高, 否则导体内 $j_{\text{位}} \approx j_{\text{传}}$.

图 7.1.5 例 1 用图

度)应相等. 过 P 点作半径为 r (圆心在中心线上) 的圆形闭合曲线 L 如图 7.1.5 所示, 对此闭合曲线 L 用全电流定律得

$$\oint_L H \cdot dl = \sum_s \frac{D}{t} \cdot \oint_s ds$$

根据 $\oint_s B \cdot ds = 0$ 即 B 线连续的性质, 不难分析出圆上的 B 必处处与圆相切. 又 $H = \frac{B}{\mu}$, $S = \pi r^2$ 代入上式得

$$\begin{aligned} \frac{B}{\mu} 2\pi r &= \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2 \\ B &= \frac{\mu_0}{2} r \frac{dE}{dt} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 8.85 \times 10^{-12}}{2} \times 10^{13} r \\ &= 5.56 \times 10^{-5} r \\ &= 1.11 \times 10^{-6} T \end{aligned}$$

上式说明板间磁感强度 B 与 r 成正比. 请读者与圆柱形载流导体内(电流均匀分布于截面)的磁场相对比, 可以看出二者完全类似. 毫不奇怪, 位移电流与传导电流在激发磁场上完全等效, 它们服从同样的规律, 所以电流密度分布相同的位移电流与传导电流, 在空

间激发的磁场必定一样.

§ 7.2 麦克斯韦方程组

19 世纪中期麦克斯韦在前人已发现的电磁学规律的基础上, 从理论上进行概括、总结和推广, 建立了完整的电磁场理论——电磁场方程组.

先介绍这方程组的积分形式

7.2.1 积分形式的麦克斯韦方程组

首先关于电场及其规律. 在麦氏以前已认识到电荷产生电场, 且静电场及恒定电场(相应场量以脚标“1”表示)服从以下规律

$$\oint_L \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (7.2.1)$$

$$\oint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{s} = q \quad (\text{或} \quad \int_V \rho \, dV) \quad (7.2.2)$$

亦即静电场是无旋场, 它的 \mathbf{D} 线不闭合.

麦氏电磁理论的基本定律之一是根据电磁感应定律给出的变化的磁场产生电场即感应电场或涡旋电场(相应的场量以脚标“2”表示)的规律, 即

$$\oint_L \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (7.2.3)$$

而且
$$\oint_S \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (7.2.4)$$

这说明感应电场是有旋场, 它的 \mathbf{D} 线闭合.

在普遍情况下, 电场可以由电荷和变化磁场共同产生, 这时的电位移矢量 \mathbf{D} 应是两者的矢量和, 即

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2$$

穿过任一封闭面的电位移通量应为

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{S} + \oint_S \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{S}$$

将(7.2.2)式及(7.2.4)式代入上式,得

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dV \quad (7.2.5)$$

上式表明:在任何电场中,通过任意封闭面的电位移通量等于封闭面内自由电荷的代数和;即推广到非恒定情形,高斯定理仍然成立.当然应注意,(7.2.5)式中 \mathbf{D} 的含意已扩展为任何电场(不限于静电场)的电位移矢量.

同理,在普遍情形对总电场强度 \mathbf{E} 应有

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

它沿一闭合曲线 L 的环流应是

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

将(7.2.1)式及(7.2.3)式代入上式,得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (7.2.6)$$

它表明:在任何电场中,电场强度沿任意闭合曲线的线积分等于以 L 为边界的曲面上磁通量的时间变化率的负值(在右手螺旋关系的规定下).同样应该注意,上式虽然形式上与(7.2.3)式相同,但 \mathbf{E} 的含义已扩展为任何电场(不限于感应电场)的场强了.不难看出,对恒定情况, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, 电场中无感应电场成分而只有静电场.(7.2.5)式和(7.2.6)式就回到(7.2.2)式和(7.2.1)式上去,因此静电场可以看作是普遍情况下电场的一个特例.

上面可以说完成了对电场规律的推广,把它们统一到非恒定的普遍情形.现在再来对磁场规律进行同样的工作.在麦克斯韦以前人们已知道恒定磁场的基本规律是:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (7.2.7)$$

$$\oint_L H_1 \cdot dl = \int_S j_1 \cdot dS \quad (7.2.8)$$

(与前面类似,场量带脚标“1”表示这是恒定的传导电流产生的磁场,同样用脚标“2”表示位移电流的磁场).它们表明恒定传导电流的磁场是有旋场,磁力线是闭合的.上节已经介绍麦克斯韦电磁理论的另一基本思想:变化着的电场要产生磁场,而且其磁力线亦是闭合的,即

$$\int_S B_2 \cdot dS = 0 \quad (7.2.9)$$

在普遍情形,磁场应由传导电流、位移电流(变化着的电场)共同产生.这时任一点的总磁感强度 $B = B_1 + B_2$, 那么

$$\int_S B \cdot dS = \int_S B_1 \cdot dS + \int_S B_2 \cdot dS$$

由(7.2.7)式及(7.2.9)式可知

$$\int_S B \cdot dS = 0 \quad (7.2.10)$$

对总磁场强度 H 的环流,由上节已得

$$\oint_L H \cdot dl = \int_S j + \frac{D}{t} \cdot dS \quad (7.2.11)$$

(7.2.10)式表明:在任何磁场中,通过任意封闭面的磁通量总是等于零,即(7.2.7)式所表达的恒定磁场的这一规律对普遍情形仍然成立.同样要注意,(7.2.10)式中 B 的含义是指任何磁场(不限于恒定磁场)的磁感强度.(7.2.11)式即全电流定律的数学表达式.它表明:在任何磁场中,磁场强度沿任意闭合曲线 L 的线积分等于通过以 L 为边界的曲面 S 的全电流强度.

现在已经完成了对电磁场规律的总结和扩展,把它们统一到非恒定的普遍情形.(7.2.5)、(7.2.6)、(7.2.10)、(7.2.11)四式以

数学形式概括了电磁场的基本规律,下面将它们集中写在一起,成为系统完整的方程组,后人称之为麦克斯韦方程组(这里是用积分形式表达的),即

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\ \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}\quad (7.2.12)$$

这组方程表明变化的电场和变化的磁场相互激发、相互联系形成统一的电磁场.

麦克斯韦方程组是宏观电磁理论的基础,它经受了实践的检验.它在电磁学中的地位与牛顿定律在经典力学中的地位相仿.从这组方程出发通过数学演绎可以解释及推断各种宏观电磁现象.麦克斯韦电磁理论最卓越的成就,是预言电磁波(变化电磁场在空间的传播)的存在,且算出电磁波的传播速度与光速一样,进而证明了光也是电磁波,开创了人类对光的本性认识的新阶段.

7.2.2 微分形式的麦克斯韦方程组

上述的麦克斯韦方程组给出的是各电磁场量(\mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 等)在一定空间范围内(如一个闭合曲线或一个封闭面等)的积分规律,而设有表示出在空间逐点各电磁场量遵循的规律,这种规律需要通过电磁场量对空间与对时间的导数表达出来,这就要求把积分形式的方程组变换为微分形式.

应用矢量分析 中的高斯定理和斯托克斯定理, 由积分形式的电磁场方程组可直接求得其微分形式如下:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \quad \quad \quad \text{div} \mathbf{D} = \quad \quad \quad (1)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \quad \quad \text{rot} \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (2)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \quad \quad \text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \quad \quad \quad \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (4)$$

(7.2.13)

式中 $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$, 这是一组偏微分方程, 再加上由介质性质决定的电磁场量间的关系式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

就构成了表达电磁场规律的一整套方程. 利用它们原则上可以解决各种宏观电磁场问题. 例如在具体问题中给出电磁场量的初始条件与边界条件, 则求解方程组可得 $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$. 当然, 并不是所有问题都可求解, 这里主要是数学上的困难. 有的问题可求得方程的精确解, 有的只能有近似解, 有的甚至难以求解. 但是应该说这个问题的物理方面已经解决.

在本节结束前必须指出, 麦克斯韦的电磁场理论是从宏观电磁现象中总结出来的, 与牛顿力学一样, 在宏观范围内无疑是正确的. 在更广的领域(如在高速情形、微观范围)内是否正确, 要由客观实践来鉴定. 人们用它来研究高速运动电荷产生的电磁场及一般辐射问题, 得到与实践相符的结论, 因此麦克斯韦方程在高速领域仍然是正确的. 上世纪末本世纪初洛伦兹把麦克斯韦方程推广到分子和原子的微观领域, 创立了电子论, 对电磁现象作了微观解释, 获得一定成功, 但也遇到了不可克服的困难, 即理论与实际结

见一般有关数学教材.

果不符,这说明宏观电磁理论在微观领域并不完全适用. 经过本世纪几十年的探索,随着量子力学的发展,建立了更普遍的适用于微观领域的电磁理论——量子电动力学. 麦克斯韦理论可以看成是量子电动力学在宏观范围内的近似规律. 正如牛顿力学是量子力学在宏观范围内的近似规律一样,它们都是在一定条件下的相对真理,是人类认识自然界的无穷过程中的一个阶段.

§ 7.3 电磁场的统一性 电磁场量的相对性

本节将通过在不同参照系中描述同一电磁场场量的不同来说明电磁场量的相对性,以使我们对于电磁场的统一性有进一步的了解.

7.3.1 电磁场的统一性

前面我们多次提到电场和磁场是一个统一的整体,所以这种场应该称为电磁场,而静止电荷的静电场和恒定电流(运动电荷)的磁场不过是电磁场的二种特例. 无论在人类认识电磁现象的历史上,或是在本卷的学习过程,都是先从电场这个侧面,稍后是从磁场这个侧面来认识电磁场,最后才从二者的相互联系,认识到统一电磁场的存在.

为了更清楚地说明电磁场的统一性,我们可以从不同参照系观察同一电磁场得出不同结论来阐述. 如果地面上有一静止电荷,观察者甲相对于地面参照系 S 是静止的,那末这个在地面参照系 S 中的观察者通过实验,将发现在电荷周围存在着静电场. 有另一观察者乙在地面上作匀速运动,即此观察者在与地面有相对运动的另一参照系 S' 中,这样静止于地面参照系 S 中的电荷对参照系 S' 来说是运动的,从而形成电流. 因此参照系 S' 中的观察者乙将发现此电荷周围既有电场又有磁场. 那么在这个电荷周围究竟存

在什么场?确切的回答是存在着电磁场.至于有的观察者看到只有静电场,有的观察者看到电场和磁场都存在,那是由于观察者对电荷的相对运动情况不同,因此认识的侧面也就不同,正是这些不同又互有联系的侧面反映了电磁场作为一个统一客体的存在.

7.3.2 电磁场量的相对性 不同惯性系中场量的变换式

上述事实说明:电场和磁场是一个相对的概念.在力学中我们知道要描述机械运动,先要选定参照系,对同一物体的运动,不同参照系的描述不一.现在看到描述电磁运动亦不例外.在此之前,虽未明确指出,实际上本卷所讨论的电磁现象都是在某一确定的惯性系内观察和研究的,因此这些电磁学规律都只适用于惯性参照系.一般说来,在不同的惯性参照系中描述同一电磁场的场量有不同的值(包括大小及方向),即电磁场量具有相对性.那么不同惯性系中描述同一电磁场的场量之间又有什么联系呢?

理论和实验都表明,电磁场方程组在所有惯性参照系具有相同的形式.而不同惯性系之间的时间、空间的变换应该遵循洛伦兹变换,所以上述结论称为电磁场方程组在洛伦兹变换下具有不变性.

为讨论问题方便,在 K 、 K' 两惯性系中建立对应轴互相平行的直角坐标系,且让 X 轴的正方向沿着 K' 相对于 K 的速度 u ,如图 7.3.1 所示.两个坐标系的原点 O 、 O' 在 $t = t' = 0$ 时重合.根据电磁场方程组在洛伦兹变换下的不变性,可以证明(见本章 § 7.4),同一时刻同一点 P 的场量在 K 系中的值 E 、 B 和在 K' 系中的值 E' 、 B' 之间有以下关系:

由于坐标系建立是任意的,这样做并未影响结论的普遍性.

图 7.3.1 K 系以速度 u 相对于惯性系 K 运动

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_x & B_x &= B_x \\
 E_y &= \frac{E_y - \frac{uB_z}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} & B_y &= \frac{B_y + \frac{uE_z}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\
 E_z &= \frac{E_z + \frac{uB_y}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}} & B_z &= \frac{B_z - \frac{uE_y}{c}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}
 \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

式中 $c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ 是电磁场在真空中的传播速度, 即真空中的光速,
 $= \frac{u}{c}$. (7.3.1) 式便是电磁场量从一个惯性系变换到另一惯性系的变换式.

为具体起见, 我们用上述变换式来讨论两个例子.

例 1 两块长为 a 、宽为 b 的大平板, 分别带有电量 $+Q$ 、 $-Q$, 平行放置, 间距甚小, 如图 7.3.2 所示. 它们静止在 K 系, 因此 K 系内的观察者测出, 在两块大平板间有一均匀电场, 其场强为

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 ab} Y$$

式中 Y 是 y 轴方向的单位矢量. 在 K 系内观测并无磁场. 把 K 系内两板间的场量各分量写出:

图 7.3.2 例 1 用图

$$E_x = 0 \quad B_x = 0$$

$$E_y = \frac{Q}{\epsilon_0 ab} \quad B_y = 0$$

$$E_z = 0 \quad B_z = 0$$

由变换式(7.3.1)可求得 K 系内两大平板间的场量各分量为:

$$E_x = 0 \quad B_x = 0$$

$$E_y = \frac{Q}{\epsilon_0 ab} \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad B_y = 0$$

$$E_z = 0 \quad B_z = -\frac{\frac{u}{c^2} \frac{Q}{\epsilon_0 ab}}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

可见对 K 系内的观察者来说, 两块大平板间既有电场又有磁场, 电场尽管亦是均匀的, 但与 K 系中的场强亦不相等, 为 K 系测得的场强的 $\frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}$ 倍.

这个结果其实并不奇怪, 因为这两块带电平板在 K 系中并不是静止的, 而是以速率 u 沿 x 轴负方向运动. 所以在 K 系中的电

磁场是由两块以速率 u 沿 x 轴负方向运动的带电平行大平板产生的. 根据狭义相对论, 考虑到运动方向长度的缩短, K 系中平板的长度为 $a \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, 宽度仍为 b , 平板的电荷面密度分别为 $\frac{Q}{ab \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$ 和 $-\frac{Q}{ab \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$, 所以 K 系中测得的电场强度为

$$E = \frac{Q}{ab \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

方向沿 y 轴方向, 与变换式所得结果一致. 同样在 K 系内由安培环路定理(作扁长方形回路包住一板, 让长边平行 z 轴)不难求得两板间的磁感强度

$$B = \frac{\mu Q u}{ab \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

方向沿 z 轴负方向. 注意到 $\mu = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$, 可以看出与由变换式得到的结果也是一致的.(建议读者自己算一下.)

例 2 匀速运动点电荷的电磁场

设点电荷固定于 K 系的坐标原点, 则在另一相对于 K 系以速率 u 沿 x 轴负向匀速运动的惯性系 K' 中, 此点电荷便以速度 u 匀速运动.

图 7.3.3 例 2 用图

K 系中与点电荷 q 相距 r 的 $P(x, y, z)$ 点的电场强度和磁感

强度分别为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad B = 0$$

或者写成分量式:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r} \quad B_x = 0$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{y}{r} \quad B_y = 0$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} \quad B_z = 0$$

由变换式(7.3.1)不难得到在 K 系中相应的场量为:

$$E_x = E_x = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad B_x = B_x = 0$$

$$E_y = E_y / \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad B_y = \frac{-\frac{u}{c^2} E_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} r^3}, \quad = \frac{-\frac{uqz}{c^2}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} r^3}$$

$$E_z = \frac{E_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad B_z = \frac{\frac{u}{c^2} E_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} r^3}, \quad = \frac{\frac{uqy}{c^2}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} r^3}$$

既然 E、B 是 K 系中的场量, 应该用 K 系中的坐标量来表示. 根据洛伦兹变换式, 有

$$x = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y = y$$

$$z = z$$

$$r = \frac{(x - x_0)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} + y^2 + z^2 \quad 1/2$$

式中 x_0 为 K 系的坐标原点 o 在 K' 系中的坐标. 以 r 表示 K 系中场点 P 相对于运动的点电荷的位置矢量, θ 为 r 与点电荷运动方向(即 x 轴)间夹角, 则有 $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \theta$, 且

$$r = \frac{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2 - \frac{u^2}{c^2}(y^2 + z^2)}{1 - \frac{u^2}{c^2}}^{1/2}$$

$$= r \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}{1 - \frac{u^2}{c^2}}^{1/2}$$

将上述结果代入 K 系中场量表达式, 注意到真空中光速 $c =$

$1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 可得相应的场量值为

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}{(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \frac{\mu_0 q u \sin \theta}{4\pi r^2} \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}{(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

写成矢量形式, 有

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}{(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (7.3.2)$$

$$B = \frac{\mu_0 q u \times r}{4\pi r^3} \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta}{(1 - \frac{u^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (7.3.3)$$

即在 K' 系中观察, 除有电场外还有磁场, 且电场与 K 系中观察到的亦不同. 这亦不难理解, 因为从 K 系来看, 点电荷 q 不是静止的, 而是沿着 x 轴正方向以速率 u 匀速运动. 由(7.3.2)式可以看出, 在以点电荷 q 所在处为球心, 半径为 r 的球面上各点的 E 的大小不等, 其值与矢径 r 与 x 轴亦即电荷速度 u (对 K 而言)之间的夹角 θ 有关. 在 $\theta = 0$ 或 π 的方向上, 场强最小, 其值为

$$E_{\min} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 - \frac{u^2}{c^2})$$

在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$ 的方向上, 场强最大, 其值为

$$E_{\max} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{1 - \beta^2}$$

在矢径 r 与 v 的夹角为其它值的方向上, 场强 E 的值介乎 E_{\min} 与 E_{\max} 之间. 这表明匀速运动的点电荷产生的电场没有球对称性, 速率愈大, 不对称性愈明显. X 、 Y 平面内电力线的分布(对某一 β 值)大致如图 7.3.4 所示. 在此场内作一闭合曲线 $abcd a$ 如图 7.3.4 所示. 由于 bc 段、 ab 段与场强 E 垂直, 而 E 沿 dc 段的线积分大于沿 ab 段的线积分, 所以场强 E 沿此闭合曲线的线积分

$\oint_{abcd a} E \cdot dl \neq 0$. 即高速运动的点电荷产生的电场与静电场不同, 它不是保守场.

图 7.3.4 匀速运动电荷的电力线

如果点电荷的运动速度远小于真空中的光速, 则 $1 - \beta^2 \approx 1$, 于是(7.3.2)式和(7.3.3)式变为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 q u}{4\pi r^2} \sin\theta$$

写成矢量式

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{u} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

这表明, 在点电荷的运动速度远小于光速时, 库仑定律和毕奥-萨伐尔定律是近似成立的.

可以看到, 由电磁场量的洛伦兹变换式, 实际上也得到了电荷运动时的场.

* § 7.4 电磁场的相对论变换

对电磁场的相对论变换做普遍、严格的推导比较抽象. 本节我们尝试从某些特例入手, 经推导及归纳求出电磁场的相对论变换式. 过程中主要用到以下三点: 1) 电量是相对论不变量; 2) 麦克斯韦电磁场方程组满足相对性原理; 3) 洛伦兹时空变换关系.

7.4.1 电量是相对论不变量

在学习了相对论之后, 人们对经典观点中的不变量自然会持慎重态度, 但实验表明电量是相对论不变量. 较为直接的实验是比较氢分子和氢原子的电中性. 氢分子和氢原子都有两个电子在核外运动, 它们的运动状态相差不大. 氢分子中有两个质子, 它们作为两个原子核在保持相对距离约为 0.07nm 的情况下转动. 氢原子中也有两个质子, 但它们组成一个原子核, 紧密地束缚在一起转动. 人们已经知道氢原子中两个质子相互作用的能量远大于氢分子中两个质子的相互作用能(约大百万倍), 因而二者中质子的运动有巨大的差别. 如果电量与运动状态有关, 则氢分子中质子的电量就应不同于氢原子中质子的电量, 而两者的电子的电量是相同的, 因此, 两者就不可能都是电中性的. 但实验证实, 氢分子和氢原

子都精确的为电中性的. 测量其电中性的精确度高达 10^{-20} . 这表明电量与运动状态无关. 还有许多其他实验也都同样证实了这一结论.

7.4.2 磁场是电场运动的相对论效应

这里我们讨论在一个惯性系中仅有静电场, 而变换到另一惯性系中则不仅有电场, 还出现了磁场的情形. 设 K 系和 K' 系都是惯性系. K 系中的电场是由静止于其中的二无限大带电平面产生. 二平面平行于 xz 平面放置, 其上均匀带有等量异号电荷, 其电荷面密度的绝对值为 σ_0 . 因此, 在 K 系中, 二平面之间有均匀的静电场, 但无磁场. 在 K' 系中观测, 二平面以恒速 u 运动, 这就形成了二恒定的流向相反的无限大平面电流; 于是在二平面间便既有均匀恒定的电场又有均匀恒定的磁场. 这表明 K' 系中的磁场应是 K 系中的电场运动的相对论效应.

图 7.4.1

在 K 系中, 电场强度 E 沿 y 轴方向, 由高斯定理可求得

$$E = \sigma_0 / \epsilon_0$$

在 K' 系中, 为了求 E , 先由对称性证明 E 的方向必然垂直于二平面. 我们用反证法. 在二平面间正中取一点 P , 设 P 点的电场强度 E 如图 7.4.2(a) 所示. 过 P 作平行于平面的直线 mn , 并使二

平面以 mn 为轴转动 180° ; 则 P 点的场强将变为图 7.4.2(b) 中 E^* , 而二带电平面位置与图(a)相比恰巧对换. 对图(b)所示情况改变二平面所带电荷符号, 则 P 点场强应变为图 7.4.2(c) 中 E . 比较图(c)与图(a), 场源复原而 P 点的 E 方向却不相同. 这一矛盾意味着 P 点场强 E 的方向应与二平面垂直. 由于无限大带电平面产生的场是均匀场, 这一结论适于板间任一点.

图 7.4.2

下面来求 E 的大小. 二平面以恒速 u 运动, 由狭义相对论, 其沿 u 方向的长度必缩短至 $l_0 = \frac{l}{1 - u^2/c^2}$ 倍, 相应面积缩小至 $1/\gamma$ 倍. 但面上总电量不变, 故其面电荷密度的绝对值增大 γ 倍, 即有

$$\sigma = \gamma \sigma_0$$

K 系中麦克斯韦方程组成立, 由其中电通量方程可求得二平面间电场

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \gamma \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \gamma E_0$$

至于 K 系中的磁场, 可计算如下.

K 系中二平面上的面电流密度的绝对值为

$$i = \sigma u = \gamma \sigma_0 u = \gamma E_0 u$$

由麦克斯韦方程组中关于 B 的环路定理, 注意到 $\partial E / \partial t = 0$, 可求得二平面间磁感应强度大小为

$$B = \mu_0 i = \mu_0 \gamma E_0 u$$

代入真空中光速 $c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$, 可得

$$B = \epsilon_0 \frac{u}{c^2} E$$

将上述结果写成投影式得

$$\begin{aligned} E_y &= \epsilon_0 E_y \\ B_z &= \epsilon_0 \frac{u}{c^2} E_y \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

上面只讨论了 K 系中电场的一个分量 E_y 的情形. 为了求得电场的另两个分量的变换, 我们改变二带电平面的方位. 首先使之与 $x-y$ 面平行, 如图 7.4.3 所示. 采用与前面相同的方法可得 K 系中场量为

$$\begin{aligned} E_z &= \epsilon_0 E_z \\ B_y &= -\epsilon_0 \frac{u}{c^2} E_z \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

图 7.4.1 和图 7.4.3 都是电场方向与运动方向垂直的情况.

图 7.4.3

再改变二带电平面方位, 使它们与 $y-z$ 平面平行, 此时 K 系中静电场方向与参照系的相对运动方向 (即 x 轴) 平行, 如图 7.4.4.

在 K 系中, 因二平面运动速度垂直于该二平面, 这将导致二平面间的距离缩小, 但其面积不变, 因而其面电荷密度也不变, 即

图 7.4.4

$= 0$. 由关于电通量的方程可以求得二平面间电场强度

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{0}{0} = E$$

这种情况下 K 系中有磁场吗? 首先, 如果有磁场, 根据此时带电平面的运动方向以及它扫过的空间的电场变化的方向均沿 x 轴可判定, 磁场方向应与 yz 平面平行. 因而不妨设任一点 P 的磁感强度 B 沿平行于 yz 平面的任一方向, 如图 7.4.5 所示. 过 P 作垂直于带电平面的直线, 以此直线为轴使二带电面转过任一角度 θ , 则 B 转过相同角度而如图中 B^* 所示. 转动后带电面上电荷分布及其运动无变化, 而 B 的方向却有了改变. 这一矛盾表明, B 不可能存在沿 y 或 z 的分量. 因而此时在 K 系中磁场必然也为零.

将上述结果写成 x 方向的投影式, 有

$$\begin{aligned} E_x &= E_x \\ B_x &= 0 \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

综合以上讨论的各种情况, 可以将二惯性系中场量的关系归纳为, 当 K 系中仅存在电场时, K 系中的场量可由下列一组关系给出:

图 7.4.5

$$\begin{aligned}
 E_x &= E_x & B_x &= 0 \\
 E_y &= {}_0E_y & B_y &= - {}_0 \frac{u}{c^2} E_z \\
 E_z &= {}_0E_z & B_z &= {}_0 \frac{u}{c^2} E_y
 \end{aligned} \tag{7.4.4}$$

而由式(7.4.4)又可将 K 系中 E、B 间关系写为

$$B = \frac{1}{c^2} u \times E \tag{7.4.5}$$

7.4.3 电场是磁场的相对论效应

现在我们讨论在一个惯性系中仅有磁场,而在另一惯性系中,不仅有磁场,还出现电场的情形.仍讨论二无限大均匀带电平面的特例. K 系相对 K 系以恒速 u 沿 x 轴正方向运动.设此二平面紧密地靠在一起,其上均匀带有异号电荷,静止时电荷密度的绝对值皆为 ${}_0$.在 K 系中二者以相同的恒速率 v 平行于 x 轴沿相反方向运动,如图 7.4.6(a).

图 7.4.6

K 系中, 二平面电荷面密度较静止时增加相同倍数, 其正负电荷恰好中和, 但它们的电流流向都相同, 故二平面外侧只有均匀恒定的磁场而无电场. 在 K' 系中, 二平面以不同的恒速率 v_1 和 v_2 平行于 x 轴沿相反方向运动, 其电荷密度较静止时增加不同的倍数, 因而正负电荷不能完全中和, 故二平面外侧既有均匀恒定的磁场又有均匀恒定的电场. 这表明 K' 系中的电场是 K 系中的磁场运动的相对论效应.

在 K' 系中, 二平面上面电荷密度的绝对值皆为 $\sigma' = \sigma_0 \gamma$, 其中

$$\gamma = \frac{1}{1 - v^2/c^2}.$$

其上电流密度的绝对值皆为

$$i' = \sigma' v = \sigma_0 \gamma v.$$

因二平面上电流同向, 相应的总面电流密度的绝对值为

$$i_{\text{总}} = 2i' = 2\sigma_0 \gamma v.$$

由安培环路定理可求得平面两侧磁感强度大小

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 i_{\text{总}} = \mu_0 \sigma_0 \gamma v.$$

B 的方向与 z 轴平行, 上下两侧方向相反.

下面求 K' 系中的场量 B、E 以及它们和 B 的关系. 为此

先行导出 v_1 和 v_2 与 v 的关系以及 $\gamma_1 = \frac{1}{1 - v_1^2/c^2}$ 、 $\gamma_2 = \frac{1}{1 - v_2^2/c^2}$ 与 γ 的关系.

由洛伦兹速度变换式 $v_x = \frac{v_x + u}{1 + uv_x/c^2}$, 并注意到 $v_y = v_z = 0$ 得

$$v_{1x} = v_1 = \frac{v + u}{1 + uv/c^2} \quad v_{2x} = -v_2 = \frac{-v + u}{1 - uv/c^2}$$

由洛伦兹变换 $t = \gamma(t + \frac{u}{c^2}x)$ 得 $dt/dt = \gamma(1 + uv_x/c^2)$, 又因 $dt/dt = d\tau/d\tau = 1$ ($d\tau$ 为原时), 故 $\gamma = \gamma_0(1 + uv_x/c^2)$. 由此得

$$\gamma_1 = \gamma_0(1 + uv/c^2), \quad \gamma_2 = \gamma_0(1 - uv/c^2)$$

在 K 系中二平面上的电荷密度的绝对值分别为

$$\rho_1 = \gamma_1 \rho_0 = \gamma_0(1 + uv/c^2) \rho_0$$

$$\rho_2 = \gamma_2 \rho_0 = \gamma_0(1 - uv/c^2) \rho_0$$

相应的面电流密度绝对值分别为

$$i_1 = \rho_1 v_1 = \gamma_0(v + u) \rho_0,$$

$$i_2 = \rho_2 v_2 = \gamma_0(v - u) \rho_0$$

因二平面上电荷异号, 二者的总面电荷密度的绝对值为

$$\rho_{\text{总}} = \rho_1 - \rho_2 = 2\gamma_0 \frac{uv}{c^2} \rho_0 = 2\gamma_0 \mu_0 uv \rho_0$$

由电场的通量定理可求得面外电场强度大小为

$$E = \frac{\rho_{\text{总}}}{2\epsilon_0} = \mu_0 uv \rho_0 = \gamma_0 uB$$

又因二平面上电流同向, 故总面电流密度的绝对值为

$$i_{\text{总}} = i_1 + i_2 = 2\gamma_0 v \rho_0$$

由磁场的环路定理可求得其磁感强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 i_{\text{总}}}{2} = \mu_0 \frac{v_0}{c} = \mu_0 B_0$$

E、B 方向如图 7.4.6(b) 所示, 把 E、B 与 B 的关系写成投影式, 有

$$E_y = -\mu_0 u B_z \quad (7.4.6)$$

$$B_z = \mu_0 B_z$$

类似对图 7.4.6 情况的讨论, 使二平面方位如图 7.4.7 所示, 相同的方法可得出 K 系中的场为

$$E_z = -\mu_0 u B_y \quad (7.4.7)$$

$$B_y = \mu_0 B_y$$

图 7.4.7

以上两种情况下 B 方向均与 u 垂直. 若将图 7.4.6 中二平面在 K 系中运动方向改为平行于 z 轴沿相反方向运动, 其他条件不变, 如图 7.4.8(a) 所示. 则在 K 系中仍只有均匀恒定磁场, 但其方向与 x 轴平行. 与前述相同的方法可求得磁感强度的值仍为

$$B = \mu_0 \frac{v_0}{c}$$

在 K 系中, 由洛伦兹速度变换式 $v_z = v_z / \gamma(1 + uv_x/c^2)$ 并注意到 $v_x = 0$, 得二平面运动分速度为 $v_x = u$, $v_z = \pm \frac{v_0}{\gamma}$. 由速度合成, 二平面的速率同为

图 7.4.8

$$v_{\text{合}} = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{u^2 + v^2/c^2}$$

则二平面面积将缩小相同倍数。因而其上面电荷密度等量异号，恰好中和，同时二平面却以恒速沿相反方向运动，形成一恒定无限大面电流。因此，K 系中仍无电场，而仅有磁场。下面计算 K 系中磁感强度 B。

由 K 系中平面的速率 $v_{\text{合}}$ 可得二平面上的电荷密度的绝对值皆为

$$= \rho_0$$

而其中

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 - v_{\text{合}}^2/c^2} = \frac{1}{1 - u^2/c^2 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\gamma_0^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma_0^2 \end{aligned}$$

故有

$$= \rho_0 = \rho_0 = \rho_0$$

至于面上的电流密度可按平面的二个分运动分别考虑。由于 $v_x = u$ ，二平面与此对应的电流反向等值而相互抵消。因此，只需考虑与

v_z 对应的面电流密度. 其绝对值为

$$i = \oint \mathbf{v}_z \cdot d\mathbf{l} = \oint_0^0 \frac{v}{0} = v_0$$

注意到二平面上因 v_z 产生的电流密度同向, 因而总面电流密度的绝对值为

$$i_{\text{总}} = 2i = 2v_0$$

由磁场的环路定理可求得

$$B = \frac{1}{2} \mu i_{\text{总}} = \mu v_0 = B$$

将以上所得的场量写成投影式, 有

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ B_x &= B_x \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

将式(7.4.6) (7.4.8)汇总, 可知当 K 系中仅有磁场量时, K 系中既有磁场, 又有电场. 它们之间的关系为下列一组方程

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & B_x &= B_x \\ E_y &= -\mu_0 u B_z & B_y &= \mu_0 B_y \\ E_z &= \mu_0 u B_y & B_z &= \mu_0 B_z \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

而由式(7.4.9)又可将 K 系中 E 、 B 间关系写为

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (7.4.10)$$

磁场是电场运动的相对论效应, 电场是磁场运动的相对论效应, 电磁场的统一性再不能比这两句话更清楚了. 因此我们说: 正是相对论才真正揭示了电磁场的统一性.

7.4.4 电磁场的相对论变换

对本节中§ 7.4.2 或§ 7.4.3 讨论的情况作二次变换, 便可得到电磁场的相对论变换.

如图 7.4.9, K 系以恒速相对于 K 系沿 x 轴正向运动, K 系以恒速 u 相对于 K 系沿 x 轴正向运动, 而 K 系则以恒速 u^* (由

u, u' 决定) 相对于 K 系沿 x 轴运动. 设二无限大平面在 K 系中静

止, 其上均匀带有等量异号电荷. 这样, 在 K 系中只有电场 E , 但在 K 系和 K' 系中都既有电场又有磁场. 若求出后二惯性系中场量(E, B) 与(E', B') 间关系, 便求得电磁场的相对论变换式.

由洛伦兹速度变换式可知 $u' = \frac{u + u'}{1 + uu' / c^2}$.

由 § 7.4.3 中求得诸因子关系 $\gamma = \gamma_0 (1 + uv_x / c^2)$ 可知

$$\text{其中 } \gamma_0 = \frac{1}{1 - u'^2 / c^2}, \quad \gamma = \frac{1}{1 - u^2 / c^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{1 - u'^2 / c^2}.$$

将式(7.4.4)用于从 K 到 K' 系及从 K' 到 K 系的变换, 可得

$$\begin{aligned} E_x &= E_x & B_x &= 0 \\ E_y &= \gamma_0 E_y & B_y &= -\gamma_0 \frac{u}{c^2} E_z \\ E_z &= \gamma_0 E_z & B_z &= \gamma_0 \frac{u}{c^2} E_y \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} E_x &= E_x = E_x \\ E_y &= \gamma E_y = \gamma_0 \gamma (1 + uu' / c^2) E_y \\ &= \gamma_0 \left[\gamma_0 E_y + u \gamma_0 \frac{u}{c^2} E_y \right] = \gamma_0 [E_y + u B_z] \\ E_z &= \gamma E_z = \gamma_0 \gamma (1 + uu' / c^2) E_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma_0 \left[\gamma_0 E_z + \gamma_0 \frac{u}{c^2} E_z \right] = \gamma_0 [E_z - \gamma_0 B_y] \\
 B_x &= 0 = B_x \\
 B_y &= -\gamma_0 \frac{u}{c^2} E_z = -\gamma_0 \gamma_0 \frac{u + u}{c^2} E_z \\
 &= \gamma_0 \left[-\gamma_0 \frac{u}{c^2} E_z - \frac{u}{c^2} \gamma_0 E_z \right] = \gamma_0 [B_y - \frac{u}{c^2} E_z] \\
 B_z &= \gamma_0 \frac{u}{c^2} E_y = \gamma_0 \gamma_0 \frac{u + u}{c^2} E_y \\
 &= \gamma_0 \left[\gamma_0 \frac{u}{c^2} E_y + \frac{u}{c^2} \gamma_0 E_y \right] = \gamma_0 [B_z + \frac{u}{c^2} E_y]
 \end{aligned}$$

对§ 7.4.3 讨论的情况同样可作二次变换,由式(7.4.9)可得从 K 到 K 系及 K 到 K 系的变换,因而有

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 & B_x &= B_x \\
 E_y &= -\gamma_0 u B_z & B_y &= \gamma_0 B_y \\
 E_z &= -\gamma_0 u B_y & B_z &= \gamma_0 B_z
 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
 E_x &= 0 = E_x \\
 E_y &= \gamma_0 u B_z = \gamma_0 \gamma_0 (u + u) B_z \\
 &= \gamma_0 [u \gamma_0 B_z + \gamma_0 u B_z] = \gamma_0 [u B_z + E_y] \\
 E_z &= -\gamma_0 u B_y = -\gamma_0 \gamma_0 (u + u) B_y \\
 &= \gamma_0 [-u \gamma_0 B_y - \gamma_0 u B_y] = \gamma_0 [-u B_y + E_z] \\
 B_x &= B_x = B_x \\
 B_y &= \gamma_0 B_y = \gamma_0 \gamma_0 \left(1 + \frac{uu}{c^2} \right) B_y \\
 &= \gamma_0 \left[\gamma_0 B_y + \frac{u}{c^2} \gamma_0 u B_y \right] = \gamma_0 [B_y - \frac{u}{c^2} E_z] \\
 B_z &= \gamma_0 B_z = \gamma_0 \gamma_0 \left(1 + \frac{uu}{c^2} \right) B_z \\
 &= \gamma_0 \left[\gamma_0 B_z + \frac{u}{c^2} \gamma_0 u B_z \right] = \gamma_0 [B_z + \frac{u}{c^2} E_y]
 \end{aligned}$$

即 K 系中电磁场量与 K' 系中电磁场量间的关系与前所得完全相同. 重新整理如下, 有

$$\begin{aligned}
 B_x &= B_x \\
 E_x &= E_x \\
 E_y &= \gamma_0 (E_y + u B_z) & B_y &= \gamma_0 B_y - \frac{u}{c^2} E_z \\
 E_z &= \gamma_0 (E_z - u B_y) & B_z &= \gamma_0 B_z + \frac{u}{c^2} E_y
 \end{aligned}
 \tag{7.4.11}$$

其逆变换式为

$$\begin{aligned}
 B_x &= B_x \\
 E_x &= E_x \\
 E_y &= \gamma_0 (E_y - u B_z) & B_y &= \gamma_0 B_y + \frac{u}{c^2} E_z \\
 E_z &= \gamma_0 (E_z + u B_y) & B_z &= \gamma_0 B_z - \frac{u}{c^2} E_y
 \end{aligned}
 \tag{7.4.12}$$

这便是电磁场的相对论变换公式.

电磁场的相对论变换表明了电磁场的对称性: 电场和磁场的地位对等, 一参照系中的电场和磁场对另一参照系中的电场和磁场都有贡献.

思 考 题

7.1 位移电流和传导电流有何共同点? 有何不同?

7.2 对静电场有 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 对普遍电磁场也有 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 二者在理解上有何不同?

7.3 对恒定电流的磁场有 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 对普遍的电磁场也有 $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 二者在理解上有何不同?

7.4 麦克斯韦电磁场理论的基本概念包含哪些内容?

7.5 变化磁场激发的电场,其电力线的绕行方向与磁场增加的方向构成什么关系?

7.6 位移电流激发的磁场,其磁力线的绕行方向与位移电流的方向构成什么关系?

7.7 金属导线中电子定向运动速率的数量级为 10^{-2}cm/s ,有一灯泡用 2 根 1m 长的金属导线与电源相连,则一电子从电源出发跑到这灯泡需时 10^4s 3h. 但实际上一接通电源,灯泡立刻就亮了,这里有无矛盾?

习 题 七

7.1 一平行板电容器 C 上的电势差 U 是变化的, 试证平行板电容器极板间的位移电流为

$$I_{\text{位移}} = C \frac{dU}{dt}$$

上式对一般电容器是否成立? 如果电容器是由两同轴圆筒组成, 则极板间位移电流密度的空间分布和平行板电容器有何不同?

7.2 一空气平行板电容器, 板的形状为正方形, 面积为 $20 \times 20 \text{ cm}^2$, 两板间距为 2 cm , 两板内中心间连接一阻值为 1000Ω 的电阻. 现在电容器两板上加一交变电压 $U = 10 \sin 2 \times 10^7 t \text{ V}$, 略去边缘效应, 求: (a) 电容器板间位移电流的最大值; (b) 电容器板间全电流的最大值.

7.3 证明下述电磁场满足麦克斯韦方程组

$$\begin{aligned} E_x = E_y = 0 & & B_x = \cos(y - ct) \\ E_z = \cos(y - ct) & & B_y = B_z = 0 \end{aligned}$$

7.4 库仑定律对运动电荷成立吗? 运动电荷激发磁场的公式

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4} \frac{q \mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

的适用范围如何?

7.5 证明 $\epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt}$ 具有电流密度的量纲.

7.6 如图, 厚度为 d_0 的无限大均匀带电平板静止于 K 系中, 其电荷体密度为 ρ_0 . 试求相对于 K 系以恒速 u 沿 x 轴负向运动的惯性系 K' 中此运动带电板激发的电磁场.

7.7 实验室中观察静止磁铁的二磁极之间有一均匀磁场. 磁感强度为 B , 沿 z 向, 磁极间中部沿水平 y 轴放置一长为 l 的静止金属杆. 今有一小车相对实验室沿水平 x 轴以匀速 u 运动.

(1) 求小车参照系中的磁场和电场;

(2) 小车参照系中观测, 杆 ab 在运动, 它上面的动生电动势多大? 感生电动势又多大? 二者总计, ab 上感应电动势又多大?

习题 7.6 图

习题 7.7 图

附表 1 SI 中各导出电磁学量的定义方程式、量纲式及单位

物理量名称	定义方程式	量纲式	单位		备注
			中文名称	符号	
电量 q	$q = It$	TI	库	C	
电位 U	$U = A/q$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	伏	V	
电场强度 E	$E = -\text{grad} U$	$LMT^{-3}I^{-1}$	伏/米	v/m	$1v/m = 1N/C$
电容 C	$C = q/V$	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	法	F	
真空介电常数 ϵ_0	$\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}$	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	法/米	F/m	$1F/m = 1C^2/N \cdot m^2$
极化强度 P	$P = \frac{ql_{\text{分子}}}{V}$	$L^{-2}TI$	库/米 ²	C/m ²	
电位移 D	$D \cdot dS = q_0$	$L^{-2}TI$	库/米 ²	c/m ²	
相对介电常数 ϵ_r	$\epsilon_r = \frac{C_{\text{介质}}}{C_{\text{真空}}}$	—	—	—	
极化率 χ_e	$P = \chi_e \epsilon_0 E$	—	—	—	
电阻 R	$R = \frac{U}{I}$	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	欧		
电阻率	$R = l/S$	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	欧·米	· m	
电导 G	$G = 1/R$	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	西(门子)	S	$1S = 1A/V$
电导率	$\sigma = 1/\rho$	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	西/米	S/m	
磁通量	$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	韦(伯)	Wb	$1Wb = 1V \cdot s$
磁感应强度 B	$B = \Phi/S$	$MT^{-2}I^{-1}$	特	T	
电流环的磁矩 m	$m = IS$	L^2I	安·米 ²	A·m ²	
磁化强度 M	$M = \frac{m_{\text{分子}}}{V}$	$L^{-1}I$	安/米	A/m	
磁场强度 H	$H = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_0$	$L^{-1}I$	安/米	A/m	
磁化率 χ_m	$M = \chi_m H$	—	—	—	
电感 L	$L = \Phi/I$	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	亨	H	
真空磁导率 μ_0	$F/l = \mu_0 \frac{I^2}{2a}$	$LMT^{-2}I^{-2}$	亨/米	H/m	$1H/m = 1N/A^2$

续表

物理量名称	定义方程式	量纲式	单位		备注
			中文名称	符号	
相对磁导率 μ_r	$\mu_r = L_{\text{介质}} / L_{\text{真空}}$	—	—	—	
磁偶极矩 p_m	$p_m = \mu_0 m$	$L^3 M T^{-2} I^{-1}$	韦·米	Wb·m	
磁极化强度 J	$J = p_m / V$	$M T^{-2} I^{-1}$	特	T	
磁阻 R_m	$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r S}$	$L^{-2} M^{-1} T^2 I^2$	1/亨	1/H	
磁动势 E_m	$E_m = NI$	I	安·匝	A	

附表 2 有关数值表

物 理 量	数值及单位
基本电荷 e	$1.60 \times 10^{-19} \text{C}$
电子荷质比 e/m_e	$1.76 \times 10^{11} \text{C/kg}$
库仑定律常量 k	$8.99 \times 10^9 \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}$
真空介电常数 ϵ_0	$8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$
真空磁导率 μ_0	$4 \times 10^{-7} \text{H/m}$
玻尔半径 a_0	$5.29 \times 10^{-11} \text{m}$
玻尔磁子 μ_B	$9.27 \times 10^{-24} \text{A} \cdot \text{m}^2$
核磁子 μ_N	$5.05 \times 10^{-27} \text{A} \cdot \text{m}^2$
真空中光速 c	$3.00 \times 10^8 \text{m/s}$
太阳辐射总功率 P_0	$4.2 \times 10^{26} \text{W}$
太阳辐射本领 M	$6.9 \times 10^7 \text{W/m}^2$

习 题 答 案

第 一 章

$$1.1 \quad (1) \frac{5q}{2\epsilon_0 a^2}; \quad (2) \frac{5q_0 q}{2\epsilon_0 a^2}$$

$$1.2 \quad 9.24 \times 10^{-20} \text{C}$$

$$1.3 \quad \frac{2\epsilon_0 e^2}{(1.5)^{3/2} b^2}$$

$$1.5 \quad 2.70 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.6 \quad 9.47 \times 10^2 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.7 \quad \frac{q}{4\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} \quad x^2 + \frac{4R^2}{2}$$

$$1.8 \quad \frac{q}{8\epsilon_0 R^2}$$

$$1.9 \quad 5.54 \times 10^{-16} \text{N}$$

$$1.10 \quad \frac{1}{4\epsilon_0 (a^2 + R^2)^{3/2}} \quad a^2 (q_1 + q_2)^2 + \frac{4(q_2 - q_1)^2 R^2}{2}$$

$$1.11 \quad \frac{qd}{8\epsilon_0 (a^2 + R^2)^{3/2}} \quad \frac{1}{(R_2^2 + \frac{d^2}{4})^{3/2}} - \frac{1}{(R_1^2 + \frac{d^2}{4})^{3/2}}$$

$$1.12 \quad 3.06 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.13 \quad \text{两板间} \quad 5.08 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\text{两板外} \quad 1.69 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.14 \quad 9.04 \times 10^2 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.15 \quad (1) 0; \quad 1.20 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.16 \quad (1) \frac{e r}{3\epsilon_0} (r - R); \quad \frac{e R^3}{3\epsilon_0 r^2} (r - R)$$

$$1.17 \quad (1) 0; \quad 5 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}; \quad 1.44 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.18 \quad \frac{a^2}{4\epsilon_0 R^2}$$

$$1.19 \quad (1) 0; \quad 4.8 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}; \quad 800 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.20 \quad (1) \frac{Q_0 \otimes e}{0} - \frac{d}{2} \times \frac{d}{2};$$

$$\frac{d}{0} \times \frac{d}{2} \text{ 或 } x - \frac{d}{2}$$

$$1.21 \quad (1) \frac{eR}{2_0} (r - R); \quad \frac{eR^2}{2_0 r} (r - R)$$

$$1.22 \quad 8.7 \times 10^{10} \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.24 \quad \frac{1}{2_0} \left| + (2x - d) e \right| \quad (0 < x < d);$$

$$\frac{1}{2_0} + d e \quad (x < 0 \text{ 或 } x > d)$$

$$1.25 \quad (1) \frac{b^3 e}{3_0 a^2}; \quad (2) \frac{a e}{3_0}$$

$$1.26 \quad (1) \frac{b^2 e}{2_0 a}; \quad (2) \frac{a e}{2_0}$$

$$1.27 \quad (1) 2.70 \times 10^3 \text{V}; \quad - 900 \text{V}; \quad 0$$

$$(2) - 3.60 \times 10^{-6} \text{J}$$

$$1.28 \quad (1) - 1.99 \times 10^3 \text{V}; \quad 0; \quad 1.99 \times 10^3 \text{V}$$

$$(2) 1.99 \times 10^{-6} \text{J}$$

$$1.29 \quad (1) 25.0 \text{V}; \quad (2) 43.0 \text{V}$$

$$1.30 \quad \frac{eR}{2_0 a} \quad \frac{a^2 + R^2 + R - a}{a}$$

$$1.31 \quad (1) \frac{e}{6_0} (3R^2 - r^2) \quad (r - R);$$

$$\frac{eR^3}{3_0 r} \quad (r - R)$$

$$1.32 \quad (1) 2.10 \times 10^3 \text{V}; \quad 1.20 \times 10^3$$

$$1.33 \quad 73.0 \text{V}$$

$$1.34 \quad (1) 6.67 \times 10^{-10} \text{C}; \quad - 1.33 \times 10^{-10} \text{C}$$

$$(2) 0.10 \text{m}$$

$$1.35 \quad (1) 9.04 \text{V}; \quad (2) 9.04 \times 10^{-8} \text{J}$$

$$1.36 \quad (1) 1.82 \times 10^7 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}; \quad (2) 1.15 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$1.37 \quad (1) 800 \text{V}; \quad (2) 1.29 \times 10^{-16} \text{J}$$

$$1.38 \quad (1) 4.0 \times 10^{-15} \text{J}; \quad (2) 9.04 \times 10^7 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$1.39 \quad 1.5 \times 10^{-13} \text{m}$$

$$1.40 \quad (1) \quad x - \frac{a}{n^2 - 1}^2 + y^2 + z^2 = \frac{na}{n^2 - 1}^2 \quad U = 0 \text{ 等位面是球面};$$

$$(2) \frac{na}{n^2 - 1}; \quad \frac{a}{n^2 - 1}, 0, 0$$

- 1.41 (1) $\frac{e}{2} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$
 (2) $x - \frac{k^2+1}{k^2-1} a^2 + y^2 = \frac{2ka}{k^2-1} a^2$ 等位面是圆柱面, 柱面半径为 $\frac{2ka}{k^2-1}$, 圆柱面轴线在 $x = \frac{k^2+1}{k^2-1} a$ 处
 (3) 平面

(4) $E_x = \frac{e}{2} \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}$;

$$E_y = \frac{2eaxy}{0[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}$$

1.42 (1) $\frac{ql^2 \cos^2}{2} r^3$ (rm l)

(2) $E_x = \frac{ql^2(\cos^2 + \frac{1}{2}\cos^2)\cos}{0r^4}$;

$$E_y = \frac{5ql^2 \cos^2 \sin}{2} r^4$$
 (rm l)

1.43 (1) $U = \frac{ql^2 xy}{2} (x^2 + y^2)^{5/2}$ (rm l);

(2) $E_x = \frac{ql^2 y(4x^2 - y^2)}{2} (x^2 + y^2)^{7/2}$; $E_y = \frac{ql^2 x(4y^2 - x^2)}{2} (x^2 + y^2)^{7/2}$

1.44 (1) $\frac{e}{2} (x^2 + R^2 - x)$

(2) $\frac{e}{2} \ln \frac{x}{x^2 + R^2}$

1.45 $\frac{7q^2}{8}$

1.46 $\frac{3Q^2}{20}$

1.47 $1.6 \times 10^{-15} \text{m}$

1.48 $\frac{q_1}{8} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(q_1 + q_2)^2}{8}$

1.49 -425MeV

第二章

2.1 (1) $0.6 \times 10^{-8} \text{C}$; $1.3 \times 10^{-8} \text{C}$

(2) $6.0 \times 10^3 \text{V}$; $6.0 \times 10^3 \text{V}$

2.2 (1) $-1 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $1 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;

(2) -2.26V

2.3 (1) $3 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $1 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $-1 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;
 $3 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$

(2) $1.13 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$; $3.39 \times 10^3 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

2.4 (1) $4 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-2}$

(2) $3.54 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $-3.54 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$

2.5 $2 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $-1.71 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;

$1.71 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $2.29 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$; $-2.29 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;

$2 \times 10^{-8} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$

2.6 (1) $-2 \times 10^{-8} \text{C}$; $2 \times 10^{-8} \text{C}$

(2) 0; $2 \times 10^{-8} \text{C}$

2.7 0; 0; $6.75 \times 10^{-11} \text{N}$; $6.75 \times 10^{-11} \text{N}$

2.8 (1) $-2 \times 10^{-8} \text{C}$; $-1 \times 10^{-8} \text{C}$

(2) $2 \times 10^5 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$, 0, $1.84 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$;

0, $-1.5 \times 10^3 \text{V}$, $-1.5 \times 10^3 \text{V}$

2.9 (1) 不带电; U_0

(2) $\frac{-4}{R_2 - R_1} R_1 R_2 U_0$

2.10 $1.43 \times 10^4 \text{V}$

2.11 $2 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

2.12 (1) 介质内 $D = \frac{1 - \epsilon_0}{2}$; $E = \frac{1 - \epsilon_0}{2 \epsilon_0 r}$

介质外 $D = \frac{1 - \epsilon_0}{2}$; $E = \frac{1 - \epsilon_0}{2 \epsilon_0}$

(2) $U = -\frac{1 - \epsilon_0}{2 \epsilon_0 r} x$ ($x < d$);

$U = -\frac{1 - \epsilon_0}{2 \epsilon_0 r} d - \frac{1 - \epsilon_0}{2 \epsilon_0} (x - d)$ ($d < x < D$)

(3) $\frac{-(r - 1)(1 - \epsilon_0)}{2 \epsilon_0 r}$, $\frac{(r - 1)(1 - \epsilon_0)}{2 \epsilon_0 r}$

2.13 (1) $D_1 = 4.66 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$, $D_2 = 4.66 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;

$E_1 = 1.05 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$, $E_2 = 2.63 \times 10^4 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

(2) $P_1 = 3.72 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$, $P_2 = 2.33 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;

(3) $-1.39 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$, $1.39 \times 10^{-7} \text{C} \cdot \text{m}^{-2}$;

2.14 (1) $D = 0$, $E = 0$ ($r < R_1$);

$D = \frac{Q_1}{4 \pi r^2}$, $E = \frac{Q_1}{4 \pi \epsilon_0 r_1 r^2}$ ($R_1 < r < R$)

$$D = \frac{Q_1}{4\pi r^2}, \quad E = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 r_2 r^2} \quad (R < r < R_2)$$

$$D = 0, \quad E = 0 \quad (r > R_2)$$

$$(2) \quad 3750 \text{ V}$$

$$(3) \quad 5 \times 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$2.15 \quad (1) \quad D = 0, E = 0 \quad (r < R_1)$$

$$D = \frac{Q}{2\pi r}, \quad E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r_1 r} \quad (R_1 < r < R)$$

$$D = 0, E = 0 \quad (r > R_2)$$

$$(2) \quad U = 0 \quad (r < R_1)$$

$$U = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r_1} \ln \frac{r}{R_1} \quad (R_1 < r < R)$$

$$U = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r_1 r_2} \left[r_2 \ln \frac{R}{R_1} + r_1 \ln \frac{r}{R} \right] \quad (R < r < R_2)$$

$$U = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r_1 r_2} \left[r_2 \ln \frac{R}{R_1} + r_1 \ln \frac{R_2}{R} \right] \quad (r > R_2)$$

$$(3) \quad P = \frac{(r_1 - 1)}{2\pi r_1} \quad (R_1 < r < R)$$

$$P = \frac{(r_2 - 1)}{2\pi r_2} \quad (R < r < R_2)$$

$$(4) \quad \frac{(r_1 - r_2)}{2\pi r_1 r_2 R}$$

$$2.16 \quad (1) \quad D = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 r}, \quad E = \frac{\sigma r}{3\pi \epsilon_0 r} \quad (r < R)$$

$$D = \frac{\sigma R^3}{3\pi r^2}, \quad E = \frac{\sigma R^3}{3\pi \epsilon_0 r^2} \quad (r > R)$$

$$(2) \quad P = \frac{(r - 1)\sigma r}{3\pi} \quad (r < R)$$

$$P = 0 \quad (r > R)$$

$$(3) \quad \frac{r - (r - 1)}{r} = 0$$

$$2.17 \quad (1) \quad E_1 = E_2 = \frac{U_0}{d}, \quad D_1 = \epsilon_0 r_1 \frac{U_0}{d}, \quad D_2 = \epsilon_0 r_2 \frac{U_0}{d}$$

$$(2) \quad \epsilon_0 r_1 \frac{U_0}{d}, \quad -\epsilon_0 r_1 \frac{U_0}{d}; \quad \epsilon_0 r_2 \frac{U_0}{d}, \quad -\epsilon_0 r_2 \frac{U_0}{d}$$

$$(3) \quad -\epsilon_0 (r_1 - 1) \frac{U_0}{d}, \quad \epsilon_0 (r_1) \frac{U_0}{d};$$

$$-\epsilon_0 (r_2 - 1) \frac{U_0}{d}, \quad \epsilon_0 (r_2 - 1) \frac{U_0}{d}$$

- (4) $\frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)S_1 + \epsilon_0\epsilon_r S_2}{d}$
2. 18 $\frac{2\epsilon_0 R_1 R_2 (1 + \epsilon_r)}{R_2 - R_1}$
2. 19 $2.55 \times 10^3 \text{ pF}$
2. 21 $150 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$
2. 22 $\frac{\epsilon_0}{\ln \frac{d}{R}}$
2. 23 (1) $2\text{V}, 1\text{V}, 2\text{V}$
(2) $2.4\text{V}, 1.2\text{V}, 2.4\text{V}$
2. 24 取四个电容器两两串联然后并联
2. 25 34.8 m^2
2. 26 121V
2. 27 (1) $4.5 \times 10^4 \text{ V}$
(2) 1.80 m
2. 28 第二层电介质先击穿. $V_{\max} = \frac{RE_k}{2} \ln \frac{R_2^2}{R_1 R}$
2. 30 (1) $1.59 \times 10^{-4} \text{ J}$
(2) $3.19 \times 10^{-5} \text{ J}$
2. 31 $\frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)S}{2(\epsilon_r + 1)d} U_{12}^2$
2. 33 $\frac{3Q^2}{20\epsilon_0 R}$

第 三 章

3. 1 0.273
3. 2 2.48×10^3
3. 3 (1) $\frac{I}{\epsilon_1 S}, \frac{I}{\epsilon_2 S}$
(2) $\frac{\epsilon_0(\epsilon_2 - \epsilon_1)I}{\epsilon_1 \epsilon_2 S}$
(3) $\frac{I(\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2)}{\epsilon_1 \epsilon_2 S}$
3. 4 (1) $j = \frac{abV}{(b-a)r^2} \quad (a < r < b)$
(2) $\frac{(b-a)}{4ab}$

- 3.5 (1) $\frac{I}{(b-a)} \ln \frac{b}{a}$
 (2) $\frac{1}{(b-a)} \ln \frac{b}{a}$
- 3.7 200V; 10W
- 3.8 (1) 2W, 2W
 (2) 2W, 0.7W
 (3) 2W, 0.6W
- 3.9 四灯全灭, 因电炉接入后线路中电流大于保险丝额定电流, 保险丝熔断.
- 3.10 用导线将 AB 两端短路, 然后把 A(或 B)与 C 两端接 110V 电源. 两种情形通过电阻丝的电流相同. 后一情形通过电源的电流是前一情形的 2 倍.
- 3.11 (1) $4.46 \times 10^{-4} \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (2) $1.07 \times 10^5 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (3) 2.4×10^8
- 3.12 4.1V; 0.05
- 3.13 200V
- 3.14 $4 \times 10^{-4} \text{C}$, $3 \times 10^{-4} \text{C}$
- 3.15 (1) - 2V
 (2) 0.375A, 0.250A, 0.625A;
 11.6V, 11.8V, 8.63V
- 3.16 $R_2 = 30$, R_1 和 R_4 可取任何值.
- 3.17 18V, 7V; 13V
- 3.18 (1) $I_1 = 0.35 \text{mA}$, $I_b = 0.05 \text{mA}$, $I_2 = 0.30 \text{mA}$
 (2) $U_2 = 3.05 \text{V}$, $U_{be} = 0.74 \text{V}$, $U_{ce} = 3.69 \text{V}$
 $U_{cb} = 2.95 \text{V}$
- 3.19 (1) 0.238A, 0.456A
- 3.20 (1) 0, 1A, 1A
 (2) 0, 1W, 2W
- 3.21 1000m
- 3.22 1.4R

第 四 章

4.1 $\frac{\mu_0 I}{4 l}$

- 4.2 $\frac{2}{a} \frac{\mu_0 I}{2}$
- 4.3 (a) $\frac{\mu_0 I}{4r}$ (b) $\frac{\mu_0 I}{4r} + \frac{\mu_0 I}{2r}$
- 4.4 0
- 4.5 $B_{01} = B_{02} = 0.677 \mu_0 I / R$; $B_m = 0.716 \mu_0 I / R$
- 4.6 $m = -\frac{eL}{2m_e}$
- 4.7 12.4T
- 4.8 (a) $\frac{\mu_0 i}{2R}$ (b) $\frac{\mu_0 i}{2R}$
- 4.9 $\frac{\mu_0 Q}{2a}$
- 4.10 140A
- 4.13 $= \frac{\mu_0 I h}{2} \ln b/a$
- 4.17 $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$; $i = 2(B_1 - B_2) / \mu_0$
- 4.19 $1.0 \times 10^{-2} T$
- 4.20 $2.6 \times 10^7 m/s$; $1.3 \times 10^{-7} s$
- 4.21 水平东西向 5mm
- 4.22 $1. \times 10^{23} 1/cm^3$; $1.65 \times 10^{-5} V$
- 4.23 $1.5 \times 10^{-18} kg \cdot m/s$; $0.266 T$
- 4.24 0.441A; $c > b$
- 4.26 $2IBR$ 垂直纸面向外
- 4.27 $\frac{2}{B} g \tan$
- 4.28 IRB
- 4.29 0.157J

第 五 章

- 5.1 $i = M$; $B = \mu_0 M$
- 5.2 $j = \frac{1}{\mu - 1} j_0$
- 5.4 $\otimes \otimes \otimes a$ $B = \mu_0 j_0 x$; $a < x < a + b$ $B = \mu_0 j_0 a$
真空: $B = \mu_0 j_0 a$
- 5.5 $H_0 = 125 A/m$; $B_0 = 1.57 \times 10^{-4} T$

$$B = 9.42 \times 10^{-2} \text{T}; \quad B = 9.4 \times 10^{-2} \text{T}$$

$$5.6 \quad 0.014 \text{T}; \quad 0.41^\circ$$

$$5.7 \quad \text{外: } B_0 \quad \text{内: } B_0 \quad \sqrt{\sin^2 + \mu^2 \cos^2}, \text{ 与板面夹角为 } \tan^{-1} \frac{1}{\mu} \tan$$

$$5.9 \quad 12.2 \text{A} \cdot \text{m}^2; \quad 1.53 \times 10^6 \text{A} \cdot \text{m}^{-1}; \quad 1.9 \text{T}$$

$$5.10 \quad 0.4 \text{A}$$

$$5.12 \quad (1) 0.20 \text{T} \quad (2) 0.12 \text{T}$$

$$5.13 \quad 9.5 \times 10^2 \text{ 安匝}$$

$$* 5.17 \quad 7.96 \times 10^3 \text{N}$$

第 六 章

$$6.1 \quad -Blv \cos$$

$$6.2 \quad 0.314 \text{A}; \quad 0.987 \text{W}$$

$$6.3 \quad 0.92 \text{Hz}; \quad 5 \text{Hz}$$

$$6.4 \quad 2.13 \times 10^{-8} \text{V}$$

$$6.5 \quad (a) \frac{\mu_0 b I_0}{2} \ln \frac{1+a}{1} \sin t$$

$$(b) - \frac{\mu_0 b I_0}{2} \ln \frac{1+a}{1} \cos t$$

$$6.7 \quad E = b B_0 v \frac{t}{k} - 1 \quad e^{-t/k}$$

$$6.9 \quad O \text{ 点为零, } a, b \text{ 点都是 } 4.4 \times 10^7 \text{m/s}^2, \text{ 方向沿圆周的逆时针切向.}$$

$$6.10 \quad (a) 30 \text{A}$$

$$(b) 2.2 \text{J}$$

$$(c) \text{ 增到 4 倍}$$

$$6.12 \quad \frac{2(a^2 + b^2) \mu_0 I a^2 b}{[(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2 t]} \sin t$$

$$6.13 \quad 1.8 \times 10^{-5} \text{V}$$

$$6.14 \quad 2.4 \times 10^{-4} \text{V}$$

$$6.15 \quad \frac{1}{2} B \quad R^2$$

$$6.16 \quad 5 \times 10^{-5} \text{Wb}$$

$$6.17 \quad 125 \text{mH}$$

$$6.18 \quad 5.4 \times 10^3 \text{V}$$

$$6.19 \quad 1200 \text{匝}$$

$$6.20 \quad 9.9 \times 10^{-8} \text{H}$$

- 6.21 $2.5 \times 10^{-3} \text{V}$
- 6.22 $2.8 \times 10^{-6} \text{H}, 0$
- 6.23 (a) $1.76 \times 10^{-3} \text{H}$
(b) $3.5 \times 10^{-5} \text{C}$
- 6.24 $\frac{\mu_0 I l}{R} \ln \frac{d+a}{d-a}$
- 6.26 $\frac{L}{2}$
- 6.27 0.15H
- 6.28 磁能 $4 \times 10^{-15} \text{VJ}$
动能 10^{-15}VJ
- 6.29 (a) $1.18 \times 10^6 \text{H}$
(b) $5.6 \times 10^{-5} \text{J}$ 增加 $5.8 \times 10^{-5} \text{J}$
- 6.30 (a) $\frac{1.59 \times 10^{-4}}{r^2}$ (SI 单位)
(b) $1.94 \times 10^{-3} \text{J}$
- 6.32 $0.115 \text{s}; 2.9 \times 10^2 \text{J}; 1.0 \times 10^3 \text{J}$
- 6.33 (a) 0.19A (b) 0.57W
(c) 0.36W (d) 0.21W
- 6.34 (a) $18 \text{V}; 2 \text{V}$
(b) 0.33A K_2 中从 b c
- 6.35 (a) $E = 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}$
(b) $E = 1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{R_1}{L} t}$
- 6.37 (a) $9.6 \times 10^{-7} \text{C/s}$ (b) $1. \times 10^{-6} \text{J/s}$
(c) $2.8 \times 10^{-6} \text{W}$ (d) $3.8 \times 10^{-6} \text{W}$

第七章

- 7.2 (a) $1.1 \times 10^{-2} \text{A}$ (b) $1.49 \times 10^{-2} \text{A}$
- 7.6 板内: $E_x = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} (x - X)$, $B = 0$
板外: $E_x = \pm \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d_0}{2r^2}$, $B = 0$
式中 X 为板中心的坐标.
- 7.7 $B_z = \mu_0 B$, $B_x = B_y = 0$
 $E_y = -\mu_0 u B$, $E_x = E_z = 0$
 $E_{\text{动}} = \mu_0 u B l$ 由 a 到 b
 $E_{\text{感}} = -\mu_0 u B l$ $E_{\text{总}} = 0$