

普通高等教育“十五”规划教材



GUIDEBOOK OF HEAT TRANSFER

传热学学习指导 及典型习题分析

周根明 编



中国电力出版社
<http://jc.cepp.com.cn>

普通高等教育“十五”规划教材



GUIDEBOOK OF HEAT TRANSFER

传热学学习指导 及典型习题分析

周根明 编
陈善年 主审

我在《建议》里说过，此书对考东南传热学价值极大。

——qq1621897859



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

内 容 提 要

本书是针对目前国内传热学主流课程体系编写的辅导用书。全书按绪论、导热、对流、辐射、传热过程与换热器及传质过程简介的课程体系编写,各章内容分解为知识结构、重点内容剖析、概念汇总、思考题分析和典型习题分析。

本书结合学科的最新发展趋势和研究成果,突出体现理论体系的完整性和工程实用性,适用于热能与动力工程专业本科生的自学、复习迎考及考研,也可供相关专业的师生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

传热学学习指导及典型习题分析/周根明编. —北京:中国电力出版社, 2004

普通高等教育“十五”规划教材

ISBN 7-5083-2399-8

I. 传... II. 周... III. 传热学 高等学校-教学参考资料 IV. TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 059752 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路6号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>)

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2004年8月第一版 2004年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 14印张 323千字

印数 0001—3000册 定价 21.00元

版 权 专 有 翻 印 必 究

(本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换)

序

由中国电力教育协会组织的普通高等教育“十五”规划教材，经过各方的努力与协作，现在陆续出版发行了。这些教材既是有关高等院校教学改革成果的体现，也是各位专家教授丰富的教学经验的结晶。这些教材的出版，必将对培养和造就我国 21 世纪高级专门人才发挥十分重要的作用。

自 1978 年以来，原水利电力部、原能源部、原电力工业部相继规划了一至四轮统编教材，共计出版了各类教材 1000 余种。这些教材在改革开放以来的社会主义经济建设中，为深化教育教学改革，全面推进素质教育，为培养一批批优秀的专业人才，提供了重要保证。原全国高等学校电力、热动、水电类专业教学指导委员会在此间的教材建设工作中，发挥了极其重要的历史性作用。

特别需要指出的是，“九五”期间出版的很多高等学校教材，经过多年的教学实践检验，现在已经成为广泛使用的精品教材。这批教材的出版，对于高等教育教材建设起到了很好的指导和推动作用。同时，我们也应该看到，现用教材中有不少内容陈旧，未能反映当前科技发展的最新成果，不能满足按新的专业目录修订的教学计划和课程设置的需要，而且一些课程的教材可供选择的品种太少。此外，随着电力体制的改革和电力工业的快速发展，对于高级专门人才的需求格局和素质要求也发生了很大变化，新的学科门类也在不断发展。所有这些都要求我们的高等教育教材建设必须与时俱进，开拓创新，要求我们尽快出版一批内容新、体系新、方法新、手段新，在内容质量上、出版质量上有突破的高水平教材。

根据教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的精神，“十五”期间普通高等教育教材建设的工作任务就是通过多层次的教材建设，逐步建立起多学科、多类型、多层次、多品种系列配套的教材体系。为此，中国电力教育协会在充分发挥各有关高校学科优势的基础上，组织制订了反映电力行业特点的“十五”教材规划。“十五”规划教材包括修订教材和新编教材。对于原能源部、电力工业部组织原全国高等学校电力、热动、水电类专业教学指导委员会编写出版的第一至四轮全国统编教材、“九五”国家重点教材和其他已出版的各类教材，根据教学需要进行修订。对于新编教材，要求体现电力及相关行业发展对人才素质的要求，反映相关专业科技发展的最新成就和教学内容、课程体系的改革成果，在教材内容和编写体系的选择上不仅要有本学科（专业）的特色，而且注意体现素质教育和创新能力与实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。考虑到各校办学特色和培养目标不同，同一门课程可以有多种教材供选择使用。上述教材经中国电力教育协会电气工程学科教学委员会、能源动力工程学科教学委员会、电力经济管理学科教学委员会的有关专家评审，推

荐作为高等学校教材。

在“十五”教材规划的组织实施过程中，得到了教育部、国家经贸委、国家电力公司、中国电力企业联合会、有关高等院校和广大教师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

教材建设是一项长期而艰巨的任务，不可能一蹴而就，需要不断完善。因此，在教材的使用过程中，请大家随时提出宝贵的意见和建议，以便今后修订或增补。（联系方式：100761 北京市宣武区白广路二条1号综合楼9层 中国电力教育协会教材建设办公室 010-63416222）

中国电力教育协会

二〇〇二年八月

前 言

传热学是研究热量转移规律的一门学科，在生产、生活和科技领域中有着广泛的应用，并起着举足轻重的作用。越来越多的理工科专业将其列为学科基础课，同时它也是热能动力类专业的主要考研课程。

编写该书是为了更有效地提高传热学的学习效率。本书将课程体系和重点内容进行提炼和概括，减少学生的笔记工作量，使学生在课堂上能更好地注意老师对课程内容的深层次描述，在课外能抓住重点适时地进行预习和复习。

本书是一本辅导用书，对知识内容不作详细描述。为方便读者复习应考，将各章内容分解为知识结构、重点内容剖析、概念汇总、思考题分析及典型习题分析五项内容。知识结构是为了让学生纵览课程的内容及其相互关系，使所学知识连接为一个整体，不至于在复习中疏忽某项内容。重点内容剖析有助于学生掌握课程重点，深入理解知识内涵。传热学概念丰富而复杂，概念汇总中汇集了该章所涉及的重要概念，便于查阅和复习。传热学是一门应用性和实践性很强的学科，对其内容的深刻理解往往依赖于一定的工程背景和实践经验，思考题考察的正是学生在实践中运用知识的能力。因此针对学生喜欢做习题而对思考题往往不知所云或答得似是而非的情况，我们在各章中对思考题做出示范解释，并在书末另列思考题供学生练习。典型习题分析是对一些有代表性的习题进行解题示范，并给出思路和技巧，使学生能举一反三。在题末的分析与思考中强化学生的工程意识，避免出现做题与工程应用严重脱节的现象。本书选题突出典型性、针对性，有较强的复习指导作用。书末还对部分院校近年来的考研试题进行了求解，以供广大考生参考。

传热学依赖于许多基础学科，主要有工程热力学、流体力学、高等数学、计算机编程和实验技术等，这就要求读者必须具备相关学科的知识。传热学本质上研究的是能量迁移规律，它必须服从热力学定律；流体的传热过程与流动密不可分，对流换热的研究进展得益于流体力学的研究成果；传热学在数学上就是研究物体的温度场和热流场，场论、线性代数、积分变换和微分方程等是研究传热学的主要数学手段；传热问题的求解方法主要有解析解、数值解和实验解，解析解和数值解一般都利用计算机编程求解，由于传热问题自身的复杂性，许多问题还离不开实验研究。

本书是一本辅导性教材，不能象一般教材那样面面俱到，又不能简单到只有提纲，所以书中辅助性语言较多，内容高度概括，望读者能细心体会字里行间的含意。为简化书面表达，我们与读者有如下约定：

斜体：内容的补充解释，如：非稳态过程，设备启动与停车过程。

加括号斜体：表述内容的“弦外音”，如：等温线互不相交（一点只有一个温度）。

黑体：重要概念、关键词，如：每点梯度都**垂直于**该点等温面。

括号：别名、解释，如：导热基本定律（傅里叶定律）。

下划线：应注意的词汇或概念，如：热流线总是垂直于等温面。

\Rightarrow ：导致，过渡到，成为。

\rightarrow ：变为，引起。

\downarrow ：降低，较小。

\uparrow ：提高，较大。

\propto ， \sim ：正比于，相关。

编写过程中得到了本系师生的大力支持，特别是孔祥雷和唐春丽两位老师为教材的习题编辑做了很多工作，在此一并表示感谢。

本书成稿后，承东南大学陈善年教授对全书的结构、内容及排版作了细致的审阅，提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，衷心希望读者对本书错误遗漏之处提出宝贵意见。

周根明

2003年6月

zgm7777@sohu.com

主要符号说明

a	热扩散率, m^2/s
A	面积, m^2
b	宽度, m ; 系数
c	比热容, $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$; 光速, m/s
c_B	组分 B 的物质的量浓度, mol/m^3
c_t	范宁摩擦系数
c_p	定压比热容, $\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$
c_1	第一辐射常量, $\text{W}\cdot\text{m}^2$
c_2	第二辐射常量, $\text{m}\cdot\text{K}$
d	直径, m
D	扩散系数, m^2/s
E	辐射力, W/m^2
E_λ	光谱辐射力, W/m^3
f	达尔西阻力系数; 频率, Hz
F	力, N
g	重力加速度, m/s^2
G	投入辐射, W/m^2
h	对流换热表面传热系数, $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$; 流体的比焓, J/kg
H	焓, J ; 高度, m
I	电流, A
j	传热因子
J	有效辐射, W/m^2 ; 电流密度, A/m^2
k	传热系数, $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$
L	定向辐射强度, $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{sr})$
l	长度, m
M	质量通量密度, $\text{kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$
M_r	相对分子质量
n	物质的量, mol ; 折射率
N	物质的量通量密度, $\text{kmol}/(\text{m}^2\cdot\text{s})$
p	压力, Pa
P	功率, W ; 周长, m

q	热流密度, W/m^2
q_m	质量流量, kg/s
q_V	体积流量, m^3/s
Q	热量, J
r	半径, m ; 汽化潜热, J/kg
R	热阻, K/W ; 摩尔气体常数, $\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$; 电阻, Ω
R_A	面积热阻, $\text{m}^2\cdot\text{K}/\text{W}$
s	程长, m ; 管间距, m
S	形状因子
t	摄氏温度, $^{\circ}\text{C}$
T	热力学温度, K ; 周期, s
u	比热力学能, J/kg ; 速度, m/s
U	热学能, J ; 电位差, V
v	比体积, m^3/kg ; 速度, m/s
V	体积, m^3 ; 电位, V
w	速度, m/s
w_B	组分 B 的质量分数
W	功, J
x	笛卡尔坐标, m ; 干度
x_B	组分 B 的摩尔分数
X	角系数; 无量纲坐标
y	笛卡尔坐标, m
z	笛卡尔坐标, m
α	体胀系数, K^{-1} ; 吸收比; 衰减系数, m^{-1}
$\alpha(\lambda)$	光谱吸收比
β	肋化系数; 系数
γ	表面张力, N/m
δ	厚度, m
ϵ	发射率; 换热器效能
$\epsilon(\lambda)$	光谱发射率
η	(动力) 粘度, $\text{Pa}\cdot\text{s}$; 效率
θ	过余温度, $^{\circ}\text{C}$ 或 K ; 平面角, rad
Θ	无量纲过余温度
λ	波长, m 或 μm ; 导热系数, $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$
ν	运动粘度, m^2/s
ρ	密度, kg/m^3 ; 反射比; 电阻率, $\Omega\cdot\text{m}$

ρ_B	组分 B 的质量浓度, kg/m^3
$\rho(\lambda)$	光谱反射比
σ	斯忒藩—玻耳兹曼常量, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$
τ	时间, s; 透射比
τ_c	时间常数, s
$\tau(\lambda)$	光谱透射比
Φ	热流量, W
φ_B	组分 B 的体积分数
ψ	对数平均温差修正系数
Ω	立体角, sr
Bi	比渥数, hl/λ (λ 为固体的导热系数)
Eu	欧拉数, $\Delta p/(\rho v^2)$
Fo	傅里叶数, $a\tau/l^2$
Gr	格拉晓夫数, $g\alpha \Delta t^3/\nu^2$
Le	路易斯数, a/D
Nu	努塞尔数, hl/λ (λ 为流体的导热系数)
Pe	贝克利数, ul/a
Pr	普朗特数, ν/a
Re	雷诺数, ul/ν
Sh	舍伍德数, hl/D
St	斯坦顿数, $h/(\rho v c_p)$
Sc	施密特数, ν/D

目 录

序	
前言	
主要符号说明	
1. 绪论	1
1.1 知识结构	1
1.2 重点内容剖析	1
1.3 概念汇总	6
1.4 思考题分析	7
1.5 典型习题分析	8
2. 导热基础理论	12
2.1 知识结构	12
2.2 重点内容剖析	12
2.3 概念汇总	18
2.4 思考题分析	19
2.5 典型习题分析	20
3. 稳态导热	22
3.1 知识结构	22
3.2 重点内容剖析	22
3.3 概念汇总	33
3.4 思考题分析	34
3.5 典型习题分析	35
4. 非稳态导热	45
4.1 知识结构	45
4.2 重点内容剖析	45
4.3 概念汇总	53
4.4 思考题分析	54
4.5 典型习题分析	55
5. 导热问题的数值解法	63
5.1 知识结构	63
5.2 重点内容剖析	63
5.3 概念汇总	69
5.4 思考题分析	69
5.5 典型习题分析	70
6. 对流换热基础理论	76

6.1	知识结构	76
6.2	重点内容剖析	76
6.3	概念汇总	89
6.4	思考题分析	90
6.5	典型习题分析	91
7.	单相流体对流换热及其实验关联式	94
7.1	知识结构	94
7.2	重点内容剖析	94
7.3	概念汇总	98
7.4	思考题分析	99
7.5	典型习题分析	100
8.	凝结与沸腾换热	108
8.1	知识结构	108
8.2	重点内容剖析	108
8.3	概念汇总	111
8.4	思考题分析	111
8.5	典型习题分析	113
9.	热辐射基本定律及物体的辐射特性	116
9.1	知识结构	116
9.2	重点内容剖析	116
9.3	概念汇总	122
9.4	思考题分析	123
9.5	典型习题分析	124
10.	辐射换热的计算	127
10.1	知识结构	127
10.2	重点内容剖析	127
10.3	概念汇总	133
10.4	思考题分析	134
10.5	典型习题分析	135
11.	传热过程分析与换热器计算	141
11.1	知识结构	141
11.2	重点内容剖析	141
11.3	概念汇总	149
11.4	思考题分析	150
11.5	典型习题分析	152
12.	传质过程简介	160
12.1	知识结构	160
12.2	重点内容剖析	160
12.3	概念汇总	162

附录 A 复习思考题.....	163
附录 B 部分院校硕士研究生入学传热学试题及参考答案.....	172
参考文献.....	211

1. 绪 论

1.1 知 识 结 构

1. 传热学研究内容 (温差 \Rightarrow 传热);
2. 三种基本传热方式的机理和基本公式;
3. 传热过程、传热方程式;
4. 导热系数、对流换热系数、传热系数的物理涵义、单位、基本数量级、影响因素和变化规律;
5. 热阻与热流网络图;
6. 单位与单位制。

1.2 重 点 内 容 剖 析

1.2.1 传 热 学 概 述

一、传热学研究对象

1. 传热学是研究热量传递规律的科学

其主要研究内容:

- (1) 热量传递的机理和速率 (强化、削弱传热)
- (2) 物体中温度场的变化 (热应力计算、安全性分析)

2. 传热学与热力学的关系

热力学研究各种能量之间相互转换的规律,指出了热量传递的方向和传递过程的热平衡关系,而不涉及热量传递的具体方法、机理和速率。

试以灼热钢棒在水桶内冷却为例,其温度变化过程如图 1-1 所示,热力学可以算出钢棒与水这一体系最终的平衡温度 T_p ,但不能算出要用多少时间达到平衡状态或者达到平衡状态前某一时刻钢棒的温度是多少,而传热学就可算出钢棒和水的温度随时间变化的关系。

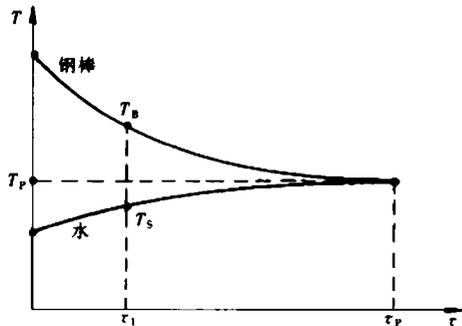


图 1-1 钢棒—水换热过程温度变化曲线

二、热量传递的普遍性

温差 \Rightarrow 传热

温差普遍存在（自然界、日常生活中、工农业生产中），所以传热普遍存在。

三、传热学在工程技术上的应用

由于各种工程技术的应用条件无不与温度有关，控制温度的主要手段就是控制传热，所以传热学在动力、能源、冶金、化工、石油、建筑、气象、航空、制冷、电子等工程技术领域有着十分重要的地位。其应用目的主要有三个方面：①强化传热：目的在于降低设备的体积、重量以及生产成本；②削弱传热：目的在于降低能源消耗，改善和保障生产环境；③控制温度变化速率：目的在于实现热处理工艺，控制材料应变（如无变形焊接），保障设备安全（如设备的启动与停机过程控制）。

四、学科的历史与发展

热学（18~19世纪） \Rightarrow 传热学（20世纪）

求解方法：实验求解（主流）

计算求解 \rightarrow 计算传热学（近年来发展很快）

1.2.2 热量传递的基本方式

问题：转移什么？（热量的微观本质）

如何转移？（热量的传递机理）

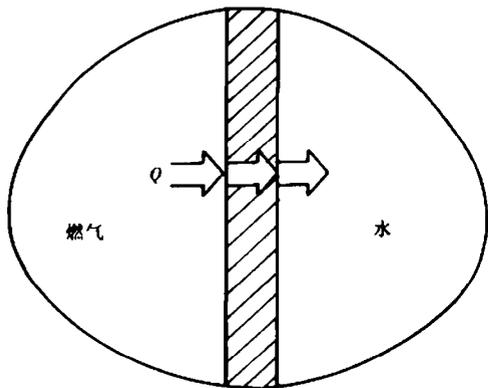


图 1-2 热水器中的热量传递

例子：燃气热水器中的热量传递过程如图 1-2 所示，燃气通过辐射和对流方式将热量传给壁面左侧，通过导热传到壁面右侧，再通过对流传给水。

学习中要弄清下列概念的联系与区别：

温度：物质分子平均运动动能的宏观量度。（强度量）（热迁移势）一般用 T 表示绝对温度（热力学温度），单位为 K，用 t 表示摄氏温度，单位为 $^{\circ}\text{C}$ 。

热能：物质所具有的内动能。（广延量）（物质的微观运动属性）

热量 Q (J)：系统与外界依靠温差传递的能量。（过程量）

热流（量） Φ (W)：单位时间所传递的热量。

热流密度 q (W/m²)：通过单位传热面上的热流量。

一、热传导（导热）

1. 定义

物体各部分之间不发生相对位移，依靠微观粒子（分子、原子、自由电子等）的热运动产生的热量传递现象叫做热传导。

2. 机理

物质

主要作用粒子

气体	分子
导电固体	自由电子
非导电固体	{ 原子、分子 晶格振动 (弹性波) (声子)
液体 (两种观点)	{ 类似气体 类似非导电固体 (近年来倾向于此观点)

物质导热能力的大小主要取决于两个方面的因素：物质的微观结构和作用粒子。微观结构主要有：晶体（单晶、多晶）、非晶体（无定型固体）、液体（有序性次于固体）、气体（有序性次于液体）。作用粒子主要有：分子、原子、电子、声子、光子、磁子等。一般情况下，微观结构的有序性越好，作用粒子的种类和数量越多，导热能力越强。

纯粹的导热只存在于不透明的固体之中。

3. 平壁导热公式 (Fourier 公式) (对于导热具有普遍意义的简单例子)

单位时间通过平壁的热量与传热面积、传热温差成正比，与平壁厚度成反比。(1822 年法国物理学家 Fourier 提出)

如图 1-3,

$$\Phi = \lambda \cdot A \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \quad (1-1)$$

式中 Φ ——传热量 (热流量), W;

$t_{w1} - t_{w2}$ ——平壁两侧温差, $^{\circ}\text{C}$;

δ ——壁厚, m;

A ——面积, m^2 ;

λ ——导热系数 (热导率), $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 。

常温下部分物质导热系数 λ [$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$]:

银: 427 纯铜: 398 纯铝: 236 普通钢:

30~50 水: 0.599

空气: 0.0259 保温材料: <0.14 水垢: 1~

3 烟垢 0.1~0.3

热流密度

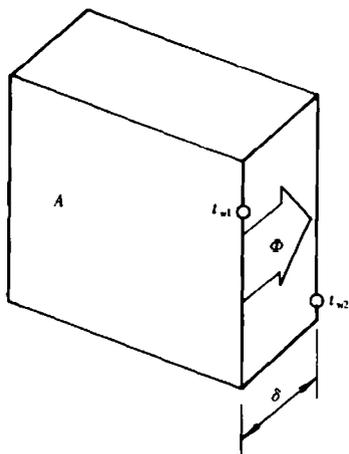


图 1-3 通过平壁的导热

$$q = \frac{\Phi}{A} = \lambda \cdot \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \quad (1-2)$$

二、热对流

1. 定义

由于流体各部分之间发生相对位移而产生的热量传递现象叫做热对流。

热对流只发生在流体中，并伴随有导热现象。

根据对流形成的原因可分为：

自然对流——由于密度差引起的相对运动；

强制（强迫）对流——由于机械作用（风机、泵等）或其他压差作用引起的相对运动。

2. 对流换热 (对流放热) (具有实用意义)

定义: 流体流过固体表面时, 对流和导热的联合作用, 使流体与固体壁面之间产生热量传递的过程叫做对流换热。

3. 对流换热的基本计算公式 (牛顿冷却公式 1701 年)

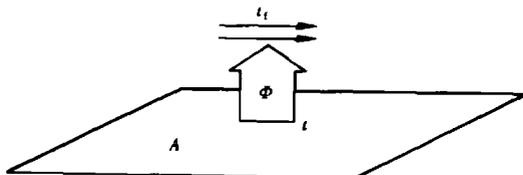


图 1-4 对流换热

如图 1-4,

$$\Phi = h \cdot A(t - t_f) = h \cdot A \Delta t \quad (1-3)$$

式中 Δt ——流体与壁面传热温差, $^{\circ}\text{C}$;

A ——传热面积, m^2 ;

h ——表面传热 (对流换热、放热、给热) 系数, $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

对流换热量与换热面积和传热温差成正比。

热流密度

$$q = h \cdot \Delta t \quad (1-4)$$

研究对流换热的任务 (研究表面传热系数):

$h = f$ (流体物性、流动状态、换热面形状、……)

三、热辐射 (如太阳辐射、炉火取暖)

1. 定义

辐射——物体通过电磁波传递能量的方式。

热辐射——由于热的原因, 物体的内能转变成电磁波的能量而进行的辐射过程。

2. 辐射换热 (具有实用意义)

不直接接触的物体之间, 由于各自辐射与吸收的综合结果所产生的热量传递现象。

特点:

(1) 不直接接触

(2) 伴随能量形式的转变 $\left\{ \begin{array}{l} \text{发射时: 热能} \rightarrow \text{辐射能} \\ \text{吸收时: 辐射能} \rightarrow \text{热能} \end{array} \right.$

物体的辐射能力 = f (绝对温度、表面特性)

绝对黑体 (黑体) ——同温度下辐射和吸收能力最强的物体

3. 物体的辐射热流量公式

黑体辐射 (斯忒藩——玻尔兹曼定律) 四次方定律

$$\Phi = A \sigma T^4 \quad (1-5)$$

式中 T ——黑体绝对温度, K ;

σ ——黑体辐射常数, $5.67 \times 10^{-8}, \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$;

A ——辐射表面积, m^2 。

实际物体辐射

$$\Phi = \epsilon \cdot A \sigma T^4 \quad (1-6)$$

└——物体的黑度 (发射率)

计算表明：几十摄氏度表面散热问题中，对流换热与辐射换热数量级相当。

1.2.3 传热过程

(工程实际中的传热过程往往是几种方式联合作用的复合传热过程)

定义：热量由固体壁面一侧的流体通过壁面传到另一侧流体中去的过程叫做传热过程。

传热过程中热量的迁移一般由三个串联环节组成：

热流体 $\xrightarrow{\text{对流换热}}$ 壁面高温侧

壁面高温侧 $\xrightarrow{\text{导热}}$ 壁面低温侧

壁面低温侧 $\xrightarrow{\text{对流换热}}$ 冷流体

各自的传热量方程

$$\Phi = Ah_1(t_f - t_{w1})$$

$$\Phi = A \frac{\lambda}{\delta}(t_{w1} - t_{w2})$$

$$\Phi = Ah_2(t_{w2} - t_c)$$

联列消去 t_{w1} 、 t_{w2} ，整理得

$$\Phi = \frac{A(t_f - t_c)}{\frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = kA\Delta t \quad (1-7)$$

式中 传热系数 (k) —— 传热过程强烈程度的标尺，数值上等于冷热流体温差 1°C 时，单位面积上的热流量， $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{h_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \quad (1-8)$$

分析：(热电类比) (见图 1-5)

电流 $I = \frac{\text{电压 } V}{\text{电阻 } R}$

热流 $\Phi = \frac{\text{温压 } \Delta t}{\text{热阻 } \frac{1}{kA}}$

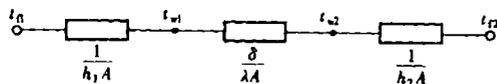


图 1-5 传热过程热阻分析

$$R_k = \frac{1}{k} \quad (\text{单位传热面积上的总热阻})$$

$$R_h = \frac{1}{h} \quad (\text{单位传热面积上的对流换热热阻})$$

$$R_\lambda = \frac{\delta}{\lambda} \quad (\text{单位传热面积上的导热热阻})$$

对比热阻大小，就可以找到强化传热的主要环节。

1.2.4 单位制

一、定义

单位：物理量的度量标尺。

法定计量单位：计量法所规定计量单位（国际单位制 SI、工程单位制）。

基本单位：基本物理量的单位（独立地选定）。如：时间 s 、长度 m 。

导出单位：由物理含义导出的以基本单位组成的单位。如：速度 m/s 。

单位制：基本单位与导出单位的总和。

二、基本物理量及单位

长度 m；质量 kg；时间 s；电流 A；热力学温度 K；物质的量 mol；发光强度 cd。

三、几个常用换算系数

$$1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} \quad 1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N}$$

$$1 \text{ kcal} = 4.1868 \text{ kJ} \quad 1 \text{ kcal/h} = 1.163 \text{ W}$$

1.3 概念汇总

1. 传热学：研究热量传递规律的科学。
2. 热量传递的基本方式：导热、对流、辐射。
3. 热传导（导热）：物体的各部分之间不发生相对位移，依靠微观粒子的热运动产生的热量传递现象。
4. 纯粹的导热只能发生在不透明的固体之中。
5. 热流密度：通过单位面积的热流量 (W/m^2)。
6. 热对流：由于流体各部分之间发生相对位移而产生的热量传递现象。
7. 热对流只发生在流体之中，并伴随有导热现象。
8. 自然对流：由于流体密度差引起的相对运动。
9. 强制对流：由于机械作用或其他压差作用引起的相对运动。
10. 对流换热：流体流过固体壁面时，由于对流和导热的联合作用，使流体与固体壁面间产生热量传递的过程。
11. 辐射：物体通过电磁波传播能量的方式。
12. 热辐射：由于热的原因，物体的内能转变成电磁波的能量而进行的辐射过程。
13. 辐射换热：不直接接触的物体之间，由于各自辐射与吸收的综合结果所产生的热量传递现象。
14. 传热过程：热流体通过固体壁面将热量传给另一侧冷流体的过程。
15. 传热系数：表征传热过程强烈程度的标尺，数值上等于冷热流体温差 1°C 时所产生的热流密度 [$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$]。
16. 单位面积上的传热热阻： $R_k = \frac{1}{k}$ 。
17. 单位面积上的导热热阻： $R_{\lambda} = \frac{\delta}{\lambda}$ 。
18. 单位面积上的对流换热热阻： $R_h = \frac{1}{h}$ 。
19. 对比串联热阻大小就可以找到强化传热的主要环节。
20. 单位：物理量的度量标尺。
21. 基本单位：基本物理量的单位。
22. 导出单位：由物理含义导出，以基本单位组成的单位。

23. 单位制：基本单位与导出单位的总和。

1.4 思考题分析

1-1 试用简练的语言说明导热、对流换热及辐射换热三种传递方式之间的联系与区别。

答：导热、对流换热及辐射换热是热量传递的三种方式。导热主要依靠微观粒子运动而传递热量；对流换热是流体与固体壁面之间的换热，依靠流体对流和导热的联合作用而产生热量传递；辐射换热是通过电磁波传播能量，是物体之间辐射和吸收的综合结果。一个传热现象往往是几种传热方式同时作用。

1-2 以热流密度表示的傅里叶公式、牛顿冷却公式及斯忒藩—玻尔兹曼定律是应当熟记的传热学基本公式，试写出这三个公式并熟记各符号的物理意义。

$$\text{Fourier:} \quad q = \lambda \frac{\Delta t}{\delta}$$

$$\text{Newton:} \quad q = h \Delta t$$

$$\text{S-B:} \quad q = \epsilon \sigma T^4$$

1-3 导热系数、表面传热系数及传热系数的单位是什么？哪些是物性参数？哪些与过程有关？

导热系数 λ : $\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 物性参数

表面传热系数 h : $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 与过程有关

传热系数 k : $\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 与过程有关

1-4 当热量从壁面一侧的流体穿过壁面传给另一侧的流体时，冷热流体之间的换热量可以通过其中任何一个环节来计算（过程是稳态的），但本章中又引入了传热方程式，并说它是“换热器热工计算的基本公式”。试分析引入传热方程式的工程使用意义。

答：传热方程式 $\Phi = kA\Delta t$ ，式中 Δt 为冷热流体之间的温差，计算热流量时无需知道中间壁面温度，各环节对传热的影响反映在传热系数 k 中。

1-5 用铝制的水壶烧开水时，尽管炉火很旺，但水壶仍安然无恙。但一旦壶内的水烧干后，水壶很快就被烧坏。试从传热学的观点分析这一现象。

答：壶内有水时，水对壶壁起冷却作用，不致烧坏壶壁，水干后，壶壁得不到充分冷却，使壁温接近火焰温度，水壶就会被烧坏。

1-6 用一只手握住盛有热水的杯子，另一只手用筷子快速搅拌热水，握杯子的手会显著地感到热。试分析其原因。

答：杯中水由于被搅动而强化了与杯壁的传热，使杯壁温度接近水温，所以手会感到杯子变热。

1-7 什么是串联热阻叠加原则，它在什么前提下成立？以固体中的导热为例，试讨论有哪些情况可能使热量传递方向上不同截面的热流量不相等。

答：在一个串联的热传递过程中，如果通过各环节的热流量都相等，则总热阻等于各环

节热阻之和，这就是串联热阻叠加原则。其前提是通过各环节的热流量必须相等。当存在内热源或热汇时，就会使热量传递方向上不同截面的热流量不相等。

1-8 一水平夹层内充满流体，试分析上下表面冷热状态颠倒时热量交换的方式有何不同？如果要通过实验来测定夹层中流体的导热系数，应采用哪一种布置？

答：热面在上，冷面在下时，夹层中流体不易对流，热量通过夹层时以导热为主，而冷面在上，热面在下时，热量通过夹层时以对流为主。要测定夹层中流体的导热系数，应采用热面在上的布置形式。

1-9 试分析用热电偶测量管道中气流（热透明气体）温度时，热电偶结点的换热方式。

答：结点与气流间进行对流换热，与管壁有辐射换热，与电偶臂有导热。

1-10 在工程传热学问题的分析中定性地估计换热壁面的温度工况是很有用的。对于一个稳态的传热过程，试概括出通过热阻以估计壁面温度工况的简明法则。

答：壁面与流体换热热阻越大，则壁面与流体的温差越大。

1.5 典型习题分析

1-1 一炉墙厚 24cm，总面积为 20m²，平均导热系数为 1.04W/(m·K)，内外壁温分别为 750℃及 50℃。试计算通过炉墙的热损失。如果所燃用的煤的发热值为 2.09 × 10⁴kJ/kg，问每天的热损失相当于烧掉多少千克煤？

$$\text{解：} \quad \Phi = \lambda A \frac{\Delta t}{\delta} = 1.04 \times 20 \times \frac{750 - 50}{0.24} = 60667 \text{ W}$$

$$M = \frac{\Phi t}{Q_d} = \frac{60667 \times 24 \times 3600}{2.09 \times 10^4 \times 1000} = 250.8 \text{ kg/D}$$

分析与思考：

(1) 由所给参数可知，这可能是一个用耐火材料砌制的小型燃煤热处理炉或热风炉，由于它对环境的污染较大，在城市不提倡使用，一般以燃油、燃气或电炉为多。

(2) 所计算的散热量只能说相当于 250.8kg 煤的热值，并非每天多消耗的煤量，这类炉子的热效率一般只有 50%左右，你想由于散热多消耗的煤量大约是多少呢？按每吨煤 300 元计算，每年要多花多少钱呢？

(3) 为了减少散热，应采取哪些措施？

1-2 用热流计测得一厚为 40mm 木门的热流密度为 15W/m²。同时测得室内侧表面温度为 25℃，室外侧表面温度为 35℃。试估算此木门在厚度方向上的导热系数。

解：

$$\lambda = \frac{q\delta}{\Delta t} = \frac{15 \times 0.04}{35 - 25} = 0.06 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$$

分析与思考：这是傅里叶公式的反向应用，你能据此设计出一套测量固体导热系数的装置吗？

1-3 一根电热管的加热功率为 100W，管壁平均温度 $t_w = 150^\circ\text{C}$ ，空气温度 $t_f = 20^\circ\text{C}$ ，

管子外径 $d = 14\text{mm}$ ，加热段长 300mm 。如果全部热量通过对流换热传给空气，试问此时的对流换热表面传热系数为多大？

解：对流换热表面传热系数为

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Phi}{A\Delta t} \\ &= 100/[3.14 \times 0.014 \times 0.3 \times (150 - 20)] \\ &= 58.3\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \end{aligned}$$

分析与思考：

(1) 这是牛顿冷却公式的反向应用。

(2) 如果全部热量只是通过对流换热传给空气，表面传热系数为 $58.3\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 的对流换热应是自然对流还是强制对流？

(3) 本题中电热管表面温度已达 150°C ，上一假设可靠吗？若不可靠，计算出的表面传热系数应是什么概念呢？

(4) 一般电热管表面的工作温度最高不能超过 400°C ，为什么？

1-4 对置于水中的不锈钢管采用电加热的方法，进行压力为 $1.013 \times 10^5\text{Pa}$ 的饱和水沸腾换热试验。测得加热功率为 50W ，不锈钢管外径为 4mm ，加热段长 10cm ，表面平均温度为 109°C 。试计算此时沸腾换热的表面传热系数。

解：

$$\begin{aligned} h &= \frac{\Phi}{\pi d l \Delta t} \\ &= \frac{50}{3.14 \times 0.004 \times 0.1 \times (109 - 100)} \\ &= 4423.2\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \end{aligned}$$

分析与思考：题中所给饱和压力和间接给出水的沸腾温度，与上题计算结果对比可知，水沸腾换热的表面传热系数远大于空气对流的表面传热系数。

1-5 一航天器在太空中飞行，其外表面平均温度为 250K ，表面发射率为 0.4 ，试计算航天器单位表面上的换热量。（宇宙空间可近似地看成为 0K 的真空空间。）

解：

$$\begin{aligned} \Phi &= \varepsilon \sigma T^4 \\ &= 0.4 \times 5.67 \times 10^{-8} \times 250^4 = 88.6\text{W}/\text{m}^2 \end{aligned}$$

分析与思考：为减少航天器的能源消耗，其表面应采用发射率较低的材料。

1-6 有一水冷器，空气侧表面传热系数 $h_1 = 45\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，传热壁面厚 $\delta = 1.5\text{mm}$ ， $\lambda = 387\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，水侧表面传热系数 $h_2 = 5000\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。设传热壁可以看作平壁，试计算各个环节单位面积的热阻及从油到水的总传热系数。你能否指出，为了强化这一传热过程应首先从哪个环节着手？

解：各环节单位面积的热阻

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 1/h_1 \\
 &= 1/45 = 2222 \times 10^{-5} (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W} \\
 r_2 &= \delta/\lambda \\
 &= 0.0015/387 = 0.388 \times 10^{-5} (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W} \\
 r_3 &= 1/h_2 \\
 &= 1/5000 = 20 \times 10^{-5} (\text{m}^2 \cdot \text{K})/\text{W}
 \end{aligned}$$

总传热系数

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{1}{r_1 + r_2 + r_3} \\
 &= \frac{10^5}{2222 + 0.388 + 20} = 44.6 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})
 \end{aligned}$$

r_1 是主要热阻, 要强化这一传热过程应从强化空气侧换热着手。

分析与思考: 水冷器是工程中常见的换热器, 如汽车水箱, 为强化换热, 在空气侧安装翅片。

1-7 有一台冷水机组的蒸发器, 传热面积为 15m^2 , 制冷剂的蒸发温度为 0°C , 冷冻水的进口温度为 13°C , 出口温度为 9°C , 蒸发器中的传热量为 100kW , 试计算总传热系数。

解:
$$k = \frac{\Phi}{A\Delta t} = \frac{100000}{15 \times 11} = 606 \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

分析与思考: 冷水机组是制取冷水的机器, 常用于空调系统或工艺冷却系统。本题中冷冻水温度用进出口温度的算术平均值表示是不准确的, 将在传热过程与换热器一章中做进一步阐述。

1-8 火车玻璃窗的尺寸为 $100 \times 80\text{cm}$, 厚为 5mm 。冬天车内外温度分别为 20°C 及 -20°C , 内表面的自然对流换热表面传热系数为 $10\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, 外表面的强制对流换热表面传热系数为 $50\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, 玻璃的导热系数 $\lambda = 0.78\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。试确定通过玻璃窗的热损失。

解: 通过玻璃窗的热损失

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{A\Delta t}{\sum R} \\
 &= \frac{1 \times 0.8 \times [20 - (-20)]}{\frac{5 \times 10^{-3}}{0.78} + \frac{1}{50} + \frac{1}{10}} = 253 \text{W}
 \end{aligned}$$

分析与思考: 这里要注意车内外温度与玻璃内外表面温度的区别。计算结果告诉我们, 单层玻璃窗的散热量是很大的, 所以车窗一般用多层玻璃结构。

1-9 对于水在大容器内的饱和沸腾试验, 有人得出了下列经验公式:

$$h = 0.628(p^{0.14} + 9.339 \times 10^{-14} p^2) q^{0.7}$$

式中各量的单位为

$$p - \text{N}/\text{m}^2; \quad q - \text{W}/\text{m}^2; \quad h - \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

试将此式改用工程单位制写出。

解：用下列单位换算关系：

$$1\text{kg/cm}^2 = 98066.5\text{N/m}^2$$

$$1\text{kcal/h} = 1.163\text{W}$$

代入原公式可得

$$\begin{aligned} h &= \frac{0.628}{1.163} [(98066.5p)^{0.14} + 9.339 \times 10^{-14} (98066.5p)^2] \times (1.163q)^{0.7} \\ &= 3(p^{0.14} + 1.8 \times 10^{-4} p^2) q^{0.7} \end{aligned}$$

改写后公式中各单位为

$$p\text{—kg/cm}^2; q\text{—kcal/}(\text{m}^2 \cdot \text{h})$$

分析与思考：单位换算是计算和工程设计中经常会遇到的，所以应牢记相关换算常数。

2. 导热基础理论

2.1 知识结构

1. 导热问题的求解目标 (物体内部的温度场与热流场);
2. 温度场 (稳态、非稳态、均匀、一维、二维、三维);
3. 等温面、等温线、热流线的性质及相互关系;
4. 方向导数、梯度的数学概念及相互关系;
5. Fourier 定律;
6. 推导导热微分方程式的理论基础、简化假设及方程各项 (内能、导热、内热源、导热系数、 $\nabla^2 t$) 的物理涵义;
7. 定解条件 [几何、物理、时间、边界 (I、II、III)];
8. 导热问题的求解方法 (解析解、数值解)。

2.2 重点内容剖析

2.2.1 导热问题的求解目标与思路

解决工程问题的数学方法一般有下列几个步骤: 问题分析→建立物理模型→根据问题的相关属性建立数学模型→求解。

传热学的主要任务是求解热量传递速率和温度变化速率, 对应于导热问题就是求解物体内部的温度场和热流场。这就需要在深刻理解导热规律前提下寻求对各种具体问题的数学求解方法。

2.2.2 温度场和温度梯度 (场论概念)

温度场——物体中各点温度的集合, $t(x, y, z, \tau)$ 。

(标量场, 还有柱坐标、球坐标形式) (是空间 时间的函数)

稳态 (定常) 温度场——不随时间发生变化的温度场 ($\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$)。

(设备正常运行工况)

非稳态温度场——随时间发生变化的温度场 ($\frac{\partial t}{\partial \tau} \neq 0$)。

(设备启动与停车过程)

一维温度场——物体中各点温度只在一个坐标方向变化。

二维温度场——物体中各点温度在两个坐标方向变化。

三维温度场——物体中各点温度在三个坐标方向变化。

等温面——温度场中同一瞬间温度相同点组成的面。

等温线——等温面上的线。

等温面、等温线特点:

- (1) 物体内部连续 (每点都有温度, 且温度是时间和空间的可微函数);
- (2) 互不相交 (一点只有一个温度)。

热流线总是垂直于等温面。

(流函数) (势函数)

方向导数——函数在某点沿某一方向对距离的变化率。

$$\left. \frac{\partial t}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{t(M) - t(M_0)}{MM_0} \quad (2-1)$$

梯度 (最大方向导数) ——若在温度场中某点 M_0 处, 存在一个矢量 \vec{G} , 其方向指向该点方向导数最大的方向, 其大小等于该点最大的方向导数, 则矢量 \vec{G} 称为温度场在 M_0 点的梯度, 记作 $\text{grad}t = \vec{G}$ (梯度场是矢量场)。

梯度的性质:

- (1) 方向导数等于梯度在该方向上的投影;
- (2) 每点梯度都垂直于该点等温面, 并指向温度增大的方向 (法线方向)。

2.2.3 导热基本定律 (傅里叶定律)

(Fourier 公式对壁厚取极限, 适用条件: $\Phi \ll \delta$)

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad (2-2)$$

└ 负号表示热量总是传向温度降低的方向

文字表达: 在导热现象中, 通过给定截面的热流量 (热流在截面法线方向的分量) 正比于该截面 (不一定是等温面) 法线方向上的温度变化率 (方向导数) 和截面面积。

向量表达式: $q = -\lambda \cdot \text{grad}t$ (等温面法线方向上的热流密度)。

2.2.4 导热系数 (热导率) λ (物性参数)

一、定义式

$$\lambda = \frac{q}{-\text{grad}t} \quad (2-3)$$

定义: 导热系数是物体导热能力的量度, 数值上等于单位温度梯度作用下的热流密度。导热系数不仅与物质的种类有关, 还与物质的物理结构和状态有关。

二、主要影响因素

1. 疏松物质的折合密度

疏松物质内含不流动的气体物质, 由于气体物质的低导热性, 疏松物质常用于隔热保温。若过于密实, 空隙中的气体被赶跑, 导热系数会加大; 若过于蓬松, 空隙中气体的对流作用增强, 也会使导热系数加大, 所以, 为了得到较小的导热系数, 疏松物质应有一个适中的折合密度。

2. 温度 $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$

气体 $t \uparrow \Rightarrow \lambda \uparrow$ (分子作用)

液体	$t^{\Delta} \Rightarrow \lambda^{\Delta}$	(也有少数液体变化相反, 如水)
非金属固体	$t^{\Delta} \Rightarrow \lambda^{\Delta}$	(晶格振动)
金属	$t^{\Delta} \Rightarrow \lambda^{\Delta}$	(自由电子运动) (类似于电阻)

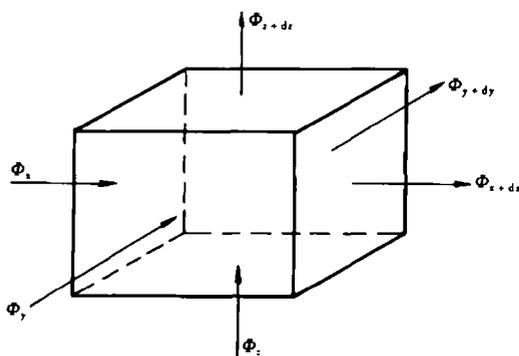


图 2-1 微元体导热分析

如图 2-1:

$$x \text{ 方向导入微元体的热量} \quad \Phi_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dydz \quad (2-4a)$$

$$x \text{ 方向导出微元体的热量} \quad \Phi_{x+\Delta x} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) dydz \quad (2-4b)$$

$$x \text{ 方向导入微元体的净热量} \quad \Phi_x - \Phi_{x+\Delta x} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dy dz \quad (2-4)$$

$$\text{同理} \quad \Phi_y - \Phi_{y+\Delta y} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx dy dz \quad (2-5)$$

$$\Phi_z - \Phi_{z+\Delta z} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx dy dz \quad (2-6)$$

导入微元体的总净热量 (以上三式之和)

$$\Phi_d = \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \lambda \nabla^2 t dx dy dz \quad (2-7)$$

微元体内热源生成热

$$\Phi_r = \dot{\Phi} dx dy dz \quad (2-8)$$

式中: $\dot{\Phi}$ 为单位体积内热源生成热。

微元体内能增量 (显热)

$$\Phi_e = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} dx dy dz \quad (2-9)$$

由能量守恒定律

$$\Phi_d + \Phi_r = \Phi_e \Rightarrow \lambda \nabla^2 t + \dot{\Phi} = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (2-10)$$

3. 多孔材料的含水率

$$\text{含水率}^{\Delta} \Rightarrow \lambda^{\Delta}$$

水取代了孔中空气, 所以保温材料要防水, 衣服要保持干燥。

2.2.5 导热微分方程式

(1) 目的: 建立导热问题数学模型, 提供导热问题的分析与求解手段。

(2) 理论基础: 傅里叶定律和能量守恒定律。

(3) 方法: 分析微元体热平衡。

假设: 连续体、常物性 (ρ, c, λ)。

整理得常物性非稳态有内热源的导热微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \quad (\text{非稳态项} = \text{扩散项} + \text{源项}) \quad (2-11)$$

式中：拉普拉斯算子 $\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$

热扩散率（导温系数） $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ ，是物性参数，分子代表导热能力，分母代表容热能力，其值代表温度波动在物体中的扩散速率。

常见材料热扩散率：木材， $a = 1.5 \times 10^{-7}$ ；钢， $a = 1.25 \times 10^{-5}$ ；银， $a = 2 \times 10^{-4}$ 。木材比钢材的导温系数小 100 倍，所以木材一端着火而另一端不烫手。

热扩散率只对非稳态过程才有意义，因为稳态过程温度不随时间变化，热容大小对导热过程没有影响。

热扩散率和热导率是两个不同的物理量，热导率小的材料热扩散率不一定小，如气体的热导率比金属小得多，但热扩散率与金属相当。

总结常物性导热微分方程式的几种形式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{有内热源} \left\{ \begin{array}{l} \text{非稳态: } \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \quad (2-11a) \\ \text{稳态: } \lambda \nabla^2 t + \dot{\Phi} = 0 \quad (2-11b) \end{array} \right. \\ \text{无内热源} \left\{ \begin{array}{l} \text{非稳态: } \frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t \quad (2-11c) \\ \text{稳态: } \nabla^2 t = 0 \quad (2-11d) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\nabla^2 t$ 的物理意义： $\nabla^2 t > 0$ 时，吸热；
 $\nabla^2 t < 0$ 时，放热；
 $\nabla^2 t = 0$ 时，热流代数和为零。

提示：导热微分方程还有柱坐标、球坐标、变物性等形式。不同坐标系的导热微分方程，可用以上提供的微元体热平衡分析法求得，也可直接用坐标转换的数学关系求得。

附：柱坐标体系的导热微分方程分析。

(1) 微元体热平衡分析法（见图 2-2）

r 方向导热

$$\Phi_r = -\lambda r d\varphi dz \frac{\partial t}{\partial r} \quad (2-12a)$$

$$\Phi_{r+dr} = -\lambda(r+dr)d\varphi \cdot dz \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(t + \frac{\partial t}{\partial r} dr \right)$$

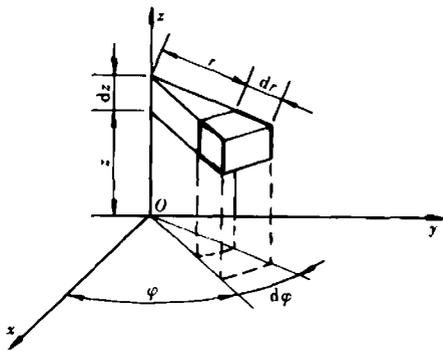


图 2-2 柱坐标中的微元体

$$\begin{aligned}
 &= -\lambda d\varphi \cdot dz(r+dr) \left(\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} dr \right) \\
 &= -\lambda d\varphi \cdot dz \left(r \frac{\partial t}{\partial r} + r \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} dr + \frac{\partial t}{\partial r} dr \right) \quad (2-12b)
 \end{aligned}$$

$$\Phi_r - \Phi_{r+dr} = \lambda d\varphi \cdot dz \left(r \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr \quad (2-12)$$

φ 方向导热

$$\Phi_\varphi = -\lambda dr dz \frac{\partial t}{r \partial \varphi} \quad (2-13a)$$

$$\Phi_{\varphi+d\varphi} = -\lambda dr dz \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(t + \frac{\partial t}{\partial \varphi} d\varphi \right) \quad (2-13b)$$

$$\Phi_\varphi - \Phi_{\varphi+d\varphi} = \lambda dr dz d\varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \quad (2-13)$$

z 方向导热

$$\Phi_z = -\lambda r d\varphi dr \frac{\partial t}{\partial z} \quad (2-14a)$$

$$\Phi_{z+dz} = -\lambda r d\varphi dr \frac{\partial}{\partial z} \left(t + \frac{\partial t}{\partial z} dz \right) \quad (2-14b)$$

$$\Phi_z - \Phi_{z+dz} = \lambda r d\varphi dr dz \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \quad (2-14)$$

微元体净导热

$$\Phi_d = \lambda r d\varphi dr dz \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (2-15)$$

微元体内热源生成热

$$\Phi_r = \dot{\Phi} r d\varphi dr dz \quad (2-16)$$

式中： $\dot{\Phi}$ 为单位体积内热源生成热。

微元体内能增量（显热）

$$\Phi_e = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} r d\varphi dr dz \quad (2-17)$$

由能量守恒定律

$$\Phi_d + \Phi_r = \Phi_e \quad (2-18)$$

导热微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \quad (2-19)$$

(2) 坐标转换分析法

$$t(r, \varphi, z) r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x} \quad z = z$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y(-1)x^{-2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-x^{-1}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial t}{\partial r} \cos\varphi + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial t}{\partial r} (-\sin\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$- \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \cdot \frac{r \cos\varphi}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\sin\varphi}{r^2} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \cos^2\varphi + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2\varphi}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} (-\sin\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi)$$

$$= \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \cos^2\varphi + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \sin 2\varphi$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial r} \sin\varphi + \frac{\partial t}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos\varphi}{r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \sin\varphi + \frac{\partial t}{\partial r} \cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$+ \frac{\partial t}{\partial \varphi} \cdot \frac{-r \sin\varphi}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\cos\varphi}{r^2}$$

$$= \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \sin^2\varphi + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} [-\sin\varphi \cos\varphi - \sin\varphi \cos\varphi]$$

$$= \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} \sin^2\varphi + \frac{\partial t}{\partial r} \frac{\cos^2\varphi}{r} + \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2\varphi}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial t}{\partial \varphi} \sin 2\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}$$

2.2.6 单值性条件

求解固体导热问题的数学描述:

$$\left. \begin{array}{l} \text{导热微分方程 (共性)} \\ \text{单值性条件 (定解条件) (个性)} \end{array} \right\}$$

对于具体的导热问题,应根据问题的属性〔几何形状、物性(常物性、变物性)、温度场(稳态、非稳态)]选择适当的坐标系和对应的微分方程,再结合定解条件选择合适的数学求解方法进行求解。

单值性条件:

1. 几何条件——导热物体的几何形状、大小。
2. 物理条件——①物性，如 ρ 、 c 、 λ 、 a 等；②内热源及其分布。
3. 时间条件——某一时刻导热物体内的温度分布，如以该时刻作为时间起算点，则叫做初始条件。（对于稳态，时间条件就无意义了）

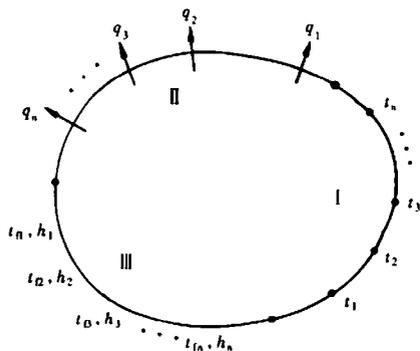


图 2-3 导热物体的三类边界条件

4. 边界条件——表明物体边界处的温度或换热情况（见图 2-3）。

(1) 第一类边界条件

已知物体边界上任何时刻的温度分布。

最简单的第一类边界条件：恒壁温。

(2) 第二类边界条件

已知物体边界上任何时刻的热流密度或温度变化率。

最简单的第二类边界条件：恒热流（恒热流的特例：绝热）

(3) 第三类边界条件

已知物体边界与周围流体间的表面传热系数

h 及周围流体温度。

由 Newton 定律：
$$q_n = h(t_w - t_f) \quad (2-20)$$

由 Fourier 定律：
$$q_n = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_w \quad (2-21)$$

$$\frac{\partial t}{\partial n} \Big|_w = -\frac{h}{\lambda} (t_w - t_f) \quad (2-22)$$

当 $h/\lambda \rightarrow \infty, \Rightarrow t_w = t_f$ 转化为第一类边界条件；

当 $h \rightarrow 0, \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_w = 0 \Rightarrow q_w = 0$ (绝热) 转化为第二类边界条件。

2.2.7 导热问题求解方法

(1) 精确解——分析解，利用微分方程与定解条件直接求解。一般只适用于简单问题（简单体系、形状、单值条件）。

(2) 近似解——虚拟函数积分解，数值解（有限差分，有限元），实验解。

2.3 概念汇总

1. 温度场：物体中各点温度的集合。
2. 稳态温度场：物体中各点温度不随时间变化的温度场。
3. 非稳态温度场：物体中各点温度随时间变化的温度场。
4. 均匀温度场：物体中各点温度相同的温度场。
5. 一维温度场：物体中各点温度只在一个坐标方向变化的温度场。
6. 二维温度场：物体中各点温度在两个坐标方向变化的温度场。

7. 三维温度场：物体中各点温度在三个坐标方向变化的温度场。
8. 等温面：温度场中同一瞬间温度相同点组成的面。
9. 等温线：等温面上的线。
10. 等温面（线）在物体内连续，且互不相交。
11. 方向导数：函数在某点沿某一方向对距离的变化率。
12. 梯度：最大的方向导数。
13. 方向导数等于梯度在该方向上的投影。
14. 每点的梯度都垂直于该点等温面 \Rightarrow 热流线垂直于等温面。
15. Fourier 定律：在导热现象中，单位时间内通过给定截面的热量，正比于该截面面积及其在法线方向上的温度变化率。
16. 导热系数：是物体导热能力的量度，数值上等于单位温度梯度作用下的热流密度。
17. 推导热微分方程的理论基础是 Fourier 定律和能量守恒定律。
18. 导热微分方程： $\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\phi}}{\rho C}$ （各项物理含义：内能变化量 = 导热量 + 内热源）
19. 导温系数（热扩散率）：物体中温度波动的扩散速率。
20. 单值性条件一般包含几何、物理、时间、边界四个方面。
21. 边界条件可以分为三类：第一类是给定物体边界处任何时刻的温度分布，其特例是恒温；第二类是给定物体边界处任何时刻的热流密度，其特例是恒热流，恒热流的特例是绝热；第三类是给定物体与周围流体的表面传热系数 h 以及流体温度 t_f 。

2.4 思考题分析

2-1 试写出傅里叶定律的一般形式，并说明其中各个符号的意义。

答： $q = -\lambda \text{grad} t$ ，式中， $\text{grad} t$ 是空间某点的温度梯度， q 为梯度方向上的热流密度， λ 是物体的导热系数，负号表明热流总是与温度梯度方向相反。

2-2 已知导热物体中某点在 x 、 y 、 z 三个方向上的热流密度分别为 q_x 、 q_y 、 q_z ，如何获得该点的热流密度矢量？

矢量大小 $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$

矢量的方向余弦 $\frac{q_x}{q} = \cos \alpha$ $\frac{q_y}{q} = \cos \beta$ $\frac{q_z}{q} = \cos \gamma$

2-3 试说出得出导热微分方程所依据的基本定律。

答：得出导热微分方程所依据的基本定律是傅里叶定律和能量守恒定律。

2-4 试分别说明导热问题三种类型的边界条件。

答：第一类边界条件： $t_w = t$ ，已知边界处任意时刻的温度；

第二类边界条件： $q_w = -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_w$ ，已知边界处任意时刻的热流密度或温度变化率；

第三类边界条件： $t_f, h \Rightarrow -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial n} \right|_w = h(t_w - t_f)$ ，已知边界处流体的温度及表面传热系

数。

2-5 对于第一类边界条件的稳态导热问题，其分析解与导热系数有没有关系？

答：在导热系数为常数的稳态导热问题中，若边界条件为第一类边界条件，则描述问题的微分方程和定解条件都不出现导热系数，所以温度分布与导热系数无关，即导热系数只影响热流量，而不影响温度场。

2-6 有人对二维矩形物体中的稳态、无内热源、常物性的导热问题进行了数值计算。矩形的一个边绝热，其余三个边均与温度为 t_f 的流体发生对流换热。你能预测他所得到的温度场的解吗？

答：根据所给边界条件可以判断该物体没有热流，又因为物体处于稳态，所以物体各点温度均为 t_f 。

2.5 典型习题分析

2-1 一半径为 R 的实心球，初始温度为 t_0 ，突然将其放入液体温度为 t_f 的恒温槽内冷却，已知球的导热系数 λ 、密度 ρ 和比热容 c ，球壁表面与液体的表面传热系数为 h ，试写出球体冷却过程的数学描述。

解：由于对称受热，在球坐标系中为常物性一维无内热源非稳态导热问题。

分析厚度为 dr 的微元球的导热：

$$\begin{aligned}\Phi_r &= -\lambda(4\pi r^2) \frac{\partial t}{\partial r} \\ \Phi_{r+dr} &= -4\pi\lambda(r+dr)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(t + \frac{\partial t}{\partial r} dr \right) \\ &= -4\pi\lambda(r^2 + 2rdr + (dr)^2) \left(\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} dr \right)\end{aligned}$$

忽略高阶小量得微元球净导热，

$$\Phi_d = \Phi_r - \Phi_{r+dr} = 4\pi\lambda r^2 \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) dr$$

微元球内能增量

$$\Phi_e = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot 4\pi r^2 dr$$

由能量守恒定律

$$\Phi_d = \Phi_e$$

导热微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right)$$

边界条件

$$r = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad (\text{中心无热流, 绝热})$$

$$r = R, \quad -\lambda \frac{\partial t}{\partial r} = h(t - t_f) \quad (\text{第三类边界条件})$$

分析与思考：导热问题的数学描述，应把握问题的物理本质，从问题的简化分析入手，确定坐标系和微元体形式，灵活运用傅里叶定律和能量守恒定律推导数学关系。

2-2 从宇宙飞船伸出一根细长散热棒，以辐射换热形式将热量散发到温度为绝对零度的外部空间，已知棒的表面发射率为 ϵ ，导热系数为 λ ，长度为 l ，横截面积为 A ，截面周长为 P ，根部温度为 T_0 ，试写出导热微分方程及边界条件。

解：对于细长散热棒，假设温度只在杆长方向变化，这是一个一维稳态导热问题。

分析厚度为 dx 的微元段的导热：

$$\Phi_x = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

$$\Phi_{x+dx} = -\lambda A \cdot \frac{d}{dx} \left(T + \frac{dT}{dx} dx \right)$$

微元段净导热

$$\Phi_d = \Phi_x - \Phi_{x+dx} = \lambda A \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

微元段散热量

$$\Phi_s = P dx \cdot \epsilon \sigma T^4$$

由能量守恒定律：

$$\Phi_d = \Phi_s$$

导热微分方程

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{P \epsilon \sigma}{\lambda A} T^4 = 0$$

边界条件

$$x = 0, \quad T = T_0$$

$$x = l, \quad -\lambda \frac{dT}{dx} = \epsilon \sigma T^4 \text{ (辐射边界条件)}$$

3. 稳态导热

3.1 知识结构

1. 一维导热问题（平壁、圆筒壁、球壁）分析解（导热公式、热阻形式）；
2. 温度分布与导热系数和热流的关系；
3. 变导热系数及变截面问题的解题方法及其对温度分布的影响；
4. 伸展体导热的微元段分析（一维假设条件、微分方程及系数 m 的组成）；
5. 三种细长杆（无限高、有限高端部散热、有限高端部绝热）的边界条件、分析解、散热量计算公式，工程计算中的简化方法；
6. 系数 m 对温度分布的影响 \Rightarrow 杆内热应力的影响；
7. 肋片与肋效率（定义、肋效率的影响因素、等截面直肋的肋效率公式）；
8. 接触热阻及其治理方法；
9. 具有内热源的导热及多维导热。

3.2 重点内容剖析

3.2.1 典型稳态导热问题分析解

稳态导热问题的主要特征是物体中各点温度不随时间发生变化，只是空间坐标的函数，热流也具有同样性质。温度在空间坐标上的分布决定导热问题的维数，同样的问题选择不同的坐标系会有不同的维数，维数越多问题越复杂，所以应对具体问题具体分析，从主要因数着手，忽略次要因数，进行适当简化。

一、无限大平壁的分析解（如图 3-1）

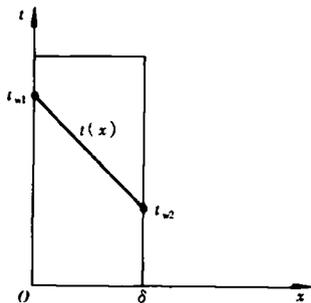


图 3-1 单层平壁导热分析解

（平壁厚度远小于其宽度和高度，热量只在厚度方向传递，亦即温度只在厚度方向变化， \rightarrow 一维导热问题）

1. 问题

- (1) 均质、单层无限大平壁（一维常物性）；
- (2) 无内热源稳态导热；
- (3) 平壁两面保持均匀而一定的温度，且 $t_{w1} > t_{w2}$ ；
- (4) 求解平壁内的温度分布 $t(x)$ 和通过平壁的热流密度。

2. 描述问题的数学表达式

微分方程（一维稳态）

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (3-1)$$

定解条件：(稳态——无初始条件)

边界条件 (第一类)

$$\begin{aligned} x=0 & \quad t = t_{w1} \\ x=\delta & \quad t = t_{w2} \end{aligned} \quad (3-2)$$

3. 求解

对式 (3-1) 两次积分得通解 $t = c_1 x + c_2$ (3-3)

式 (3-2) 代入式 (3-3) 得待定常数

$$c_2 = t_{w1}, \quad c_1 = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} \quad (3-4)$$

式 (3-4) 代入式 (3-3) 得温度分布 (直线):

$$t = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} x + t_{w1} \text{ 或 } \frac{t - t_{w1}}{t_{w2} - t_{w1}} = \frac{x}{\delta} \Rightarrow \Theta = X \quad (3-5)$$

(无量纲温度与无量纲尺度相等)

热流密度

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\delta} = \lambda \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \quad (3-6)$$

(虽然上式就是绪论中的平壁导热公式, 但已从感性上升到了理性)

二、多层平壁的导热问题

工程中的传热壁面常常是由多层平壁组成的, 如表层要考虑外观、防腐、抗老化、防水等因素, 内层要考虑耐温、与所接触的介质相容等因素, 整个壁面还要考虑强度、能耗、制造成本等问题。

已知: (1) 三层平壁厚度分别为 δ_1 、 δ_2 、 δ_3

(2) 三层平壁导热系数分别为 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 ;

(3) 两外表面温度分别为 t_1 、 t_4 。

求: 通过多层平壁的热流密度和温度分布。

简化假设: (1) 一维、稳态;

(2) 无接触热阻 (分界面无温降)。

设: 层间温度为 t_2 、 t_3 。

因为一维, 稳态, 无内热源 \Rightarrow 各层 q 相等

由单层平壁导热公式: $q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_1 - t_2)$ (3-7a)

$$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3) \quad (3-7b)$$

$$q = \frac{\lambda_3}{\delta_3} (t_3 - t_4) \quad (3-7c)$$

移项后相加消去 t_2 、 t_3 得热流密度

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \quad (3-8)$$

(式中总热阻由各单层平壁的导热热阻串联叠加而成)

将式(3-8)分别代入式(3-7a)和式(3-7b)可求得层间温度 t_2 、 t_3 ,从而求得各层平壁的温度分布(在各层平壁内部的温度分布与单层平壁的结果一样,是线性的)。

$$\text{同理,对于 } n \text{ 层平壁,} \quad q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (3-9)$$

$$\text{各层直线斜率与该层导热系数的关系为} \quad \frac{q}{\lambda_i} = \frac{t_i - t_{i+1}}{\delta} \quad (3-10)$$

(q 不变 $\Rightarrow \lambda_i \uparrow \rightarrow$ 斜率 \downarrow)

三、无限长圆筒壁的导热(筒长远大于直径 \Rightarrow 忽略轴向热流)

工程中常用圆管作为换热壁面,如锅筒、传热管、热交换器及其外壳等。圆筒受力均匀,强度高,制造方便。

1. 问题(柱坐标 \Rightarrow 一维导热)

- (1) 均质单层无限长圆筒壁(一维常物性);
- (2) 无内热源稳态导热;
- (3) 圆筒内外保持均匀而一定的温度,且 $t_1 > t_2$;
- (4) 求解筒壁内温度分布及通过壁面的导热热量。

2. 数学模型

$$(1) \text{ 微分方程} \quad \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (3-11)$$

(2) 定解条件(稳态,无初始条件)

$$\text{边界条件(第一类)} \quad \begin{cases} r = r_1, t = t_1 \\ r = r_2, t = t_2 \end{cases} \quad (3-12)$$

3. 求解

$$\text{对式(3-11)一次积分} \quad r \frac{dt}{dr} = c_1$$

再积分得通解

$$t = c_1 \ln r + c_2 \quad (3-13)$$

式(3-12)代入式(3-13)得待定常数

$$\begin{cases} c_1 = \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \\ c_2 = \frac{t_2 \ln r_1 - t_1 \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \end{cases} \quad (3-14)$$

式(3-14)代入式(3-13)得温度分布

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow \Theta = f(R) \quad (3-15)$$

(无量纲温度是无量纲半径的对数函数)

温度曲线形状 $r^* \rightarrow A^* \rightarrow q^* \Rightarrow \left| \frac{dt}{dr} \right|$

$$\text{热流量} \quad \Phi = -\lambda A \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot 2\pi r l \cdot \frac{c_1}{r} = \frac{t_1 - t_2}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda l}} \quad (3-16)$$

四、多层圆筒壁 (运用串联热阻叠加原理)

$$\Phi = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\frac{1}{2\pi l} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad (3-17)$$

(由以上分析可见: 各种导热问题的分析解都可以表示为无量纲关系式。)

3.2.2 导热问题分析的一些技巧

一、圆筒壁导热分析方法之二 (求解热流与温度分布)

(应用傅里叶定律写出热流与温度梯度的微分关系式后直接推导而得)

如图 3-2:

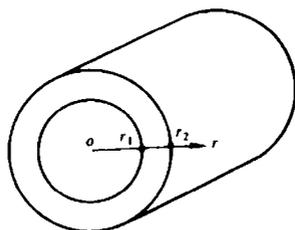


图 3-2 圆筒壁导热分析

$$\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dr} = -2\pi r l \frac{dt}{dr} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-\Phi}{2\pi\lambda l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \quad (3-18)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{-\Phi}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \Phi = \frac{2\pi\lambda l (t_1 - t_2)}{\ln r_2 / r_1} \quad (3-19)$$

公式变形 (傅里叶公式形式):

$$\Phi = \frac{2\pi l (r_2 - r_1) \lambda (t_1 - t_2)}{(r_2 - r_1) \ln r_2 / r_1} = \frac{(A_2 - A_1) \lambda (t_1 - t_2)}{\delta \ln A_2 / A_1} = A_m \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta} \quad (3-20)$$

式中

$$A_m = \frac{A_2 - A_1}{\ln A_2 / A_1} \quad (\text{对数平均面积}) \quad (3-21)$$

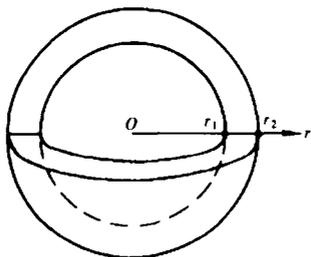
由式 (3-19) 变化: $t_2 - t_1 = \frac{-\Phi}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow t - t_1 = \frac{-\Phi}{2\pi\lambda l} \ln \frac{r}{r_1}$

两式相除得温度分布的无量纲参数方程

$$\Theta = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \ln \frac{r}{r_1} / \ln \frac{r_2}{r_1} = f(R) \quad (3-22)$$

二、内外表面维持均匀恒定温度的空心球壁的导热问题 (求解热流与温度分布)
(球坐标中一维导热问题另一求解方法)

如图 3-3:



$$\Phi = -\lambda A \frac{dt}{dr} = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \frac{dt}{dr} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{-\Phi}{4\pi\lambda} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \quad (3-23)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Rightarrow \Phi = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (3-24)$$

图 3-3 空心球壁导热分析 公式变形 (傅里叶公式形式):

$$\Phi = \frac{4\pi\lambda r_1 r_2 (t_1 - t_2)}{r_2 - r_1} = A_m \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta} \quad (3-25)$$

式中 $A_m = 4\pi r_1 r_2 = \sqrt{A_1 A_2}$ (几何平均面积) (3-26)

由式 (3-24) 变化:

$$t_2 - t_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \Rightarrow t - t_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

两式相除得温度分布的无量纲参数方程:

$$\Theta = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) / \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = f(R) \quad (3-27)$$

三、变截面或变导热系数问题

1. 温度曲线形状

(1) 热流密度不变 $q = \text{const}$, 导热系数是温度的线性函数 $\lambda = \lambda_0 = (1 + bt)$ 。

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = -\lambda_0 (1 + bt) \frac{dt}{dx} \Rightarrow (1 + bt) \frac{dt}{dx} = -\frac{q}{\lambda_0} \quad (3-28)$$

两边对 x 求导:

$$(1 + bt) \frac{d^2 t}{dx^2} + b \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} = -b \left[\left(\frac{dt}{dx} \right)^2 / (1 + bt) \right] \quad (3-29)$$

因为 $1 + bt > 0, \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 > 0$

所以 $b > 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} < 0 \Rightarrow$ 凸形曲线

$b < 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} > 0 \Rightarrow$ 凹形曲线

以上方法可用于证明, 而在定性绘制物体内部温度曲线形状时不必如此复杂, 可由 b 值的正负判断高低温侧的导热系数相对大小, 再根据导热系数大的一侧曲线斜率小这一规律即可直接绘出温度曲线。

如图 3-4: 对于稳态无内热源平壁导热, 平壁内各点热流密度相同, 根据傅里叶定律,

当 $b > 0$ 时, 由 $t_{w1} > t_{w2} \Rightarrow \lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \left| \frac{dt}{dx} \right|_1 < \left| \frac{dt}{dx} \right|_2$ 。

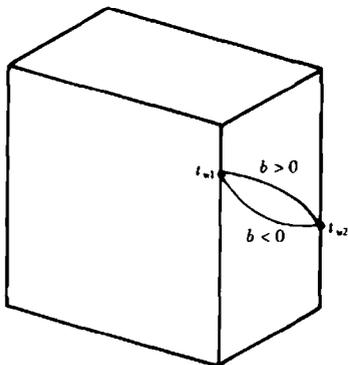


图 3-4 变物性平壁中的温度分布

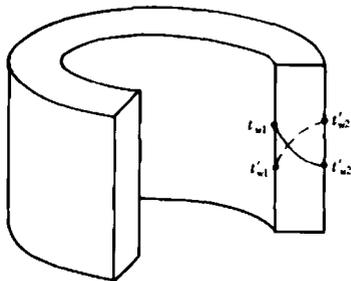


图 3-5 常物性圆筒壁中的温度分布

(2) 热流 Φ 与导热系数不变 $\Phi = \text{const}$ 、 $\lambda = \text{const}$, 热流方向上面积变化 $A = f(x)$ 。

$$\frac{\Phi}{A(x)} = -\lambda \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{\Phi}{\lambda} \cdot \frac{1}{A^2(x)} \frac{dA}{dx} \quad (3-30)$$

在 $\Phi > 0$ 情况下,

$$\frac{dA}{dx} > 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} > 0 \Rightarrow \text{凹形曲线}$$

$$\frac{dA}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{d^2 t}{dx^2} < 0 \Rightarrow \text{凸形曲线}$$

对于 $\Phi < 0$ 情况相反。

以上方法可用于证明, 而在定性绘制物体内温度曲线形状时, 由于热流不变, 通过面积的变化就可判断热流密度的相对大小, 再根据热流密度大的一侧曲线斜率大这一规律即可直接绘出温度曲线。

如图 3-5: 对于常物性无内热源圆筒壁稳态导热, 筒壁内各点热流相同, 根据傅里叶定律, 由 $A_1 < A_2 \Rightarrow q_1 > q_2 \Rightarrow \left| \frac{dt}{dx} \right|_1 > \left| \frac{dt}{dx} \right|_2$ 。

2. 热流量计算

$$\text{由傅里叶定律} \quad \Phi = -A(x)\lambda(t) \frac{dt}{dx} \quad (3-31)$$

分离变量并积分 (Φ 不变):

$$\begin{aligned} \Phi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)} &= - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt = \frac{- \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} (t_2 - t_1) = \bar{\lambda} (t_1 - t_2) \\ &\Rightarrow \Phi = \frac{\bar{\lambda} (t_1 - t_2)}{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{A(x)}} \Rightarrow \Phi = \bar{\lambda} S (t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (3-32)$$

由此可见:

(1) λ 与 $A(x)$ 无关, 用 λ 取代定导热系数公式中的 λ 就可解决变 λ 的热流计算问题;

(2) 计算两个等温面之间的导热热量时, 无论一维、二维、三维问题, 都可用形状因子 S 进行计算。

四、有内热源的导热

例: 一维, 常物性, 稳态。

微分方程及通解:

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0 \Rightarrow t = -\frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} x^2 + c_1 x + c_2 \quad (3-33)$$

定解条件 (恒壁温) 与积分常数:

$$\begin{cases} x = 0, t = t_1 \\ x = \delta, t = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\delta} \left(t_2 - t_1 + \frac{\dot{\Phi} \delta^2}{2\lambda} \right) \\ c_2 = t_1 \end{cases} \quad (3-34)$$

温度分布的无量纲参数方程:

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} &= \left[1 + \frac{\dot{\Phi} \delta^2 (1 - x/\delta)}{2\lambda (t_2 - t_1)} \right] \frac{x}{\delta} \\ &= [1 + B(1 - X)] X = f(X) \end{aligned} \quad (3-35)$$

式中 $B = \frac{\dot{\Phi} \delta^2}{2\lambda (t_2 - t_1)}$ $X = \frac{x}{\delta}$

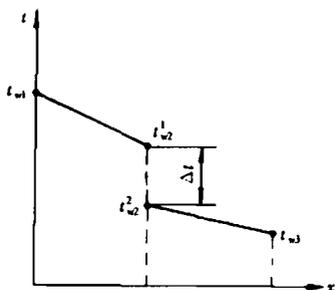


图 3-6 接触热阻

单位面积接触热阻

上式表明有内热源导热问题的温度呈非线性分布。
热流密度

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta} + \dot{\Phi} \left(x - \frac{\delta}{2} \right) = f_1(x) \quad (3-36)$$

内热源的存在, 使热流密度随 x 变化 (可看作导热与内热源的复合), 导热热量不完全取决于温差, 所以内热源问题没有与电路相似的等效热路。

五、接触热阻、水垢、烟垢的危害

由于接触表面间的不密实 (气隙) 而产生的附加热阻叫做接触热阻, 由于接触热阻的存在, 使得接触表面间存在较大温差 Δt , 对传热十分不利。如图 3-6。

$$r_j = \frac{\Delta t}{q} \quad (3-37)$$

降低接触热阻的方法·

- (1) 研磨接触表面；
- (2) 增加接触面正压力（如胀接）；
- (3) 垫软金属（如紫铜片）；
- (4) 涂硅油或导热姆；
- (5) 焊接。

工程中的传热壁面常常会产生烟垢和水垢（如图 3-7）。由水垢和烟垢的热阻可知，1mm 水垢相当于 40mm 厚钢板，1mm 烟垢相当于 400mm 厚钢板，所以结垢会使传热量大大下降。值得注意的是，烟垢结在热源侧，不会引起壁温升高，但水垢结在受热侧，引起壁温升高，危及传热管机械强度，易造成安全事故。

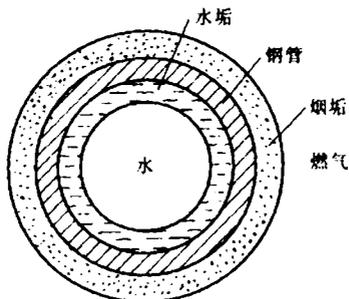


图 3-7 污垢的危害

3.2.3 肋片（伸展体）的导热

一、概述

1. 强化传热的基本思路

强化传热 \Leftarrow 降低热阻 \Leftarrow 降低串联热阻最大项（主要矛盾）

$$\text{对流换热热阻} \quad R_h = \frac{1}{hA} \quad (3-38)$$

在表面传热系数不变的情况下，要降低对流换热热阻，就必须扩大对流换热面积。其方法之一就是対传热表面进行肋化（加装肋片）。

2. 肋片（鳍片、翅片）——依附于基础表面上的扩展表面。

3. 应用：工程应用十分广泛，如汽车水箱，电机外壳，空调系统的蒸发器、冷凝器，蒸汽锅炉的空气预热器、省煤器，大功率管的散热等。

4. 种类：针肋，直肋，环肋，内肋管等。

5. 制造方法：整体轧制，浇铸，焊接（高频焊，锡焊，碰焊），胀接。（降低肋片与基础表面间的接触热阻）

二、细长杆的导热

1. 研究对象（细长杆是一种特殊的肋片，其导热形式有着重要的代表性）

已知：

(1) 均质等截面细长杆；

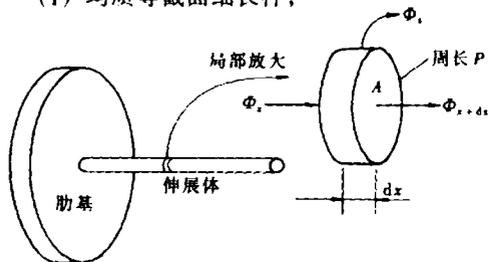


图 3-8 伸展体导热的微元段分析

(2) 热壁与周围流体温度分别为 t_0 、 t_∞ ；

(3) 杆材导热系数及其与流体的表面传热系数保持不变。

求：

(1) 细长杆沿高度方向的温度分布 $t(x)$ ；

(2) 通过细长杆的散热量 Φ_0 。

2. 解题思路

(1) 选择合适的导热微分方程式;

(2) 代入边界条件求出特解——温度分布;

(3) 求出杆基 $\frac{d\dot{Q}}{dx}$ → 热流量(热流量还可用细杆表面对流放热量积分求取)。

3. 分析推导微分方程式(如图 3-8)

(1) 金属细长杆 λ^* 、 d^* 、 h 有限($\frac{hd}{\lambda} \ll 0.1$), 细长杆任一横截面上的温度均匀一致(满足一维假设), 所以只在杆高方向截取一微元段 dx 进行分析。(2) 为了简化分析(使微分方程齐次化), 用过余温度 θ 进行计算。
过余温度——某点温度与某一定值温度(基准温度)之差, 此处定义未受散热影响的流体温度 t_∞ 为基准温度。即: $\theta = t - t_\infty$ 。(3) 令细长杆的横截面积为 A , 截面周长为 P 。

(4) 微元段能量平衡分析:

$$\text{导入微元段热量} \quad \Phi_x = -\lambda A \frac{d\theta}{dx} \quad (3-39)$$

$$\text{导出微元段热量} \quad \Phi_{x+dx} = -\lambda A \frac{d}{dx} \left(\theta + \frac{d\theta}{dx} dx \right) \quad (3-40)$$

$$\text{微元段对流放热量} \quad \Phi_s = hP dx \cdot \theta \quad (3-41)$$

由热平衡得

$$\lambda A \frac{d^2\theta}{dx^2} dx = hP \theta dx \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A} \theta = 0 \quad (3-42)$$

$$\text{令} \quad \frac{hP}{\lambda A} = m^2 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \quad (3-43)$$

(二阶、常系数齐次微分方程)

$$\text{其通解为} \quad \theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \quad (3-44)$$

4. 定解条件及特解

(1) 无限高细杆

边界条件(第一类)

$$\begin{cases} x=0, \theta = \theta_0 \\ x=\infty, \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \theta_0 \end{cases} \quad (3-45)$$

代入通解得特解

$$\theta = \theta_0 e^{-mx} \quad (3-46)$$

根部温度变化率

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = -m\theta_0 e^{-mx} \Big|_{x=0} = -m\theta_0 \quad (3-47)$$

细杆散热量

$$\Phi_0 = -\lambda A \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda A m \theta_0 = \theta_0 \sqrt{hP\lambda A} \quad (3-48)$$

杆内过余温度分布如图 3-9:

θ 随 x 成指数关系下降, 其下降速率取决于 m 值, 为了降低杆内热应力 $\leftarrow m \downarrow \leftarrow \lambda \uparrow, h \downarrow$;

当几何条件 A, P 一定时, m 值只与 h, λ 有关。

(2) 有限高细杆 (考虑杆端散热)

边界条件 (第三类边界条件)

$$\begin{cases} x = 0, \theta = \theta_0 \\ x = H, -\lambda \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=H} = h_H \theta_H \end{cases} \quad (3-49)$$

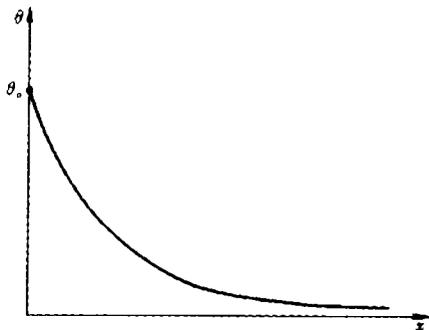


图 3-9 无限高细杆过余温度曲线

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \theta_0 \frac{\left(1 - \frac{h_H}{m\lambda}\right) e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH} + \frac{h_H}{m\lambda}(e^{mH} - e^{-mH})} \\ c_2 = \theta_0 \frac{\left(1 + \frac{h_H}{m\lambda}\right) e^{mH}}{e^{mH} + e^{-mH} + \frac{h_H}{m\lambda}(e^{mH} - e^{-mH})} \end{cases} \quad (3-50)$$

代入通解得特解 (杆内过余温度分布)

$$\theta = \theta_0 \frac{\operatorname{ch}[m(H-x)] + \frac{h_H}{m\lambda} \operatorname{sh}[m(H-x)]}{\operatorname{ch}(mH) + \frac{h_H}{m\lambda} \operatorname{sh}(mH)} \quad (3-51)$$

根部温度变化率

$$\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{-m\theta_0 \left[\operatorname{th}(mH) + \frac{h_H}{m\lambda} \right]}{1 + \frac{h_H}{m\lambda} \operatorname{th}(mH)} \quad (3-52)$$

细杆散热量

$$\Phi_0 = -\lambda A \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda A m \theta_0 \frac{\operatorname{th}(mH) + \frac{h_H}{m\lambda}}{1 + \frac{h_H}{m\lambda} \operatorname{th}(mH)} \quad (3-53)$$

(3) 忽略端部散热的有限高细杆

边界条件 (端部绝热)

$$\begin{cases} x = 0, \theta = \theta_0 \\ x = H, \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=H} = 0 \end{cases} \quad (3-54)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \theta_0 \frac{e^{-mH}}{e^{mH} + e^{-mH}} \\ c_2 = \theta_0 \frac{e^{mH}}{e^{mH} + e^{-mH}} \end{cases} \quad (3-55)$$

代入通解得特解 (杆内过余温度分布)

$$\theta = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)} \quad (3-56)$$

杆端温度 $(x=H) \quad \theta_H = \theta_0 \frac{1}{\text{ch}(mH)} \quad (3-57)$

根部温度变化率

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = -m\theta_0 \frac{\text{sh}[m(H-x)]}{\text{ch}(mH)} \Big|_{x=0} = -m\theta_0 \text{th}(mH) \quad (3-58)$$

细杆散热量

$$\Phi_0 = -\lambda A \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = \lambda A m \theta_0 \text{th}(mH) = \frac{hP}{m} \theta_0 \text{th}(mH) \quad (3-59)$$

在考虑端部散热的实际计算中, 可用上述忽略端部散热公式进行简化计算, 将端部散热面积折算为侧面面积, 对于片厚为 δ 的直肋: H 值换成 $H' = H + \delta/2$, 对于直径为 d 的直肋: H 值换成 $H' = H + d/4$ 。

三、等厚度直肋

由于 $\delta \ll L, \delta \ll H \Rightarrow P \approx 2L$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{h \cdot 2L}{\lambda \cdot L\delta}} = \sqrt{\frac{2h}{\lambda\delta}} \quad (3-60)$$

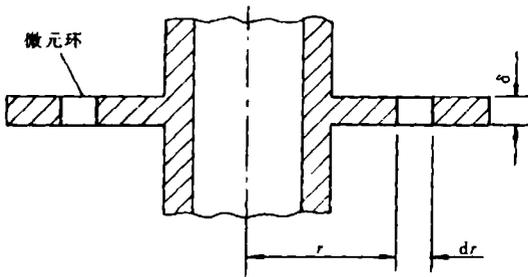


图 3-10 微元环导热分析

代入细杆导热公式就可计算 $\theta(x)$ 、 Φ 。

四、等厚度环肋 (如图 3-10) (变截面)

分析微元环

$$\Phi_r = -\lambda \cdot 2\pi r \delta \frac{d\theta}{dr} \quad (3-61)$$

$$\Phi_{r+dr} = -\lambda \cdot 2\pi(r+dr) \delta \frac{d}{dr} \left(\theta + \frac{d\theta}{dr} dr \right) \quad (3-62)$$

$$\Phi_s = h \cdot 2 \cdot 2\pi r dr \cdot \theta = 4\pi h \theta r dr \quad (3-63)$$

由热平衡

$$\Phi_r - \Phi_{r+dr} = \Phi_s \quad (3-64)$$

$$\Rightarrow r \frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{d\theta}{dr} - \frac{2h}{\lambda\delta} \theta r = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d^2\theta}{dr^2} + r \frac{d\theta}{dr} - m^2 r^2 \theta = 0 \quad (3-65)$$

上述方程为贝塞尔方程, 其解不能用初等函数表示, 在数理方程中引出一特殊的贝塞尔

函数, 计算复杂。

工程上为简化计算引入肋效率概念。

五、肋效率与散热量计算

问题引出: 肋化 $\Phi^\dagger = hA^\dagger(t - t_\infty)$ (3-66)

└— 随肋高增加而下降

所以 $\Phi^\dagger < A^\dagger$ (3-67)

肋效率 (定义): 肋片实际散热量与最大散热量之比, 其中最大散热量是假设整个肋片表面处于肋基温度下的散热量。记为: η_r 。

对于理论计算较为困难的肋片, 用实验或较为复杂的数学手段得到肋效率, 将其制成算图供查用。则肋片散热量用以下方法计算:

肋片形状及参数 \Rightarrow 计算或查图得肋效率, 计算最大散热量 \Rightarrow 实际散热量

对等厚直肋 $\eta_r = \frac{hU\theta_0 \text{th}(mH)}{m hUH\theta_0} = \frac{\text{th}(mH)}{mH}$ (3-68)

六、肋化对传热有利的判据

以上分析是基于忽略肋片导热热阻的条件下得出肋化 (扩展表面) 对传热有利的结论, 在什么情况下才能满足这样的假设呢? 我们作如下分析:

传热表面 A 未加肋时的散热量为 $\Phi_0 = hA\theta_0$

由式 3-48 得加肋后的最大散热量为 $\Phi_1 = \lambda Am\theta_0$

$$\Rightarrow \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{h}{\lambda m} = \sqrt{\frac{hA}{\lambda P}} = \sqrt{\frac{hl}{\lambda}}$$

即: 在 $\frac{hl}{\lambda} = Bi < 1$ 时肋化对传热有利, 式中 Bi 是一个表示导热物体内外热阻之比的无量纲准则数, 特征尺度 l 是肋片断面面积与周长之比, 对于矩形直肋, $l = \delta/2$, 对于圆形直肋, $l = r/2$ 。

又由于式 3-48 是在一维假设条件下导得, 所以判据条件应加以修正, 一般认为: $Bi < 0.1$ 。

3.3 概念汇总

1. 平壁单位面积导热热阻: $\frac{\delta}{\lambda}$; 圆筒壁导热热阻 $\frac{\ln \frac{d_0}{d_i}}{2\pi\lambda l}$ 。

2. Φ 不变时, $A^\dagger \Rightarrow \left| \frac{dt}{dx} \right|^\dagger$; q 不变时, $\lambda^\dagger \Rightarrow \left| \frac{dt}{dx} \right|^\dagger$ 。

3. 变导热系数问题中, 平均导热系数 $\bar{\lambda} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1}$ 。

4. 伸展体的导热量用肋基处的截面积与此处温度变化率的乘积求取。

5. 过余温度: 某点温度与基准温度之差 (基准温度一般选取不受换热条件影响的物体温度)。

6. 等截面细长杆导热微分方程 $\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$, 式中: $m^2 = \frac{hP}{\lambda A}$ 。

7. 无限高细长杆内温度分布 $\theta = \theta_0 e^{-mx}$ 。

8. 无限高细长杆散热量 $\Phi = \lambda Am\theta_0 = \theta_0 \sqrt{hP\lambda A}$ 。

9. 细长杆内热应力 $\downarrow \left(\frac{d\theta}{dx}\right) \downarrow \leftarrow m \downarrow \leftarrow \frac{h \cdot P}{\lambda \cdot A}$ 。

10. 忽略端部散热的有限高细长杆内温度分布 $\theta = \theta_0 \frac{\text{ch}[m(h-x)]}{\text{ch}(mh)}$ 。

11. 忽略端部散热的有限高细长杆杆端温度 $\theta_h = \frac{\theta_0}{\text{ch}(mh)}$ 。

12. 忽略端部散热的有限高细长杆散热量 $\Phi = \frac{hP}{m} \theta_0 \text{th}(mh)$ 。

13. 肋片: 依附于基础表面上的扩展表面。

14. 肋效率: 肋片实际散热量与最大散热量之比, 其中最大散热量是假设整个肋片表面处于肋基温度下的散热量。对于等厚直肋, 其肋效率为 $\eta_f = \frac{\text{th}(mh)}{mh}$ 。

15. 接触热阻: 接触界面所产生的热阻 $\left(R = \frac{\Delta t}{q}\right)$ 。

3.4 思考题分析

3-1 发生在一个短圆柱中的导热问题, 在哪些情形下可以按一维问题来处理?

答: (1) 两端面绝热, 圆周方向换热条件相同时, 可以认为温度场只在半径方向发生变化;

(2) 圆周面绝热, 两端面上温度均匀, 可以认为温度场只在轴向发生变化。

3-2 扩展表面中的导热问题可以按一维问题处理的条件是什么? 有人认为只要扩展表面细长, 就可按一维问题处理, 你同意这种观点吗?

答: 扩展表面细长, 且导热系数大, 而表面传热系数相对较小的条件下 $\left(\frac{hd}{\lambda} \ll 0.1\right)$, 才可以按一维问题来处理。

3-3 肋片高度增加引起两种效果: 肋效率下降及散热表面积增加。因而有人认为, 随着肋片高度的增加会出现一个临界高度, 超过这个高度后, 肋片导热热流量反而会下降。试分析这一观点的正确性。

答: 这一观点是不正确的, 计算公式表明, 肋片散热量与 mH 的双曲正弦成正比, 而双曲正弦是单调增加函数, 所以散热量不会随高度增加而下降。且随着 H 的增加, $\text{th}(mH) \rightarrow 1$, 而当 $\text{th}(mH) = 1$ 后, 其值为无限长细长杆的散热量。

3-4 随着肋片的高度增加, 换热器的体积、重量和成本增加, 换热量也在增加, 考虑上述因素应如何确定肋片高度? 如果不考虑经济性, 肋片是否越高越好?

答：不同材料的体积、重量和成本不一样，不同场合和用途对体积、重量和成本的重视程度也不一样，所以肋片高度的确定标准也不一样，就体积因素而言，对于等截面直肋，耗材 $\propto HA$ ，设： $HA = c$ 。

$$m = \sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} = \sqrt{\frac{hPH}{\lambda c}} = \sqrt{yH} \quad mH = \sqrt{yH^3}$$

$$\Phi = \frac{hp\theta_0}{m} \text{th}(mH) = hp\theta_0 \frac{\text{th}\sqrt{yH^3}}{\sqrt{yH}}$$

$$\text{令} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial H} = hp\theta_0 \left[\sqrt{yH} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{yH} \cdot \frac{\text{sech}^2 \sqrt{yH^3}}{yH} - \frac{\sqrt{yH} \text{th} \sqrt{yH^3}}{2H} \right] = 0$$

整理得

$$6\sqrt{yH^3} = \text{sh}(2\sqrt{yH^3})$$

解此超越方程：

$$\sqrt{yH^3} = 1.4192$$

即

$$mH = 1.4192$$

mH 是一个无量纲参数，该值表示 H 与 m 间的制约关系，不同材料，不同截面形状，不同换热条件， m 不同，所以 H 也不相同。

即使不考虑经济因素，肋片也并非越高越好，因为肋片散热量与 mH 的双曲正切成正比，而双曲正切是以 1 为极值的单调增加函数， mH 为 1.5 时其值已超过 0.9。

3-5 对于无限大平板的一维稳态导热问题，试说明在三类边界条件中，两侧面边界条件的哪些组合可以使平板中的温度场获得确定的解？

答：两侧面不能全为第二类边界条件，因为对于稳态无内热源的情况，平壁两侧热流密度相等，对于稳态有内热源的情况，两侧热流必须与内热源平衡，所以两侧热流密度并不相互独立，其他情况对边界条件没有限制。

3.5 典型习题分析

3-1 一炉墙厚为 24cm，导热系数为 $1.2\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 。为使每平方米墙的热损失不超过 500W，在外表面上覆盖了一层导热系数为 $0.12\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 的保温材料。已知复合壁两侧的温度分别为 750°C 及 50°C ，试确定所需的保温层厚度。

解：（本题是一个双层平壁稳态导热问题，为控制热流密度设计保温层厚度）

$$\delta_1 = \left(\frac{t_1 - t_2}{q} - \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right) \lambda_1 = \left(\frac{750 - 50}{500} - \frac{0.24}{1.2} \right) \times 0.12 = 0.144\text{m}$$

答：所需保温层的厚度为 0.144m。

3-2 火车玻璃窗由两层厚为 5mm 的玻璃及其间的空气间隙所组成，空气间隙厚度为 6mm。玻璃窗的尺寸为 $100 \times 80\text{cm}$ 。冬天车内外温度分别为 20°C 及 -20°C ，内表面的自然对流换热表面传热系数为 $10\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ ，外表面的强制对流换热表面传热系数为 $50\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ ，玻璃的导热系数 $\lambda = 0.78\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 。试确定该玻璃窗的热损失。如果采用单层玻璃窗，其他条件不变，其热损失是双层玻璃窗的多少倍？不考虑空气间隙中的自然对流。

$$\begin{aligned} \text{解: } \delta_1 &= 5\text{mm} & \delta_2 &= 6\text{mm} & \delta_3 &= 5\text{mm} \\ \lambda_1 &= \lambda_3 = 0.78\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}) & \lambda_2 &= 2.44 \times 10^{-2}\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}) \\ A &= 1 \times 0.8 = 0.8\text{m}^2 & t_1 &= 20^\circ\text{C} & t_2 &= -20^\circ\text{C} \\ h_1 &= 10\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) & h_2 &= 50\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A \cdot \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{h_1} + \frac{2\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{h_2}} \\ &= 0.8 \times \frac{20 - (-20)}{\frac{1}{10} + \frac{2 \times 0.005}{0.78} + \frac{0.006}{0.0244} + \frac{1}{50}} = 84.5\text{W} \end{aligned}$$

习题 1-8 解得 $\Phi_2 = 253\text{W}$

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{253}{84.5} = 2.99(\text{倍})$$

答: 其热损失是双层玻璃窗的 2.99 倍。

3-3 一根直径为 3mm 的铜导线, 每米长的电阻为 $2.22 \times 10^{-3}\Omega$ 。导线外包有厚 1mm、导热系数为 $0.15\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 的绝缘层, 绝缘层的最高耐温为 65°C , 环境温度为 0°C , 空气与绝缘层外表面的表面传热系数为 $20\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$, 试确定在这种条件下导线中允许通过的最大电流。

$$\begin{aligned} \text{解: } D_1 &= 3\text{mm} & R &= 2.22 \times 10^{-3}\Omega/\text{m} \\ D_2 &= 3 + 2 \times 1 = 5\text{mm} & \lambda &= 0.15\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}) \\ \Delta t &= 65 - 0 = 65^\circ\text{C} & h &= 20\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) \end{aligned}$$

由能量平衡:

$$\begin{aligned} I^2 R &= \frac{\Delta t}{\frac{\ln(D_2/D_1)}{2\pi\lambda} + \frac{1}{h\pi D_2}} \\ &= \frac{65}{\frac{\ln(5/3)}{2 \times 3.14 \times 0.15} + \frac{1}{20 \times 3.14 \times 0.005}} \\ &= 17.45\text{W} \end{aligned}$$

$$I = \sqrt{\frac{17.45}{0.00222}} = 88.7\text{A}$$

答: 导线中允许通过的最大电流为 88.7 安培。

分析与思考: 导线的通流能力不仅与材料的电阻率和线径有关, 还与散热条件有关, 减小绝缘层厚度可提高通流能力吗? 不妨计算一下, 再想想为什么。

3-4 在一根外径为 100mm 的热力管道外拟包覆两层绝热材料, 一种材料的导热系数为 $0.1\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, 另一种为 $0.2\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, 两种材料的厚度都取为 50mm。试比较把导热系数小的材料紧贴管壁及把导热系数大的材料紧贴管壁这两种方法对保温效果的影响, 这种影响对于平壁的情形是否存在? 假设在两种做法中, 绝热层内、外表面的总温差保持不变。

解: $D_1 = 100\text{mm}$ $D_2 = 100 + 2 \times 50 = 200\text{mm}$ $D_3 = 200 + 2 \times 50 = 300\text{mm}$

$\lambda_1 = 0.1\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ $\lambda_2 = 0.2\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$

(1) 内层 λ 小时热阻

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\ln(D_2/D_1)}{\lambda_1} + \frac{\ln(D_3/D_2)}{\lambda_2} \right] \\ &= \frac{1}{2 \times 3.14} \left[\frac{\ln(200/100)}{0.1} + \frac{\ln(300/200)}{0.2} \right] \\ &= 1.426 \text{ m} \cdot \text{K}/\text{W} \end{aligned}$$

(2) 内层 λ 大时热阻

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\ln(D_2/D_1)}{\lambda_2} + \frac{\ln(D_3/D_2)}{\lambda_1} \right] \\ &= \frac{1}{2 \times 3.14} \left[\frac{\ln(200/100)}{0.2} + \frac{\ln(300/200)}{0.1} \right] \\ &= 1.197 \text{ m} \cdot \text{K}/\text{W} \end{aligned}$$

$$R_1/R_2 = 1.426/1.197 = 1.19$$

可见, 导热系数大的材料紧贴管壁时的热阻比导热系数小的材料紧贴管壁时的热阻小 1.19 倍, 即散热量大 1.19 倍。对于平壁导热两者的热阻不会变化, 所以不存在这种影响。

3-5 一直径为 d 、长为 l 的圆杆, 两端分别与温度为 t_1 及 t_2 的表面接触, 杆的导热系数 λ 为常数。试对下列两种稳态情形列出杆中温度的微分方程式及边界条件, 并求解之:

(1) 杆的侧面是绝热的;

(2) 杆的侧面与四周流体间有稳定的对流换热, 平均表面传热系数为 h , 流体温度 t_f 小于 t_1 及 t_2 。

解: (1) 常物性一维稳态无内热源导热问题。

方程 $\frac{d^2 t}{dx^2} = 0$

边界条件 $\begin{cases} x = 0, & t = t_1 \\ x = l, & t = t_2 \end{cases}$

通解 $t = c_1 x + c_2$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{t_2 - t_1}{l} \quad c_2 = t_1 \quad \Rightarrow t = \frac{t_2 - t_1}{l} x + t_1$$

(2) 等效于伸展体热平衡分析。

方程 $\frac{d^2 \theta}{dx^2} = m^2 \theta$

式中 $m^2 = \frac{h\pi d}{\lambda\pi d^2/4} = \frac{4H}{\lambda d} \quad \theta = t - t_f$

边界条件 $\begin{cases} x = 0, & \theta = \theta_0 = t_1 - t_f \\ x = l, & \theta = \theta_l = t_2 - t_f \end{cases}$

$$\theta = c_1 e^{mx} + c_2 e^{-mx} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{\theta_l - \theta_0 e^{-ml}}{e^{ml} - e^{-ml}} \\ c_2 = \frac{\theta_0 e^{ml} - \theta_l}{e^{ml} - e^{-ml}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{\text{sh}(ml)} [\theta_l \text{sh}(mx) + \theta_0 \text{sh}[m(l-x)]]$$

分析与思考：导热问题分析解的关键在于求取微分方程和正确的解题方法，要灵活运用简化假设进行分析，本题中第(1)解的一维假设理由是充分的，第(2)解的一维假设是要另附条件的。

3-6 某石油化工厂有5个置于室外的液化石油球形储罐，直径为5m，通过使制冷剂流经罐外厚为1cm的夹层来维持罐内的温度为 -40°C 。夹层外是厚为30cm的保温层，保温材料的导热系数为 $0.1\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 。在夏天环境温度为 40°C 的恶劣条件下，保温层外表面与环境间的复合换热表面传热系数可达 $30\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。试确定为维持液化气 -40°C 的温度必须的制冷量。罐及夹层钢板的壁厚可略而不计。

$$\text{解： } D_1 = 5.02\text{m} \quad D_2 = 5.02 + 2 \times 0.3 = 5.62\text{m}$$

$$\lambda = 0.1\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}) \quad h = 30\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) \quad \Delta t = 40 - (-40) = 80^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{5\Delta t}{\frac{1/D_1 - 1/D_2}{2\pi\lambda} + \frac{1}{\pi D_2^2 h}} \\ &= \frac{5 \times 80}{\frac{1/5.02 - 1/5.62}{2 \times 3.14 \times 0.1} + \frac{1}{3.14 \times 5.62^2 \times 30}} = 11701\text{W} \end{aligned}$$

答：维持液化气 -40°C 的温度必须的制冷量为11.7千瓦。

分析与思考：计算公式中热阻项叠加外层对流热阻，内层壁面温度设为液化气温度（并非制冷剂蒸发温度）。配备制冷机组时须注意：11.7千瓦是机组的工作负荷，并非制冷机容量。

3-7 储存 -60°C 低温液体的球形罐直径为2m，其外包覆有厚0.4m、导热系数为 $0.04\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ 的软木保温层。低温液体与内壁金属壳体间换热的表面传热系数为 $850\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ ；大气温度为 30°C ，球形罐外表面与环境间的表面传热系数为 $15\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。由于软木保温层的密封性不好，大气中的水蒸气渗入软木层，假设软木保温层的导热系数不受水蒸气及所形成的冰层的影响，试确定软木保温层中冰层的深度。球形罐金属壳体的厚度和热阻可以不计。在实际运行中，保温层内出现水或冰时对保温性能有何影响？

$$\text{解： } r_1 = 1\text{m} \quad r_2 = 1 + 0.4 = 1.4\text{m} \quad \Delta t = 30 - (-60) = 90^\circ\text{C}$$

$$\lambda = 0.04\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}) \quad h_i = 850\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) \quad h_o = 15\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$$

(求解保温层中冰层深度，就是求解壳体中 0°C 所在位置，必须知道两壁面温度，进而应该首先求出散热量。所给温度为内外流体温度，必须计及内外壁对流换热热阻。)

$$\Phi = \frac{4\pi\Delta t}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{h_o r_2^2} + \frac{1}{h_i r_1^2}}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 90}{\frac{1}{0.04} + \frac{1}{15 \times 1.4^2} + \frac{1}{850 \times 1^2}}$$

$$= 157.6 \text{ W}$$

内壁温度 $t_1 = \frac{\Phi}{4h_1\pi r_1^2} + t_n = \frac{157.6}{4 \times 850 \times 3.14 \times 1^2} + (-60) = -59.985^\circ\text{C}$

外壁温度

$$t_2 = t_{f_0} - \frac{\Phi}{4h_0\pi r_2^2} = 30 - \frac{157.6}{4 \times 15 \times 3.14 \times 1.4^2} = 29.573^\circ\text{C}$$

0°C 所在位置

$$\frac{1}{r} = \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{r_2}$$

$$= \frac{0 - 29.573}{-59.985 - 29.573} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1.4} \right) + \frac{1}{1.4} = 0.8086$$

$$r = 1.237 \text{ m}$$

软木中冰层深度

$$\delta = r_2 - r = 1.4 - 1.237 = 0.163 \text{ m}$$

实际运行中, 冰水渗入软木后会降低保温效果。

分析与思考: 保温材料必须防水渗防雨淋。

3-8 板厚为 δ 的平板材料的导热系数按 $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ 变化, 测得通过该平板的热流密度为 q , 板中心温度为 t_3 , 板两侧面温度分别为 t_1 、 t_2 。试给出此时 λ_0 及 b 值的计算式。

解: 左右两半平板的平均导热系数分别为

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{q\delta}{2(t_1 - t_3)} \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{q\delta}{2(t_3 - t_2)}$$

由线性关系

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = \lambda_0 \left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_3) \right] \\ \bar{\lambda}_2 = \lambda_0 \left[1 + \frac{b}{2}(t_3 + t_2) \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)}{(t_2 + t_3)\bar{\lambda}_1 - (t_1 + t_3)\bar{\lambda}_2} = \frac{2(t_1 + t_2 - 2t_3)}{2t_3^2 - t_2^2 - t_1^2}$$

$$\lambda_0 = \frac{(t_2 + t_3)\bar{\lambda}_1 - (t_1 + t_3)\bar{\lambda}_2}{t_2 - t_1} = \frac{q\delta}{2} \frac{2t_3^2 - t_2^2 - t_1^2}{(t_2 - t_1)(t_1 - t_3)(t_3 - t_2)}$$

3-9 一空心圆柱, 在 $r = r_1$ 处 $t = t_1$, $r = r_2$ 处 $t = t_2$ 。 $\lambda(t) = \lambda_0(1 + bt)$, t 为局部温度。试导出圆柱中温度分布的表达式及导热量计算式。

解: 变物性一维稳态无内热源圆筒壁导热的微分方程及边界条件

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda r \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad \begin{cases} r = r_1, & t = t_1 \\ r = r_2, & t = t_2 \end{cases}$$

两次积分:

$$t + \frac{b}{2} t^2 = c_1 \ln r + c_2$$

由边界条件:

$$c_1 = \frac{t_1 - t_2 + \frac{b}{2}(t_1^2 - t_2^2)}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

$$c_2 = t_1 + \frac{b}{2}t_1^2 - \frac{t_1 - t_2 + \frac{b}{2}(t_1^2 - t_2^2)}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln r_1$$

温度分布

$$\frac{t - t_1 + \frac{b}{2}(t^2 - t_1^2)}{t_1 - t_2 + \frac{b}{2}(t_1^2 - t_2^2)} = \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

另由

$$\Phi = -A(r)\lambda(t) \frac{dt}{dr}$$

$$\Phi \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{A(r)} = - \int_{r_1}^{r_2} \lambda(t) dt = \frac{- \int_{r_1}^{r_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} (t_2 - t_1) = \bar{\lambda} (t_1 - t_2)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \bar{\lambda} = \lambda_0 \left(1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2) \right)$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{2\pi \bar{\lambda} (t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2\pi (t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \left[\lambda_0 \left(1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2) \right) \right]$$

分析与思考: 变物性对温度分布带来了复杂性, 但热流计算仍可使用常物性公式, 只是用平均导热系数代替原导热系数。

3-10 设某种材料的局部导热系数按 $\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$ 的关系式变化, 对于由该材料做成的一块厚 δ 的无内热源的平板, 试:

(1) 证明下列关系式成立: $\frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} = \frac{x}{\delta}$, 其中 λ_1 、 λ_2 为相应于温度 t_1 、 t_2 的导热系数, λ 为 x 处的导热系数;

(2) 导出平板中温度沿 x 方向变化的下列两个公式:

$$t(x) = \frac{1}{\lambda_0 b} \left[\lambda_1^2 + \frac{x}{\delta} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \right]^{1/2} - \frac{1}{b} \quad t(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1 \right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b}} - \frac{1}{b}$$

解: (1) 变物性一维稳态无内热源平板导热微分方程及边界条件

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda \frac{dt}{dx} \right) = 0 \quad \begin{cases} x = 0, t = t_1 \\ x = \delta, t = t_2 \end{cases}$$

两次积分

$$t + \frac{b}{2}t^2 = c_1x + c_2$$

由边界条件

$$c_1 = \frac{t_2 - t_1 + \frac{b}{2}(t_2^2 - t_1^2)}{\delta} \quad c_2 = t_1 + \frac{b}{2}t_1^2$$

整理得

$$\frac{t - t_1 + \frac{b}{2}(t^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1 + \frac{b}{2}(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{x}{\delta}$$

又

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda_1^2 &= \lambda_0^2(1 + bt)^2 - \lambda_0^2(1 + bt_1)^2 \\ &= \lambda_0^2[2b(t - t_1) + b^2(t^2 - t_1^2)] \\ \lambda_2^2 - \lambda_1^2 &= \lambda_0^2[2b(t_2 - t_1) + b^2(t_2^2 - t_1^2)] \\ \Rightarrow \frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} &= \frac{t - t_1 + \frac{b}{2}(t^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1 + \frac{b}{2}(t_2^2 - t_1^2)} = \frac{x}{\delta} \end{aligned}$$

(2) 由上式

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \lambda_0^2(1 + bt)^2 = (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{x}{\delta} + \lambda_1^2 \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{\lambda_0 b} \left[\lambda_1^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{x}{\delta} \right]^{1/2} - \frac{1}{b} \end{aligned}$$

又上式右第一项 = $\left[\frac{\lambda_0^2(1 + bt_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_1)x/\delta}{\lambda_0^2 b^2} \right]^{1/2}$

$$q = \frac{\Phi}{A} = \frac{t_1 - t_2}{\delta} \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$\frac{\lambda_0^2(1 + bt_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 + \lambda_1) \frac{x}{\delta}}{\lambda_0^2 b^2} = \left(t_1 + \frac{1}{b} \right)^2 + \frac{-2qx}{\lambda_0 b}$$

$$\Rightarrow t = \left[\left(t_1 + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{2qx}{\lambda_0 b} \right]^{1/2} - \frac{1}{b}$$

3-11 一厚为 δ 的大平板具有均匀内热源 Φ , $x=0$ 及 $x=\delta$ 处的表面分别与温度为 t_1 、 t_2 的流体进行对流换热, 表面传热系数分别为 h_1 及 h_2 。试导出平板中温度分布的解析表达式, 并据此得出平板中温度最高点的位置。

解: 微分方程

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{\Phi}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\Phi}{2\lambda} x^2 + c_1 x + c_2$$

设边界条件

$$\begin{cases} x = 0, t = t_1 \\ x = \delta, t = t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\delta} \left(t_2 - t_1 + \frac{\Phi}{2\lambda} \delta^2 \right) \\ c_2 = t_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \left[t_2 - t_1 + \frac{\Phi}{2\lambda} \delta^2 \left(1 - \frac{x}{\delta} \right) \right] \frac{x}{\delta} + t_1$$

$$\text{令} \quad \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=x_0} = -\frac{\dot{\Phi}}{\lambda} x_0 + \frac{1}{\delta} \left(t_2 - t_1 + \frac{\dot{\Phi}}{2\lambda} \delta^2 \right) = 0$$

$$x_0 = \frac{\delta}{2} + \frac{\lambda(t_2 - t_1)}{\dot{\Phi} \delta}$$

$$\text{由能量平衡:} \quad \begin{cases} \dot{\Phi} x_0 = \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} + \frac{\lambda(t_2 - t_1)}{\delta} = h_1(t_1 - t_n) \\ \dot{\Phi} (\delta - x_0) = \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} - \frac{\lambda(t_2 - t_1)}{\delta} = h_2(t_2 - t_n) \end{cases}$$

$$\text{即} \quad \begin{cases} \frac{\lambda}{\delta} t_2 - \left(\frac{\lambda}{\delta} + h_1 \right) t_1 = -h_1 t_n - \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} \\ \frac{\lambda}{\delta} t_1 - \left(\frac{\lambda}{\delta} + h_2 \right) t_2 = -h_2 t_n - \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{h_2 \left(h_1 t_n + \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} \right) + \frac{\lambda}{\delta} (h_1 t_n + h_2 t_2 + \dot{\Phi})}{(h_1 + h_2) \frac{\lambda}{\delta} + h_1 h_2} \\ t_2 = \frac{h_1 \left(h_2 t_n + \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} \right) + \frac{\lambda}{\delta} (h_2 t_2 + h_1 t_n + \dot{\Phi})}{(h_1 + h_2) \frac{\lambda}{\delta} + h_1 h_2} \end{cases}$$

平板中温度分布解析式

$$t = \left[\frac{h_1 h_2 (t_n - t_1) + \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} (h_1 - h_2)}{(h_1 + h_2) \frac{\lambda}{\delta} + h_1 h_2} + \frac{\dot{\Phi} \delta^2}{2\lambda} \left(1 - \frac{x}{\delta} \right) \right] \frac{x}{\delta}$$

$$+ \frac{h_2 \left(h_1 t_n + \frac{\delta}{2} \dot{\Phi} \right) + \frac{\lambda}{\delta} (h_1 t_n + h_2 t_2 + \dot{\Phi})}{(h_1 + h_2) \frac{\lambda}{\delta} + h_1 h_2}$$

平板中温度最高点的位置

$$x_0 = \frac{\delta}{2} + \frac{\lambda}{\dot{\Phi} \delta} \cdot \frac{h_1 h_2 (t_n - t_1) + \frac{2}{\delta} \dot{\Phi} (h_1 - h_2)}{(h_1 + h_2) \frac{\lambda}{\delta} + h_1 h_2}$$

$$= \frac{\delta}{2} + \frac{\frac{\lambda h_1 h_2}{\dot{\Phi} \delta} (t_n - t_1) + \frac{\lambda}{2} (h_1 - h_2)}{(h_1 + h_2) \frac{\lambda}{\delta} + h_1 h_2}$$

3-12 一半径为 r_1 的长导线具有均匀内热源 $\dot{\Phi}$, 导热系数为 λ_1 , 导线外包有一层导热系数为 λ_2 的绝缘材料, 其外半径为 r_2 , 绝缘材料与周围环境间的表面传热系数为 h , 环境

温度为 t_∞ ，过程是稳态的，试求解导线与绝缘材料中的温度分布。

解：令

$$\theta = t - t_\infty$$

导线中导热微分方程(一维稳态常物性有内热源)(柱坐标)

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda_1} = 0$$

导线导热边界条件(中心绝热, 边界为与绝缘层的交界温度)

$$\begin{cases} r = 0, & \frac{d\theta}{dr} = 0 \\ r = r_1, & \theta = \theta_1 \end{cases}$$

绝缘层中导热微分方程(一维稳态常物性无内热源)(柱坐标)

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = 0$$

绝缘层导热边界条件(内边界热流密度与导线内热源平衡, 外边界的散热量与内热源平衡)

$$\begin{cases} r = r_1, & \frac{d\theta}{dr} = -\frac{\dot{\Phi} r_1}{2\lambda_2} \\ r = r_2, & \theta = \frac{\dot{\Phi} r_1^2}{2hr_2} \end{cases}$$

绝缘层微分方程积分 $r \frac{d\theta}{dr} = c_1 \quad \theta = c_1 \ln r + c_2$

由绝缘层边界条件得 $c_1 = -\frac{r_1^2 \dot{\Phi}}{2\lambda_2} \quad c_2 = \frac{\dot{\Phi} r_1^2}{2hr_2} + \frac{\dot{\Phi} r_1^2}{2\lambda_2} \ln r_2$

绝缘层温度分布 $\theta = \frac{\dot{\Phi} r_2}{2} \left[\frac{\ln(r_2/r)}{\lambda_2} + \frac{1}{hr_2} \right]$

内边界温度 $\theta_1 = \frac{\dot{\Phi} r_1^2}{2} \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda} + \frac{1}{hr_2} \right]$

导线微分方程积分: $r \frac{d\theta}{dr} = -\frac{\dot{\Phi} r^2}{2\lambda_1} + c_1$

由导线内边界条件得

$$c_1 = 0$$

再积分:

$$\theta = -\frac{\dot{\Phi}}{4\lambda_1 r^2} + c_2$$

由导线外边界条件得

$$c_2 = \theta_1 + \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda_1} r_1^2$$

导线内温度分布

$$\theta = \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda_1} (r_1^2 - r^2) + \theta_1 = \frac{\dot{\Phi}}{4\lambda_1} (r_1^2 - r^2) + \frac{\dot{\Phi} r_1^2}{2} \left[\frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda_2} + \frac{1}{hr_2} \right]$$

3-13 热力管道上安装的温度计必须带有套管，以保护温度传感器。一测温套管外径 $d = 10\text{mm}$ ，厚 $\delta = 1.0\text{mm}$ ，长 $H = 120\text{mm}$ 。设气流的真实温度是 150°C ，与套管间换热系数为 $h = 50\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，管道壁温 $t_0 = 25^\circ\text{C}$ 。试计算分别用铜和钢做成套管的温度计读数是多少？取铜和钢的导热系数分别为 $390\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 和 $50\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

解：(套管相当于安装在管壁上的空心针肋)

$$m_{\text{铜}} = \sqrt{\frac{h \cdot p}{\lambda \cdot A}} = \sqrt{\frac{h \cdot d}{\lambda \cdot d_m \delta}} = \sqrt{\frac{50 \times 0.01}{390 \times 0.009 \times 0.001}} = 11.935$$

$$m_{\text{铜}} H = 11.935 \times 0.12 = 1.4322$$

$$m_{\text{钢}} = \sqrt{\frac{h \cdot d}{\lambda \cdot d_m \delta}} = \sqrt{\frac{50 \times 0.01}{50 \times 0.009 \times 0.001}} = 33.333$$

$$m_{\text{钢}} H = 33.333 \times 0.12 = 4$$

$$\theta_{\text{钢}} = \frac{\theta_0}{\text{ch}(m_{\text{钢}} H)} = \frac{25 - 150}{\text{ch}4} = -4.58$$

$$t_{\text{钢}} = \theta_{\text{钢}} + t_f = -4.58 + 150 = 145.42 \quad ^\circ\text{C}$$

$$\theta_{\text{铜}} = \frac{\theta_0}{\text{ch}(mH)} = \frac{25 - 150}{\text{ch}1.4322} = -56.48$$

$$t_{\text{铜}} = \theta_{\text{铜}} + t_f = -56.48 + 150 = 93.52 \quad ^\circ\text{C}$$

答：钢套管中的温度计读数为 145.42°C ，铜套管内温度读数为 93.52°C 。

分析与思考：套管材料不同，测温误差不同，为减小测温误差应采取哪些措施？

3-14 对于矩形截面的直肋片，试分析在一定的金属耗量下，为使肋片的散热量最大，肋片的 H 、 δ 与 λ 、 h 之间应满足怎样的关系？

解：对于矩形直肋 $m = \sqrt{\frac{2h}{\lambda\delta}}$

由思考题 3-4: $mH = \sqrt{\frac{2hH^2}{\lambda\delta}} = 1.4192 \Rightarrow \frac{H^2}{\delta} \approx \frac{\lambda}{h}$

4. 非稳态导热

4.1 知识结构

1. 非稳态导热的特点；
2. (恒温介质、第三类边界条件) 一维分析求解方法 (分离变量, 特解叠加) 及解的形式 (无穷级数求和)；
3. 解的准则方程形式, 各准则 (无量纲过余温度、无量纲尺度、傅里叶准则、毕渥准则) 的定义式及其物理涵义；
4. 查诺谟图求解方法；
5. 多维问题的解 (几个一维问题解 (无量纲过余温度) 的乘积)；
6. 集总参数法应用的条件和解的形式；
7. 半无限大物体的非稳态导热。

4.2 重点内容剖析

4.2.1 概述

在设备启动、停车、或间歇运行等过程中, 温度场随时间发生变化, 热流也随时间发生变化, 这样的导热过程称为非稳态导热。

一、过程特点分类

1. 周期性非稳态导热 (比较复杂, 本书不做研究)

如地球表面受日照的情况。(周期为 24 小时)

对于内燃机气缸壁受燃气冲刷的情况, 周期为几分之一秒, 温度波动只在很浅的表层, 一般作为稳态处理。

2. 非周期性非稳态导热 (趋于稳态的过程, 非稳态 \rightarrow 稳态)

例子: 如图 4-1, 一个无限大平板, 初始温度均匀, 某一时刻左壁面突然受到一恒温热源的加热, 分析平壁内非稳态温度场的变化过程。

- (1) 存在两个阶段:

初始阶段: 温度变化到达右壁面之前 (如曲线 A-C-D), 右侧不参与换热, 此时物体内分为两个区间, 非稳态导热规律控制区 A-C 和初始温度区 C-D。

正规状况阶段: 温度变化到达右壁面之后,

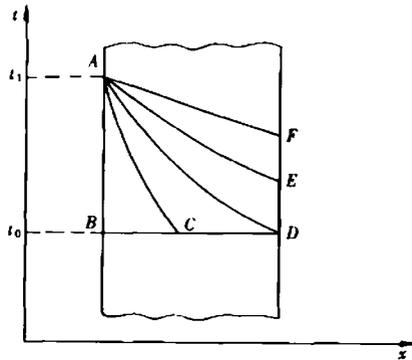


图 4-1 非稳态导热过程的温度变化

右侧参与换热，初始温度分布的影响逐渐消失。

(2) 热流方向上热流量处处不等。因为物体各处温度随时间变化而引起内能的变化，在热量传递路径中，一部分热量要用于（或来源于）这些内能，所以热流方向上的热流量处处不等。

二、研究任务

1. 确定物体内部某点达到预定温度所需时间以及该期间所需供给或取走的热量，以便合理拟定加热和冷却的工艺条件，正确选择传热工质；

2. 计算某一时刻物体内的温度场及温度场随时间和空间的变化率，以便校核部件所承受的热应力，并根据它制定热工设备的快速启动与安全操作规程。（保障设备与人生安全）

三、解题思路

微分方程
分析解：初始条件 } \Rightarrow 求解
边界条件 }

近似解：数值解，图解，类比解，实验解。

四、工程中一类典型的非稳态导热问题

物体处于恒温介质（热容很大）第三类边界条件（对流换热）的非稳态导热问题，如热处理过程中物体的加热和冷却。

恒温介质第三类边界条件的非稳态导热过程受制于两个热阻：

内部热阻（导热热阻）： l/λ

外部热阻（对流换热热阻）： $1/h$

毕渥准则数

$$Bi = \frac{l/\lambda}{1/h} = \frac{hl}{\lambda} \quad (4-1)$$

表征导热物体内外热阻之比的无量纲数。

分析： $1/h \ll l/\lambda \Rightarrow Bi \rightarrow \infty \Rightarrow t_2 \approx t_\infty$ （第一类边界条件）

$1/h \gg l/\lambda \Rightarrow Bi \rightarrow 0 \Rightarrow t \approx t_w$ （物体内有均匀温度场）

无限大平壁对称受热时的温度分布如图 4-2 所示。

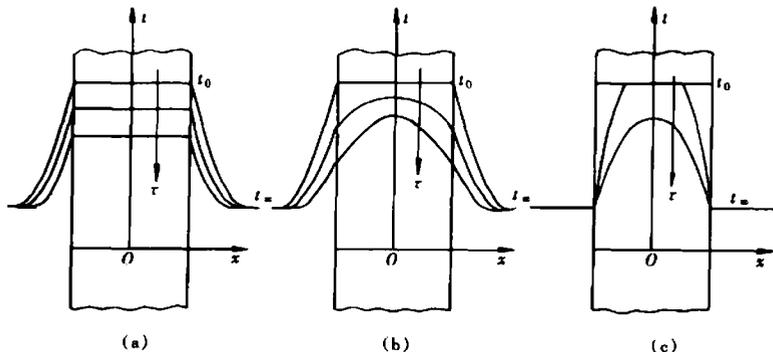


图 4-2 Bi 对应的非稳态温度分布形式

(a) $Bi = 0$; (b) $Bi = 1$; (c) $Bi \rightarrow \infty$

4.2.2 集总参数法

以上分析可知,当内部热阻可以忽略时,物体内具有均匀温度场,温度场只是时间的函数,而与空间位置和几何形状无关(零维),这样的简化分析方法称为集总参数法。

一、数学描述

为使微分方程齐次化,取过余温度 $\theta = t - t_{\infty}$ 。 (4-2)

(其中基准温度 t_{∞} 为未受加热干扰的流体温度)

微分方程 (内能变化量 = 表面对流换热量)

$$V\rho c \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta \quad (4-3)$$

$$\text{初始条件} \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (4-4)$$

二、求解 [温度变化规律 $\theta(\tau)$]

分离变量并积分:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^{\tau} -\frac{hA}{\rho c V} d\tau \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho c V}\tau} = e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} \quad (4-5)$$

$$\text{式中} \quad \tau_c = \frac{\rho c V}{hA} \text{——时间常数。} \quad (4-6)$$

三、时间常数的物理意义

1. 由式 (4-5) 可得

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -\frac{\theta_0}{\tau_c} \Rightarrow \tau_c = -\theta_0 / \left(\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{\tau=0} \right) \quad (4-7)$$

时间常数 τ_c 表明内部热阻可以忽略的物体突然被加热和冷却时,它以初始温度变化速率从初始温度 t_0 变化到周围流体温度 t_{∞} 所需要的时间 (见图 4-3);

2. 由式 (4-5) 可得

$$\tau = \tau_c \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-1} = 0.368 \quad (4-8)$$

由图 4-4 可见: 当时间 $\tau = \tau_c$ 时, 物体的过余温度已经达到了初始过余温度值的 36.8%。

$$\tau = -\tau_c \ln \frac{\theta}{\theta_0} \Rightarrow \tau_c \rightarrow \tau \quad (4-9)$$

(时间常数越大, 平衡时间越长)

时间常数的决定因素:

$$\text{物体本身的热容量} (\rho c V) \uparrow \rightarrow \tau_c \uparrow \quad (4-10)$$

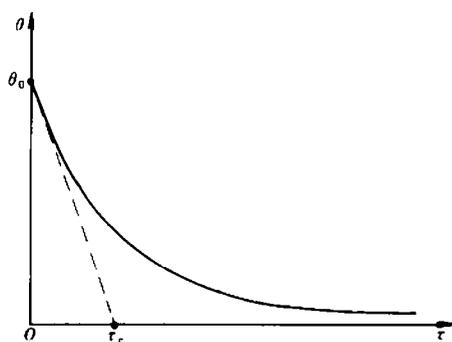


图 4-3 $\theta-\tau$ 曲线及时间常数 τ_c

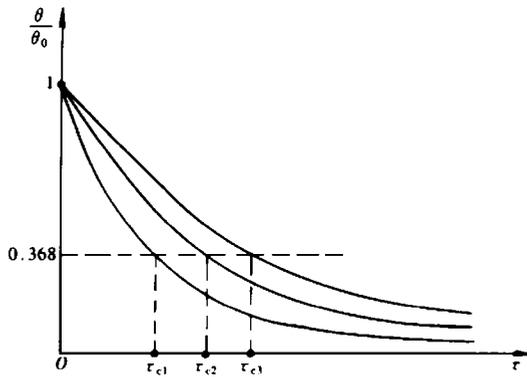


图 4-4 不同物体的温度变化曲线和时间常数

$$\text{物体表面换热条件 } (hA)^{\uparrow} \rightarrow \tau_c^* \quad (4-11)$$

四、解的变形分析

$$\frac{hA}{\rho c V \tau} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{V}{A} \cdot \frac{\lambda}{\rho c} \cdot \frac{\tau}{(V/A)^2} = \frac{hL}{\lambda} \cdot \frac{a\tau}{L^2} = Bi_V Fo_V \quad (4-12)$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi_V Fo_V} \Rightarrow \Theta = e^{-Bi_V Fo_V}$$

式中 Θ ——无量纲过余温度；

Bi_V ——以体面比为特征长度的毕渥准则数；

Fo_V ——以体面比为特征长度的傅里叶准则数，其物理含义是无量纲时间。

可见，解的形式可以表示为无量纲参数方程，即无量纲过余温度与毕渥数和傅里叶数之间的关系。

五、交换热

非稳态过程的交换热（吸热或放热）可由物体表面对流换热量的积分计算。

$$\begin{aligned} Q_{\tau} &= \int_0^{\tau} \Phi d\tau \\ &= \int_0^{\tau} hA\theta d\tau = hA\theta_0 \int_0^{\tau} e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau} d\tau = \rho c V \theta_0 (1 - e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau}) \end{aligned} \quad (4-13)$$

$$\tau \rightarrow \infty \Rightarrow Q_{\tau} \rightarrow \rho c V \theta_0$$

上式表示，物体的最大换热量即为物体相对于恒温介质的热容量，过程换热量也可理解为物体最大换热量与残留热容量的差值。

六、使用集总参数法的条件

内热阻 \ll 外热阻 ($Bi < 0.1$)

对于平板、柱体、球体： $Bi_V < 0.1M \Rightarrow$ 误差 $< 5\%$

表 4-1 几种物体的 M 值

物体形状	体面比 (V/A)	M
平板 (2δ 厚)	δ	1
圆柱	$R/2$	$1/2$
球	$R/3$	$1/3$

4.2.3 一维非稳态导热分析解

很多问题是不满足集总参数法应用条件的, 温度场不仅是时间的函数, 还是空间的函数。

一、分析例题

初始温度为 t_0 、厚度为 2δ 的金属板置于温度为 t_∞ 的流体中冷却的过程 (如图 4-5)。

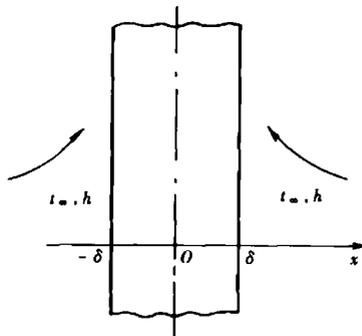


图 4-5 无限大平板对称受热

1. 厚度为 2δ 的无限大平壁;

2. 平板导热系数 λ 及两侧对流换热表面传热系数 h 均为常量;

3. 平壁初温 ($\tau = 0$ 时) 为 t_0 , 两侧介质温度为 t_∞ ;

4. 求解在 $\tau = 0$ 时刻将平板置于恒温介质中的温度变化规律 $t(x, \tau)$ 。

二、数学模型

无限大平板 → 一维导热;

受热对称 → 研究半平板 (一侧为绝热边界条件);

采用过剩温度: $\theta = t - t_\infty$;

数学描述: (一维非稳态无内热源)

$$\text{导热微分方程} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4-14)$$

定解条件

$$\text{初始条件} \quad \tau = 0, \theta = \theta_0 \quad (4-15)$$

$$\text{边界条件} \quad \begin{cases} x = 0, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ x = \delta, -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = h\theta \end{cases} \quad (4-16)$$

(方程及条件都是线性齐次的)

三、求解 $\theta(x, \tau)$

1. 分析解

1878 年法国科学家 Fourier 采用分离变量 (化偏为常) 法求解, 求解过程参看杨世铭编第二版《传热学》(P86~90)。

$$\frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \tau} \frac{\sin \mu_n \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right)}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} = f\left(F_0, \mu_n, \frac{x}{\delta}\right) \quad (4-17)$$

式中

$$Fo = \frac{\alpha\tau}{\delta^2} \quad (4-18)$$

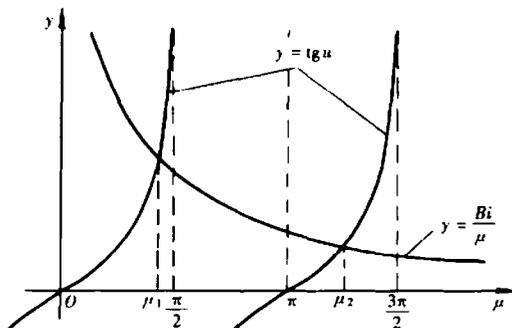


图 4-6 超越方程求解示意图

μ_n 是下列超越方程的根 (如图 4-6)

$$\tan \mu_n = \frac{Bi}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots \quad (4-19)$$

分析解的实质是下列无量纲参数方程:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f_1 \left(Fo, Bi, \frac{x}{\delta} \right) \quad (4-20)$$

2. 解题计算方法

(1) 编程计算 (按精度要求取有限项级数求和);

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow x/\delta \\ \tau \rightarrow Fo \\ Bi \rightarrow \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \end{array} \right\} \rightarrow n \text{ 项级数求和} \rightarrow \frac{\theta}{\theta_0}$$

(2) 正规状况阶段分析解;

计算表明: $Fo > 0.2$ 时, 取 $n=1$ 平板中心温度误差 $< 1\%$, 各点温度与中心温度的比值已与时间无关, 表明初始温度的影响已经消失, (进入正规状况阶段), 即:

$$\text{分析解变为} \quad \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1} e^{-\mu_1^2 Fo} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \quad (4-21)$$

平板中心无量纲过余温度 ($x=0$)

$$\frac{\theta_m(\tau)}{\theta_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1} e^{-\mu_1^2 Fo} \quad (4-22)$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(x, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \quad (4-23)$$

虽然物体中各点温度随时间变化, 但物体中各点过余温度之比与时间无关是正规状况阶段的重要特点。

传热量计算: (假定已进入正规状况阶段)

$$\text{总传热量} \quad Q_0 = \rho c V \theta_0 \quad (4-24)$$

$$\text{剩余热量} \quad Q_v = \rho c \int_V \theta dV = \rho c V \bar{\theta} \quad (4-25)$$

0 ~ τ 时间内的传热量

$$Q = Q_0 - Q_v \Rightarrow \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{Q_v}{Q_0} = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \quad (4-26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} &= \frac{1}{V} \int_V \frac{\theta}{\theta_0} dV = \frac{1}{A\delta} \int_0^\delta \frac{\theta}{\theta_0} A dx \\ &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \frac{e^{-\mu_1^2 F_0} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right)}{\mu_1} dx \\ &= \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \frac{e^{-\mu_1^2 F_0}}{\mu_1} \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} \end{aligned} \quad (4-27)$$

类似的分析可得无限长圆柱及球体（一维）非稳态导热问题的解。

$$\frac{\theta}{\theta_0} = A e^{-\mu_1^2 F_0} f(\mu_1, \eta) \quad (4-28)$$

$$\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = A e^{-\mu_1^2 F_0} B \quad (4-29)$$

以上二式适用于正规状况阶段， η 代表无量纲尺度，系数见参考文献 [1] P74 表 3-2，其中涉及贝塞尔函数及 μ_1 的求取。

(3) 正规状况阶段的实用计算方法。

- 1) 采用近似拟合公式（参见参考文献 [1] P75）；
 - 2) 查诺谟图（半对数坐标图）（参见参考文献 [1] P75 ~ 78）。
- （仅适用于恒温介质，第三类边界条件）

各种形状物体的诺谟图主要有 $\left[\frac{\theta}{\theta_m}\right]$ ； $\left[\frac{\theta}{\theta_0}\right]$ ； $\left[\frac{Q}{Q_0}\right]$ 。

其中

$$\begin{aligned} \left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right] &= f(F_0, Bi); \\ \left[\frac{\theta}{\theta_m}\right] &= f(Bi, \eta); \\ \left[\frac{Q}{Q_0}\right] &= f(F_0, Bi) \end{aligned} \quad (4-30)$$

由查取的数据计算温度

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left[\frac{\theta}{\theta_m}\right] \left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right] \quad (4-31)$$

计算传热量

$$Q = Q_0 \left[\frac{Q}{Q_0}\right] \quad (4-32)$$

四、对分析解的讨论 (参见诺谟图)

$$1. \tau^+ \rightarrow Fo^+ \rightarrow \theta^+$$

$$2. h^+ \Rightarrow Bi \rightarrow \infty \Rightarrow 1/Bi \rightarrow 0 \Rightarrow \text{第一类边界条件 } (\mu = \pi/2 = 1.5707)$$

$$3. \lambda^+, h^+ \Rightarrow Bi \rightarrow 0 \Rightarrow \text{集总参数分析 } \left(\frac{1}{Bi} > 100 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_m} \rightarrow 1 \right)$$

4.2.4 二维、三维非稳态导热问题的求解

一、解题思路

可以证明:二维、三维非稳态导热问题可以用相应的二个或三个一维问题解的乘积来表示其温度分布,温度场用无量纲过余温度表示:即 $\Theta = \theta/\theta_0$ 。(不适用于一切边界条件)

1. 无限长方柱体 (两个无限大平板的交集)

$$\Theta(x, y, \tau) = \Theta_{p1}(x, \tau) \cdot \Theta_{p2}(y, \tau) \quad (4-33)$$

2. 短圆柱体 (一个无限大平板和一个无限长圆柱的交集)

$$\Theta(x, y, \tau) = \Theta_p(x, \tau) \cdot \Theta_c(r, \tau) \quad (4-34)$$

3. 立方体 (三个无限大平板的交集)

$$\Theta(x, y, z, \tau) = \Theta_{p1}(x, \tau) \cdot \Theta_{p2}(y, \tau) \cdot \Theta_{p3}(z, \tau) \quad (4-35)$$

证明理论:解的唯一性。

证明方法:所设解既满足微分方程又满足定解条件(见参考文献 [1] P81 ~ P82)。

二、解题步骤 (例子:无限长方柱体)

由式 (4-33) 计算,其中

$$\Theta_{p1}(x, \tau) \leftarrow \left[\frac{\theta}{\theta_m} \right]_{p1} \cdot \left[\frac{\theta_m}{\theta_0} \right]_{p1} \quad (4-36)$$

$$\Theta_{p2}(y, \tau) \leftarrow \left[\frac{\theta}{\theta_m} \right]_{p2} \cdot \left[\frac{\theta_m}{\theta_0} \right]_{p2} \quad (4-37)$$

4.2.5 半无限大物体的非稳态导热 (如大地、冰面)

一、问题

1. 无限大物体:从 $x=0$ 的界面向 x 方向及其他两个坐标 (y, z) 方向无限延伸的物体;

2. 初始温度为 t_0 ;

3. 常物性;

4. 在 $\tau=0$ 时刻, $x=0$ 的一侧表面温度突然升高到 t_w 并保持不变,求解物体内部温度变化规律 $t(x, \tau)$ 。

二、数学模型

取过余温度

$$\theta = t - t_w \quad (4-38)$$

微分方程

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (4-39)$$

初始条件

$$\tau = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad (4-40)$$

边界条件

$$\begin{cases} x = 0, \theta = 0 \\ x = \infty, \theta = \theta_0 \end{cases} \quad (4-41)$$

三、分析解

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) = \operatorname{erf}\eta \quad (4-42)$$

讨论: 由 $\eta > 2 \Rightarrow \operatorname{erf}\eta > 0.9953 \Rightarrow \theta \approx \theta_0$

(1) $x \geq 4\sqrt{at}$ 时就可采用半无限大物体的模型;

(2) $\tau \leq \frac{x^2}{16a}$ 时, x 处仍为初始温度。(τ 被称为惰性时间)

四、热流密度和传热量

$$q_w = \frac{\lambda(t_w - t_0)}{\sqrt{\pi at}} \quad Q = 2A\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \sqrt{\rho c \lambda} (t_w - t_0) \quad (4-43)$$

式中 $\sqrt{\rho c \lambda}$ —— 吸热系数, 代表了物体向与其接触的高温物体吸热的能力。

4.3 概念汇总

1. 非稳态导热特点:

(1) 两个阶段: 初始阶段 \rightarrow 正规状况阶段;

(2) 热流方向上各点热流量不同。

2. 非稳态分析解 (适用于恒温介质第三类边界条件):

$$\Theta = \frac{\theta}{\theta_0} = f\left(Fo, Bi, \frac{x}{\delta}\right)$$

3. 毕渥准则: 表示导热物体内外热阻之比的综合量, $Bi = \frac{hl}{\lambda}$ 。

4. 傅里叶准则: 表示无因次时间的综合量, $Fo = \frac{at}{l^2}$ 。

5. 查诺谟图解题 (适用于正规状况阶段 $Fo \geq 0.2$):

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right) &= f(Fo, Bi) \\ \left(\frac{\theta}{\theta_m}\right) &= f\left(\frac{x}{l}, Bi\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \theta_0 \cdot \left(\frac{\theta}{\theta_m}\right) \cdot \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)$$

6. 多维非稳态导热问题的解: 用多个相应一维问题解的乘积来表示, 解的形式是无量纲过余温度 $\Theta = \frac{\theta}{\theta_0}$ 。

7. 物体中温度随时间的变化趋势: $\tau \uparrow \Rightarrow Fo \uparrow \Rightarrow \theta \uparrow$

8. $h \uparrow \uparrow \oplus \lambda \uparrow \uparrow \Rightarrow Bi \rightarrow \infty \Rightarrow t_w = t_f$ (转化为第一类边界条件)。

9. $\lambda \uparrow \uparrow \Rightarrow Bi \rightarrow 0 \Rightarrow (Bi < 0.1) \Rightarrow$ 集总参数法解题 (忽略内部热阻)。

10. 集总参数分析: $\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} \tau} = e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} = e^{-Bi Fo}$

11. 时间常数: 相对过余温度到达 0.368 所需的时间, $\tau_c = \frac{\rho c V}{hA}$ 。

$$12. \text{零维非稳态换热量: } Q_{\tau} = \int_0^{\tau} hA\theta d\tau = \rho CV\theta_0(1 - e^{-\tau/\tau_c})$$

4.4 思考题分析

4-1 试说明集总参数法的物理概念及数学上处理的特点。

答: 当内外热阻之比趋于零时, 影响换热的主要环节是在边界上的换热能力, 而内部由于热阻很小而温度趋于均匀, 以至于不需要关心温度在空间的分布, 温度只是时间的函数, 数学描述上由偏微分方程转化为常微分方程, 大大降低了求解难度。

4-2 在用热电偶测定气流的非稳态温度场时, 怎样才能改善热电偶的温度响应特性?

答: 要改善热电偶的温度响应特性, 即最大限度降低热电偶的时间常数 $\tau_c = \frac{\rho cV}{hA}$, 形状上要降低体面比, 要选择热容小的材料, 要强化热电偶表面的对流换热。

4-3 试说明“无限大”平板的物理概念, 并举出一两个可以按无限大平板处理的非稳态导热问题。

答: 所谓“无限大”平板, 是指其长宽尺度远大于其厚度, 从边缘交换的热量可以忽略不计, 当平板两侧换热均匀时, 热量只垂直于板面方向流动。如薄板两侧均匀加热或冷却、炉墙或冷库的保温层导热等情况可以按无限大平板处理。

4-4 什么叫非稳态导热的正规状况阶段或充分发展阶段? 这一阶段在物理过程及数学处理上都有些什么特点?

答: 非稳态导热过程进行到一定程度, 初始温度分布的影响就会消失, 虽然各点温度仍随时间变化, 但过余温度的比值已与时间无关, 只是几何位置 (x/δ) 和边界条件 (Bi 数) 的函数, 亦即无量纲温度分布不变, 这一阶段称为正规状况阶段或充分发展阶段。这一阶段的数学处理十分便利, 温度分布计算只需取无穷级数的首项进行计算。

4-5 有人认为, 当非稳态导热过程经历时间很长时, 采用诺谟图计算所得的结果是错误的。理由是: 这个图表明, 物体中各点的过余温度的比值仅与几何位置及 Bi 有关, 而与时间无关。但当时间趋于无限大时, 物体中各点的温度应趋近流体温度, 所以两者是有矛盾的。你是否同意这种看法, 说明你的理由。

答: 我不同意这种看法, 因为随着时间的推移, 虽然物体中各点过余温度的比值不变, 但各点温度的绝对值在无限接近。这与物体中各点温度趋近流体温度的事实并不矛盾。

4-6 试说明 Bi 数的物理意义。 $Bi \rightarrow 0$ 及 $Bi \rightarrow \infty$ 各代表什么样的换热条件? 有人认为, $Bi \rightarrow 0$ 代表了绝热工况, 你是否赞同这一观点, 为什么?

答: Bi 数是物体内外热阻之比的相对值。 $Bi \rightarrow 0$ 时说明传热热阻主要在边界, 内部温度趋于均匀, 可以用集总参数法进行分析求解; $Bi \rightarrow \infty$ 时, 说明传热热阻主要在内部, 可以近似认为壁温就是流体温度。认为 $Bi \rightarrow 0$ 代表绝热工况是不正确的, 该工况是指边界热阻相对于内部热阻较大, 而绝热工况下边界热阻无限大。

4-7 什么是非稳态导热问题的乘积解法, 它的使用条件是什么?

答: 对于二维或三维非稳态导热问题的解等于对应几个一维问题解的乘积, 其解的形式

是无量纲过余温度，这就是非稳态导热问题的乘积解法，其使用条件是恒温介质，第三类边界条件或边界温度为定值、初始温度为常数的情况。

4-8 什么是“半无限大”的物体？半无限大物体的非稳态导热存在正规状况阶段吗？

答：所谓“半无限大”物体是指平面一侧空间无限延伸的物体。因为物体向纵深无限延伸，初始温度的影响永远不会消除，所以半无限大物体的非稳态导热不存在正规状况阶段。

4-9 本章的讨论都是对物性为常数的情形作出的，对物性是温度函数的情形，你认为应怎样获得其非稳态导热的温度场？

答：应用变物性微分方程进行分析求解。

4-10 结合非稳态导热分析解的形式，分析导温系数在非稳态导热中的作用。

答：从分析解形式可见，物体的无量纲过余温度是傅里叶数 ($a\tau/l^2$) 的负指数函数，即表示在相同尺寸及换热条件下，导温系数越大的物体到达指定温度所需的时间越短，这正说明导温系数所代表的物理含义。

4.5 典型习题分析

4-1 一块初温为 t_0 的平板，一侧表面突然受到恒定热流密度 q_0 的加热，另一侧表面则受温度为 t_∞ 的气流冷却，表面传热系数为 h 。设内热阻可以不计，其他的几何、物性参数均已知。试列出物体温度随时间变化的微分方程式并求解之。

解：由题意得

$$\begin{cases} q_0 A = \rho c A \delta \frac{dt}{d\tau} + hA(t - t_\infty) \\ \tau = 0, t = t_0 \end{cases}$$

令

$$\theta = t - t_\infty$$

$$\begin{cases} \rho c \delta \frac{d\theta}{d\tau} + h\theta = q_0 \\ \tau = 0, \theta = \theta_0 \end{cases}$$

解齐次方程

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{h}{\rho c \delta} d\tau \Rightarrow \theta = C e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau}$$

令 $C = C(\tau)$ 代入原方程

$$q_0 = \rho c \delta \left[C'(\tau) e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau} + \left(-\frac{h}{\rho c \delta} \right) e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau} \cdot C(\tau) \right] + hC(\tau) e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau}$$

$$C'(\tau) = \frac{q_0}{\rho c \delta} \cdot e^{\frac{h}{\rho c \delta} \tau} \Rightarrow C(\tau) = \frac{q_0}{h} e^{\frac{h}{\rho c \delta} \tau} + C_1$$

$$\theta = \left[\frac{q_0}{h} e^{\frac{h}{\rho c \delta} \tau} + C_1 \right] e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau} = \frac{q_0}{h} + C_1 e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau}$$

由

$$\tau = 0, \theta = \theta_0 \Rightarrow C_1 = \theta_0 - \frac{q_0}{h}$$

$$\theta = \frac{q_0}{h} + \left(\theta_0 - \frac{q_0}{h} \right) e^{-\frac{h}{\rho c \delta} \tau}$$

分析与思考：本题是一个特殊边界条件的零维非稳态导热问题，数学描述为非齐次微分

方程, 求解过程一般分为两步, 首先解齐次方程, 再求待定函数以得最后解。

4-2 一块厚 20mm 的钢板, 加热到 500°C 后置于 20°C 的空气中冷却。设冷却过程中钢板两侧面的平均换热系数为 80W/(m²·K), 钢板的导热系数为 45W/(m·K), 热扩散率为 1.37 × 10⁻⁵ m²/s。试确定使钢板冷却到 30°C 时所需的时间。

解: 对于厚度为 2δ 的平板, 其 V/F = δ = 0.01。

$$Bi_V = \frac{h(V/A)}{\lambda} = 80 \times 0.01/45 = 0.01777 < 0.1$$

故本题可采用集总参数法求解。

$$Fo_V = \frac{\alpha\tau}{(V/F)^2} = \frac{1.37 \times 10^{-5}}{0.01^2} = 0.137\tau$$

$$\theta_0 = 500 - 20 = 480^\circ\text{C} \quad \theta = 30 - 20 = 10^\circ\text{C}$$

根据 $\theta = \theta_0 e^{-Bi_V Fo_V}$, 得 $10 = 480 e^{-0.01777 \times 0.137\tau}$

$$\tau = \frac{\ln 48}{0.01777 \times 0.137} = 1590(\text{s})$$

答: 钢板冷却到 30°C 需要 1590s 时间。

4-3 设 100A 的电流突然流经直径为 1mm 的金属导线, 金属线置于温度为 20°C 的恒温槽中, 其电阻值为 0.01Ω/m。导线表面与恒温槽中冷却油之间的表面传热系数为 500 W/(m²·K), 导线的参数为: ρ = 8000kg/m³, c = 500J/(kg·K), λ = 35W/(m·K)。问导线温度将稳定在多少度? 从通电开始瞬间到导线温度与稳定值相差 1°C 所需的时间为多少?

解: 稳定过程热平衡: $h\pi D(t_w - t_\infty) = I^2 R$

$$t_w = \frac{I^2 R}{\pi D h} + t_\infty = \frac{100^2 \times 0.01}{3.14 \times 0.001 \times 500} + 20 = 83.7^\circ\text{C}$$

$$Bi_V = \frac{hD}{4\lambda} = \frac{500 \times 0.001}{4 \times 35} = 0.0036 < 0.05$$

可用集总参数分析: 令 $\theta = t - t_\infty$, 由热平衡

$$\begin{cases} \dot{\Phi} V = \rho c V \frac{d\theta}{d\tau} + hA\theta \\ \tau = 0, \theta = 0 \end{cases}$$

解齐次方程 $\rho c V \frac{d\theta}{d\tau} + hA\theta = 0 \Rightarrow \theta = C \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V \tau}\right)$

令 $C = C(\tau)$, 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} V &= \rho c V \left[C'(\tau) \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V \tau}\right) - \frac{hA}{\rho c V} \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V \tau}\right) \cdot C(\tau) \right] \\ &+ hA C(\tau) \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V \tau}\right) \\ &= \rho c V C'(\tau) \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V \tau}\right) \end{aligned}$$

$$C(\tau) = \int \frac{\dot{\Phi} V}{\rho c V} \exp\left(\frac{hA}{\rho c V \tau}\right) d\tau = \frac{\dot{\Phi} V}{hA} \exp\left(\frac{hA}{\rho c V \tau}\right) + C_1$$

$$\theta = \left[\frac{\dot{\Phi} V}{hA} \exp\left(\frac{hA}{\rho c V^2} x\right) + C_1 \right] \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V^2} x\right) = \frac{\dot{\Phi} V}{hA} + C_1 \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V^2} x\right)$$

$$\text{由} \quad \tau = 0, \theta = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{\dot{\Phi} V}{hA}$$

$$\theta = \frac{\dot{\Phi} V}{hA} \left[1 - \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V^2} x\right) \right]$$

$$\text{其中} \quad \dot{\Phi} = \frac{4I^2 R}{\pi D^2} \quad \frac{V}{A} = \frac{D}{4} \quad \theta = 83.7 - 1 - 20 = 62.7^\circ\text{C}$$

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\rho c D}{4h} \ln \left[1 - \frac{\pi h D \theta}{I^2 R} \right] \\ &= -\frac{8000 \times 500 \times 0.001}{4 \times 500} \times \ln \left[1 - \frac{3.14 \times 500 \times 0.001 \times 62.7}{100^2 \times 0.01} \right] = 8.34\text{s} \end{aligned}$$

答：导线温度将稳定在 83.7°C ，从通电开始瞬间到导线温度与稳定值相差 1°C 所需的时间为 8.34 秒。

分析与思考：本题是一个有内热源的零维非稳态导热问题，数学描述为非齐次微分方程，导线的最终温度应从热平衡分析获得。

4-4 将具有同样温度的两块相同材料的平板 A 及 B 放入冷流体中冷却，已知 A 的厚度为 B 的两倍，流体与各表面间的表面传热系数均可视为无限大。已知板 B 中心点的过余温度下降到初值的一半需要 20min，问板 A 达到同样温度工况需多少时间？

$$\text{解：} Bi_A = Bi_B = \infty \Rightarrow \frac{\theta_m}{\theta_0} = f(Fo)$$

$$\left[\frac{\theta_m}{\theta_0} \right]_A = \left[\frac{\theta_m}{\theta_0} \right]_B = 0.5 \Rightarrow Fo_A = Fo_B$$

$$\text{又} \quad a_A = a_B, \delta_A = 2\delta_B \Rightarrow \tau_A = \left(\frac{\delta_A}{\delta_B} \right)^2 \tau_B = 4\tau_B = 4 \times 20 = 80\text{min}$$

答：A 达到同样温度工况需 80 分钟。

分析与思考：本题相当于第一类边界条件的非稳态导热问题，无量纲过余温度只是傅里叶数的函数，同样的温度工况必对应着相同的无量纲时间。该结论也适用于 Bi 相同的物体。

4-5 已知一无内热源的无限大平板中某一瞬间的温度分布为 $t = c_1 x^2 + c_2$ ，其中 c_1 、 c_2 为已知常数。试确定：

- (1) 此时刻在 $x=0$ 的表面处的热流密度；
- (2) 此时刻平板平均温度随时间的变化率（物性已知且为常数）。

$$\text{解：} \frac{dt}{dx} = 2c_1 x$$

$$(1) q|_{x=0} = -\lambda \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$(2) q|_{x=\delta} = -\lambda \left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=\delta} = -\lambda 2c_1 \delta$$

由能量平衡:

$$\rho c A \delta \frac{dt}{d\tau} = -q \Big|_{x=\delta} \times A$$

$$\text{则 } \frac{dt}{d\tau} = \frac{2c_1 \lambda \delta A}{\rho c A \delta} = 2c_1 a$$

分析与思考: 无内热源常物性大平板中的温度分布为非线性, 则表示过程为非稳态导热, 本题 (1) 解说明 $x=0$ 的表面处绝热, 由此得出解 (2) 的能量平衡式, 值得注意的是平衡式中 δ 处的热流密度方向与平板的内能变化率方向相反。

4-6 一截面尺寸为 $10\text{cm} \times 5\text{cm}$ 的长钢棒初始温度为 20°C , 长边的一侧突然被置于 200°C 的气流中, $h = 125\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, 另外三个侧面绝热。试确定 6 分钟后另一个长边的侧面温度。钢棒的物性参数为: $\rho = 7820\text{kg}/\text{m}^3$, $c = 460\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, $\lambda = 15.2\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

解: 按题意可作半壁厚为 0.05m 的对称受热无限大平板处理。

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} = 4.2255 \times 10^{-6}$$

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{4.2255 \times 10^{-6} \times 6 \times 60}{0.05^2} = 0.60847$$

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{125 \times 0.05}{15.2} = 0.41118$$

解超越方程 (4-19): $\mu_1 = 0.61584$

$$\text{由式 (4-22) 计算: } \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{2\sin\mu_1}{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1} - e^{-\mu_1^2 Fo} = 0.84352$$

$$t_m = 0.84352 (t_0 - t_f) + t_f = 0.84352 (20 - 200) + 200 = 48.17^\circ\text{C}$$

答: 6min 后另一个长边的侧面温度为 48.17°C 。

4-7 将一块厚 300mm 初温为 20°C 的板状钢坯送入温度为 1200°C 的炉子加热, 钢板一侧受热, 另一侧可近似认为是绝热的。已知钢板热扩散率 $a = 5.55 \times 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$, 导热系数 $\lambda = 34\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, 加热过程平均表面传热系数 $h = 290\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, 试确定加热到钢板表面温度为 1185°C 时所需的时间以及此时钢板两表面间的温差。

解: 按题意可作半壁厚为 0.3m 的对称受热无限大平板处理。

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{290 \times 0.3}{34} = 2.5588 \Rightarrow \mu_1 = 1.1461$$

$$\frac{\theta_\delta}{\theta_0} = \frac{1185 - 1200}{20 - 1200} = \frac{-15}{-1180} = 0.012712$$

由式 (4-21):

$$Fo = \frac{\ln \left[\frac{\theta_\delta}{\theta_0} \cdot \frac{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1}{2\sin\mu_1 \cos\mu_1} \right]}{-\mu_1^2} = 2.78545$$

$$\tau = \frac{\delta^2}{a} Fo = \frac{0.3^2}{5.55 \times 10^{-6}} \times 2.78545 = 45169\text{s} = 12.55\text{h}$$

由式 (4-23):

$$\theta_m = \frac{\theta_\delta}{\cos\mu_1} = \frac{-15}{\cos 1.1461} = -36.4$$

$$\Delta t = \theta_\delta - \theta_m = -15 - (-36.4) = 21.4^\circ\text{C}$$

答：加热到钢板表面温度为 1185°C 时需要 12.55h，此时钢板两表面间的温差为 21.4°C 。

4-8 火箭发动机喷管，壁厚为 9mm，初始温度为 30°C 。在进行静推力试验时，温度为 1750°C 的高温燃气送入该喷管，燃气与壁面间的表面传热系数为 $1950\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。喷管材料的密度 $\rho = 8400\text{kg}/\text{m}^3$ ，导热系数 $\lambda = 24.6\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ，比热 $c = 560\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。假设喷管因直径与厚度之比较大而可视为平壁，且外侧可作绝热处理，试确定：

- (1) 为使喷管的最高温度不超过材料允许温度 (1000°C) 而能允许的运行时间；
- (2) 在所允许时间的终了时刻，壁面中的最大温差；
- (3) 在上述时刻壁面中的平均温度梯度与最大温度梯度。

$$\text{解：} Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{1950 \times 0.009}{24.6} = 0.71341$$

$$\Rightarrow \mu = 0.76921$$

$$(1) \quad \frac{\theta_\delta}{\theta_0} = \frac{1000 - 1750}{30 - 1750} = 0.43605$$

$$Fo = \frac{\ln\left[\frac{\theta_\delta}{\theta_0} \cdot \frac{\mu_1 + \sin\mu_1 \cos\mu_1}{2\sin\mu_1 \cos\mu_1}\right]}{-\mu_1^2} = 0.9993$$

$$\tau = \frac{\delta^2}{a} Fo = \frac{\rho c \delta^2}{\lambda} Fo = \frac{8400 \times 560 \times 0.009^2}{24.6} \times 0.9993 = 15.5\text{s}$$

$$(2) \quad \Delta t_{\max} = t_\delta - t_m = \theta_\delta - \theta_m = \theta_\delta \left(1 - \frac{1}{\cos\mu_1}\right)$$

$$= (1000 - 1750) \times \left(1 - \frac{1}{\cos 0.76921}\right) = 293.9^\circ\text{C}$$

$$(3) \quad \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{\max} = \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=\delta} = -\frac{h}{\lambda} \theta_\delta = -\frac{1950 \times (-750)}{24.6} = 59451^\circ\text{C}/\text{m}$$

$$\bar{\frac{\partial t}{\partial x}} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{1}{\delta} \theta(x) \Big|_0^\delta = \frac{\theta_m}{\delta} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{\delta}\right) \Big|_0^\delta = \frac{\theta_m}{\delta} (\cos\mu_1 - 1)$$

$$= \frac{1000 - 293.9 - 1750}{0.009} \times (\cos 0.76921 - 1) = 32655^\circ\text{C}/\text{m}$$

4-9 在一四周均匀散热无内热源的长圆柱体内，测得某一瞬间 $r = 3\text{cm}$ 处温度的瞬时变化率为 $-0.1\text{K}/\text{s}$ 。已知 $\lambda = 40\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ， $a = 1.2 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 。试计算此时此处圆柱单位长度上的热流量沿半径方向的变化率。

解：由式 (2-19) (无内热源常物性一维非稳态)：

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = -0.1 \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = -\frac{0.1r}{a}$$

又

$$\Phi = -\lambda \cdot 2\pi r \cdot \frac{\partial t}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -2\pi\lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) = -2\pi\lambda \cdot \left(-\frac{0.1r}{a} \right) = 0.2 \frac{\pi\lambda r}{a}$$

$$= 0.2 \times \frac{3.14 \times 43 \times 0.03}{1.2 \times 10^{-5}} = 67.5 \times 10^3 \text{ W/m}$$

答：此时此处圆柱单位长度上的热流量沿半径方向的变化率为 67.5 kW/m 。

分析与思考：本题使用推导与计算相结合的方法，要能把握好物理概念与数学描述手段。温度随时间变化即为非稳态，变化率为负说明物体内能下降，向外传导能量，热流量随半径增大而增大。

4-10 初温为 600°C 、直径为 40cm 的长轴在 30°C 的环境中冷却。已知轴表面与环境间的表面传热系数为 $18.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，导热系数 $\lambda = 22.3 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，导温系数 $a = 8.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。问轴表面温度到达 450°C 需要多长时间。

$$\text{解：} Bi = \frac{hR}{\lambda} = \frac{18.5 \times 0.2}{22.3} = 0.1659$$

由近似计算（参考文献 [1] 3-29a）： $\mu_1 = 0.59856$

查参考文献 [1] 附录 16： $J_0(\mu_1) \approx 0.912$ $J_1(\mu_1) \approx 0.2867$

$$A = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1 [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]} = \frac{2 \times 0.2867}{0.59856(0.912^2 + 0.2867^2)} = 1.04817$$

$$\text{又} \quad \frac{\theta_R}{\theta_0} = \frac{450 - 30}{600 - 30} = 0.73684 \quad \eta = r/R = 1$$

$$\text{由} \quad \frac{\theta_R}{\theta_0} = Ae^{-\mu_1^2 Fo} J_0(\mu_1) \Rightarrow Fo = 0.72648$$

$$\tau = \frac{R^2}{a} Fo = \frac{0.2^2}{8.8 \times 10^{-6}} \times 0.72648 = 3302 \text{ s} = 55 \text{ min}$$

答：轴表面温度到达 450°C 需要 55 min 。

分析与思考：本题是无限长圆柱非稳态导热问题，计算中涉及 μ_1 和贝塞尔函数，但计算步骤与大平板类似，可以用拟合公式近似计算，也可用诺谟图进行计算。

4-11 有一耐热玻璃棒，直径为 25mm ，为改善其表面的机械特性，在表面上涂了一层极薄的导热系数很大的金属层。在此金属涂层与芯棒之间平均存在有 $R_1 = 0.10 (\text{m} \cdot \text{K})/\text{W}$ 的热阻（每米长度上的热阻）。该棒起初处于均匀温度 800K ，然后突然被置于 300K 的气流中冷却，表面传热系数 $h = 120 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，试确定将该棒的中心温度降低到 500K 所需的时间。玻璃棒物性参数如下： $\rho = 2600 \text{ kg}/\text{m}^3$ ， $c_p = 808 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ， $\lambda = 3.98 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

解：当量表面传热系数

$$h' = (1/h + R_1/\pi D)^{-1} = (1/120 + 0.1 \times 3.14 \times 0.025)^{-1} = 61.78 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

$$Bi = \frac{h'R}{\lambda} = \frac{61.78 \times 0.0125}{3.98} = 0.19402 \Rightarrow \mu_1 = 0.64396 \quad A = 1.04849$$

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{500 - 300}{800 - 300} = 0.4 \quad Fo = \frac{\ln\left(\frac{\theta_m}{A\theta_0}\right)}{-\mu_1^2} = 2.3238$$

$$\tau = \frac{R^2}{\alpha} Fo = \frac{\rho c R^2}{\lambda} Fo = \frac{2600 \times 808 \times 0.0125^2}{3.98} \times 2.3238 = 191.7s$$

答：中心温度降低到 500K 需要 191.7s。

分析与思考：本题是无限长圆柱非稳态导热问题，由于涂覆金属层使边界条件发生变化。为了使用现有公式进行计算，用考虑金属热阻后的当量表面传热系数将边界条件适当处理。

4-12 将一直径为 10cm 初温为 250℃ 钢球置于温度为 10℃ 的油浴中。已知球的导热系数为 44.8W/(m·K)，热扩散率为 $1.229 \times 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ 。设冷却过程中的平均表面传热系数为 200W/(m²·K)，问欲使球心温度降低到 150℃ 需要经过多长时间，此时球表面的温度为多少？

解：

$$Bi = \frac{hR}{\lambda} = \frac{200 \times 0.05}{44.8} = 0.2232$$

由近似计算（参考文献 [1] 3-29a, 3-29b）：

$$\mu_1 = 0.86265 \quad A = 1.0681$$

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{150 - 10}{250 - 10} = 0.5833 \quad Fo = \frac{\ln\left(\frac{\theta_m}{A\theta_0}\right)}{-\mu_1^2} = 0.81283$$

$$\tau = \frac{R^2}{\alpha} Fo = \frac{0.05^2}{1.229 \times 10^{-5}} \times 0.81283 = 165.3s$$

又

$$\frac{\sin\mu_1}{\mu_1} = 0.8805$$

$$\theta_R = \theta_m \times 0.8805 = 140 \times 0.8805 = 123.3^\circ\text{C}$$

$$t_R = \theta_R + t_f = 123.3 + 10 = 133.3^\circ\text{C}$$

答：球心温度降低到 150℃ 需要经过 165.3 秒，此时球表面温度为 133.3℃。

分析与思考：本题是球体非稳态导热问题，计算公式与大平板有较大差别，但计算步骤类似，可以用拟合公式近似计算，也可用诺谟图进行计算。

4-13 一初始温度为 25℃ 的正方形人造木块被置于 425℃ 的环境中。已知木块的边长为 0.1m，材料是各向同性的， $\lambda = 0.65 \text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ， $\rho = 810 \text{kg}/\text{m}^3$ ， $c = 2550 \text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ 。木块的六个表面对称受热，表面传热系数为 $h = 15 \text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。经过 3h10min20s 后，木块局部地区开始着火。试推算此种材料的着火温度。

解：对于厚为 0.1m 的无限大平板：

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{15 \times 0.05}{0.65} = 1.154$$

$$Fo = \frac{\alpha\tau}{\delta^2} = \frac{\lambda\tau}{\rho c \delta^2} = \frac{0.65 \times 11420}{810 \times 2550 \times 0.05^2} = 1.4375$$

$$\Rightarrow \mu_1 = 0.906 \quad A = 1.1312 \quad \cos\mu_1 = 0.6169$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_\delta}{\theta_0} = A e^{-\mu_1^2 Fo} \cos\mu_1 = 0.2144$$

对于边长为0.1m的立方体,其顶角温度:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{\theta_s}{\theta_0}\right)^3 = 0.2144^3 = 0.00986$$

$$\theta = 0.00986\theta_0 = 0.00986 \times (25 - 425) = -3.94^\circ\text{C}$$

$$t = \theta + t_f = -3.94 + 425 = 421.06^\circ\text{C}$$

答:此种材料的着火温度为421.06°C。

分析与思考:本题是三维非稳态导热问题,立方体可以看成三个无限大平板的交集。

4-14 一直径为0.15m,高为0.05m的平板玻璃圆盘,送入退火炉中消除应力,其初始温度为30°C,炉中温度为450°C。设该玻璃盘在炉内时各表面均可受到加热,换热系数为9.5W/(m²·K)。按工艺要求,需加热到盘内各处温度均在400°C以上,试估算所需的加热时间。已知该盘导热系数λ=0.78W/(m·K),ρ=2700kg/m³,c=835J/(kg·K)。

解:平板玻璃盘在几何上是直径为0.15m的圆柱与厚为0.05m的无限大平板相交而成,按加热工艺要求,使最低温度即中心温度达到400°C。

$$\text{对平板: } \frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{h\delta} = \frac{0.78}{9.5 \times 0.025} = 3.284$$

$$\text{对圆柱: } \frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{hR} = \frac{0.78}{9.5 \times 0.075} = 1.095$$

$$\text{按题意: } \frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{400 - 450}{30 - 450} = 0.119$$

采用试凑法求解,取一组τ值,计算每个τ值下的θ_m/θ₀值,由此确定所需的时间。其

$$\text{中 } (Fo)_p = \frac{\alpha\tau}{\delta^2}, (Fo)_c = \frac{\alpha\tau}{R^2}, \frac{\theta_m}{\theta_0} = \left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right]_p \cdot \left[\frac{\theta_m}{\theta_0}\right]_c$$

τ (min)	(Fo) _p	(Fo) _c	(θ _m /θ ₀) _p	(θ _m /θ ₀) _c	θ _m /θ ₀
150	4.982	0.554	0.30	0.57	0.171
160	5.314	0.590	0.28	0.50	0.14
170	5.646	0.627	0.25	0.46	0.115

由此可见,大约经历170min(2.8h)后即可达到要求。

4-15 一种测量导热系数的瞬态法是基于半无限大物体的导热过程而设计的。设有一块厚金属,初温为30°C,然后其一侧面突然与温度为100°C沸水相接触。在离开此表面10mm处由热电偶测得2min后该处的温度为65°C。已知材料的ρ=2200kg/m³,c=700J/(kg·K),试计算该材料的导热系数。

解: t₀=30°C t_w=100°C x=0.01m t=65°C τ=2×60=120s ρ=2200kg/m³ c=700J/(kg·K)

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{65 - 100}{30 - 100} = 0.5 \Rightarrow \text{erf}\eta, \text{查参考文献[1]附录17: } \eta = 0.477$$

由

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

$$\lambda = \rho c \alpha = \frac{\rho c x^2}{4\tau\eta^2} = \frac{2200 \times 700 \times 0.01^2}{4 \times 120 \times 0.477^2} = 1.41 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$$

5. 导热问题的数值解法

5.1 知识结构

1. 导热问题数值解原理 (差分方法);
2. 差分格式 (向前、向后、中心);
3. 节点方程 (内部、边界);
4. 非稳态导热问题数值解的稳定性判据。

5.2 重点内容剖析

5.2.1 稳态导热问题数值解求解原理

导热问题的精确求解手段是分析解,但在很多情况下,几何形状、微分方程及定解条件的复杂性使得分析解非常困难,甚至不可能得到,在这种情况下,建立在有限差分 and 有限元方法基础上的数值计算法是求解导热问题十分有效的方法。本章将介绍有限差分法的原理与应用。

数值解:用有限个离散点(节点)上物理量的集合代替在时间、空间上连续的物理量场,按物理属性建立各节点的代数方程并求解之。

一、数值解法解题思路

1. 用有限点函数值表示连续而光滑的温度函数(对于一维温度场,用多点折线代替光滑温度曲线),其实质是用有限小量代替无限小量。

2. 用差商代替微商(差分格式如图 5-1)

(1) 微分:

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (5-1)$$

(2) 向前差分:

$$\frac{dt}{dx} \approx \frac{t_{m+1} - t_m}{\Delta x} \quad (5-2)$$

(3) 向后差分:

$$\frac{dt}{dx} \approx \frac{t_m - t_{m-1}}{\Delta x} \quad (5-3)$$

(4) 中心差分:

$$\frac{dt}{dx} \approx \frac{t_{m+1} - t_{m-1}}{2\Delta x} \quad (5-4)$$

3. 根据导热问题列出各节点的差分方程

(代数方程) → 方程组

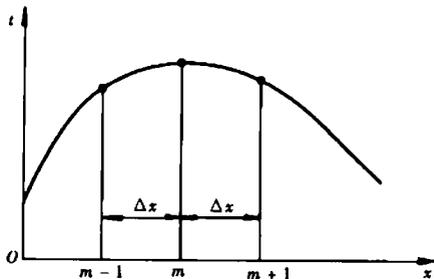


图 5-1 差分格式

节点数 = 方程数 = 未知量数

4. 解方程组 (一般借助于计算机)

二、二维无内热源稳态导热问题数值解

1. 问题的微分方程描述

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (5-5)$$

2. 问题的差分方程描述

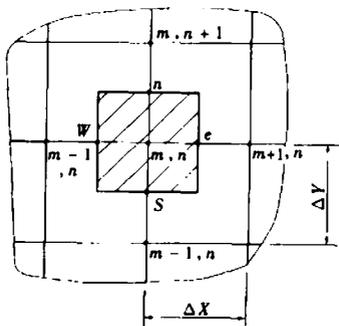


图 5-2 内部节点差分方程的建立

(1) 内部节点的差分方程 (如图 5-2)

以 (m, n) 节点为控制体 $(\Delta x \times \Delta y)$ 。

(m, n) 节点与周围节点间中点的一阶差分:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m+1/2, n} \approx \frac{t_{m+1, n} - t_{m, n}}{\Delta x} \quad (e \text{ 点})$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m-1/2, n} \approx \frac{t_{m, n} - t_{m-1, n}}{\Delta x} \quad (w \text{ 点})$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m, n+1/2} \approx \frac{t_{m, n+1} - t_{m, n}}{\Delta y} \quad (n \text{ 点})$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m, n-1/2} \approx \frac{t_{m, n} - t_{m, n-1}}{\Delta y} \quad (s \text{ 点})$$

(m, n) 节点的二阶差分 (一阶差分的差分):

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right|_{m, n} \approx \frac{\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m+1/2, n} - \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{m-1/2, n}}{\Delta x} = \frac{t_{m+1, n} + t_{m-1, n} - 2t_{m, n}}{(\Delta x)^2} \quad (5-6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right|_{m, n} \approx \frac{\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{m, n+1/2} - \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{m, n-1/2}}{\Delta y} = \frac{t_{m, n+1} + t_{m, n-1} - 2t_{m, n}}{(\Delta y)^2} \quad (5-7)$$

(m, n) 节点的差分方程 [微分 \rightarrow 差分, 也可用泰勒级数展开法或节点间导热方程 (控制体热平衡) 直接导出]

$$\frac{t_{m+1, n} + t_{m-1, n} - 2t_{m, n}}{(\Delta x)^2} + \frac{t_{m, n+1} + t_{m, n-1} - 2t_{m, n}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (5-8)$$

如取正方形网格 $\Delta x = \Delta y$, 上式简化为

$$t_{m, n} = \frac{1}{4} (t_{m+1, n} + t_{m-1, n} + t_{m, n+1} + t_{m, n-1}) \quad (5-9)$$

(2) 边界节点的差分方程

① 第一类边界条件: (给定边界节点的温度)

$$t_{m, n} = C \quad (5-10)$$

② 第二类边界条件: (给定边界节点处的热流密度 q_w , q_w 流入为正)

边界节点热平衡方程:

(以右平直边界为例, 如图 5-3, 用热平衡法导出——流入节点热流代数和为零)

$$\lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \Delta y \cdot q_w = 0 \quad (5-11)$$

如取正方形网格 $\Delta x = \Delta y$, 上式简化为

$$t_{m,n} = \frac{1}{4}(t_{m,n+1} + t_{m,n-1}) + \frac{1}{2}\left(t_{m-1,n} + \frac{\Delta y}{\lambda} q_w\right) \quad (5-12)$$

③ 第三类边界条件: (给定边界外流体温度 t_∞ 及边界处的表面传热系数 h)

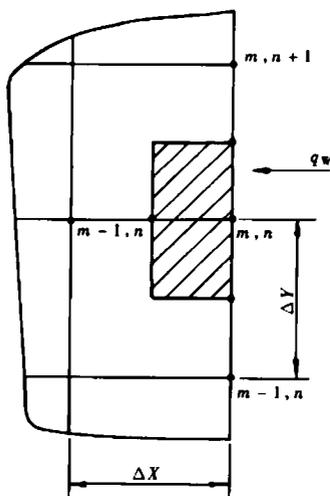


图 5-3 第二类边界条件的边界节点

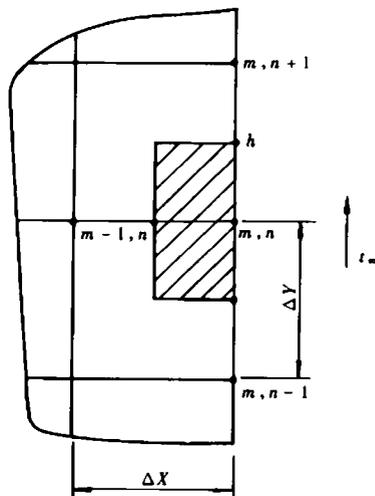


图 5-4 第三类边界条件的边界节点

(以右平直边界为例, 如图 5-4, 流入节点热流代数和为零)

$$\lambda \Delta y \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \Delta y \cdot h(t_\infty - t_{m,n}) = 0 \quad (5-13)$$

如取正方形网格 $\Delta x = \Delta y$ 上式简化为

$$\begin{aligned} t_{m,n} &= \frac{2t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + \frac{2h\Delta y}{\lambda} t_\infty}{2\left(2 + \frac{h\Delta y}{\lambda}\right)} \\ &= \frac{t_{m,n+1} + t_{m,n-1} + 2(t_{m-1,n} + Bi \cdot t_\infty)}{2(2 + Bi)} \end{aligned} \quad (5-14)$$

式中: Bi 是以网格间距为特征尺度的毕渥准则, 称为网格毕渥数。

对于其他位置和形状的边界节点, 参照上述方法即可写出边界节点方程, 所以热平衡法是最直接、最简单的节点方程求取方法。

3. 解差分方程组

对应每个未知量 (一个节点温度) \rightarrow 一条方程 (一个节点方程) \rightarrow 方程组有唯一解

解法: (1) 矩阵法

(2) 迭代法: 高斯-赛德尔迭代

5.2.2 非稳态导热问题数值求解原理

非稳态导热问题中温度不仅是空间的函数, 还是时间的函数, 所以非稳态导热问题的数值解还要涉及温度对时间的差分。

一、一维无内热源非稳态导热问题

1. 数学描述 (微分法)

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (5-15)$$

2. 构造差分方程

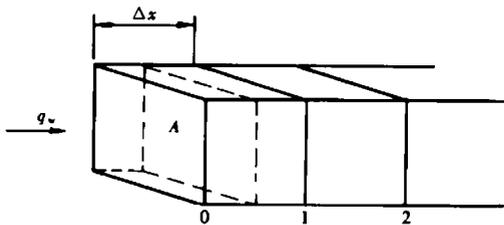
$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \approx \frac{t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)} - 2t_n^{(i)}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{与稳态同}) \quad (5-16)$$

对时间向前差分:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} \approx \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} \quad (5-17)$$

(1) 代入原方程得内部节点差分方程

$$\begin{aligned} \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} &= a \frac{t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)} - 2t_n^{(i)}}{(\Delta x)^2} \\ \Rightarrow t_n^{(i+1)} &= \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} [t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}] + \left[1 - \frac{2a\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right] t_n^{(i)} \\ \Rightarrow t_n^{(i+1)} &= Fo [t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}] + (1 - 2Fo) t_n^{(i)} \end{aligned} \quad (5-18)$$



式中: Fo 是以网格间距为特征长度的傅里叶准则, 称为网格傅里叶数。

(2) 边界节点方程

① 第一类边界条件 (给定左右边界节点的温度)

$$t_0^{(i)} = t_{w1} \quad t_N^{(i)} = t_{w2} \quad (5-19)$$

② 第二类边界条件: (给定边界节点处

的热流密度 q_w) (q_w 流入为正)

边界节点 t_0 的热平衡方程 (假设为左边界, 如图 5-5, 流入节点的热流等于该节点所代表控制体的内能变化率)

$$\begin{aligned} \lambda A \frac{t_1^{(i)} - t_0^{(i)}}{\Delta x} + q_w A &= \rho c V \frac{t_0^{(i+1)} - t_0^{(i)}}{\Delta \tau} \\ \Rightarrow \lambda \frac{t_1^{(i)} - t_0^{(i)}}{\Delta x} + q_w &= \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_0^{(i+1)} - t_0^{(i)}}{\Delta \tau} \\ &= \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c(\Delta x)^2} [t_1^{(i)} - t_0^{(i)}] + \frac{2\Delta\tau}{\rho c\Delta x} q_w + t_0^{(i)} \\ &= 2Fo t_1^{(i)} + (1 - 2Fo) t_0^{(i)} + \frac{2\Delta\tau}{\rho c\Delta x} q_w \end{aligned} \quad (5-20)$$

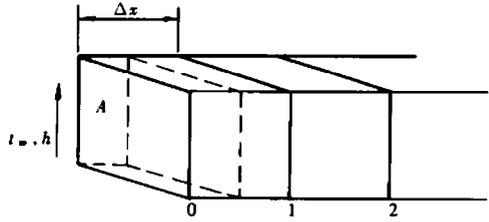
$$(5-21)$$

对于对称受热平板中心或绝热条件

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad (5-22)$$

取中心差分:

$$\frac{t^{(i)} - t^{(i-1)}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow t^{(i)} = t^{(i-1)} \quad (5-23)$$



③ 第三类边界条件: (给定边界外流体温度 t_∞ 及边界处的表面传热系数 h)

图 5-6 一维非稳态第三类边界条件的边界节点

边界节点 t_0 的热平衡方程 (假设左边界, 如图 5-6)

$$\begin{aligned} \lambda A \frac{t_1^{(i)} - t_0^{(i)}}{\Delta x} + hA(t_\infty - t_0^{(i)}) &= \rho c V \frac{t_0^{(i+1)} - t_0^{(i)}}{\Delta \tau} \\ \Rightarrow \lambda \frac{t_1^{(i)} - t_0^{(i)}}{\Delta x} + h(t_\infty - t_0^{(i)}) &= \rho c \frac{\Delta x}{2} \frac{t_0^{(i+1)} - t_0^{(i)}}{\Delta \tau} \end{aligned} \quad (5-24)$$

$$\begin{aligned} t_0^{(i+1)} &= \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c(\Delta x)^2} [t_1^{(i)} - t_0^{(i)}] + \frac{2\Delta\tau}{\rho c\Delta x} h [t_\infty - t_0^{(i)}] + t_0^{(i)} \\ &= 2Fo t_1^{(i)} + (1 - 2Fo) t_0^{(i)} + \frac{2\lambda\Delta\tau}{\rho c(\Delta x)^2} \frac{h\Delta x}{\lambda} [t_\infty - t_0^{(i)}] \\ &= 2Fo t_1^{(i)} + [1 - 2Fo(1 + Bi)] t_0^{(i)} + 2FoBi \cdot t_\infty \end{aligned} \quad (5-25)$$

(3) 初始条件 (节点赋值)

对于均匀温度场:

$$t_{0-N}^{(0)} = t_0 \quad (5-26)$$

对于非均匀温度场:

$$t_0^{(0)} = t_0, t_1^{(0)} = t_1, \dots, t_N^{(0)} = t_N \quad (5-27)$$

3. 解题步骤

(1) 确定

$$\Delta x, \Delta \tau \xrightarrow{\rho c \lambda h} Fo, Bi$$

(2) 赋初值 $t_n^{(0)}$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N$$

(3) 计算

$$t_n^{(1)} \rightarrow t_n^{(2)} \rightarrow \dots$$

以左边界绝热右边界为第三类边界条件的一维非稳态导热为例:

左边界:

$$t_{-1}^{(i)} = t_1^{(i)} \quad (5-28)$$

内部节点:

$$t_n^{(i+1)} = Fo [t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}] + (1 - 2Fo) t_n^{(i)} \quad (5-29)$$

右边界:

$$t_N^{(i+1)} = 2Fo t_{N-1}^{(i)} + [1 - 2Fo(1 + Bi)] t_N^{(i)} + 2FoBi \cdot t_\infty \quad (5-30)$$

节点温度计算过程如图 5-7。

4. 稳定性

时间差分格式	计算方法	稳定性
向前 (显式) $\frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau}$	由前一时刻温度层计算后一时刻温度层	有条件 (应使节点方程中同点温度前系数 ≥ 0) (对于一维) $Fo \leq 1/2$ & $Fo \leq 1 / (2(1 + Bi))$
向后 (隐式) $\frac{t_n^{(i)} - t_n^{(i-1)}}{\Delta \tau}$	解线性方程组	无条件

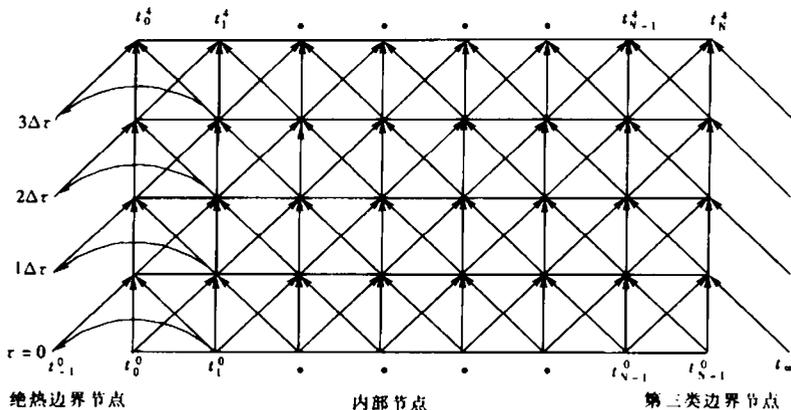


图 5-7 一维非稳态导热温度场计算过程示意图

对于显式方程, Δx 、 $\Delta \tau$ 不能自由选取, 首先根据精度要求和计算所用时间选取 Δx , 再根据稳定性条件选取 $\Delta \tau$ 。

二维、三维非稳态导热问题数值解分析方法与此类似。

二、变物性有内热源的非稳态导热问题数值解 (数值解突出的优点是处理变物性问题)

1. 单元热平衡→热阻热容式 (非稳态导热问题通式)

$$\sum_j \frac{t_j^{(i)} - t_n^{(i)}}{R_{n,j}} + \dot{\Phi}_n V_n = \rho_n c_n V_n \frac{t_n^{(i+1)} - t_n^{(i)}}{\Delta \tau} \quad (\text{显式}) \quad (5-31)$$

导热项 内热源项 内能项

$$t_n^{(i+1)} = \frac{\Delta \tau}{H_n} \left(\sum_j \frac{t_j^{(i)}}{R_{n,j}} + \dot{\Phi}_n V_n \right) + \left(1 - \frac{\Delta \tau}{H_n} \sum_j \frac{1}{R_{n,j}} \right) t_n^{(i)} \quad (5-32)$$

式中 $H_n = \rho_n c_n V_n = f(t_n^{(i)})$ ——单元 n 的总热容, J/K;

V_n ——单元 n 的体积, m^3 ;

ρ_n ——单元 n 的密度, kg/m^3 ;

c_n ——单元 n 的比热容, $\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}$;

$R_{n,j}$ ——单元 n 与相邻单元间的热阻, K/W ;

$t_n^{(i)}$ ——单元 n 在 i 时刻的温度, $^{\circ}\text{C}$;

$t_n^{(i+1)}$ ——单元 n 在 $i+1$ 时刻的温度, $^{\circ}\text{C}$;

$t_j^{(i)}$ ——相邻单元在 i 时刻的温度, $^{\circ}\text{C}$;

$\dot{\Phi}_n$ ——单元 n 的内热源强度, W/m^3 ;

$\Delta \tau$ ——时间间隔, S。

相邻单元数量 j : 一维: 2 个; 二维: 4 个; 三维: 6 个。

2. 边界条件处理

边界热阻 R_w (由边界条件确定)

边界单元热容 H_w (由边界参数 ρ_w 、 c_w 、 V_w 确定)

3. 稳定性条件

$$\Delta\tau \leq \frac{H_n}{\sum_j 1/R_{n,j}} \quad [\text{通式中 } t_n^{(i)} \text{ 前系数必须 } \geq 0] \quad (5-33)$$

5.3 概念汇总

1. 差分形式: 向前 $\frac{t_{i+1} - t_i}{\Delta x}$; 向后 $\frac{t_i - t_{i-1}}{\Delta x}$; 中心 $\frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{2\Delta x}$ 。

2. 二维稳态无内热源导热问题的内部节点方程 ($\Delta X = \Delta Y$):

$$t_{m,n} = \frac{1}{4} (t_{m+1,n} + t_{m-1,n} + t_{m,n+1} + t_{m,n-1})$$

3. 稳态导热数值解法:

接点差分方程 (中心、边界) \Rightarrow 方程组 \Rightarrow 解方程组

4. 一维非稳态导热中心节点差分方程 (显式):

$$t_n^{(i+1)} = Fo [t_{n+1}^{(i)} + t_{n-1}^{(i)}] + (1 - 2Fo) t_n^{(i)}$$

5. 变物性有内热源非稳态导热问题数值解节点方程 (显式):

$$t_n^{(i+1)} = \frac{\Delta\tau}{H_n} \left[\dot{Q}_n V_n + \sum_j \frac{t_j^{(i)}}{R_{n,j}} \right] + \left(1 - \frac{\Delta\tau}{H_n} \sum_j \frac{1}{R_{n,j}} \right) \cdot t_n^{(i)}$$

5.4 思考题分析

5-1 试简要说明对导热问题进行有限差分数值计算的基本思想与步骤。

答: 基本思想: 把在时间、空间上连续的温度场用有限个离散点温度的集合来代替 (有限点代替无限点), 通过求解按一定方法建立起来的关于这些点温度值的代数方程, 获得各离散点上的温度值。

步骤: 划分差分网络, 建立差分代数方程组, 求解。

5-2 试说明用热平衡法对节点建立温度离散方程的基本思想。

答: 用有限小元体代替微分分析中的无限小微元体, 再用傅里叶定律直接写出其能量守恒表达式。

5-3 推导导热微分方程的步骤和过程与用热平衡法建立节点温度离散方程的过程十分相似, 为什么前者得到的是精确描写, 而由后者解出的却是近似解。

答: 差分方程与微分方程的主要区别是前者用有限小量代替了后者的无限小量, 前者用各离散点参数代替了后者的连续参数。实际上物体中的物理参数是时间和空间的连续函数, 所以说微分方程解是精确解, 而差分方程解是近似解。

5-4 第三类边界条件边界节点的离散方程,也可用将第三类边界条件表达式中的一阶导数用差分公式表示来建立。试比较这样建立起来的离散方程与用热平衡法建立起来的离散方程的异同与优劣。

答:差分分析与热平衡分析所得代数方程的形式是一样的,只是热平衡方法的概念清晰,推导过程简单。

5-5 对绝热边界条件的数值处理本章采用了哪些方法?试分析比较之。

答:在稳态导热分析中,用 $q_w=0$ 代入方程式,在非稳态导热分析中,对无限大平板导热 $t_n^{(i)} = t_{n+1}^{(i)}$,前者是基于热量平衡原理,而后者是基于温度分布的对称性原理。

5-6 什么是显式格式?什么是显式格式计算中的稳定性问题?

答:在非稳态导热的差分分析中,取温度对时间的向前差分,使后一时刻的温度分布完全取决于前一时刻的温度分布,而不必联立方程求解,这样的差分格式称为显式。在显式计算中,时间步长和空间步长的选择会影响求解过程的稳定性,选择不适当会使温度产生震荡,而不收敛于某一数值,这是不符现实的。

5-7 用高斯-赛德尔迭代法求解代数方程时是否一定可以得到收敛的解?不能得出收敛的解时是否因为初场的假设不合适而造成?

答:高斯-赛德尔迭代法求解代数方程时不一定得到收敛的解,其原因不是因为初场的假设不合适而造成,而是由于迭代方式不合适造成。

5-8 有人对一阶导数 $\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{n,j}$ 提出了以下表示式:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{n,j} \approx \frac{-3t_n^{(i)} + 5t_{n+1}^{(i)} - t_{n+2}^{(i)}}{2\Delta x^2}$$

您能否判断这一表达式是否正确,为什么?

答:这一表达式不正确。其实质是求解函数一阶导数的三点公式。由泰勒级数可求得一阶导数的近似公式

$$t'(x) \approx \frac{t_{n+1} - t_n}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \cdot t''(x)$$

而

$$t''(x) = \frac{\frac{t_{n+2} - t_{n+1}}{\Delta x} - \frac{t_{n+1} - t_n}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n}{(\Delta x)^2}$$

代入上式得

$$t'(x) \approx \frac{-3t_n + 4t_{n+1} - t_{n+2}}{2\Delta x}$$

正确的表达式应是

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{n,j} \approx \frac{-3t_n^{(i)} + 4t_{n+1}^{(i)} - t_{n+2}^{(i)}}{2\Delta x}$$

5.5 典型习题分析

5-1 试将直角坐标中的常物性、无内热源的二维非稳态导热微分方程化为显式差分格

式, 并指出当 $\Delta x \neq \Delta y$ 时的稳定性条件。

解: 微分方程
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

差分网格: $t_{m,n}^{(i)}$

差分方程 (显式)

$$\frac{t_{m,n}^{(i+1)} - t_{m,n}^{(i)}}{\Delta \tau} = a \left[\frac{t_{m-1,n}^{(i)} + t_{m+1,n}^{(i)} - 2t_{m,n}^{(i)}}{(\Delta x)^2} + \frac{t_{m,n-1}^{(i)} + t_{m,n+1}^{(i)} - 2t_{m,n}^{(i)}}{(\Delta y)^2} \right]$$

$$t_{m,n}^{(i+1)} = Fo_x (t_{m-1,n}^{(i)} + t_{m+1,n}^{(i)}) + Fo_y (t_{m,n-1}^{(i)} + t_{m,n+1}^{(i)}) + [1 - 2(Fo_x + Fo_y)] t_{m,n}^{(i)}$$

式中

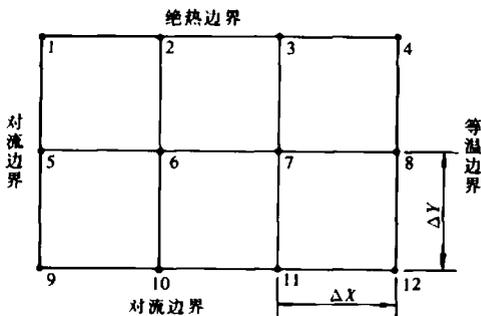
$$Fo_x = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta x)^2} \quad Fo_y = \frac{a \Delta \tau}{(\Delta y)^2}$$

稳定性:

$$Fo_x + Fo_y \leq \frac{1}{2}$$

分析与思考: 显式差分格式导出的节点方程中, 节点某一时刻的温度是前一时间本身温度和相邻温度的函数, 稳定性判据就是使本身温度的系数大于或等于零。

5-2 在有内热源的两维导热区域中 (如习题 5-2 图), 一个界面绝热, 一个界面等温 (包括节点 4), 其余两个界面与温度为 t_f 的流体发生对流换热, h 均匀, 内热源强度为 $\dot{\Phi}_0$ 。试列出节点 1、2、5、6、9、10 的离散方程式。



习题 5-2 图

解: 分别对节点 1、2、5、6、9、10 列

出热平衡方程式:

节点 1:

$$\lambda \frac{t_5 - t_1}{\Delta Y} \left(\frac{\Delta X}{2} \right) + \lambda \frac{t_2 - t_1}{\Delta X} \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) + \frac{1}{4} \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \dot{\Phi}_0 - \frac{1}{2} \Delta Y \cdot h (t_1 - t_f) = 0$$

节点 2:

$$\lambda \frac{t_6 - t_2}{\Delta Y} \Delta X + \lambda \frac{t_1 - t_2}{\Delta X} \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) + \lambda \frac{t_3 - t_2}{\Delta X} \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) + \frac{1}{2} \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \dot{\Phi}_0 = 0$$

节点 5:

$$\lambda \frac{t_1 - t_5}{\Delta Y} \left(\frac{\Delta X}{2} \right) + \lambda \frac{t_9 - t_5}{\Delta Y} \left(\frac{\Delta X}{2} \right) + \lambda \frac{t_6 - t_5}{\Delta X} \Delta Y + \frac{1}{2} \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \dot{\Phi}_0 - \Delta Y \cdot h (t_5 - t_f) = 0$$

节点 6:

$$\lambda \frac{t_2 - t_6}{\Delta Y} \Delta X + \lambda \frac{t_{10} - t_6}{\Delta Y} \Delta X + \lambda \frac{t_7 - t_6}{\Delta X} \Delta Y + \lambda \frac{t_5 - t_6}{\Delta X} \Delta Y + \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \dot{\Phi}_0 = 0$$

节点 9:

$$\lambda \frac{t_5 - t_9}{\Delta Y} \left(\frac{\Delta X}{2} \right) + \lambda \frac{t_{10} - t_9}{\Delta X} \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) + \frac{1}{4} \Delta X \cdot \Delta Y \cdot \dot{\Phi}_0 - h \left(\frac{\Delta X}{2} + \frac{\Delta Y}{2} \right) (t_9 - t_f) = 0$$

节点 10:

$$\lambda \frac{t_6 - t_{10}}{\Delta Y} \Delta X + \lambda \frac{t_9 - t_{10}}{\Delta X} \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) + \lambda \frac{t_{11} - t_{10}}{\Delta X} \left(\frac{\Delta Y}{2} \right) + \frac{1}{2} \Delta X \Delta Y \dot{\Phi}_0 - h \Delta X (t_{10} - t_f) = 0$$

当 $\Delta x = \Delta y$ 时, 以上各式简化成下列离散方程式:

$$\text{节点 1:} \quad t_1 = \frac{t_5 + t_2 + Bi_{\Delta} t_f + \frac{1}{2} \Delta Y^2 \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\lambda} \right)}{2 + Bi_{\Delta}}$$

$$\text{节点 2:} \quad t_2 = \frac{1}{4} \left[2t_6 + t_f + t_3 + \Delta Y^2 \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\lambda} \right) \right]$$

$$\text{节点 5:} \quad t_5 = \frac{2t_6 + t_1 + t_9 + 2Bi_{\Delta} t_f + \Delta Y^2 \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\lambda} \right)}{2(2 + Bi_{\Delta})}$$

$$\text{节点 6:} \quad t_6 = \frac{1}{4} \left[t_7 + t_{10} + t_5 + t_2 + \Delta Y^2 \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\lambda} \right) \right]$$

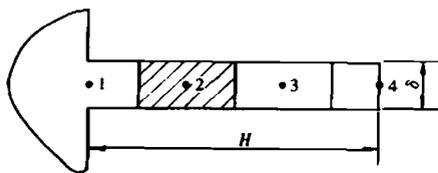
$$\text{节点 9:} \quad t_9 = \frac{t_5 + t_{10} + 2Bi_{\Delta} t_f + \frac{1}{2} \Delta Y^2 \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\lambda} \right)}{2(1 + Bi_{\Delta})}$$

$$\text{节点 10:} \quad t_{10} = \frac{2t_6 + t_{11} + t_9 + 2Bi_{\Delta} t_f + \Delta Y^2 \left(\frac{\dot{\Phi}_0}{\lambda} \right)}{2(2 + Bi_{\Delta})}$$

式中

$$Bi_{\Delta} = \frac{h \Delta Y}{\lambda}$$

分析与思考: 求取节点方程的基本方法就是节点单元热平衡, 对于方程中可整理为无量纲参数的量应作缩写, 以便阅读和编程。



习题 5-3 图

5-3 一等截面直肋 (如习题 5-3 图), 高 H , 厚 δ , 肋根温度为 t_0 , 流体温度为 t_{∞} , 换热系数为 h , 肋片导热系数为 λ 。试将它均分为四个节点, 并对肋端为绝热及为对流边界条件 (h 同侧面) 的两种情况列出节点 2、3、4 的离散方程式。设 $H = 45\text{mm}$, $\delta = 10\text{mm}$, $h = 50\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, $\lambda = 50\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, $t_0 = 100^\circ\text{C}$, $t_{\infty} = 20^\circ\text{C}$, 试

计算节点 2、3、4 的温度 (对于肋端的两种边界条件)。

解: 采用热平衡法列出节点 2、3、4 的离散方程。

$$\text{节点 2:} \quad -\frac{\lambda(t_2 - t_1)\delta}{\Delta x} = -\frac{\lambda(t_3 - t_2)\delta}{\Delta x} + 2\Delta x \cdot h(h_2 - t_{\infty})$$

$$\text{整理得} \quad \frac{\lambda\delta}{\Delta x} (t_1 + t_3 - 2t_2) - 2h\Delta x (t_2 - t_{\infty}) = 0$$

$$\text{同理节点 3:} \quad \frac{\lambda\delta}{\Delta x} (t_2 + t_4 - 2t_3) - 2h\Delta x (t_3 - t_{\infty}) = 0$$

节点 4: 肋端绝热,
$$\frac{\lambda \delta}{\Delta x} (t_3 - t_4) - h \Delta x (t_4 - t_\infty) = 0$$

肋端对流,
$$\frac{\lambda \delta}{\Delta x} (t_3 - t_4) - h(\Delta x + \delta)(t_4 - t_\infty) = 0$$

式中
$$\Delta x = H/3$$

将题中已知条件代入可得方程组

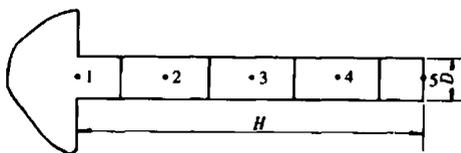
对于肋端绝热:
$$\begin{cases} t_1 - 2.045t_2 + 100.9 = 0 \\ t_2 - 2.045t_3 + t_4 + 0.9 = 0 \\ t_3 - 1.0225t_4 + 0.45 = 0 \end{cases}$$

联立求解得
$$t_2 = 92.2^\circ\text{C} \quad t_3 = 87.7^\circ\text{C} \quad t_4 = 86.2^\circ\text{C}$$

对于肋端对流:
$$\begin{cases} t_1 - 2.045t_2 + 100.9 = 0 \\ t_2 - 2.045t_3 + t_4 + 0.9 = 0 \\ t_3 - 1.0375t_4 + 0.8 = 0 \end{cases}$$

联立求解得
$$t_2 = 91.1^\circ\text{C} \quad t_3 = 85.4^\circ\text{C} \quad t_4 = 82.6^\circ\text{C}$$

5-4 一直径为 1cm、长 4cm 的钢制圆柱形肋片 (如习题 5-4 图), 初始温度为 25°C , 其后肋基温度突然升高到 200°C , 同时温度为 25°C 的气流横向掠过该肋片, 肋端及侧面的表面传热系数均为 $100\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。试将该肋片等分成 4 段, 并用有限差分法显式格式计算从开始加热



习题 5-4 图

时刻起相邻 6 个时刻上的温度分布, 取 $\Delta\tau = 3.5\text{s}$ 。已知 $\lambda = 43\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $a = 1.333 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ 。

解: $D = 0.01\text{m}$ $H = 0.04$, $t_0 = 25^\circ\text{C}$ $t_1 = 200^\circ\text{C}$

$t_f = 25^\circ\text{C}$ $h = 100\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ $\lambda = 43\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ $a = 1.333 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$

$\Delta x = 0.01\text{m}$ $\Delta\tau = 3.5\text{s}$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{\lambda} = \frac{100 \times 0.01}{43} = \frac{1}{43}$$

$$Fo = \frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2} = \frac{1.333 \times 10^{-5} \times 3.5}{0.01^2} = 0.46655$$

$$\frac{\Delta x}{D} = \frac{0.01}{0.01} = 1$$

令

$$\theta = t - t_f$$

采用热平衡法列出各节点离散方程 (自根部至端部顺序 1—5):

节点 2:

$$\lambda A \frac{\theta_1^{(i)} - \theta_2^{(i)}}{\Delta x} + \lambda A \frac{\theta_3^{(i)} - \theta_2^{(i)}}{\Delta x} - hP\Delta x\theta_2^{(i)} = \rho c A \Delta x \frac{\theta_2^{(i+1)} - \theta_2^{(i)}}{\Delta \tau}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{4}{D} \Rightarrow Fo[\theta_1^{(i)} + \theta_3^{(i)} - 2\theta_2^{(i)}] - 4FoBi \frac{\Delta x}{D}\theta_2^{(i)} = \theta_2^{(i+1)} - \theta_2^{(i)}$$

$$\theta_2^{(i+1)} = Fo[\theta_1^{(i)} + \theta_3^{(i)}] + \left[1 - 2Fo\left(1 + 2Bi \frac{\Delta x}{D}\right)\right]\theta_2^{(i)}$$

$$= 0.46655[\theta_1^{(i)} + \theta_3^{(i)}] + 0.0235\theta_2^{(i)}$$

同理:

$$\theta_3^{(i+1)} = 0.46655[\theta_2^{(i)} + \theta_4^{(i)}] + 0.0235\theta_3^{(i)}$$

$$\theta_4^{(i+1)} = 0.46655[\theta_3^{(i)} + \theta_5^{(i)}] + 0.0235\theta_4^{(i)}$$

节点 5:

$$\lambda A \frac{\theta_4^{(i)} - \theta_5^{(i)}}{\Delta x} - h\left(P \cdot \frac{\Delta x}{2} + A\right)\theta_5^{(i)} = \rho c A \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{\theta_5^{(i+1)} - \theta_5^{(i)}}{\Delta \tau}$$

整理得

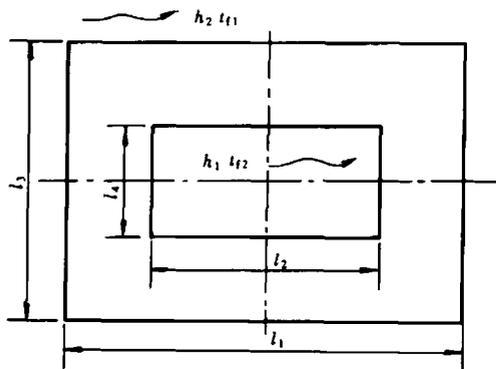
$$\theta_5^{(i+1)} = 2Fo\theta_4^{(i)} + \left[1 - 2Fo\left(1 + 2Bi \frac{\Delta x}{2} + Bi\right)\right]\theta_5^{(i)}$$

$$= 0.9331\theta_4^{(i)} + 0.0018\theta_5^{(i)}$$

将初始条件代入计算:

节点	$\tau = 0$	$\tau = 3.5$	$\tau = 7$	$\tau = 10.5$	$\tau = 14$	$\tau = 17.5$	$\tau = 21$
1	175	175	175	175	175	175	175
2	0	81.65	83.57	101.38	103.29	110.46	111.63
3	0	0	38.09	41.28	56.56	58.70	69.05
4	0	0	0	17.77	19.68	34.59	36.78
5	0	0	0	0	16.58	18.39	32.31

5-5 一矩形截面的空心电流母线的内、外表面分别与温度为 t_n 、 t_e 的流体发生对流换热, 表面传热系数分别为 h_1 、 h_2 , 且各自沿周界是均匀的。电流通过壁内产生均匀热源 $\dot{\Phi}$, 如习题 5-5 图。今欲对母线中的温度分布进行数值计算, 试:



习题 5-5 图

(1) 划出计算区域;

(2) 对该区域内的温度分布列出微分方程式及边界条件;

(3) 对于图中内角顶、外角顶及任一内部节点列出离散方程式 ($\Delta x \neq \Delta y$), 设母线的导热系数 λ 为常数。

解: (1) 计算区域 (由于对称性, 取 1/4 母线截面)

(2) 微分方程

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) + \dot{\Phi} = 0$$

边界条件 (坐标原点在母线中心, l_1 为外

宽, l_2 为内宽, l_3 为外高, l_4 为内高,)

$$x = \frac{l_2}{2}, y \leq \frac{l_4}{2}, \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{h_1}{\lambda}(t - t_{\Pi})$$

$$x = \frac{l_1}{2}, y \leq \frac{l_3}{2}, \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{h_2}{\lambda}(t - t_{\Omega})$$

$$y = \frac{l_4}{2}, x \leq \frac{l_2}{2}, \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{h_1}{\lambda}(t - t_{\Pi})$$

$$y = \frac{l_3}{2}, x \leq \frac{l_1}{2}, \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{h_2}{\lambda}(t - t_{\Omega})$$

$$\frac{l_2}{2} < x < \frac{l_1}{2}, y = 0, \frac{\partial t}{\partial y} = 0$$

$$\frac{l_4}{2} < y < \frac{l_3}{2}, x = 0, \frac{\partial t}{\partial x} = 0$$

(3) 节点方程式

内角顶:

$$\lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \Delta y \frac{t_{m+1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \Delta x \frac{t_{m,n+1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \frac{3}{4} \Delta x \Delta y \dot{\Phi} + h_1 \frac{(\Delta x + \Delta y)}{2} (t_{\Pi} - t_{m,n}) = 0$$

$$t_{m,n} = \frac{\frac{\Delta y}{2} (t_{m-1,n} + t_{m+1,n}) + \frac{\Delta x}{2} (t_{m,n-1} + t_{m,n+1}) + \frac{3\Delta x \Delta y \dot{\Phi}}{4\lambda} + \frac{h_1(\Delta x + \Delta y)t_{\Pi}}{2\lambda}}{2 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) + \frac{h_1(\Delta x + \Delta y)}{2\lambda}}$$

外顶角:

$$\lambda \frac{\Delta x}{2} \frac{t_{m,n-1} - t_{m,n}}{\Delta y} + \lambda \frac{\Delta y}{2} \frac{t_{m-1,n} - t_{m,n}}{\Delta x} + \frac{1}{4} \Delta x \Delta y \dot{\Phi} + h_2 \frac{\Delta x + \Delta y}{2} (t_{\Omega} - t_{m,n}) = 0$$

$$t_{m,n} = \frac{\frac{\Delta x}{2} t_{m,n-1} + \frac{\Delta y}{2} t_{m-1,n} + \frac{\Delta x \Delta y \dot{\Phi}}{4\lambda} + \frac{h_2(\Delta x + \Delta y)t_{\Omega}}{\lambda}}{\frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{h_2(\Delta x + \Delta y)}{\lambda}}$$

内部节点:

$$\frac{t_{m-1,n} + t_{m+1,n} - 2t_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{t_{m,n-1} + t_{m,n+1} - 2t_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} = 0$$

$$t_{m,n} = \frac{(\Delta y)^2 (t_{m-1,n} + t_{m+1,n}) + (\Delta x)^2 (t_{m,n-1} + t_{m,n+1}) + \frac{\dot{\Phi}}{\lambda} (\Delta x)^2 (\Delta y)^2}{2 [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]}$$

6. 对流换热基础理论

6.1 知识结构

1. 对流换热的特点;
2. 换热系数 h 及其影响因素;
3. 对流换热问题的数学描述:
 - (1) 假设: 不可压缩牛顿型流体, 常物性, 无内热源, 忽略粘性耗散;
 - (2) 方程组 (换热、能量、动量、质量) 各项物理涵义;
 - (3) 平板层流强制对流的精确解 (边界层理论, 数量级分析简化);
 - (4) 平板层流强制对流的近似解 (边界层理论, 边界层积分)。
4. 实验求解方法:
 - (1) 相似原理
相似性质: 彼此相似的现象, 其同名准则必定相等。
相似判据: 同类现象, 单值性条件相似, 同名已定准则相等, 则现象相似。
相似解: 实验关联式 (准则方程式)。
 - (2) 准则确定方法: 方程分析法、量纲分析法。
 - (3) 实验数据处理: 误差分析, 作图法求系数, 数据回归。
 - (4) 实验关联式应用条件: 适用范围, 定性温度, 特征尺度, 特征流速, 修正系数 (入口、弯道、特性)。
5. 对流换热中常用准则 (Nu 、 Re 、 Gr 、 Pr) 的定义式及其物理涵义。

6.2 重点内容剖析

6.2.1 概述

对流换热——流体与固体壁面之间的热交换。

$$\Phi = hA\Delta t \Rightarrow q = h\Delta t \quad (h \text{ 的定义式}) \quad (6-1)$$

一、任务

求取 $h = f$ (流体、物性、流态、换热面形状等) 的具体表达式

二、思路 (对流换热热量 = 附壁薄层导热热量)

$$\Phi = -\lambda A \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} = h_x A (t_w - t_\infty) = h_x A \Delta t \quad (6-2)$$

$$\Rightarrow h_x = -\frac{\lambda}{\Delta t} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6-3)$$

式中 h_x ——局部表面传热系数;

λ ——流体导热系数；

Δt ——流体与壁面传热温差。

求取表面传热系数的问题 ← 求取附面层温度变化率 ← 求取流体温度场

三、研究方法

1. 理论解——建立微分方程组 → 求解

2. 实验解——相似原理，量纲分析 → 实验准则 → 实验关联式

四、影响对流换热的因素

1. 流动的动力

(1) 自然对流——由于流体各部分密度不同而引起的流动，其流动强度与受热不均匀程度、流体性质和空间大小及位置有关。

(2) 强制对流——由于外力作用而引起的流动（如风机、水泵），其流动强度与压差、流道形状，流体性质有关。

2. 流动状态

(1) 层流——流体各层之间互不混合，层间热量传递方式主要依靠分子扩散和导热作用。

(2) 湍流（紊流）——流体质点不规则运动，湍流区域的热量传递主要依靠流体微团的热对流作用，但在紧靠壁面的层流底层仍然依靠导热作用。

3. 流体性质

$\eta, \rho, c_p, \lambda, \beta$ ——间接作用于对流与导热过程

其中： η 为动力粘度， β 为容积膨胀系数。

4. 换热面的形状及其在流体中的位置

形状：管、板、槽等。

位置：横放、竖放、斜放、热面向上、热面向下、内部流、外部流。

5. 有无相变

物体聚集状态的变化（相变）伴随着潜热的释放或吸收，在相界面上具有强力的质量传递，所以相变换热一般比单相流体对流换热要强力得多。

6.2.2 对流换热的数学描述

假设：流体为不可压缩的牛顿型流体，常物性，无内热源，由粘性产生的耗散热可忽略不计。（以二维问题为例）

一、换热微分方程式

$$h = - \frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-4)$$

式中 λ ——流体导热系数，W/(m·K)；

Δt —— $(t_w - t_f)$ ；

t_w ——壁面温度；

t_f ——流体定性温度（无界对流，取来流温度；有界对流，取平均值）；

$t(x, y, \tau)$ ——流体温度场；

y ——从壁面起算, 朝着流体一侧的法向距离。

二、能量微分方程(导热+对流)

换热微分方程将求取表面传热系数的问题转移为求取流体温度场。流体中的热量迁移伴随着质量的迁移, 所以选取控制容积进行分析。

内能增量 = 净导入热量

└──→ 考虑质量进出后的总效果(全微分)

$$\rho c \frac{dt}{d\tau} = \lambda \nabla^2 t \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = a \nabla^2 t \quad (\text{单位体积能量}) \quad (6-5)$$

$$\text{式中} \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} \quad (6-6)$$

(导热微分方程是能量微分方程的特例, $u = v = 0$)

三、连续性方程(质量守恒)

上式表明: 流体温度场描述 ← 速度场描述 ← 连续性方程和动量方程

$$\begin{aligned} & \rho dyu - \rho dy \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) + \rho dxv - \rho dx \left(v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ & = -\rho dx dy \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (6-7)$$

定常、不可压缩控制容积是与力无关的运动学关系式, 既适用于理想流体, 也适用于实际流体。

四、层流动量微分方程式(Navier-Stokes)

动量定理: 作用于微元体表面和内部的所有外力的总和等于微元体中流体动量的变化率——惯性力。

x 方向:

$$\rho \frac{du}{d\tau} = \rho \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6-8)$$

y 方向:

$$\rho \frac{dv}{d\tau} = \rho \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6-9)$$

惯性力(质量 × 加速度) 体积力
↓ 压力 粘滞力
对流体的作用总朝着压力降低方向

* 至此, 建立了五个微分方程(换热1、能量1、连续性1、动量2), 当已知体积力 F_x 、 F_y 的条件下, 方程组中共有5个(h 、 t 、 u 、 v 、 p)未知量, 构成“封闭”方程组, 理论上在定解条件下可得到唯一解。

6.2.3 边界层分析及边界层微分方程组

微分方程组——数学求解困难, 边界层分析 → 简化

一、边界层

1. 流动边界层

流动边界层理论要点:

(1) 流场分为主流区和边界层区。

$$y > \delta \quad y < \delta$$

$$\begin{cases} y = 0, u = 0 \\ y = \delta, u = 0.99u_{\infty} \end{cases} \quad (6-10)$$

(2) 边界层厚度远小于壁面尺寸。

边界层内:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \uparrow \Rightarrow \text{粘性力与惯性力相当} \rightarrow \text{用 N-S 方程描述(粘性流体)}$$

边界层外:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \downarrow \Rightarrow \text{粘性力远小于惯性力} \rightarrow \text{Bernowlli 方程描述(理想流体)}$$

(3) $x \uparrow \rightarrow \delta \uparrow \Rightarrow (\text{惯性力/粘性力}) \uparrow \Rightarrow \text{湍流边界层(贴壁处存在层流底层)}$

2. 温度边界层

$$y = 0, t = t_w, \theta = t - t_w = 0$$

$$y = \delta_t, t \approx t_{\infty}, \theta = 0.99\theta_{\infty}$$

(6-11)

温度边界层理论要点:

(1) 温度场分为主流区和温度边界层区(基准温度: t_w)。

(2) 温度边界层厚度远小于壁面尺寸。

$$\text{温度边界层内: } \frac{\partial t}{\partial y} \uparrow \Rightarrow \text{能量微分方程描述}$$

温度边界层外: $\frac{\partial t}{\partial y} \downarrow \approx 0 \Rightarrow \text{传热忽略不计} \Rightarrow \text{对流换热问题——热边界层内的微分方程组求解。}$

理论求解途径:

精确解: 对流换热微分方程组简化 \rightarrow 边界层换热微分方程组 \rightarrow 分析解或数值解 $\rightarrow h$ (直接数值求解对流换热微分方程组较困难)

近似解: 边界层理论 \rightarrow 边界层换热积分方程组(假设速度、温度分布) $\rightarrow h$ (较容易)

3. 流动边界层与热边界层的关系

(1) 速度场与温度场相互作用的结果。

(2) 当体积力和压力梯度为零时, 动量微分方程与能量微分方程有完全类似的形式。

$$\frac{du}{d\tau} = \nu \nabla^2 u (\text{动量方程}) \quad (6-12)$$

其中：运动粘度（动量扩散率） $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

$$\frac{dt}{d\tau} = a \nabla^2 t \quad (\text{能量方程}) \quad (6-13)$$

其中：导热系数（热量扩散率） $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$

当 $\nu = a$ 时，速度场与温度场具有相同的形式，这意味着动量传递与热量传递有着类似特性，运动粘度 ν 表示动量扩散能力的大小，导热系数 a 表示热量扩散能力的大小。

令：两者之比值 $\frac{\nu}{a} = Pr$ (普朗特数) (6-14)

$$\left(\text{物性参数 } Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} \right)$$

若流动边界层与温度边界层为同一起点， $Pr > 1, \delta > \delta_t$; $Pr < 1, \delta < \delta_t$ 。

Pr 大致范围：

液态金属： $5 \times 10^{-3} \sim 10^{-2}$ ；气体： $0.67 \sim 1$ ；水： $1 \sim 20$ ；油类： $\sim 10^4$

二、边界层微分方程组

对象：二维、常物性、不可压缩流体

稳态：
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \quad (6-15)$$

忽略体积力：
$$F_x = F_y = 0 \quad (6-16)$$

量级分析（方程两边量纲相同，量级相等，和项中小量级可忽略）：

$$x \sim l \sim 1, u \sim 1, t \sim 1, \rho \sim 1 \Rightarrow y \sim \delta \sim \delta_t \sim 0.01$$

由
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{1} \quad (?) \quad \frac{1}{\delta} \Rightarrow v \sim \delta \end{cases} \quad (6-17)$$

能量方程：（由方程左右量级对比 $\Rightarrow a \sim \delta^2$ ）

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} &= a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \\ 1 \cdot \frac{1}{1} \quad \delta \cdot \frac{1}{\delta} \quad \delta^2 \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\delta^2} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (6-18)$$

动量方程：

由流动边界层性质，边界层外：

$\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow$ 粘性力 $\downarrow \ll$ 惯性力 \Rightarrow Bernoulli 方程描述

$$P + \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho u_{\infty} \frac{du_{\infty}}{dx} \quad (6-19)$$

P 为已知量，可略去一个方程，由量级分析， y 方向惯性力远小于 x 方向惯性力，所以将 y 方向动量方程略去。

x 方向动量方程为

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ 1 \cdot \left(1 \cdot \frac{1}{1} \quad \delta \cdot \frac{1}{\delta} \right) & (0 \sim 1) \quad \delta^2 \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\delta^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

$$\Rightarrow \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6-21)$$

简化后的边界层换热微分方程组：未知量 $(h, u, v, t) =$ 方程数

换热：
$$h = - \frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-22)$$

能量：
$$u \frac{\partial t}{\partial x} + v \frac{\partial t}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \quad (6-23)$$

动量：
$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (6-24)$$

质量：
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6-25)$$

对于主流场均速均温的流体与恒壁温平板的对流换热，有定解（边界）条件

$$y = 0, u = 0, v = 0, t = t_w \quad (6-26)$$

$$y = \infty, u = u_\infty, t = t_\infty \quad (6-27)$$

解得层流范围的局部换热系数（求解方法见参考文献 [6] P111—P113）

$$h_x = 0.332 \frac{\lambda}{x} \cdot \left(\frac{u_\infty x}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{a} \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (6-28)$$

式中： x 为特征长度； $(t_w + t_\infty)/2$ 为定性温度。

$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$ 局部雷诺数，是流体惯性力与粘性力的对比参数。

$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda}$ 局部努塞尔特数，是流体对流换热能力与自身导热能力的对比参数。

又
$$Nu_x = \frac{h_x x}{\lambda} = \frac{x}{\lambda} \cdot \left. \frac{-\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{x}{\Delta t} \quad (6-29)$$

努塞尔特数又可理解为壁面处的无量纲温度梯度。

6.2.4 边界层积分方程组及求解示例

虽然边界层微分方程组是对流换热微分方程组的简化结果，但数学求解仍然比较复杂，人们便想出了预先假设边界层内速度分布与温度分布函数并进行动量与能量积分的求解方法。

一、基本思路

1. 以包含边界层在内的一微元段为对象，对其各个面的质量流量、动量流量和能量流量进行积分，按照各自平衡原理导出边界层积分方程组。积分限：动量 $0 \sim \delta$ ，能量 $0 \sim \delta_1$ ，积分函数： $u(y), t(y)$ 。

2. 假设速度、温度分布。

3. 利用边界条件解出 δ 、 δ_t 。

4. 求： $\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \Rightarrow$ 阻力系数； $\frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \Rightarrow$ 表面传热系数。

二、边界层动量积分方程 [推导过程参见杨世铭编第二版《传热学》(P165 ~ P169)]

对象：二维，稳态常物性、不可压缩流体， z (垂直与纸面) 方向为单位长度，强制对流——忽略体积力，不引入 y 方向流速 v 。(如图 6-1)

$$\text{主流区 } u_\infty \text{ 恒定} \Rightarrow \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (6-30)$$

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta u(u_\infty - u) dy = \eta \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-31)$$

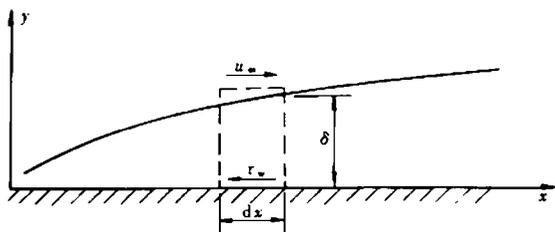


图 6-1 边界层微元段受力模型

物理含义：微元段动量减量 = 壁面摩擦力 (与速度方向相反)

$$d \int_0^\delta \underbrace{(u - u_\infty)}_{\text{速度减量}} \underbrace{\rho u dy}_{\text{质量流量}} = \underbrace{\eta dx}_{\text{壁面摩擦力}} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-32)$$

三、边界层能量积分方程 [推导过程参见参考文献 [1] (P144 ~ P145)] (如图 6-2)

1. 假设

(1) 常物性 (不随温度而变)；

(2) 流速不高，不计粘性耗散热；

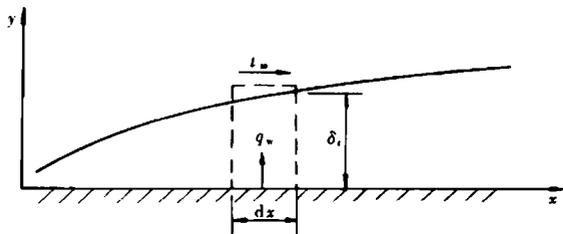


图 6-2 边界层微元段传热模型

(3) 忽略 x 方向导热，热边界层外，忽略导热。

2. 能量积分方程

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u(t_\infty - t) dy = a \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-33)$$

物理含义：微元段内能变化量 = 壁面导热热量

$$d \int_0^{\delta} \underbrace{\rho c(t-t_{\infty})}_{\text{热容}} \underbrace{u dy}_{\text{体积流量}} = - \lambda dx \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6-34)$$

四、求解示例

对象：稳态、常物性；掠过平板强制对流（层流）；边界条件：恒壁温。

1. 动量积分方程求解

假设
$$u(x, y) = a + by + cy^2 + dy^3 \quad (6-35)$$

 [待定系数 $a, b, c, d = f(x)$]

进一步假设壁面处为函数拐点，边界层边缘为函数极值点，由此得边界条件

$$y = 0, u = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; y = \delta, u = u_{\infty}, \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6-36)$$

$$\Rightarrow a = 0, b = \frac{3}{2} \frac{u_{\infty}}{\delta}, c = 0, d = -\frac{u_{\infty}}{2\delta^3} \Rightarrow \frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (6-37)$$

速度表达式 $u(x, y)$ ，其中 δ 为 x 的函数，记为 $\delta(x)$ 。

代入动量积分方程（注意到 $x=0$ 时， $\delta=0$ ）：

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} \quad (6-38)$$

式中： $Re_x = \frac{u_{\infty} x}{\nu}$ ； x 为特征长度（离平板前缘的距离）。

壁面局部切应力

$$\tau_w(x) = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{0.323 \rho u_{\infty}^2}{\sqrt{Re_x}} \quad (6-39)$$

Fanning 摩擦系数

$$c_f(x) = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2} = 0.646 Re_x^{-1/2} (\text{局部}) \quad (6-40)$$

$$c_{f,m} = \frac{1}{l} \int_0^l c_f dx = 2c_f(l) = 1.292 Re_l^{-1/2} (\text{板长平均}) \quad (6-41)$$

2. 能量积分方程求解

引入过余温度 $\theta = t - t_w$

$$\Rightarrow \text{能量积分方程} \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(\theta_{\infty} - \theta) dy = a \left. \frac{\partial \theta}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (6-42)$$

式中 u 已由动量方程解得。

假设：
$$\theta(x, y) = e + fy + gy^2 + hy^3 \quad (6-43)$$

[待定系数 $e, f, g, h = f(x)$]

进一步假设壁面处为函数拐点，边界层边缘为函数极值点，由此得边界条件

$$y = 0, \theta = 0, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0; y = \delta, \theta = \theta_{\infty}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (6-44)$$

引入无量纲量 (假定: 不同 y 层的 q/τ 为常量)

$$X = x/l, Y = y/l, U = u/u_\infty, V = v/u_\infty, \Theta = \frac{t - t_w}{t_\infty - t_w} \quad (6-55)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{1}{u_\infty l} (\nu + \epsilon_m) \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \\ U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{u_\infty l} (a + \epsilon_t) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \end{cases} \quad (6-56, 57)$$

边界条件为

$$Y = 0: U = 0 \quad V = 0 \quad \Theta = 0 \quad (6-58)$$

$$Y = \delta/l: U = 1 \quad V = v_f/u_\infty \quad \Theta = 1 \quad (6-59)$$

二、雷诺比拟

假定: $Pr = 1, Pr_t = 1 \Rightarrow \nu = a, \epsilon_m = \epsilon_t, \delta = \delta_t$ (6-60)

(Pr_t ——紊流普朗特数, 推导过程参见参考文献 [1] P149)

两方程及定解条件完全等价 $\Rightarrow U, \Theta$ 有完全相同解

而
$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{Y=0} = c_f \frac{Re}{2} \\ \left. \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} = Nu \end{cases} \Rightarrow Nu_x = c_{f,x} \frac{Re_x}{2} \quad (6-61)$$

实验测得湍流边界层阻力系数 ($Pr = 1$)

$$c_{f,x} = 0.0592 Re_x^{-1/5} \quad (Re_x \leq 10^7) \quad (6-62)$$

$$\Rightarrow Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} \quad (6-63)$$

三、修正雷诺比拟

$$j = \frac{c_f}{2} St Pr^{2/3} \quad (0.6 < Pr < 60) \quad (6-64)$$

式中: Stanton 数定义为 $St = \frac{Nu}{Re Pr}$

$$\Rightarrow Nu_x = 0.0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad (6-65)$$

四、板长方向具有层流和湍流边界层的平均 Nu (取 $Re_c = 5 \times 10^5$)

$$Nu_m = (0.037 Re_1^{4/5} - 871) Pr^{1/3} \quad (6-66)$$

6.2.6 相似原理

一、工程研究方法及其特点

1. 数学分析法

微分方程 (组) + 定解条件 \Rightarrow 求解

优点: ①理论完善;

②物理概念清晰;

- ③能揭示过程的物理本质;
- ④指出影响因素的主次关系。

缺点: ①对复杂工程问题难以描述;
②求解难度大。

2. 实验法

(1) 直接实验法: 在实物上研究各物理量之间的关系 (只适用于简单变量关系)

优点: 直接可靠

缺点: ①工作量大。对于一个四维函数, 每个变量取 10 点数值, 就须进行 10^4 次实验, 不现实;

- ②无普遍意义, 只能用于与实验条件完全相同的现象中;
- ③某些情况难以进行, 如高温、高压、大型设备。

(2) 以相似理论为基础的模型试验法 (常规试验程序: 小 \rightarrow 中 \rightarrow 生产规模)

优点: ①易于控制、调节, 节省投资;

②试验参数少, 工作量小;

③实验充实数学分析, 同时用数学分析来指导实验。

二、相似理论基本概念

物理现象 $\begin{matrix} \text{实物} \\ \text{模型} \end{matrix}$ 同类 $\begin{cases} \text{相同内容 (物理本质相同)} (\text{电} \neq \text{热}) \\ \text{相同形式 (微分方程相同)} (\text{自然对流} \neq \text{强迫对流}) \\ \text{相同——同一现象 (模型 = 实物)} \\ \text{相似——相似现象} \end{cases}$

定解 (单值性) 条件 $\begin{cases} \text{相同——同一现象 (模型 = 实物)} \\ \text{相似——相似现象} \end{cases}$

\rightarrow 几何: 对应边成比例

\rightarrow 物理: 物理量场相似——对应点物理量成比例

$\quad \quad \quad \rightarrow$ 温度、速度、密度、粘度、导热系数……

\rightarrow 边界: 对应边界点 } 物理量场相似

\rightarrow 时间: 对应时间 }

三、物理现象相似的性质

1. 相似分析 (方程分析法)

模型与实物相似 (几何相似为前提): 与现象有关的各物理量场相似 (对应成比例)

例: 壁面换热
$$h = - \frac{\lambda}{\Delta t} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (6-67)$$

模型
$$h' = - \frac{\lambda'}{\Delta t'} \frac{\partial t'}{\partial y'} \Big|_{y'=0} \quad (6-68)$$

实物
$$h'' = - \frac{\lambda''}{\Delta t''} \frac{\partial t''}{\partial y''} \Big|_{y''=0} \quad (6-69)$$

各物理量相似倍数:

$$\frac{h'}{h''} = C_h, \quad \frac{\lambda'}{\lambda''} = C_\lambda, \quad \frac{t'}{t''} = C_t, \quad \frac{y'}{y''} = C_l \quad (6-70)$$

