

# 中南大学考试试卷一

2001 —— 2002 学年第二学期 时间 110 分钟

金属塑性加工原理 课程 64 学时 4 学分 考试形式：闭卷

专业年级材料 1999 级 总分 100 分，占总评成绩 70%

## 一、名词解释（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.热效应
- 2.塑脆转变现象
- 3.动态再结晶
- 4.冷变形
- 5.附加应力

## 二.填空题（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.主变形图取决于\_\_\_\_\_，与\_\_\_\_\_无关。
- 2.第二类再结晶图是\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_的关系图。
- 3.第二类硬化曲线是金属变形过程中\_\_\_\_\_与\_\_\_\_\_之间的关系曲线。
- 4.保证液体润滑剂良好润滑性能的条件是\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_。
- 5.出现细晶超塑性的条件是\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_。

## 三、判断题（本题 10 分，每小题 2 分）

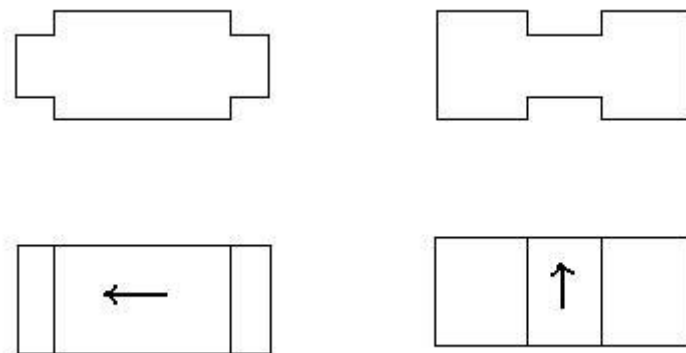
- 1.金属材料冷变形的变形机构有滑移（ ），非晶机构（ ），孪生（ ），晶间滑动（ ）。
- 2.塑性变形时，静水压力愈大，则金属的塑性愈高（ ），变形抗力愈低（ ）。
- 3.金属的塑性是指金属变形的难易程度（ ）。
- 4.为了获得平整的板材，冷轧时用凸辊型，热轧时用凹辊型（ ）。
- 5.从金相照片上观察到的冷变形纤维组织，就是变形织构（ ）。

## 四、问答题（本题 40 分，每小题 10 分）

- 1.分别画出挤压、平辊轧制、模锻这三种加工方法的变形力学图，并说明在生产中对于低塑性材料的开坯采用哪种方法为佳？为什么？

- 2.已知材料的真实应变曲线  $\sigma_1 = A\varepsilon^n$ ，A 为材料常数，n 为硬化指数。试问简单拉伸时材料出现细颈时的应变量为多少？

- 3.试比较金属材料在冷，热变形后所产生的纤维组织异同及消除措施？
- 4.以下两轧件在变形时轧件宽度方向哪一个均匀？随着加工的进行会出现什么现象？为什么？（箭头表示轧制方向）



#### 五、证明题（本题 10 分）

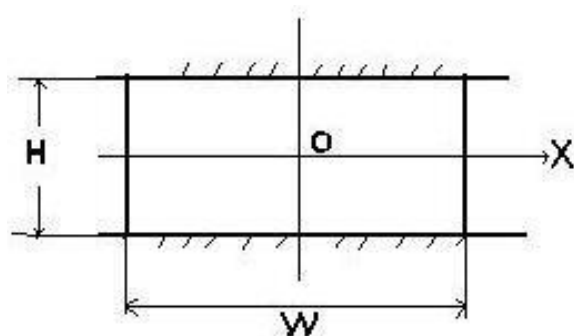
证明 Mises 塑性条件可表达成：

$$\sigma'_{ij} * \sigma'_{ij} = K^2 (i, j = x, y, z)$$

#### 六、综合推导题（本题 20 分）

试用工程法推导粗糙砧面压缩矩形块（Z 向不变形）的变形力 P 表达式，这里接触摩擦

$$\tau_{sx} = \tau_{sy} = k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_1 = \frac{1}{2} K_f$$



## 中南大学考试试卷一答案

### 一、名词解释（本题 10 分，每小题 2 分）

1. 变形过程中的金属发热现象
2. 材料由于温度降低等内在因素和外在条件变化，塑性急剧下降的现象。
3. 在热变形过程中，在应力状态下所发生的再结晶。[金属在热变形过程中发生的再结晶]
4. 回复温度以下发生的变形。在物体中，由于其各部分的不均匀变形受到物体整体性的限制而引起 5. 的相互平衡的应力。

### 二、填空题（本题 10 分，每小题 2 分）

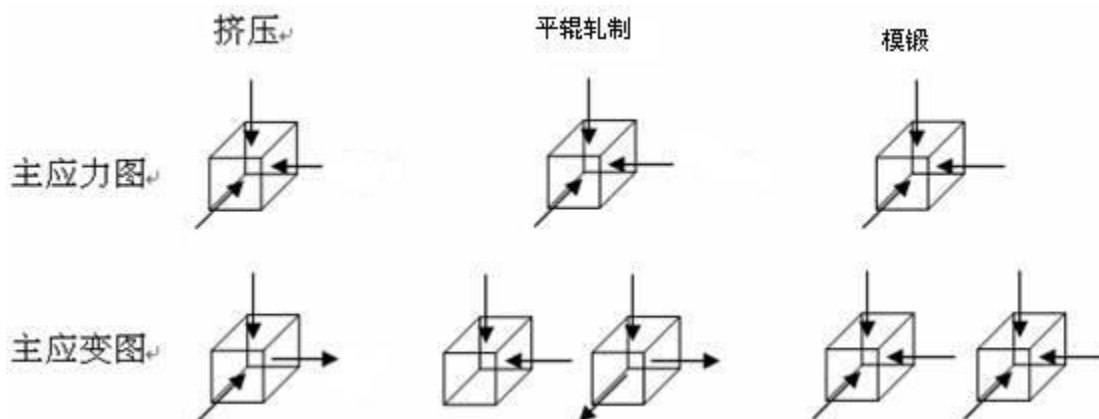
1.  $I_3$  [偏应力]，球应力[静水压力]
2. 变形温度、变形程度、晶粒大小
3. 真应力、断面收缩率
4. 适当粘度、良好活性
5. 稳定细晶（ $5\mu\text{m}$  以下）、一定的温度区间（ $T \geq 0.47T_s$ ）、一定的变形速度（ $10^{-4} \sim 10^{-1} \text{分}^{-1}$ ）

### 三、判断题（本题 10 分，每小题 2 分）

1. (√)、(×)、(√)、(×)
2. (√)、(×)
3. (×)
4. (√)
5. (×)

### 四、问答题（本题 40 分，每小题 10 分）

1. 答：



对于低塑性材料的开坯采用挤压加工方法为佳，因为：挤压时静水压力大，塑性好。缺陷变成线状。

2.答：

$$\sigma_T = \frac{P}{F_t} \quad \sigma_* = \frac{P}{F_0}$$

$$F_0 l_0 = F_t l_t = F_t (l_0 + \Delta l)$$

$$\therefore F_t = \frac{F_0 l_0}{1 + \varepsilon}, \text{其中 } \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\therefore \sigma_T = \frac{P}{F_t} = \frac{P}{F_0} (1 + \varepsilon) = \sigma_* (1 + \varepsilon_*)$$

$$\text{出再颈缩时, } \frac{d\sigma_*}{d\varepsilon_*} = 0, \text{或 } dP = 0$$

$$\text{由 } \sigma_T = A\varepsilon^n = \sigma_* (1 + \varepsilon)$$

$$\text{有 } \sigma_* = \frac{A\varepsilon^n}{1 + \varepsilon}$$

$$\text{由 } \frac{d\sigma_*}{d\varepsilon} = \frac{nA\varepsilon^{n-1}(1 + \varepsilon) - A\varepsilon^n}{(1 + \varepsilon)^2} = 0$$

$$\text{有 } \varepsilon_* = \frac{n}{1 - n}, (0 < n < 1)$$

3.答：

相同：使材料产生各向异性(沿纤维方向上强度高)。

不同：

冷变形：基本晶粒沿最大主变形方向拉长；热变形：夹杂物、第二相拉长。(基体是再结晶等轴晶粒)

消除措施：

冷变形：完全再结晶退火；热变形：净化，铸锭中尽量减少杂质；高温长时间退火，使夹杂物扩散，改变加工方向。

4.答：

(1)种情况沿辊宽变形均匀。

(2)种情况中部易出现裂纹，因为中部附加拉应力。

五、证明题（本题 10 分）

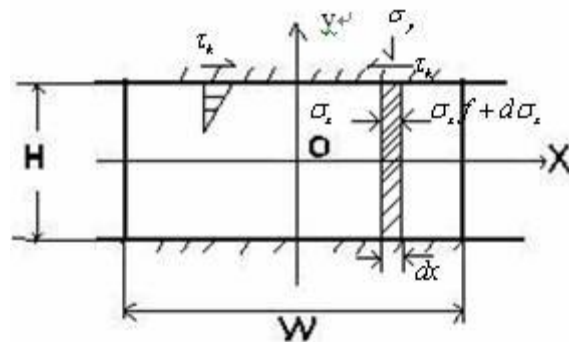
证：已知 Mises 塑条可表达为：

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s^2 = 6k^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} &= \frac{1}{2} (\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xz}^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)^2 + \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)^2 + \left( \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 3 \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right)^2 - 2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{3} \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\ \therefore (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) &= 6k^2 \\ \therefore \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \cdot \sigma'_{ij} &= k^2 \end{aligned}$$

六、推导题（本题 20 分）

解：



建立直角坐标系 xoy 如图，上下左右对称只研究第一象限

$$\text{近似平衡方程: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{设法向力在厚度上均匀分布 (只与x轴有关)} \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ \text{切应力 } \tau_{xy} \text{ 在y轴上呈线性分布} \\ \tau_{yx} = \frac{2}{h} \tau_k y \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \frac{2\tau_k}{h} \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

$$\text{塑条: } (\sigma_x - \sigma_y) + 4\tau_{xy} = \frac{4}{3}\sigma_s^2 = K_f^2 \quad \text{设主平面} \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\therefore \sigma_x - \sigma_y = K_f \quad d\sigma_x - d\sigma_y = 0 \quad d\sigma_x = d\sigma_y$$

$$\text{平衡方程与塑条联立: } \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

$$\text{摩擦条件: } \tau_k = -\frac{K_f}{2}$$

$$\text{即 } \frac{d\sigma_x}{dx} - \frac{K_f}{h} = 0$$

$$\text{积分} \quad \sigma_y = \frac{K}{h}x + C$$

$$\text{边条: 当 } x = \frac{W}{2} \text{ 时 } \sigma_x = 0$$

$$\text{代入塑条有: } \sigma_y = -K$$

$$\text{即: } -K = \frac{K}{h}x + C$$

$$\therefore C = -K - \frac{KW}{2h}$$

$$\sigma_y = \frac{K}{h}x - \frac{KW}{2h} - K$$

$$\text{总压力 } P_{\Sigma} = -2L \int_0^{\frac{W}{2}} \sigma_y dx = 2KL \int_0^{\frac{W}{2}} (1 + \frac{W-2x}{2h}) dx = LKW (1 + \frac{1}{4} \frac{W}{h})$$

$$\text{平均单位压力: } \bar{P} = \frac{P_{\Sigma}}{LW} = K (1 + \frac{1}{4} \frac{W}{h})$$

$$\text{应力状态系数 (平均单位压力比) } n_s = \frac{\bar{P}}{K} = 1 + \frac{1}{4} \frac{W}{h}$$

## 中南大学考试试卷二

2002 — 2003 学年第二学期 时间 110 分钟

金属塑性加工原理 课程 64 学时 4 学分 考试形式：闭卷

专业年级材料 2000 级 总分 100 分，占总评成绩 70%

### 一、名词解释（本小题 10 分，每小题 2 分）

- 1.热变形
- 2.弹塑性共存定律
- 3.动态再结晶
- 4.附加应力
- 5.热效应

### 二、填空题（本题 22 分，每小题 2 分）

- 1.金属塑性加工时，工件所受的外力分为 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_
- 2.主变形图有 \_\_\_\_\_ 种，各主应变分量必须满足条件是： \_\_\_\_\_
- 3.应变速度是指 \_\_\_\_\_
- 4.平面应变其应力状态的特点是  $\sigma_z =$  \_\_\_\_\_
- 5.材料模型简化为理想刚塑性材料是忽略了材料的 \_\_\_\_\_ 和 \_\_\_\_\_
- 6.压力加工中热力学条件是指 \_\_\_\_\_、 \_\_\_\_\_、 \_\_\_\_\_
- 7.第二类再结晶图是 \_\_\_\_\_、 \_\_\_\_\_ 与 \_\_\_\_\_ 关系图。
- 8.塑性图是 \_\_\_\_\_ 与 \_\_\_\_\_ 关系图。
- 9.第二类硬化曲线是 \_\_\_\_\_ 与 \_\_\_\_\_ 关系曲线。
- 10.金属在外力作用下发生变形要经历 \_\_\_\_\_、 \_\_\_\_\_、 \_\_\_\_\_ 三个阶段。
- 11.金属塑性加工中常用的两个摩擦定律是 \_\_\_\_\_。

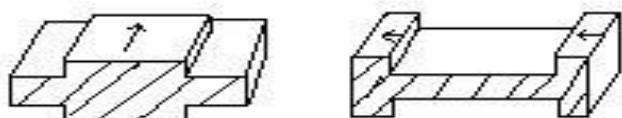
### 三、判断题（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.铝棒的加热温度为  $T_1$ ，即挤压时的变形温度为  $T_1$ 。（ ）

2. 挤压时挤压杆的运动速度为  $V_1$ ，则挤压速度为  $V_1$ 。（ ）
3. 冷变形时形成的变形组织就是冷变形时晶粒被拉长、压扁而形成的纤维组织。（ ）
4. 金属的塑性好，则变形抗力一定会小。（ ）
5. 冷变形即是室温下的变形。（ ）

#### 四、问答题（本题 36 分，每小题 6 分）

1. 应力张量不变量或应力偏量不变量  $I_1, I_2, I_3$  的物理意义各是怎样的？
2. 简述塑性加工常用的两个屈服准则的物理意义，在  $\pi$  平面上的几何表示各是怎样？它们在何种情况下差别最大？
3. 何谓简单加载？何谓复杂加载？Levy-Mises 增量理论的应力应变关系的基本表达式是什么？
4. 冷热变形形成的纤维组织有何异同？如何消除？
5. 画出挤压、拉拔、锻压三种加工方式的变形力学图。对于低塑性材料开坯，选用那一种方式有利于塑性发挥。
6. 冷变形下列两种断面形状轧件，试问哪种送料方式变形不均匀？为什么？（图中箭头为轧制方向）



#### 五、计算题（7 分）

已知某点的应力状态，如下： $\sigma_v = \begin{bmatrix} 40 & \bullet & \bullet \\ 0 & 30 & \bullet \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}$  Mpa 写出其张量分解方程及张量分解的物理意义？

#### 六、推导题（本题 15 分）

按单一粘着区考虑，用工程法推导出粗糙砧面压缩矩形薄板时的变形应力公：

$$\sigma_y = -k_f \left[ 1 + \frac{W - 2x}{2h} \right] \quad \left( \tau_k \text{ 的大小为 } K = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_r = \frac{k_f}{2} \right)$$



## 中南大学考试试卷二答案

### 一、名词解释（本小题 10 分，每小题 2 分）

- 1.在金属再结晶条件下进行的塑性变形
- 2.在塑性变形的过程中存在弹性变形
- 3.在热变形过程中在应力作用下的再结晶
- 4.物体不均匀变形受到整体性的限制而引起物体内部相互平衡的应力
- 5.金属在塑性变形时的发热现象

### 二、填空题（本题 22 分，每小题 2 分）

- 1.作用力（主动力）、约束反力

2.3、  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$  （体积不变条件）

- 3.单位时间内的应变变量（应变对时间的变化率）

4.  $\sigma_z = \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$

- 5.弹性变形、加工硬化
- 8.变形温度、变形程度、变形速度
- 7.变形温度、变形程度、再结晶晶粒大小
- 8.塑性指标、变形温度
- 9.断面收缩率、真实应力
- 10.弹性变形、塑性变形、断裂
- 11.定摩擦定律和滑动摩擦定律

### 三、判断题（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.x
- 2.x
- 3.x
- 4.x
- 5.x

### 四、问答题（本题 36 分，每小题 6 分）

1.答:

$I_1$ : 反映了变形体体积改变的剧烈程度

$I_2'$ : 反映了变形体形状改变的剧烈程度

$I_3'$ : 反映了塑性变形的类型

2.答:

**Tresca 准则**: 变形体某点的最大切应力达到定值材料就屈服,  $\pi$  平面上为正六边形

**Misec 准则**: 弹性形状改变达到定值材料就屈服,  $\pi$  平面上为一个圆

两准则在平面应变情况下差别最大

3.答:

简单加载: 应力分量按比例加载, 只加载不卸载, 应力与应变的主轴重合

复杂加载: 不满足简单加载条件

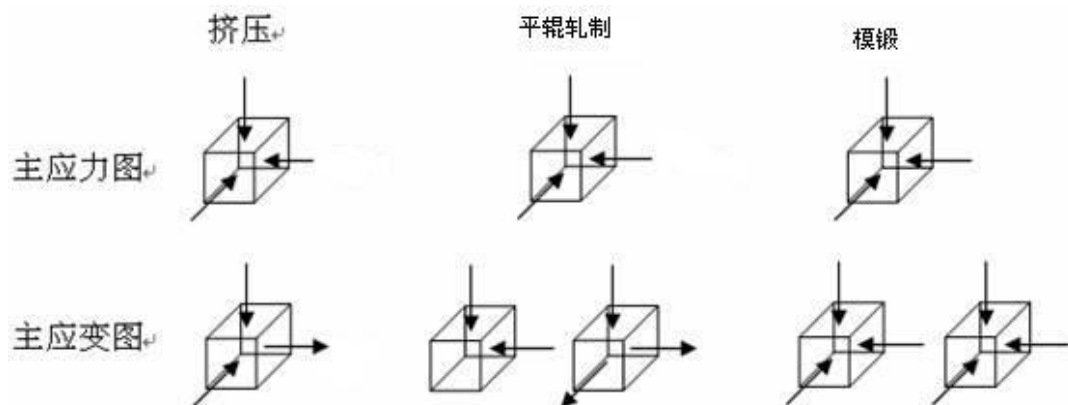
Levy-Mises 增量理论:  $d\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}' d\lambda$  或  $\frac{d\varepsilon_{ij}}{\sigma_{ij}'} = d\lambda$

4.冷变形纤维组织是晶粒被拉长, 拉细压扁呈现纤维状。而热变纤维组织是热变形时, 非金属杂质、第二相各种缺陷沿最大变形方向被拉长。冷变形纤维组织都是沿纤维方向强度高, 使材料呈各向异性。

消除措施: 冷变形纤维组织用完全再结晶退火

热变形纤维组织: 熔炼尽可能除杂, 铸锭细化晶粒, 采用长时间高温均匀化退火, 加工时变换加工方向

5.答:



对于低塑性材料的开坯采用挤压加工方法为佳，因为：挤压时静水压力大，塑性好。

6.答：

图 1：送料方向沿轧件宽度方向变形不均匀，因为沿轧件礼宽度方向坯料厚度不一，压下量不同。

图 2：送料方向沿轧件宽度方向变形均匀

五、计算题（7 分）

解：

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 20$$

$$\begin{bmatrix} 40 & \bullet & \bullet \\ 0 & 30 & \bullet \\ 0 & 10 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & \bullet & \bullet \\ 0 & 20 & \bullet \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & \bullet & \bullet \\ 0 & 10 & \bullet \\ 0 & 10 & -30 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

$$\begin{bmatrix} 20 & \bullet & \bullet \\ 0 & 20 & \bullet \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{球张量，引起物体体积改变}$$

$$\begin{bmatrix} 20 & \bullet & \bullet \\ 0 & 10 & \bullet \\ 0 & 10 & -30 \end{bmatrix} \quad \text{偏张量，引起物体形状改变}$$

六、推导题（本题 15 分）

解：

$$\text{平衡方程：} \sigma_x \cdot h - (\sigma_x + d\sigma_x) \cdot h - 2\tau_k \cdot d_x = 0 \quad (a)$$

$$\text{塑件：} \left. \begin{array}{l} \sigma_x - \sigma_y = 0 \\ \sigma_x - \sigma_y = 2k \end{array} \right\} \Rightarrow d\sigma_x - d\sigma_y = 0 \quad (b)$$

$$\text{联立 (a) (b) 得：} \frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

$$\text{又：} \tau_k = -\frac{K_f}{2}$$

所以：  $\frac{d\sigma_y}{dx} - \frac{K_f}{h} = 0$

积分得：  $\sigma_y = \frac{K_f}{h} x + C$

应力边界条件：  $x = \frac{W}{2}$  时，  $\sigma_x = 0$ ，代入塑条  $\sigma_x - \sigma_y = K_f$

有：  $\sigma_y = -K_f$

即：  $-K_f = \frac{K_f}{h} \cdot \frac{W}{2} + C_2$

所以：  $C_2 = -K_f(1 + \frac{W}{2h})$

所以：  $\sigma_y = -K_f(1 + \frac{W - 2x}{2h})$

### 中南大学考试试卷三

2003 —— 2004 学年第二学期 时间 110 分钟

金属塑性加工原理 课程 64 学时 4 学分 考试形式：闭卷

专业年级材料 2001 级 总分 100 分，占总评成绩 70%

#### 一、名词解释（本题 8 分，每小题 2 分）

- 1.最小阻力定律
- 2.温度效应
- 3.加工硬化
- 4.形变热处理

#### 二、填空题（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.金属塑性变形通常经历\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_三个阶段。
- 2.塑性加工中其工作应力、基本应力、附加应力三者的关系\_\_\_\_\_。
- 3.根据塑性加工成形时的摩擦性质，摩擦可分为\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_三种类型。
- 4.塑性加工润滑剂分为\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_几种类型。
- 5.塑性加工中控制制品的力学性能的两种主要工艺措施是控制\_\_\_\_\_和控制\_\_\_\_\_。

#### 三、判断题（12 分）

- 1.塑性加工时静水压力越大，金属塑性越好，所需的变形力越小。( )
- 2.润滑剂的粘度越大，润滑越好。( )
- 3.变形织构导致各向异性，纤维组织没有各向异性。( )
- 4.细晶超塑性中，应变速率敏感性指数  $m$  越大，其塑性越好。( )
- 5.在平辊轧制实验中，对于一个方向具有凹形断面的坯料，无论采用哪种喂料方向都易出现裂纹。( )
- 6.对于塑性比较差的材料，塑性加工要优先选用三向压缩的主应力图与二向压缩一向延伸的主应变图的加工方式。

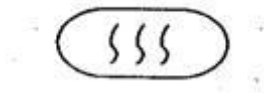
#### 四、问答题（本题 38 分，1-6 小题每小题 3 分，7,8 小题每小题 7 分，9 小题 6 分）

- 1.一点的应力状态的定义是什么？掌握它有何实际意义？
- 2.平衡方程是以应力偏微分方程形式表达的，实际上应是什么量的平衡？
3.  $d\varepsilon_{ij}$  与  $\varepsilon_{ij}$  的差别在哪里？
4. Tresca 屈服准则与材料力学中的第三强度理论有何区别？
5. 弹性本构方程与塑性本构方程有何区别？由此说明哪个求解更容易？  
附表达式如下：

弹性本构：
$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \sigma_m \delta_{ij}$$

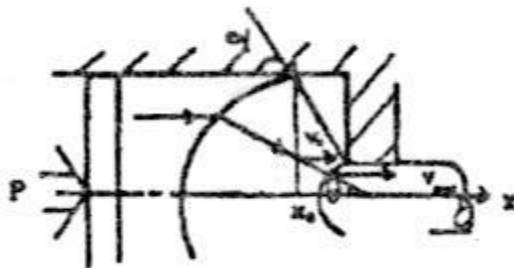
塑性本构：
$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2G'} \sigma'_{ij}$$

6. 从目前所讲的工程法求解加工问题中，实际上只用了基本理论中的 13 个方程的哪二类方程？
7. 金属塑性加工工艺包括主要哪些参数制定工艺通常要依据哪些因素？
8. 金属热变形与冷变形的变形机制、变形特点有何差异？
9. 压缩圆柱体矮件，不均匀变形有哪些典型表现？为防止出现图示纵向裂纹可以采用哪些措施？

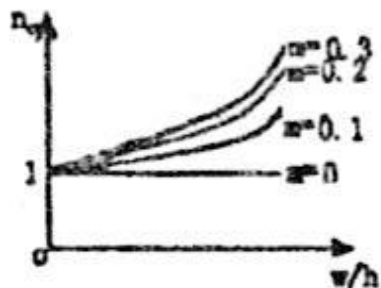


#### 五、分析应用题（本题 16 分，每小题 8 分）

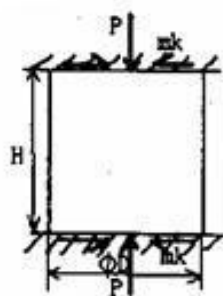
1. 圆棒单孔挤压后流动情况如图，若  $V_p$  为已知常数，试求出变形区中  $X = X_0$  截面上的水平速度  $V_x$  的分布，由此说明该  $V_x$  分布与挤压缩尾的关系。（8 分）



2. 已知用工程法求解出的平锤压缩矩形块的载荷  $p_0 \sim$  宽高比  $W/H$  摩擦因子  $m$  的曲线，试讨论薄板轧制时，为使厚度能轧下，为何采用小直径轧辊、叠轧、强润滑等措施？（8 分）



#### 六、综合推理题（本题 16 分）



平锤压缩圆柱体，已知几何尺寸  $D$ 、 $H$ ，设接触面上的摩擦应力  $\tau_k = mk$ ，求载荷  $p$ ，由此说明实验中的载荷因子  $m$  的关系。

## 中南大学考试试卷三答案

### 一、名词解释（本题 8 分，每小题 2 分）

- 1.在变形过程中，物体各质点将向着阻力最小的方向移动，即做最少的功，走最短的路
- 2.塑性变形过程中因金属发热而促使金属的变形温度升高的效果。
- 3.金属冷变形时，随着变形程度的累积，金属的变形抗力提高而塑性下降的现象。
- 4.对金属材料有效地综合利用形变强化和相变强化，将塑性加工与热处理操作相结合，使成形工艺同获得最终发性能统一起来的一种工艺方法。

### 二、填空题（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.弹性变形、塑性变形、断裂
- 2.工作应力=基本应力+附加应力
- 3.干摩擦、边界摩擦、液体摩擦
- 4.液体润滑剂、固体滑亮剂、液固滑亮剂、熔体滑亮剂
- 5.变形温度、冷变形程度

### 三、判断题（12 分）

- 1.x
- 2.x
- 3.x
- 4.√
- 5.x
- 6.√

### 四、问答题（本题 38 分，1-6 小题第小题 3 分，7,8 小题第小题 7 分，9 小题 6 分）

1.答：

通过该点所有斜截面上的应力有无、大小、方向情况

意义：下述内容中举出 1—2 种：弹塑性类型，是否进入了塑性变形、变形类型、分析变形、计算变形力、 $\sigma-\epsilon$  关系的基础

2.答：

力平衡

3.答：



$\varepsilon_{\bar{y}}$ : 应变全量, 以变形开始的原始尺寸为度量基准, 反映一次变形过程从起始到终了的总应变变量。

$d\varepsilon_{\bar{y}}$ : 应变增量, 以变形过程中的某瞬时状态为度量基准, 反映该瞬时开始后一极短的时间的微分应变变量。

4.答:

第三强度理论是从材料使用角度出发, 要求材料不发生塑性变形, 使用的终点  
**Tresca** 屈服准则从加工成形角度出发, 衡量发生塑性变形否, 塑性变形的起点

5.答:

弹性本构方程: 考虑了体积的变化, 线性关系与变形历史无关, 简单, 唯一性

塑性本构方程: 不考虑体积的变化, 一般非线性

6.答:

平衡方程, 塑性条件

7.答:

变形温度, 变形速度, 变形程度; 变形力学图, 相图, 塑性图, 再结晶全图,  
变形抗力图

8.答:

热变形: 变形过程发生再结晶, 具有明显的软化过程和扩散特性, 塑性发挥好, 有修复机构 (溶解—深沉、非晶机构), 晶向变形机构作用最大, 晶向变形机构主要中要在热变形中起作用, 高温下晶粒的移动和转动比晶内变形所起的作用大, 溶解—深沉、非晶机构比冷变形明显。冷变形: 变形温度低于回复温度, 在变形中只有加工感化而无回复与再结晶现象, 以晶内变形为主。

9.答:

典型表现: 轮廓呈现单鼓形, 接触面存在三个区 (粘着区、滑动区、侧翻区), 变形体内存在三个区 (难变形区、易变形区、自由变形区)

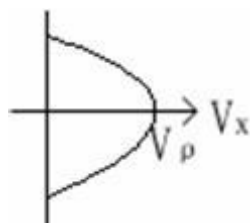
图于裂纹是由于易变形区对自由变形区同向附加拉应力而产生的, 措施: 减少摩擦, 采用凹模, 采用软垫, 采用包套

五、分析应用题 (本题 16 分, 每小题 8 分)

1.解:

$$V_x = V_\rho \cdot \cos \theta$$

同一  $\theta$  上  $V_\rho = \text{常数}$ , 即  $V_x = C$  所以  $V_x$  分布如下图:



由于坯料中心水平流动速度快, 挤压后期中心必须靠径向流动来补充, 挤压变形力升高, 而出现挤压缩尾

2.解:

轧件厚度主要取决于实际工作辊径的大小

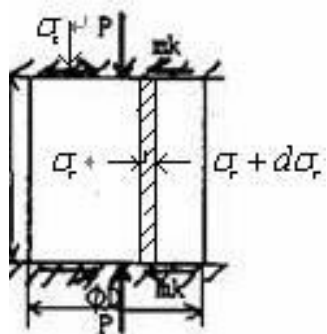
小辊: 变形区  $W$  小,  $W/H$  小,  $\mu \sigma$  变小,  $F$  变小, 而且  $P$  总变小, 轧辊弹性变形小, 故更簿。

叠轧:  $H$  增大,  $W/H$  减小,  $\mu \sigma$  变小,  $F$  变小, 其次分成两层后, 单层更小润

滑:  $m$  减小,  $\mu \sigma$  减小,  $F$  变小。

## 六、综合推理题 (本题 16 分)

解:



$$\sum F_r = 0, \sigma_r h r d\phi - (\sigma_r + d\sigma_r) h (r + dr) d\phi - 2\tau_k r d\phi dr + 2\sigma_\phi h dr \sin \frac{d\phi}{2} = 0$$

$$: \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau_k}{h} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \quad \sigma_r = \sigma_\phi, \text{ 有 } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

$$\text{条: } \sigma_r - \sigma_z = \sigma_T \quad d\sigma_r = d\sigma_z$$

$$\frac{\tau_k}{r} + \frac{2\tau_k}{h} = 0 \xrightarrow{\tau_k = -mk} \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2mk}{h} = 0, d\sigma_z = \frac{2mk}{h} d\sigma_r$$

$$= \frac{2mk}{h} r + C$$

$$\text{条: 当 } r = R \text{ 时 } \sigma_r = 0 \quad \text{由 } \sigma_r - \sigma_z = \sigma_T \text{ 有: } \sigma_z = -\sigma_r = -\sqrt{3}K$$

$$C = -\sqrt{3}K - \frac{2mk}{h}$$

$$\sigma_z = -K \left[ \sqrt{3} + \frac{2m(R-r)}{h} \right]$$

$$= - \int_0^R \sigma_z 2\pi r \cdot dr = 2\pi K \int_0^R \left( \sqrt{3} + \frac{2mR}{h} \right) r dr - \frac{2m}{h} r^2 dr = K\pi R^2 \left( \sqrt{3} + \frac{mD}{3h} \right) = \pi R^2 \sigma_t + \frac{2\pi}{3h} mkR^3$$

上可知，当 m 增大时 P 增大

中南大学考试试卷四

2004 —— 2005 学年第二学期 时间 110 分钟

金属塑性加工原理 课程 64 学时 4 学分 考试形式：闭卷

专业年级材料 2002 级 总分 100 分，占总评成绩 70%

一、名词解释：（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.热效应
- 2.动态再结晶
- 3.外端
- 4.附加应力
- 5.塑性—脆性转变

二、填空题（本题 16 分，每小题 2 分）

1. 一点的应力状态是指

\_\_\_\_\_，  
可以用\_\_\_\_\_来表  
示。

2. 应力不变量  $I_1$  的物理意义是

\_\_\_\_\_，

应力偏量  $I_2'$  的物理意义是

\_\_\_\_\_。

3. 应变增量是指

\_\_\_\_\_，

其度量基准是

\_\_\_\_\_。

4. 应变速度是指

\_\_\_\_\_，

其量纲是

\_\_\_\_\_。

5. Tresca 塑性条件的物理意义是

\_\_\_\_\_，

Mises 塑性条件的物理意义是

\_\_\_\_\_。

6. Levy-Mises 增量理论适合

\_\_\_\_\_材料模型，

Prandtl-Reuss 增量理论适合

\_\_\_\_\_材料模型。

7. 把材料简化为理想刚塑性体是忽略了材料的\_\_\_\_\_和

\_\_\_\_\_。

8. 平面应变问题（设 Z 方向不变形）的力学特点是

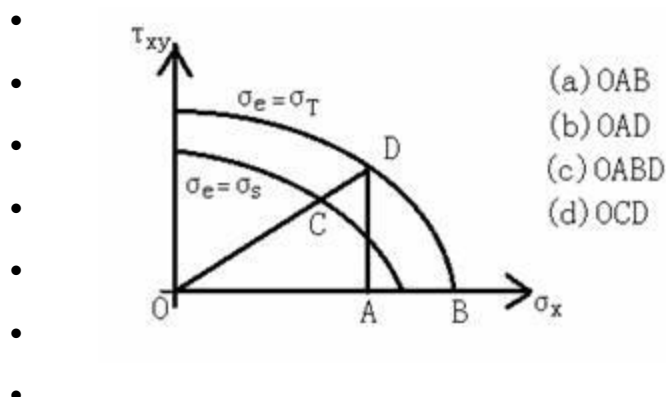
$\sigma_z = \sigma_2 =$ \_\_\_\_\_，

$\tau_{zx} = \tau_{zy} =$ \_\_\_\_\_。

三、计算与问答（58 分，1-3 小题每小题 6 分，4,5 小题第小题 15 分，6 小题 10 分）

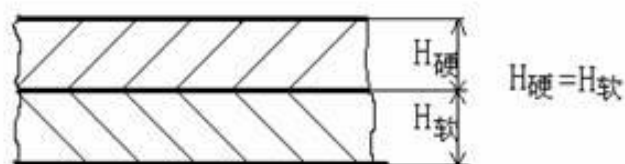
1. 塑性变形时已知某点的应力状态为  $\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 40 & 10 & 30 \\ 10 & -80 & 20 \\ 30 & 20 & -50 \end{bmatrix}$  MPa ( $i,j=x,y,z$ )，  
写出其张量

分解方程，指出各分解张量的名称，并说明它们各与什么变形有关，该  $\sigma_{ij}$  对应的塑性变形类型是什么？



- 2. 在  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  作用下的屈服曲面如图所示，图中两条弧线的含义是什么？  
在图中有 a,b,c,d 四种加载路径，哪些是简单加载？哪些是复杂加载？哪些路径具有相同的塑性变形？为什么？

3.用轧制或平锤压缩方法生产双金属层状复合板。设坯料原始厚度相同，但硬度不相同。若工具工件上下接触面和切向速度一致，试定性预测复合后两层材料的厚与薄，并简述理由。



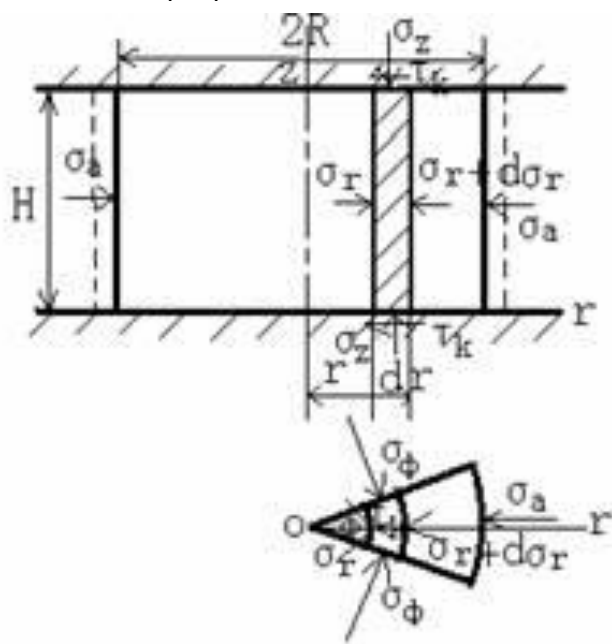
4.压力加工中外摩擦有何特点？试分析压力加工中使用的润滑剂种类及润滑机理。

5.不均匀变形的典型现象是什么？试分析轧制薄板时产生边裂的力学根源及防止措施。

6.什么是冷变形的纤维组织？它和热变形的纤维组织所带来的影响。

#### 四、推导题(16 分)

试用工程法导出全粘着摩擦条件下平锤均匀压缩带包套圆柱体时的接触正应力  $\sigma_z$  的表达式，并比较包套与不包套哪种接触面正压力  $|\sigma_z|$  大？已知  $|\tau_k| = |\sigma_T/\sqrt{3}|$ ，包套径向力为  $|\sigma_a|$ 。



## 中南大学考试试卷四答案

一、名词解释：（本题 10 分，每小题 2 分）

- 1.热效应：金属在塑性变形时的发热现象。
- 2.动态再结晶：在热变形过程中，在应力作用下的再结晶。
- 3.外端：变形体处于变形区以外的那一部分坯料。
- 4.附加应力：物体不均匀变形受到其整体性限制而引起物体内部相互平衡的应力。
- 5.塑性-脆性转变：金属塑性随温度下降等内外因素变化而明显转变为脆性的现象。

二、填空题（本题 16 分，每小题 2 分）

- 1.过变形体任意斜截面上的应力有无，大小，方向的情况、该点三个坐标面上的应力分量
- 2.反映了弹性变形体积变化的大小、反映形状变化的大小
- 3.变形过程中某一极短阶段的无限小应变、变形过程中某一瞬间的尺寸
- 4.单位时间内的应变率、1/秒
- 5.最大切应力达到某一极限  $K$  时，材料发生屈服、材料的弹性形状改变达到某一定值，材料就屈服
- 6.刚塑性体、弹塑性体
- 7.弹性变形、加工硬化 8.  $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ 、0

三、计算与问答（58 分，1-3 小题每小题 6 分，4,5 小题第小题 15 分，6 小题 10 分）

1.解：

$$\sigma_m = \frac{40 - 80 - 50}{3} = -30$$

所以：

$$\begin{bmatrix} 40 & \bullet & \bullet \\ 10 & -80 & \bullet \\ 30 & 20 & -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & \bullet & \bullet \\ 0 & -30 & \bullet \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 70 & \bullet & \bullet \\ 10 & -50 & \bullet \\ 30 & 20 & -20 \end{bmatrix} \quad (\text{MPa})$$

$$\begin{bmatrix} -30 & \bullet & \bullet \\ 0 & -30 & \bullet \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \quad \text{球张量, 引起物体体积改变}$$

$$\begin{bmatrix} 70 & \bullet & \bullet \\ 10 & -50 & \bullet \\ 30 & 20 & -20 \end{bmatrix} \quad \text{偏张量, 引起物体形状改变}$$

由  $I'_3 = 101 \times 10^3 \text{ MPa} > 0$ , 对应延伸型应变  $\varepsilon(+ - -)$

2. 解:

内弧线: 初始屈服曲面

外弧线: 后继屈服曲面

OAB、OCD 是简单加载

OAD、OABD 是复杂加载

OAB 与 OABD 具有相同的塑性变形, 因为 B-D 是中性变载, 只有弹性应变变量改变, 塑性应变变量不变

3. 解:

变形后软层薄, 硬层厚

理由:

由塑条  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$  或  $\sigma_e = \sigma_T$  材料软易达到塑条, 变形大, 簿

由形状改变比解:  $U_D = \frac{I'_2}{2G}$  材料软  $G$  小, 则  $U_D$  大, 变形大, 簿

由  $F = n_\sigma \cdot K_f, F = \phi(5, \frac{W}{h}, K_f) K_f$  小, 则  $\frac{W}{h}$  大, 则  $H$  小, 簿

4. 答:

外摩擦特点: 接触面压力大, 润滑困难, 摩擦应力高; 温度条件恶劣(如高温); 接触条件不断变化, 表面状态不一; 摩擦副差异大。

塑性加工所使用的润滑剂种类有: 液体润滑剂、固体润滑剂、液-固润滑剂和熔体润滑剂等几种类型。

液体润滑剂主要是通过适当的粘度较大的活性形成一层稳定结实的润滑膜。

固体润滑剂: 固体本身的剪切强度低于被加工材料的剪切强度。

液-固润滑剂: 兼有上述两者的特点。

熔体润滑剂: 在高温下可以在工具与坯料接触面间熔成液体薄膜隔开接触面。

5. 答:



不均匀变形的典型现象：轮廓呈现单鼓或双鼓，接触面出现粘着、滑动、侧翻三个区，整个体积分为难、易、自由变形区。

薄板轧制时的裂边主要是变形不均匀，中间延伸大、边部延伸小，造成边部出现附加拉应力，中间附加压应力。当边部的附加拉应力与基本主应力叠加大于材料的断裂强度时出现裂边。另外，热轧件边部温度低，冷轧件边部晶粒粗大，都易裂边。

防止措施：尽量使金属变形均匀如：压下量、坯料厚度、辊型、润滑均匀、合理的加热、热处理等。

6.答：

冷变形的纤维组织：冷变形时晶粒被拉长、拉细或被压扁呈现纤维状。而热变形纤维组织是热变形对非金属夹杂物、第二相等各种缺陷沿最大主变形方向被拉长。冷变形对组织的影响是：形成纤维组织、形成亚结构、变形织构及晶内与晶间的破坏。热变形过程中硬化和软化同时存在可以改善铸锭组织，使金属热变形后晶粒细化、成份趋于均匀、塑性得到改善等。

#### 四、推导题(16 分)

解：

$$\sigma_r H r d\phi - (\sigma_r + d\sigma_r) H (r + dr) d\phi - 2\tau_k r d\phi dr + 2\sigma_\phi H dr \cdot \sin \frac{d\phi}{2} = 0$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau_k}{H} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0$$

$$\text{由 } \sigma_r = \sigma_\phi \text{ 有 } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2\tau_k}{H} = 0$$

$$\frac{d\sigma_z}{dr} = \frac{3\sigma_r}{\sqrt{3}H}$$

$$\sigma_z = \frac{3\sigma_r}{\sqrt{3}H} r + C$$

$$\text{应力边界条件：} r=R \text{ 时， } \sigma_r = -\sigma_a \frac{d\sigma_z}{dr}$$

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma_z &= \sigma_T \\ \text{由塑条：} \quad -\sigma_a - \sigma_z &= \sigma_T \end{aligned}$$

所以：
$$C = -\frac{2\sigma_r}{\sqrt{3}H}r - \sigma_r - \sigma_a$$

所以：
$$\sigma_z = -\frac{2\sigma_r}{\sqrt{3}H}(R-r) - \sigma_r - \sigma_a$$

由于不包套时 
$$\sigma_z = -\frac{2\sigma_r}{\sqrt{3}H}(R-r) - \sigma_r$$

所以包套时接触面  $|\sigma_z|$  大。

## 中南大学考试试卷五

2005 —— 2006 学年第二学期 时间 110 分钟

金属塑性加工原理 课程 64 学时 4 学分 考试形式：闭卷

专业年级材料 2003 级 总分 100 分，占总评成绩 70%

### 一、名词解释（本题 18 分，每小题 3 分）

- 1.最小阻力定律
- 2.干摩擦
- 3.热变形
- 4.塑性状态图
- 5.金属塑性加工的热力学条件
- 6.多晶体的晶间变形机构

### 二、填空题（本题 12 分，每小题 2 分）

- 1.金属变形要经过\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_三个阶段。
- 2.塑性变形的主变形图有\_\_\_\_\_种，其类型可用应力张量不变量\_\_\_\_\_来判定。
- 3.Mises 塑性条件的物理意义之一是\_\_\_\_\_, 它与 Tresca 塑性条件在\_\_\_\_\_状态差别最大。
- 4.简单加载时，各应力分量\_\_\_\_\_增加。
- 5.对于强化材料，当应力状态点沿着屈服表面上运动时，称作\_\_\_\_\_载，此时有\_\_\_\_\_变形，而无新的\_\_\_\_\_变形。
- 6.工程法实际上只用上了基本方程中的\_\_\_\_\_方程和\_\_\_\_\_方程。

### 三、判断题（对者打√，错者打×）（本题 12 分，每小题 2 分）

- 1.平锤压缩工件，工件高宽比越小，变形越均匀，变形力越大。（ ）
- 2.管材挤压比棒材挤压的变形更加不均匀。（ ）
- 3.金属的塑性是指金属变形的难易程度。（ ）
- 4.金属在室温下的变形就是冷变形。（ ）
- 5.从金相照片上观察到的冷变形组织就是变形组织。（ ）
- 6.用楔形体压缩法测定摩擦系数时，其流动分界面越偏向薄端，则说明摩擦系

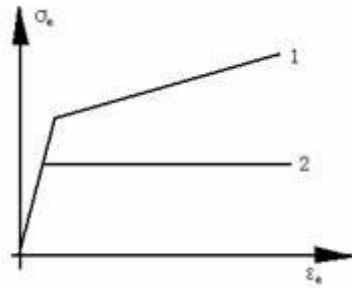
数越小。（ ）

四、计算与简答题（本题 38 分，1-3 小题每小题 6 分，4,5 小题每小题 10 分）

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 40 & \bullet & \bullet \\ 20 & -60 & \bullet \\ 30 & -10 & 50 \end{pmatrix} \text{MPa}, \quad (i, j=x, y, z)$$

1. 金属塑性变形时，已知某点的应力状态  $\sigma_{ij}$ ，试写出其张量分解方程，指出分解张量的名称，并说明它们与什么变形有关？最后求出  $d\varepsilon_x^p : d\varepsilon_y^p : d\varepsilon_z^p$  的比值。

2. 已知材料的两条等效应力应变曲线，如图所示，它们是否考虑了弹性变形？哪一条适合冷加工？哪一条适合热加工？



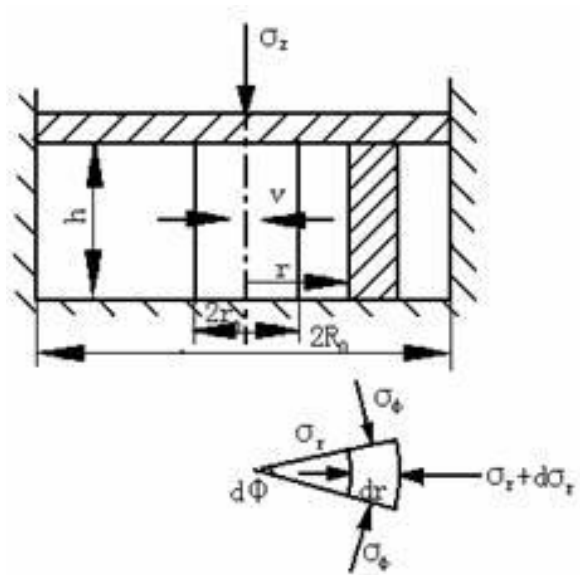
3. 加工时为什么异号主应力状态所需变形力小？举一例处于异号主应力状态的实际加工方法。

4. 制定金属塑性加工工艺时，通常所说的“五图”是哪五图？

5. 试说明圆棒挤压时表面产生周期性裂纹和尾部产生缩尾的原因与可能预防的措施。

五、综合推导题（本题 20 分）

如图所示，在模内压缩圆环，外径尺寸  $R_0$  不变，材料向里流动。假设接触面摩擦应力大小为  $\tau = \sigma T / \sqrt{3}$ （3），试用工程法导出接触面上正应力  $\sigma_z$  的表达式，



并指出此时的  $\sigma_Z$  峰值在何处?

## 中南大学考试试卷五答案

### 一、名词解释（本题 18 分，每小题 3 分）

- 1.最小阻值定律：塑性变形过程中，物体各质点将向着阻力最小的方向流动。
- 2.干摩擦：不存在任何外来介质时金属与工具的接触表面之间的摩擦。
- 3.热变性：变形金属在完全再结晶条件下进行的塑性变形。
- 4.塑性状态图：表示金属指标与变形温度及加载方式的关系曲线图形。
- 5.金属塑性加工的热力学条件：变形温度、变形速度、变形程度。
- 6.多晶体的晶向变形机构：晶粒的转动与移动、溶解-沉淀机构、非晶结构。

### 二、填空题（本题 12 分，每小题 2 分）

- 1.弹性变性、均匀塑性变形、破裂

2.3 种、 $I_3'$

- 3.弹性形状能改变(或  $\tau_s$ 、 $\sigma_e$ 、 $I_2'$ )达到定值材料屈服、平面应变(或  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ )

时

- 4 成比例

- 5.中性变载、弹性、塑性

- 6.平衡、塑性条件

### 三、判断题（对者打√，错者打×）（本题 12 分，每小题 2 分）

1.(√)

2.(×)

3.(×)

4.(×)

5.(×)

6.(√)

### 四、计算与简答题（本题 38 分，1-3 小题每小题 6 分，4,5 小题每小题 10 分）

- 1.答：

$$\frac{1}{3}[40 + (-60) + 50] = 10$$

$$\begin{bmatrix} 40 & \cdot & \cdot \\ 20 & -60 & \cdot \\ 30 & -10 & 50 \end{bmatrix} MPa = \begin{bmatrix} 10 & \cdot & \cdot \\ 0 & 10 & \cdot \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} MPa + \begin{bmatrix} 30 & \cdot & \cdot \\ 20 & -70 & \cdot \\ 30 & -10 & 40 \end{bmatrix} MPa$$

$$d\varepsilon_x^p : d\varepsilon_y^p : d\varepsilon_z^p = \sigma'_x : \sigma'_y : \sigma'_z = 30 : (-70) : 40 = 3 : (-7) : 4$$

2.答:

它们考虑了弹性变形

第一条适合冷加工；第二条适合热加工

3.答:

异号主应力所需的变形力小的原因可以用塑性条件来说明

由 **Mises** 塑性条件

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_r, \text{ 假设 } \sigma_r \text{ 不变}$$

若主应力值绝对大小固定，由上式可知：异号应力的  $\sigma_e$  大于同号应力的  $\sigma_e$ ，

即异号应力的  $\sigma_e$  大

异号应力更容易满足塑性条件

4.答:

五图：变形力学图、相图(合金状态图)、塑性图、变形抗力图、第二类再结晶图。

5.答:

产生表面周期性裂纹的原因:

金属外层受挤压筒和凹模具的接触摩擦的阻滞作用。或表面温度降低使得表层的金属流动慢，受到附加拉应力(中心受附加压应力)，此附加拉应力越接近出口，其值越大，与基本应力合成后，当工作应力达到金属的抗拉强度时，就会产生向内扩展的表面裂纹。

某些金属，塑性区强度范围窄，或易粘模。当挤压速度过快，温度升高，当实际挤压温度超过临界温度时，挤压圆棒也会出现裂纹。

周期性裂纹：一条裂纹出现后，应力松弛，继续变形，应力积累，又出现下一条裂纹。

挤压缩尾也是坯料中心流动快，外层流动慢。在挤压后期，外层金属产生径向流动(坯料表面往往带有油污、灰尘及其它杂质等)。而形成制品尾部出现(中心或环形或皮下)缩尾。

表面裂纹的预防措施：减少不均匀变形；加强润滑，光洁模子；采用反向挤压(合理的温度、速度制度)。

挤压缩尾的预防措施：减少不均匀变形，减少径向流动；留压余，脱皮挤压；车削锭坯表面；使坯料成分组织均匀。

## 五、综合推导题（本题 20 分）

解：

平衡微分方程

$$\sigma_r \cdot h \cdot r d_\phi - (\sigma_r - d\sigma_r) h (r + d_r) d_\phi \pm 2\tau_k \cdot r d_\phi d_r + 2\sigma_\phi \cdot h d_r \sin \frac{d_\phi}{2} = 0$$

(“-”时， $\tau_k$ 取代数值解，“+”时 $\tau_k$ 取绝对值解)

近似值  $\sin \frac{d_\phi}{2} = \frac{d_\phi}{2}$ ，忽略高阶微分，有

$$\frac{d\sigma_r}{d_\pm} \pm \frac{2\tau_k}{h} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{2} = 0$$

视为均匀变形  $\sigma_r = \sigma_\phi$ ，有  $\frac{d\sigma_r}{d_r} \pm \frac{2\tau_k}{h} = 0$

近似塑性条件： $\sigma_r - \sigma_z = \sigma_T$

$$d\sigma_r = d\sigma_z$$

联立后： $\frac{d\sigma_z}{d_r} \pm \frac{2\tau_k}{h} = 0$

$$\text{由 } \frac{d\sigma_z}{d_r} + \frac{2\tau_k}{h} = 0$$

摩擦条件： $\tau_k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_r$



$$\text{有 } \frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} = 0$$

$$\sigma_z = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} + C$$

应力边界条件：  $r=r_0, \quad \sigma_0=0$

$$\text{由 } \sigma_r - \sigma_z = \sigma_r \text{ 有 } \sigma_z = -\sigma_r$$

$$\therefore -\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} r_0 + C$$

$$C = -\sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} r_0$$

$$\therefore \sigma_z = -\sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} r_0 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} r = -\sigma_r \left[ 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_r}{h} (r - r_0) \right]$$

$\sigma_z$  的峰值在  $r=R_0$  处