

目 录

考研重点分析及复习思路梳理 1

第一章 绪论 9

第二章 轴向拉伸与压缩、剪切 13

第三章 扭转 24

第四章 弯曲内力..... 33

第五章 弯曲应力..... 44

第六章 弯曲变形..... 60

第七章 应力与应变分析 强度理论 71

第八章 组合变形..... 79

第九章 压杆稳定..... 90

第十章 动载荷 101

第十一章 能量方法 107

第十二章 超静定结构 120

完整讲义+配套视频下载QQ1393546828



考研重点分析及复习思路梳理

一、概述：

1. 材料力学是机械类、土木类、水利水电类、航空航天类等相关专业考研考生均可以选择考试的专业技术基础课,是以上所述所有专业的公共基础。因此,材料力学中所建立的基本概念、处理问题的思想和解决问题的相应方法具有基础性和普适性。

2. 现行通用的材料力学课程和考研内容体系:

第一部分为固体静力学基本概念以及杆件的基本变形理论,包括

轴向拉压、剪切、扭转和平面弯曲的内力计算、强度计算、刚度(变形)度量、简单超静定杆系的求解(比较变形法)、超静定结构的特点以及强度和刚度设计中的合理设计思想。

第二部分为杆件的组合变形强度理论,包括应力和应变分析理论、组合变形的概念及工况(拉压弯、拉压扭、弯扭、弯弯和拉压弯扭)、杆件的组合变形强度计算、经典强度理论的应用。

第三部分为杆系专题章节,包括压杆稳定性计算和合理设计、水平冲击和竖直冲击的动效应计算、能量方法求解位移以及力法正则方程求解超静定问题四大专题内容。

3. 学习材料力学时面临的主要问题:

- (1) 拉压问题的简单性(貌似)导致对材料力学的轻视;
- (2) 梁的剪力图和弯矩图的绘制方法掌握得生疏;
- (3) 合理设计思想的领会不透彻、相应数学工具应用得生疏;
- (4) 专题内容的难度和综合性较大。

二、考研重点及复习思路:

(一) 考研重点:

第1章 绪论

考点

1. 截面法及其应用:

2. 基本概念:

- (1) 构件的强度、刚度和稳定性;
- (2) 可变形固体基本假设的内容、条件及其意义;
- (3) 总应力(全应力)、正应力、切应力(剪应力)、正应变(线应变)、切应变(角应变)的概念;

3. 材料力学课程的主要任务:

本章内容的考研题型以填空、选择、简答为主,不会有大题出现。最常考查可变形固体基本假设的内容、条件及其意义和应力、应变的概念。

第2章 轴向拉伸与压缩;剪切

考点

1. 轴向拉伸与压缩的受力特点和变形特点
2. 轴力的概念、计算、轴力图的绘制;用胡克定律计算拉压杆的变形
3. 低碳钢和铸铁在拉伸和压缩变形中的力学行为及相应指标的力学意义
4. 拉压杆横截面和斜截面上的应力分布规律;拉压杆的强度计算问题;等强度设计的合理思想及其应用
5. 用“以切线代替圆弧线”的方法计算简单桁架的节点位移
6. 一次超静定杆系(包括温度应力和装配应力)的求解;温度应力和装配应力的特点
7. 连接件的实用强度计算

本章是变形固体静力学一杆形构件基本变形部分的重点章节,虽然轴向拉压是杆件最简单的一种基本变形形式,但是本章所建立的基本概念和处理问题的思想和基本方法是普遍适用的,因此是重点章节。本章内容的考研题型必有计算大题出现(强度条件的应用和/或等强度设计思想的应用;“以切代弧”法求节点位移;一次超静定杆系(包括温度应力和装配应力)的求解);另外,也常以填空、选择、简答等题型考查考点1、2、3、7的相关内容。综合看来,对考点1、2、3、7的考查多重于概念的理解;对考点4、5、6的考查则重于计算。

第3章 扭转

考点

1. 扭转的受力特点和变形特点
2. 外力偶矩的计算;扭矩的概念、计算(截面法+设正法)、扭矩图的绘制
3. 圆轴扭转时的强度条件、刚度条件;轴类构件的强刚度设计计算
4. 圆轴扭转时变形的计算;切应变和剪切胡克定律;材料三个弹性常数之间的关系
5. 纯剪切应力状态的概念;切应力双生互等定理;圆轴扭转时横截面和斜截面上的应力分布规律及其关系;塑性材料和脆性材料扭转破坏现象的分析
6. 简单的扭转超静定问题的求解
7. 矩形截面杆扭转时、开口与闭口薄壁杆件自由扭转时横截面上切应力分布规律的主要结论

本章内容的考研题型常有大题出现,主要考查圆轴扭转时的强刚度设计计算或扭转超静定问题(难题);也常以填空、选择、简答等题型考查对概念的理解,本章内容的另一种考查方法是组合变形中的弯扭组合变形问题。

第4章 弯曲内力

考点

1. 梁的力学计算简图的建立过程与步骤
2. 组合梁上不同部分载荷作用后引起的力学效应



3. 剪力、弯矩与载荷集度间的微积分关系;利用此关系绘制梁的剪力图和弯矩图;检验梁的剪力图、弯矩图和受力图的关系

4. 用取点连线法绘制梁的剪力图和弯矩图

5. 平面简单刚架、曲杆的内力计算和内力图的绘制

本章内容的考研题型必有大题出现,可以单独考查梁的内力图的绘制,也可以将梁的内力图的绘制与梁的强度计算问题进行综合考查;另外,也常以填空、选择、简答等题型考查对概念的理解。总之,由于弯曲内力的分析是解决弯曲强度问题和弯曲变形问题的基础,同时,弯曲又是几种基本变相中最复杂、最重要、最常见的一种,所以本章的内容是考研的必考重点之一。

第5章 弯曲应力

考点

1. 静矩的概念、特点与截面形心的确定

2. 组合图形形心主惯性矩的概念及其计算;对中性轴的惯性矩计算

3. 矩形截面梁横截面上弯曲切应力的分布规律及计算—儒拉夫斯基公式的应用

4. 梁的强度条件及计算:

(1) 梁的正应力强度条件;

(2) 梁的切应力强度条件;

(3) 梁的强度计算:①脆性材料梁;②弯矩变号;③梁的横截面几何形状上下不对称。

5. 提高梁强度的主要措施

本章内容的考研题型必有计算大题出现,必会考查梁的强度计算问题,经常综合考查梁的内力图的绘制。最容易考查的题目特点为:①脆性材料梁;②弯矩变号;③梁的横截面几何形状上下不对称。另外,也常以填空、选择、简答等题型考查对概念的理解(平面图形的几何性质;儒拉夫斯基公式的应用;提高梁强度的主要措施),本章的内容是考研的必考重点之一。

第6章 弯曲变形

考点

1. 梁的挠曲线近似微分方程(Euler—Bernoulli 方程)及相关问题

2. 叠加法求梁的变形

3. 梁的刚度条件的应用

4. 比较变形法求解简单超静定梁

本章内容是考研重点考查内容之一。考研题型常以填空、选择、简答等为主,考查梁的挠曲线近似微分方程及相关问题。计算大题多考查梁的刚度条件的应用和比较变形法求解简单超静定梁。

第7章 应力和应变分析 强度理论

考点

1. 平面应力状态下任意斜截面上的应力

2. 空间和平面应力状态下最大、最小正应力和最大、最小切应力的分布规律
3. 主应力的性质
4. 平面应力状态应力圆(莫尔圆)的画法;空间应力状态应力圆的特征
5. 广义胡克定律及其应用
6. 平面应变状态分析

本章是材料力学的重点章节,考研题型容易有与组合变形问题结合的综合性计算大题出现;另外也常以填空、选择、简答等题型考查相关概念内容。综合看来,对考点1、2、3、4的考查多重于概念的理解;对考点5、6、7的考查则重于计算和综合应用。本章内容的考研试题一般都比较灵活,但是大多数题目都不限制求解方法,因此经常可以使用一种方法求解,而可以用另一种方法校核计算结果;对于杆件的组合变形强度计算问题,要正确使用对应的强度理论,按照处理思路和解题步骤实施解题过程,以保证解题的正确性。

第8章 组合变形

考点

1. 组合变形强度计算问题—四种经典强度理论的应用
2. 截面核心的概念

本章是材料力学的重点章节,综合性、总结性均较强,考研题型必有计算大题出现,考查组合变形强度计算问题,特别容易考查第三和第四强度理论在弯扭组合变形工况下(包括超静定结构)的应用;另外也常以填空、选择、简答等题型考查相当应力和截面核心的相关内容(偏重概念的理解)。

第9章 压杆稳定

考点

1. 压杆稳定性的相关概念
2. 压杆临界载荷和临界应力的计算
3. 提高压杆稳定性的主要措施

本章内容是材料力学关于稳定性问题的专题章节。考研题型易有大题出现,考查压杆临界载荷和临界应力的计算,也偶有涉及压杆临界载荷的 Euler 公式的推导(极少);常以填空、选择、简答等题型考查对概念的理解和相应的简单计算。

第10章 动载荷

考点

1. 匀加速直线运动和匀速转动问题的求解
2. 冲击问题的求解
3. 冲击问题与组合变形问题、压杆稳定问题的综合问题的求解

本章内容是材料力学关于动载荷问题的专题章节,是考研的重点章节。考研题型除常以填空、选择、简答等形式考查对概念的理解外,也常以计算大题考查冲击问题的求解,包括冲击问题与组合变

形问题、压杆稳定问题的综合问题的求解。对概念理解的考查多集中在动荷系数的意义及某种给定工况下动荷系数表达式的推导方面;计算大题则主要以复合型题目的形式出现,考查冲击问题的求解。

第 11 章 能量方法

考点

- 1. 杆件在轴向拉压、扭转、弯曲和组合变形时应变能的计算(依据及结论)
- 2. 卡氏第一定理;余能定理;卡氏第二定理的应用
- 3. 单位载荷法及其应用
- 4. 图形互乘法及其应用
- 5. 功的互等定理和位移互等定理及其简单应用

本章是材料力学的重点章节,也是考研的必考重点章节,必有计算答题出现。考研题型除常以填空、选择、简答等形式考查对概念的理解外,也经常以计算大题考查本章各定理和方法的应用。复习本章,应(1)重点梳理各原理、定理之间的逻辑关系;(2)掌握基本概念;(3)掌握杆件应变能的计算;(4)熟练应用卡氏定理、单位载荷法和图形互乘法求位移。

第 12 章 超静定结构

考点

- 1. 力法正则方程的本质;各项系数的意义
- 2. 利用结构的对称性简化超静定结构并求解
- 3. 力法正则方程的应用

本章是材料力学的重点章节,也是考研的必考重点章节,必有计算答题出现。考研题型除常以填空、选择、简答等形式考查对概念(考点 1)的理解外,也经常以计算大题考查考点 2 和 3。本章的考研题目多为复合型题型,通常都是结合冲击问题、压杆稳定问题以及能量法求位移、甚至强度校核问题进行综合考查,题目的灵活性一般较大。

(二)复习思路:

- 以基本概念为支撑;
- 以动力学为纲;以时间描述和空间描述为界;
- 以矢量法(几何法)和解析法为目;
- 以典型数学技巧为辅助;
- 以统一观点看待动、静力学问题。

1. 考点归纳(按照章节顺序进行):

第一章

构件的强度、刚度和稳定性的概念	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到
可变形固体基本假设的内容、条件及其意义	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到

总应力(全应力)、正应力、切应力(剪应力)、正应变(线应变)、切应变(角应变)的概念	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到
--	------	-------------

第二章

轴力的概念、计算、轴力图的绘制	★★★★☆	十分重要,经常考
拉压杆横截面和斜截面上的应力分布规律;拉压杆的强度计算问题;等强度设计的合理思想及其应用	★★★★☆	十分重要,经常考
用胡克定律计算拉压杆的变形;用“以切线代替圆弧线”的方法计算简单桁架的节点位移	★★☆☆☆	重要,考到过
一次超静定杆系(包括温度应力和装配应力)的求解;温度应力和装配应力的特点	★★★★☆	十分重要,经常考
连接件的实用强度计算	★★☆☆☆	重要,考到过

第三章

外力偶矩的计算;扭矩的概念、计算(截面法+设正法)、扭矩图的绘制	★★★★☆	十分重要,经常考
圆轴扭转时的强度条件、刚度条件;轴类构件的强刚度设计计算	★★★★☆	十分重要,经常考
圆轴扭转时变形的计算	★★☆☆☆	重要,考到过
纯剪切应力状态的概念;切应力双生互等定理;切应变和剪切胡克定律;材料三个弹性常数之间的关系	★★★★☆	十分重要,经常考
圆轴扭转时横截面和斜截面上的应力分布规律及其关系;塑性材料和脆性材料扭转破坏现象的分析	★★☆☆☆	重要,考到过
简单的扭转超静定问题的求解;矩形截面杆扭转时、开口与闭口薄壁杆件自由扭转时横截面上切应力分布规律的主要结论	★☆☆☆☆	需要注意,有可能会考到

第四章

剪力、弯矩与载荷集度间的微积分关系;利用此关系检验梁的剪力图、弯矩图和受力图的关系	★★☆☆☆	重要,考到过
用取点连线法绘制梁的剪力图 and 弯矩图	★★★★★	十分重要,必考
平面简单刚架、曲杆的内力计算 and 内力图的绘制	★★★★★	十分重要,必考

第五章

静矩的概念、特点与截面形心的确定	★★☆☆	重要,考到过
组合图形形心主惯性矩的概念及其计算;对中性轴的惯性矩计算	★★☆☆	重要,考到过
矩形截面梁横截面上弯曲切应力的分布规律及计算—儒拉夫斯基公式的应用	★★☆☆	重要,考到过
梁的强度条件及计算	★★★★	十分重要,必考
提高梁强度的主要措施	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到

第六章

梁的挠曲线近似微分方程(Euler—Bernoulli方程)及相关问题	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到
叠加法求梁的变形	★★☆☆	重要,考到过
梁的刚度条件的应用	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到
比较变形法求解简单超静定梁	★★★☆☆	十分重要,经常考

第七章

平面应力状态下任意斜截面上的应力	★★☆☆	重要,考到过
主应力的性质	★★☆☆	重要,考到过
平面应力状态应力圆(莫尔圆)的画法;空间应力状态应力圆的特征	★★☆☆	重要,考到过
广义胡克定律及其应用	★★★★	十分重要,必考
平面应变状态分析	★★☆☆	重要,考到过

第八章

组合变形强度计算问题;四种经典强度理论的应用	★★★★	十分重要,必考
截面核心的概念和简单应用	★★☆☆	重要,考到过

第九章

压杆稳定性的相关概念	★★☆☆	重要,考到过
压杆临界载荷和临界应力的计算	★★★★	十分重要,必考
提高压杆稳定性的主要措施	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到

第十章

匀加速直线运动和匀速转动问题的求解	★☆☆☆	需要注意,有可能会考到
冲击问题的求解	★★★★	十分重要,必考
冲击问题与组合变形问题、压杆稳定问题的综合问题的求解	★★★☆☆	十分重要,经常考

第十一章

杆件在轴向拉压、扭转、弯曲和组合变形时应变能的计算(依据及结论)	★★☆☆	重要,考到过
卡氏第二定理的应用	★★★☆☆	十分重要,经常考
单位载荷法和图形互乘法及其应用	★★★★	十分重要,必考
功的互等定理和位移互等定理及其简单应用	★★☆☆	重要,考到过

第十二章

力法正则方程的本质;各项系数的意义	★★☆☆	重要,考到过
利用结构的对称性简化超静定结构并求解	★★★☆☆	十分重要,经常考
力法正则方程的应用	★★★★	十分重要,必考



第一章 绪论

考点 1: 基本概念

一、构件的强度、刚度和稳定性:

1. 构件的强度: 构件的抗破坏能力(即结实程度)。
2. 构件的刚度: 构件的抗变形能力。
3. 构件的稳定性: 构件保持原有平衡状态的能力。
4. 构件的设计准则: 所设计的构件应具有足够的强度、必要的刚度和足够的稳定性, 以达到不失效, 能安全、可靠的工作的目标。

5. 材料力学课程的任务: 在满足强度、刚度和稳定性要求的前提下, 为设计既安全又经济的构件提供必要的理论基础和计算方法。

提问: 构件的常见失效形式有哪些?

答: 常温常压下, 构件的常见失效形式有:

$\left. \begin{array}{l} \text{断裂} \\ \text{塑性变形} \\ \text{弹性变形过大} \end{array} \right\} \text{破坏}$
丧失原有平衡状态(失去稳定性)

二、可变形固体基本假设的内容、条件及其意义:

1. 连续性假设: 组成固体的物质毫无间隙的充满了物体所占据的空间区域。~ 从而可以使用连续函数为工具

2. 均匀性假设: 组成固体的物质处处相同。~ 从而可以任意点为原点建立坐标系

3. 各向同性假设: 固体各个方向的力学性能相同。~ 从而可以任意建立不同方向的坐标系

注意:

一般情况下, 受线弹性、小变形两个条件的限制, 原始尺寸原理也成立。

例:

1. 构件正常工作应满足以下三点: 应具有足够的_____; 必要的_____; 足够的_____;
(强度、刚度、稳定性)

2. 材料力学将实际材料看作_____, _____, _____的可变形固体, 且在大多数情况下局限在_____范围内的小变形条件下进行问题的研究。(均匀、连续、各向同性; 线弹性)

3. 在以下四种工程材料中, _____种不可以应用各向同性假设。

- A. 铸铁; B. 玻璃; C. 松木; D. 铸铜。

答案:C

三、若干基本概念

1. (总)应力(全应力) p :

在某确定截面上一点的邻域内,若其上的分布内力系的合力 ΔF 与邻域面积 ΔA 的比值在此面积趋于无穷小时有极限,则此极限值 p 称为该点在相应截面上的总(全)应力。简言之:应力 p 是某点的内力随面积分布的集度,即: $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ 。

2. 正应力 σ : 总应力 p 沿截面法向的分量。

3. 切应力(剪应力) τ : 总应力 p 沿截面切向的分量。

4. 正应变(线应变) ε : 某点沿某方向单位长度的改变量,即: $\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$

5. 切应变(角应变) γ : 某点在某平面内直角的改变量(减小为正)。

注意:

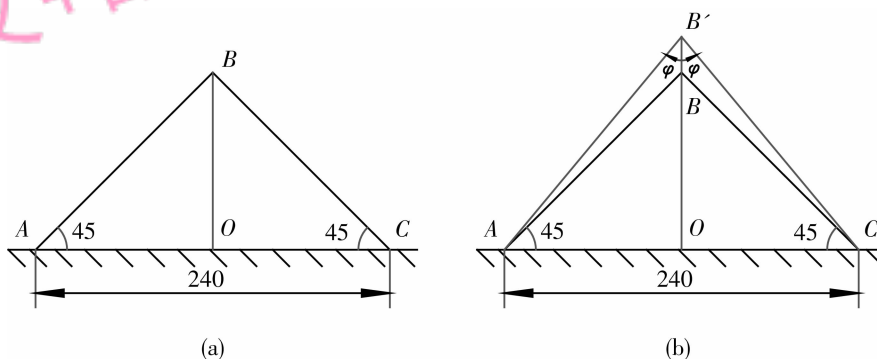
(1) 任意点处任意确定方向上,恒有: $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$;

(2) 小变形情况下,正应力只引起正应变;切应力只引起切应变。

(3) 应力与截面方向和点的位置均有关;应变与方向和点的位置均有关,应变的量纲为 1。

例:

4. 图示三角形薄板因受外力作用而变形,角点 B 垂直向上的位移为 0.03mm,但变形后 AB 和 BC 仍保持为直线。求:(1)沿 OB 的平均应变;(2)AB 和 BC 两边在点 B 处的角应变。



解:变形后的示意图如图(b)所示,依题:

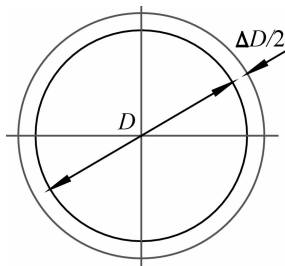
$$(1) \text{沿 } OB: \varepsilon_{\text{平均}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{0.03}{120} = 2.5 \times 10^{-4}$$

(2) 依角应变定义,有:

$$\gamma = 2(\angle ABO - \angle ABO) = 2(45^\circ - \varphi) = 90^\circ - 2\varphi = 90^\circ - 2\tan\varphi$$

$$= 90^\circ - 2 \frac{\overline{AO}}{\overline{OB'}} = \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{120}{120 + 0.03} = 2.5 \times 10^{-4} (\text{rad})$$

5. 薄圆环的平均直径为 D , 变形后的平均直径增加了 ΔD , 如图所示。证明: 此圆环沿圆周方向的平均线应变为: $\varepsilon = \frac{\Delta D}{D}$ 。



证明:

圆环沿圆周方向的平均线应变可用其周长的平均线应变表示, 故:

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon = \frac{\pi(D + \Delta D) - \pi D}{\pi D} = \frac{\Delta D}{D}$$

引申提问: 此圆环沿半径方向的平均线应变又为多少?

答: $\varepsilon_r = \frac{\Delta D}{D} = \varepsilon_{\theta} = \varepsilon$ 。

考点 2: 截面法及其应用

总论:

1. 变形体静力学以刚体静力学的理论和分析方法为基础, 即: 变形

体静力学是在受力平衡的基础上研究物体(构件)的变形。作为处于平衡状态的变形体, 必满足刚化原理(即: 将此变形体在此平衡位置刚化为刚体, 其平衡状态不变)。

2. 对于静定的变形体结构, 由之可以求出所有支反力, 以及可以由截面法求出任意位置截面上分布内力系的等效力系(即内力分量)。

3. 注意: 刚体静力学的结论和方法并不能无条件的适用于变形体, 特别是涉及变形因素的结论, 只能适用于刚体。例如: 刚体静力学中的力系简化理论, 对变形体所受的外力系, 不能随意进行简化。

4. 变形体静力学主要研究的是可变形固体的内力, 此内力会使变形体产生变形。截面法是变形体静力学研究内力的基本方法。变形体静力学关心的是变形体受外力作用后其内力的附加值部分(这一部分与变形体是否破坏相关)。

5. 截面法求内力的基本步骤:

(1) 假想截开: 使内力系暴露为外力系;

(2) 任取一半: 为研究对象, 取分离体;

(3) 内力代替: 将弃去部分对保留部分的作用(截面上的分布内力系)代之以等效力系(向截面形心简化, 特征量相同);

(4)平衡求解:用平衡方程求出此等效力系。

例:

6. 在变形固体静力学中,只有在计算_____时,才一定可以应用“力的可传性原理”。

A. 静定结构的支座反力;

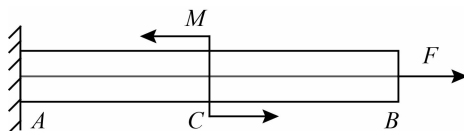
B. 结构的内力;

C. 结构的支座反力;

D. 变形。

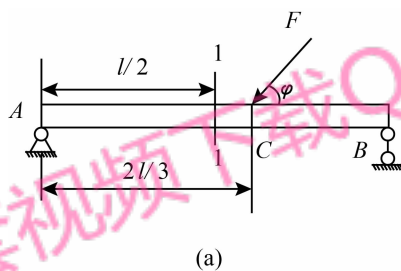
本题解析见精彩视频课程。

7. 杆件受力如图所示,若图中大小为 F 的力的作用点沿杆件轴线从 B 处移至 C 处,力偶矩 M 在其作用面内沿杆件轴线任意平移,则分别会对杆件哪一段的内力和变形产生影响? 对支座的反力产生影响吗?



本题解析见精彩视频课程。

8. 用截面法求图(a)所示跨长为 l 的简支梁 1-1 截面的内力。



本题解析见精彩视频课程。



第二章 轴向拉伸与压缩、剪切

考点 1: 基本内容

1. 轴向拉伸与压缩的受力特点和变形特点

受力特点: 外力系合力的作用线与杆件轴线重合。

变形特点: 轴向尺寸稍有增加(减少); 横向尺寸稍有减少(增加)。

提问: 轴向拉伸时, 杆件在变形前后的总体积是否变化?

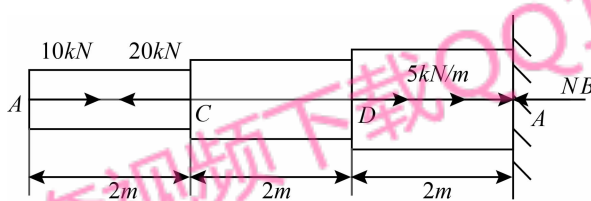
答: 总体积略增大; 轴向压缩时总体积略减小。

2. 轴力的概念、计算及轴力图的绘制

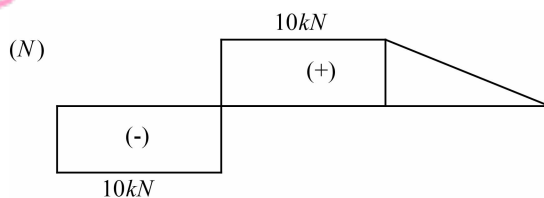
(1) 轴力: 与杆件轴线重合的内力(系)的合力。

(2) 计算: 截面法 + 设正法(拉正压负)。

例: 作出图示杆件的轴力图。



解:



3. 低碳钢和铸铁在拉伸和压缩变形中的力学行为及相应指标的力学意义

(1) 四个阶段:

弹性阶段; 屈服阶段; 强化阶段; 颈缩阶段。

(2) 四个极限应力:

比例极限 σ_p ; 弹性极限 σ_e ; (下)屈服极限(点) σ_s ; 强度极限 σ_b 。

注: 四者数值关系: $\sigma_p < \sigma_e < \sigma_s < \sigma_b$

(3) 两个塑性指标:

a) 延展率: $\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% = \frac{\Delta l}{l} \times 100\%$

注: δ 值与试件的长度有关, $\delta > 5$ 者为塑性材料; $\delta < 5$ 者为脆性材料。

b) 断面收缩率: $\psi = \frac{A_1 - A}{A} \times 100\% = \frac{\Delta A}{A} \times 100\%$

(4) 一个比例常数:

材料的弹性模量: $E = \tan \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ 。

(5) 卸载定律:

在卸载过程中, 应力和应变按直线规律变化, 其斜率等于弹性模量。

(6) 冷作硬化:

当通过加载使材料进入塑性变形阶段后再卸载, 然后再二次加载时, 材料的比例极限提高而塑性变形和延展率均降低的现象。

(7) 名义屈服应力 $\sigma_{0.2}$ 的定义:

对于没有明显屈服极限的塑性材料, 将产生 0.2% 塑性应变时所对应的应力值作为屈服指标, 称为名义屈服应力, 记为 $\sigma_{0.2}$ 。

例:

1. 关于低碳钢拉伸至屈服时, 以下结论中 _____ 是正确的。

- (A) 应力和塑性变形很快增加, 因而认为材料失效;
- (B) 应力和塑性变形虽然很快增加, 但不意味着材料失效;
- (C) 应力不增加, 塑性变形很快增加, 因而认为材料失效;
- (D) 应力不增加, 塑性变形很快增加, 但不意味着材料失效。

本题解析见精彩视频课程。

2. 韧性材料冷作硬化后, 经卸载再加载, 则材料的力学性能发生下列 _____ 的变化。

- A. 比例极限提高, 弹性模量降低;
- B. 比例极限提高, 韧性降低;
- C. 比例极限不变, 弹性模量不变;
- D. 比例极限不变, 韧性不变。

本题解析见精彩视频课程。

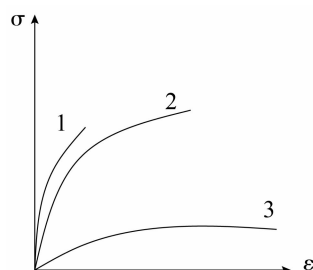
3. 钢制直杆受轴向力作用, 横截面上的正应力 σ 超过了材料的屈服极限, 此时轴向线应变为 ε_1 ;

现在开始卸载, 拉力全部卸掉后, 轴向残余线应变为 ε_2 , 则该钢材的弹性模量为 _____。

本题解析见精彩视频课程。

4. 杆 1、2、3 的横截面面积及长度均相等, 其材料的应力应变曲线如图所示, 则() 强度最高; () 刚度最大; () 塑性最好。

本题解析见精彩视频课程。





考点 2: 拉压杆的强度计算

1. 拉压杆横截面和斜截面上的应力分布规律

$$(1) \text{横截面上的应力分布规律: } \begin{cases} \sigma = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} \\ \tau = 0 \end{cases}$$

$$(2) \text{斜截面上的应力分布规律: } \begin{cases} \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

注:

a) 斜截面的方位角 α 定义为: 从横截面的外法线转到斜截面的外法线的夹角, 规定取值为“逆正顺负”;

b) 由上可知: $\tau_{\max} = \tau_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma}{2} \sin(\pm 90^\circ) = \pm \frac{\sigma}{2}$, 此结果可解释铸铁的压缩破坏现象及低碳钢拉

伸实验中滑移线的出现。

2. 拉压杆的强度计算问题

$$(1) \text{拉压杆的强度条件: } \sigma_{\text{工作, max}} = \frac{N}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$$

注:

a) 上式中的 σ_u 为危险应力。对脆性材料, 应取 σ_u 为 σ_{bt} 或 σ_{bc} ; 对塑性材料, 应取 σ_u 为 σ_s ;

b) 此处采用的强度计算准则是一点处破坏的准则, 即结构中任意一点处强度不足, 即认为结构的强度不足。

(2) 拉压杆强度计算问题的类型(三类):

a) 强度校核; b) 截面设计; c) 确定结构许可载荷 $[P]$ 。

3. 等强度设计的合理思想及其应用

结构中包含若干构件, 一般情况下它们不会同时破坏。根据所采用的强度计算准则, 其中任意一构件破坏, 均会导致结构破坏。此时, 其余构件强度足够已无意义, 等效于其余所有构件的材料均被浪费, 不合理。显然, 合理的设计因为使结构中的所有构件在受载时同时破坏, 即所有构件的强度均相同。此时, 结构用料最省, 承载能力最大。

例:

1. 图示阶梯轴厚度为 b , 左段高 $2h/3$, 右段高 h 。载荷沿高度方向线性分布, 沿厚度方向均匀分布。则横截面上正应力

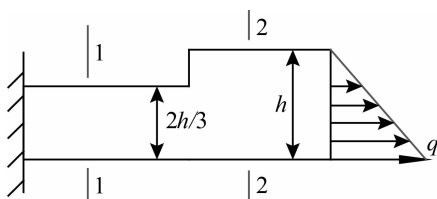
公式 $\sigma = \frac{N}{A}$ (N 和 A 分别为轴力和横截面面积) 适用于_____。

A. 仅 1-1 截面;

B. 1-1 截面和 2-2 截面;

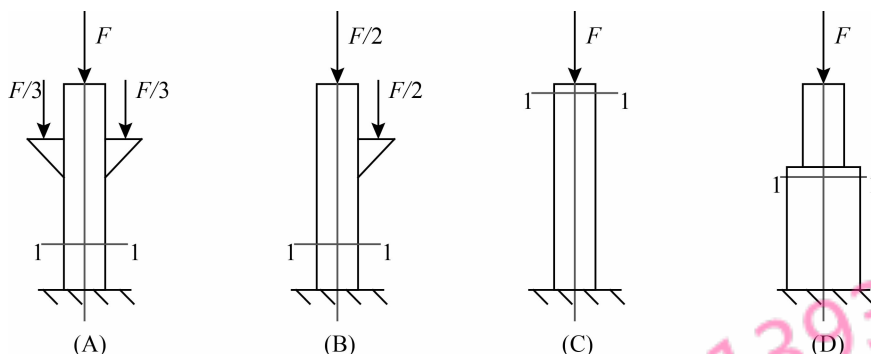
C. 仅 2-2 截面;

D. 1-1 截面和 2-2 截面均不适用。



本题解析见精彩视频课程。

2. 如图所示各杆中,1-1 截面的面积均为 A,其中 _____ 图所示杆 1-1 截面上的正应力为 $\sigma = \frac{F}{A}$ 。

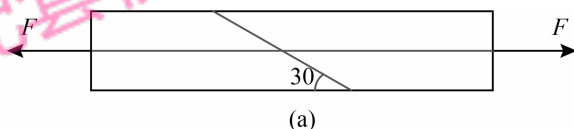


本题解析见精彩视频课程。

3. 等截面直杆受力 F 作用发生轴向拉伸变形,如图(a)所示。

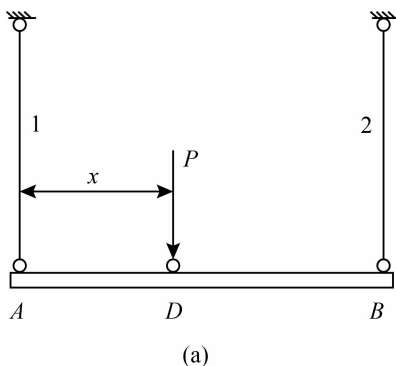
已知直杆横截面面积为 A,则横截面上的正应力和图示 30°

角所对应的斜截面上的正应力分别取值为 _____。



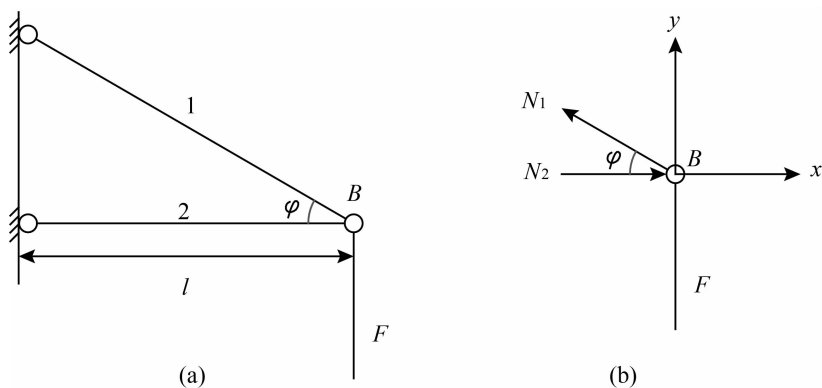
本题解析见精彩视频课程。

4. 如图(a)所示结构,AB 为长度为 a 的刚性横梁,1、2 两杆轴向长度均为 l,横截面面积分别为 A_1 和 A_2 ,且 $A_1:A_2=3:2$,许用应力分别为 $[\sigma_1]$ 和 $[\sigma_2]$,且 $[\sigma_1]:[\sigma_2]=2:5$ 。活动载荷 P 可沿 AB 梁水平移动。现欲使此结构的承载能力最大,求载荷 P 的作用位置 $x = ?$



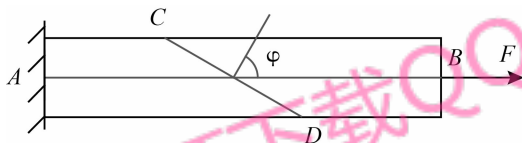
本题解析见精彩视频课程。

5. 图示桁架的两杆材料相同,拉压许用应力相等,均为 $[\sigma]$ 。两杆夹角为 φ ,2杆长为 l ,节点B作用有铅垂向下的载荷 F 。不考虑稳定性条件。(1)设计两杆的横截面面积 A_1 和 A_2 ;
- (2)将 φ, A_1 和 A_2 作为可设计量,保持结构的其余参数不变,求结构重量最轻时的角 φ 值。



本题解析见精彩视频课程。

6. 图示拉杆AB由两段在CD面上焊接而成,设杆的强度取决于焊缝。已知焊缝材料的许用正应力为 $[\sigma]$,许用切应力为 $[\tau]$,且 $[\sigma] = \sqrt{3}[\tau]$,求当焊缝的正应力和切应力同时达到各自许用值时的角度 φ 值。



本题解析见精彩视频课程。

考点3:杆件变形和节点位移的计算

1. 用胡克定律计算拉压杆的变形:

- (1) 单向应力状态下材料的胡克定律(本构关系):

当正应力不超过比例极限时,正应变正比于正应力,即:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \sigma \leq \sigma_p$$

- (2) 横向变形系数(泊松比):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \in (0.1, 0.5) \quad (\sigma \leq \sigma_p)$$

- (3) 轴向拉压时杆件的胡克定律:

- (a) 等截面常轴力: $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$;

- (b) 变截面变轴力: $\Delta l = \int_l \frac{N(x)dx}{EA(x)}$;

- (c) 杆件为阶梯轴: $\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i}$ 。

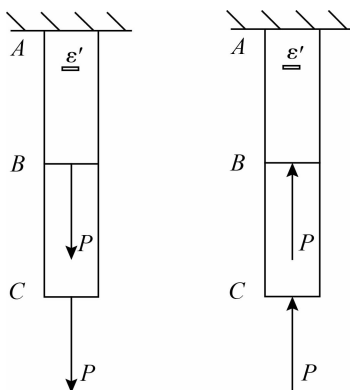
注意:以上各式中的伸长量 Δl 应理解为代数值,与 $N(x)$ 同号。

2. 用“以切线代替圆弧线”的方法计算简单桁架的节点位移:

应用范围:线弹性范围的小变形问题

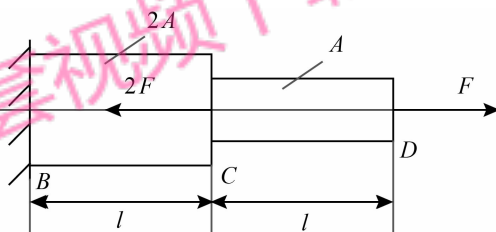
例:1. 图示轴向受拉杆,外力 P ,横截面面积 A ,弹性模量 E ,

泊松比 μ 均为已知,则 AB 段的横向线应变 $\varepsilon' =$ _____;若为轴向受压杆,则 AB 段的横向线应变 $\varepsilon' =$ _____。



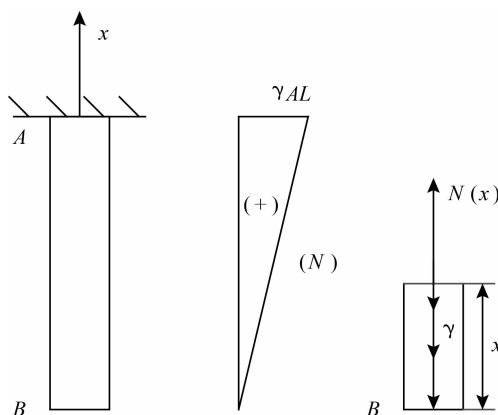
本题解析见精彩视频课程。

2. 由同种材料制成的变截面杆的横截面面积分别为 A 和 $2A$,受力如图, E 为常数,则 D 截面的位移为 _____。



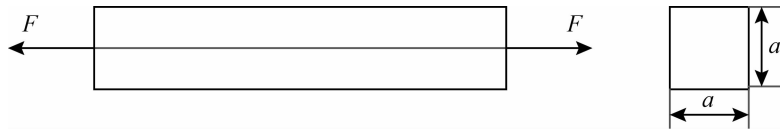
本题解析见精彩视频课程。

3. 作出图示竖直悬挂且仅受自重作用的等直杆的轴力图,并求杆的总伸长。已知杆的横截面面积为 A ,长度为 L ,材料的弹性模量为 E ,容重为 γ 。



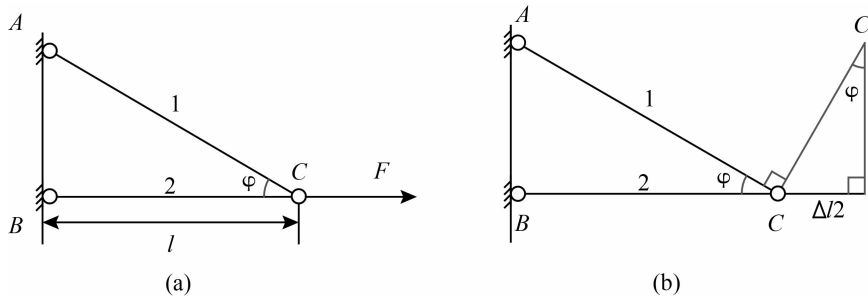
本题解析见精彩视频课程。

4. 图示受轴向拉力 F 作用的杆件, 横截面为边长为 a 的正方形, 已知: 材料的弹性模量为 E , 泊松比为 μ 。求: 杆件变形后横截面面积的改变量。



本题解析见精彩视频课程。

5. 构架受力及尺寸如图, 求节点 C 的水平位移和铅垂位移。已知两杆的抗拉压刚度均为 EA , 角 $\varphi = 30^\circ$ 。

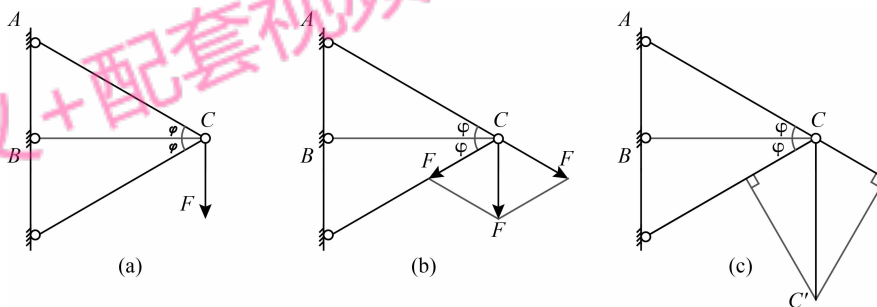


本题解析见精彩视频课程。

提问: 同一问题, 根据所设内力方向的不同, 相应的可以作出不同的变形协调图, 则所解得的结果会受影响吗?

6. 图示结构中, 角 $\varphi = 30^\circ$, 两杆的材料、横截面面积及长度均相同, 则节点 C 的位移方向为()

- A. 左下方向; B. 右下方向; C. 竖直方向; D. 不能确定。



本题解析见精彩视频课程。

考点 4: 一次超静定杆系(包括温度应力和装配应力)的求解

1. 超静定问题的一般解法: $\left\{ \begin{array}{l} \text{静力学平衡方程} \\ \text{变形协调程(几何方程)} \\ \text{物理方程(本构方程)} \end{array} \right.$

2. 拉压超静定问题的本构方程:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}; \quad \text{或: } \Delta l = \int_l \frac{N(x)dx}{EA(x)}; \quad \text{或: } \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i}。$$

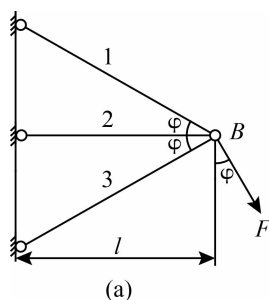
3. 温度应力和装配应力的特点:

- (1) 只在超静定结构中产生；
- (2) 应力(从而内力)的分配额度(自动)与各构件的刚度成正比；
- (3) 温度应力问题的本构: $\Delta l = \alpha l \Delta t$ (系数 α 称为材料的线热胀系数,对钢材: $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$);
- (4) 装配应力的数值正比于相对制造误差 δ/l ($\delta < l$)。

4. 一次超静定杆系的求解:

例:

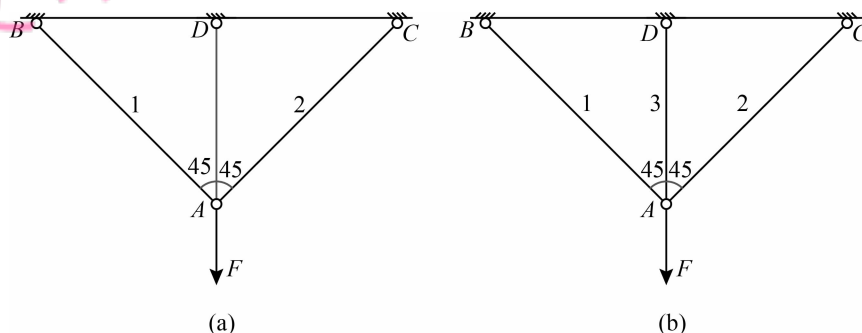
1. 构架受力及尺寸如图,已知三根杆的抗拉压刚度均为 EA ,角 $\varphi = 30^\circ$ 。求各杆的内力及节点 B 的水平位移和铅垂位移。



本题解析见精彩视频课程。

提问:若设 N_3 也为拉力,则变形协调图为何?

2. 图(a)所示支架的两根杆横截面面积相等、材料相同,受力 F 作用。已知 $F = 30\text{kN}$, $[\sigma] = 100\text{MPa}$, $E = 200\text{GPa}$ 。试设计两杆的横截面面积 A 。若现有两杆的横截面面积只是设计值的 0.8 倍,为了满足结构的强度要求,在铅垂方向又增加一根不同材料的杆 AD (如图(b)所示),试设计杆 AD 的横截面面积和材料的弹性模量。

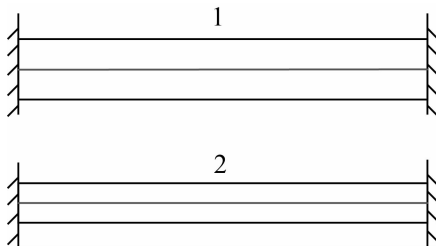


本题解析见精彩视频课程。

3. 结构由于制造误差或温度变化,有()
- A. 静定结构中将引起变形,超静定结构中将引起应力;
- B. 静定结构中将引起应力,超静定结构中也引起应力;
- C. 无论静定结构或超静定结构,都将引起变形和应力;
- D. 静定结构中将引起变形和应力,超静定结构中将引起应力。

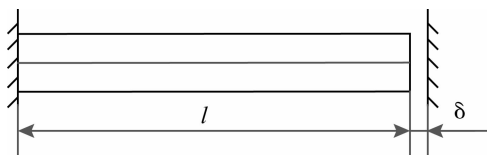
本题解析见精彩视频课程。

4. 图示 1、2 两杆的材料和长度均相同,但 $A_1 > A_2$ 。若 2 两杆的温度都下降 Δt ,则两杆的轴力之间的大小关系为 N_1 _____ N_2 ;应力之间的大小关系为 σ_1 _____ σ_2 (填 $>$ 、 $<$ 、 $=$)。



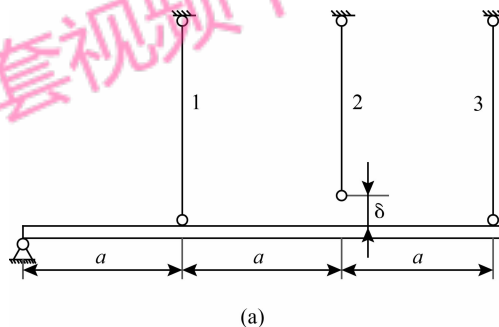
本题解析见精彩视频课程。

5. 如图所示,等截面直钢杆长 $l = 10\text{m}$,一端固定一端自由。材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$,线热胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} (1/^\circ\text{C})$ 。为保证构件正常工作,自由端在环境温度为 0°C 时预留 $\delta = 5\text{mm}$ 的伸缩缝。若要求杆内最大轴向应力的绝对值不超过 50MPa ,则允许的环境温度变化为多少摄氏度?



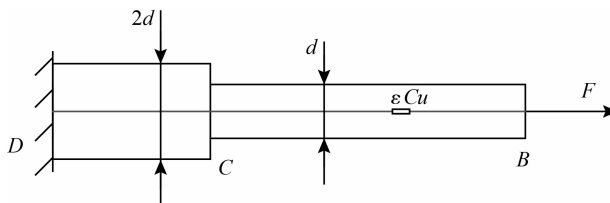
本题解析见精彩视频课程。

6. 图示结构,刚性梁由三根钢杆支撑,钢杆的弹性模量同为 $E = 210\text{GPa}$,横截面面积均为 $A = 20\text{cm}^2$,2 杆的长度比 1、3 杆短了 $\delta = 1\text{mm}$ 。求结构安装后,各杆横截面上的应力。



本题解析见精彩视频课程。

7. 图示阶梯轴由钢(DC 段)和铜(BC 段)两部分制成,承受轴向载荷 F 作用, $d = 40\text{mm}$,铜的弹性模量和许用应力分别为 $E_{\text{Cu}} = 100\text{GPa}$, $[\sigma_{\text{Cu}}] = 100\text{MPa}$;钢的弹性模量和许用应力分别为 $E_{\text{st}} = 200\text{GPa}$, $[\sigma_{\text{st}}] = 160\text{MPa}$ 。在 BC 段所贴应变片测得的轴向正应变为 $\varepsilon_{\text{Cu}} = 1.0 \times 10^{-3}$,校核此杆的强度,并求 DC 段的轴向正应变 ε_{st} 。



本题解析见精彩视频课程。

考点5:连接件的实用强度计算

1. 剪切面和挤压面及其判定:

剪切面:剪力 F_s 存在的面,其面积记为 A_s ;

挤压面:产生挤压的区域,其面积记为 A_{bs} 。

特征:

剪切面 // 载荷 F ; 挤压面 \perp 载荷 F ; \Rightarrow 剪切面 \perp 挤压面。

2. 工况:单剪切和双剪切

单剪切:连接件中仅有一个剪切面;

双剪切:连接件中有两个剪切面。

3. 附注:

(1) 不考虑剪切面上各点剪应力的真实分布规律,只从实用的角度出发,则其总存在一个平均分布值,记为 τ ;

(2) 产生挤压的区域实际发生的是塑性变形。不考虑挤压面上各点挤压应力的真实分布规律,只从实用的角度出发,则其总存在一个平均分布值,记为 σ_{bs} (σ_{bs} 实际是压强的概念)。

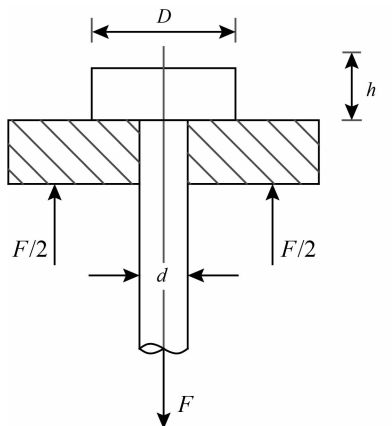
4. 实用强度计算:

(1) 剪切实用强度计算: $\tau = \frac{F_s}{A_s} \leq [\tau] = \frac{\tau_{破坏}}{n} = \frac{F_{破坏}}{A_s \cdot n}$;

(2) 挤压实用强度计算: $\sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}] = \frac{\sigma_{bs,破坏}}{n} = \frac{F_{破坏}}{A_{bs} \cdot n}$ 。

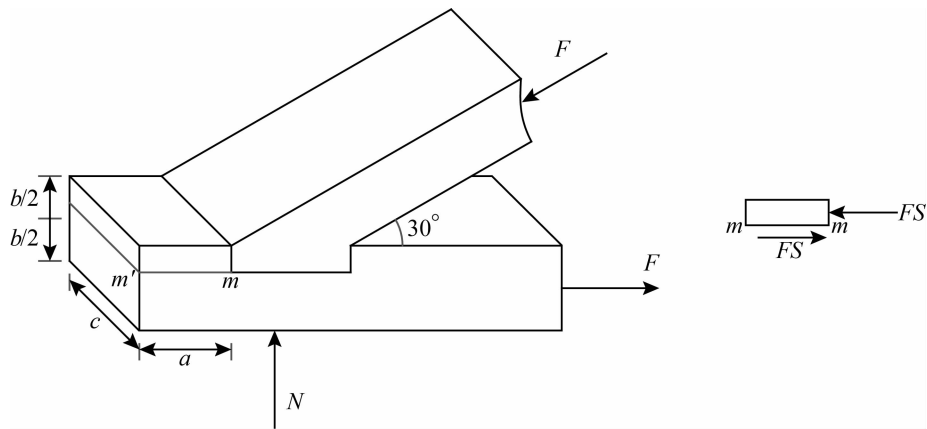
例:

1. 图示螺栓受拉力 F 作用,图示各尺寸以及材料的 $[\sigma]$ 、 $[\tau]$ 、 $[\sigma_{bs}]$ 均已知,求拉力 F 的许用值 $[F]$ 。



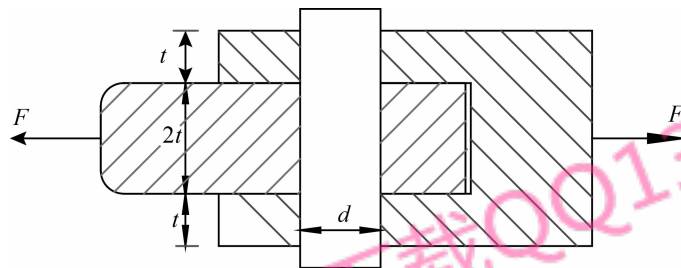
本题解析见精彩视频课程。

2. 木榫接头如图所示,已知 $F_1 = 20\text{kN}$, $a = 10\text{cm}$, $b = 8\text{cm}$, $c = 15\text{cm}$,木材顺纹的许用切应力 $[\tau] = 1\text{MPa}$,顺纹的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 10\text{MPa}$,校核木榫接头顺纹方向的剪切和挤压强度。



本题解析见精彩视频课程。

3. 销钉连接如图所示, 已知力 $F = 20\text{kN}$, 销钉材料的许用切应力 $[\tau] = 60\text{MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 180\text{MPa}$, $t = 10\text{mm}$, 按照强度条件确定销钉的直径 d 。



本题解析见精彩视频课程。

第三章 扭转

考点 1: 基本内容

1. 扭转的受力特点和变形特点

受力特点: 外力偶矩的作用面与杆件轴线垂直。

变形特点: 杆件各横截面绕轴线产生相对转动(表面纵向线也随之转过一个角度 γ)。

2. 外力偶矩的计算

若轴的传递功率 $P(\text{kW})$, 转速 $n(\text{r/min})$,

则作用在轴上的外力偶矩为: $M_e = 9549 \frac{P}{n} \quad (\text{N} \cdot \text{m})$

注意: 计算时, 功率 P 的单位为 kW 。

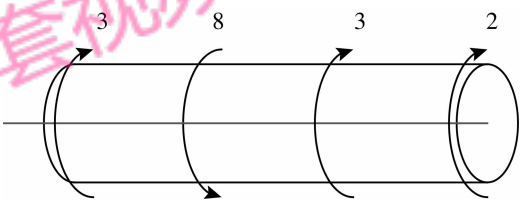
3. 扭矩的概念、计算(截面法 + 设正法)、扭矩图的绘制

(1) 扭矩: 矢量方向垂直于横截面的内力偶矩。

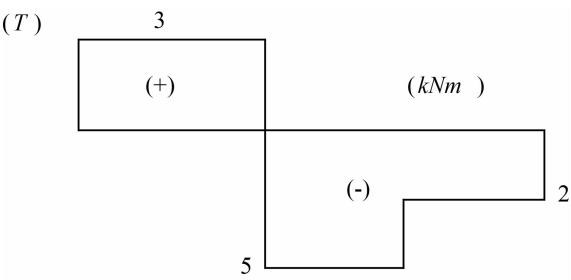
(2) 计算: 截面法 + 设正法(右手螺旋法则, 外正内负)。

例:

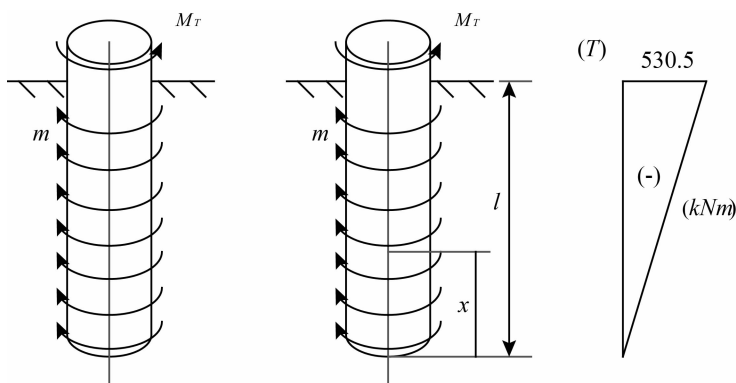
1. 作出图示杆件的扭矩图(外力偶矩单位: $\text{kN} \cdot \text{m}$)。



解:



2. 某钻机的功率为 10kW , 转速 $n = 180\text{r/min}$, 钻入土层的钻杆长度 $l = 40\text{m}$ 。若将土层对钻杆的阻力视为沿杆长均匀分布的力偶, 如图所示, 求此分布力偶的集度 m , 并作钻杆的扭矩图。



解:建立坐标系 x 如图,则: $T(x) = mx, 0 \leq x \leq l$

作用在钻杆上端的外扭转力偶矩为:

$$M_T = 9549 \frac{P}{n} = 9549 \frac{10}{180} = 530.5 (N \cdot m)$$

$$\text{故: } \sum M_x = 0, M_T - ml = 0 \Rightarrow$$

$$\sum M_x = 0, m = \frac{M_T}{l} = \frac{530.5}{40} = 13.26 (N)$$

钻杆的扭矩图如图所示。

考点2:轴类构件的强刚度设计计算

1. 圆轴扭转时横截面和斜截面上的应力分布规律

$$(1) \text{横截面上的应力分布规律: } \begin{cases} \tau_\rho = \frac{T}{I_p} \rho \\ \sigma = 0 \end{cases}$$

$$\text{则: } \tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \rho_{\max} = \frac{T}{I_p} R = \frac{T}{W_p}$$

$$(2) \text{斜截面上的应力分布规律: } \begin{cases} \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha \\ \sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha \end{cases}$$

注:

a) 斜截面的方位角 α 定义为:从横截面的外法线转到斜截面的外法线的夹角,规定取值为“逆正顺负”;

b) 由上可知: $\sigma_{\max} = \sigma_{\pm 45^\circ} = -\tau \sin(\pm 90^\circ) = \mp \tau$, 此结果可解释铸铁和低碳钢的扭转破坏现象;

c) 圆(环)形截面对圆心的极惯性矩: $I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$;

圆轴的抗扭截面模量: $W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$;

圆轴的空心比: $\alpha = \frac{d}{D}$ 。

2. 切应力(双生)互等定理:

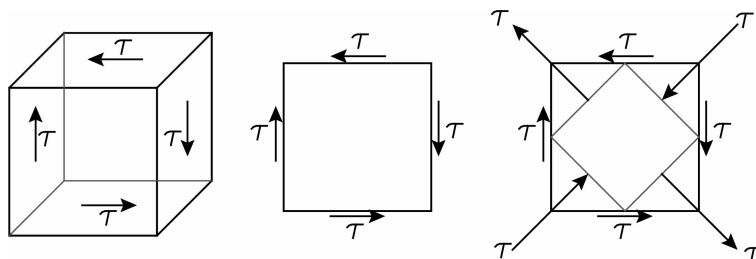
受力构件内任意一点的两个相互垂直的面上,切应力总是成对产生。二者的大小相等;方向均垂直于两面的交线,或同时指向此交线,或同时背离此交线。

注:此结论与截面上是否存在正应力无关。

3. 纯剪切应力状态:

(1)表现:单元体六个面上只有四个面上作用有互等的切应力;

(2)实质:二向应力状态, $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau$ 。

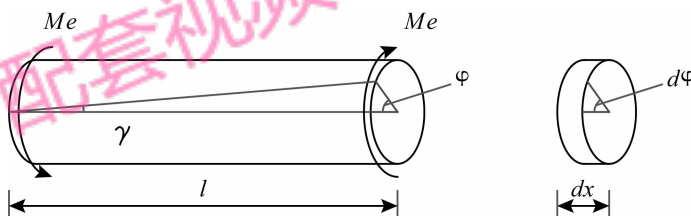


4. 圆轴扭转时的强度条件: $\tau_{\text{工作, max}} = \frac{T}{W_p} \leq [\tau] = \frac{\tau_u}{n}$

5. 圆轴扭转时的刚度条件:

(1)变形严重程度的度量:

单位长度扭转角: $\theta = \frac{\Phi}{l} = \frac{d\varphi}{dx} \quad (^\circ/m)$



(2)刚度条件: $\theta = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \quad (^\circ/m)$

提问:若轴的直径增大一倍,其他有关参数均不变,则其强度和刚度分别变为原来的多少倍?

答:强度变为原来的 8 倍;刚度变为原来的 16 倍。

6. 圆轴扭转时变形的计算

~ 相距 l 长的圆轴的两平行横截面间的相对转角 φ 值:

(1)一般情况: $T = T(x)$, $I_p = I_p(x)$, 则: $\varphi = \int_l \frac{T(x)dx}{GI_p(x)}$;

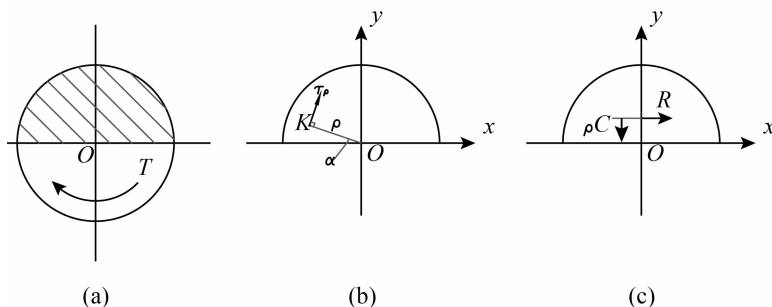
(2)等直圆轴,且 $T(x) = T = \text{const}$, 则: $\varphi = \frac{Tl}{GI_p}$;

(3)阶梯轴,或等直圆轴各段扭矩不同,则: $\varphi = \sum \frac{T_i l_i}{GI_{pi}}$ 。

注意:以上各式中相对转角 φ 应理解为代数值,与 $T(x)$ 同号。

例:

1. 图(a)所示为直径是 d 的圆轴,其横截面上的扭矩为 T 。求二分之一截面(阴影部分)上内力系的合力的大小、方向、作用点。



解:在半圆上任取一点 $K(\rho, \alpha)$, 点 K 邻域的微元面积 $dA = \rho d\rho d\alpha$ 。则: $R_x = \int_A \tau_\rho dA \sin\alpha = \int_A \frac{T}{I_p} \rho dA \sin\alpha = \int_0^{d/2} \frac{32T}{\pi d^4} \rho d\rho \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha = \frac{8T}{3\pi d}$ (→)

$$R_y = \int_A \tau_\rho dA \cos\alpha = \int_0^{d/2} \frac{32T}{\pi d^4} \rho d\rho \int_0^\pi \cos\alpha d\alpha = 0$$

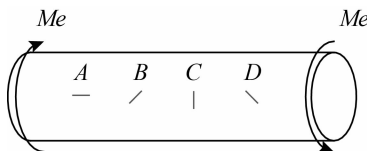
$$\text{故合力: } R = R_x = \frac{8T}{3\pi d} \quad (\rightarrow)$$

$$M_o(R) = R_x \cdot \rho_c = \frac{8T}{3\pi d} \cdot \rho_c = \frac{T}{2} \Rightarrow \rho_c = \frac{3\pi d}{16}$$

2. 两端受扭转力偶矩作用的实心圆轴,不发生屈服的最大许可载荷为 M_0 ,若将轴的横截面面积增大一倍,则最大许可载荷为_____。

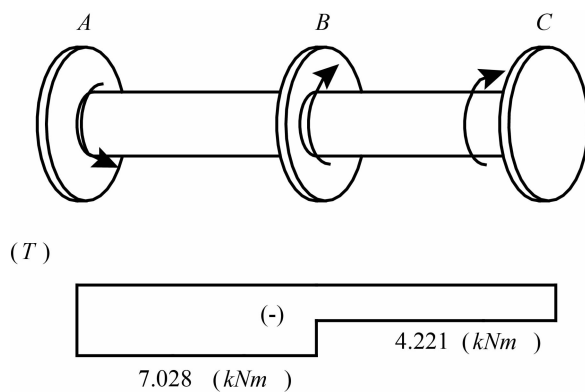
本题解析见精彩视频课程。

3. 如图所示,低碳钢制成的圆轴扭转时,将沿_____断面破坏;其破坏原因是由于_____应力引起的。铸铁制成的圆轴扭转时,将沿_____断面破坏;其破坏原因是由于_____应力引起的。



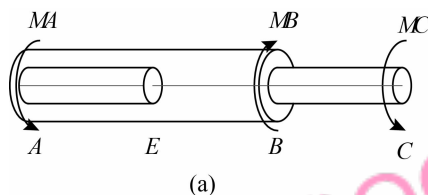
本题解析见精彩视频课程。

3. 图(a)所示等截面传动轴的转速 $n = 500 \text{ r/min}$,主动轮 A 的输出功率为 368 kW ,从动轮 B、C 的输出功率分别为 147 kW 、 221 kW 。已知许用切应力 $[\tau] = 70 \text{ MPa}$,许用单位长度转角 $[\theta] = 1.0 \text{ (}^\circ/\text{m)}$,传动轴材料的切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$ 。(1) 设计传动轴的直径 d ;(2) 给出一个提高传动轴承载能力的方法,并简述理由。



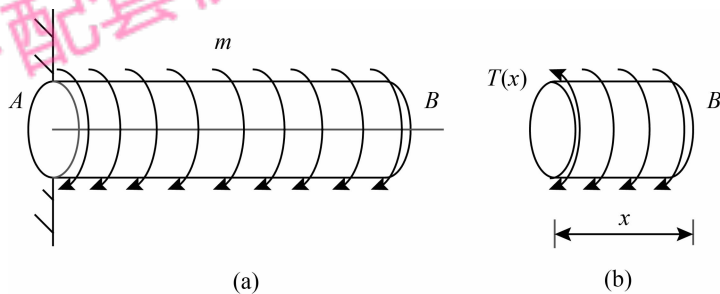
本题解析见精彩视频课程。

4. 阶梯形圆杆如图(a)所示, AE 段为空心, 外径 $D = 140\text{mm}$, 内径 $d = 100\text{mm}$; BC 段为实心, 直径 $d = 100\text{mm}$ 。外力偶矩 $M_A = 18\text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_B = 32\text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_C = 14\text{ kN} \cdot \text{m}$ 。已知许用切应力 $[\tau] = 80\text{MPa}$, 许用单位长度转角 $[\theta] = 1.2(\text{o}/\text{m})$, 传动轴材料的切变模量 $G = 80\text{ GPa}$, 校核此轴的强度和刚度。



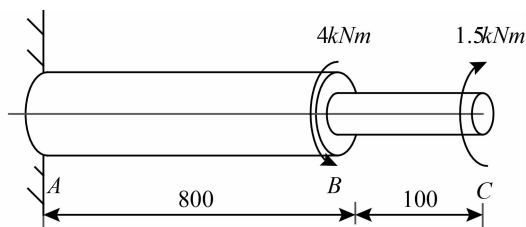
本题解析见精彩视频课程。

5. 直径为 d 的圆轴如图(a)所示, 长为 L , 轴材料的切变模量为 G , 受均布扭矩 m 作用, 求截面 B 的转角。

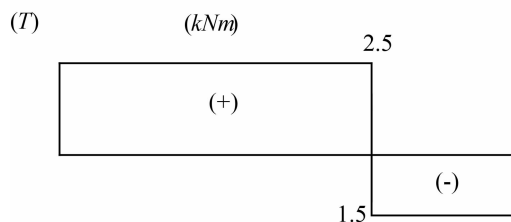


本题解析见精彩视频课程。

6. 阶梯轴受外加力偶作用, 如图(a)所示, 已知 AB、BC 段的直径分别为 $d_1 = 75\text{mm}$, $d_2 = 60\text{mm}$, 材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$, 求 C 截面相对 A 截面的扭转角。



(a)

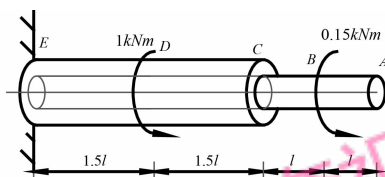


(b)

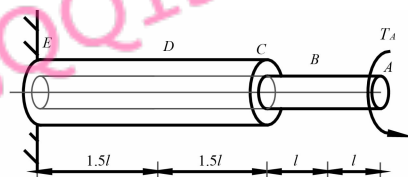
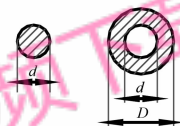
本题解析见精彩视频课程。

7. 阶梯空心轴, 在截面 B、D 处承受外力偶矩 $T_B = 0.15 \text{ kN} \cdot \text{m}$,

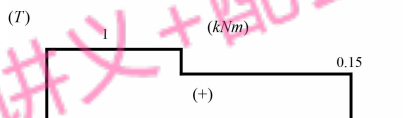
$T_D = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 作用, 如图 (a) 所示, 材料的切变模量 $G = 80 \text{ GPa}$, $l = 2 \text{ m}$, $D = 2d = 50 \text{ mm}$ 。现要以作用在截面 A 处的外力偶矩 T_A 代替 T_B 与 T_D , 如图 (c) 所示, 而要以截面 A 的转角 φ_A 保持不变, 求 T_A 。



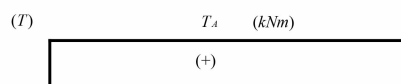
(a)



(c)



(b)



(d)

本题解析见精彩视频课程。

考点 3: 简单的扭转超静定问题的求解

1. 切应变和剪切胡克定律

(1) 切应变: $\gamma = \frac{r}{l} \varphi$ (r : 圆轴半径; φ : 相对转角);

(2) 剪切胡克定律:

当切应力不超过剪切比例极限时, 切应变正比于切应力, 即:

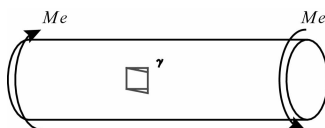
$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tau \leq \tau_p$$

2. 材料三个弹性常数之间的关系: $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

3. 简单的扭转超静定问题的求解：

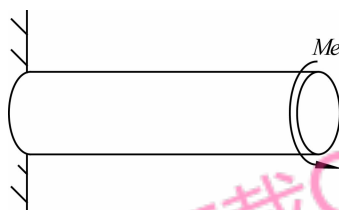
例：

1. 受扭转力偶 M_e 作用的等直圆截面杆长 $L = 1\text{m}$, 直径 $d = 20\text{mm}$, 材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$, 在 M_e 作用下两端截面的相对扭转角 $\varphi = 0.1\text{rad}$ 。求：(1) 此杆外表面沿图示方向的切应变；(2) 横截面上的最大切应力；(3) 扭转外力偶矩 M_e 。



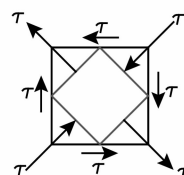
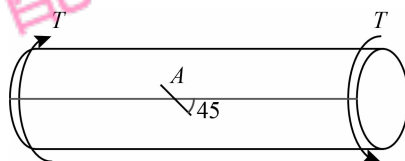
本题解析见精彩视频课程。

2. 圆截面橡胶棒的直径 $d = 40\text{mm}$, 杆长 $L = 0.3\text{m}$, 材料的切变模量 $G = 2.7\text{MPa}$ 。受扭后, 原来表面上互相垂直的圆周线和纵向线之间的夹角变为 86° 。求：(1) 此杆端截面的扭转角；(2) 横截面上的最大切应力；(3) 扭转外力偶矩 M_e 。



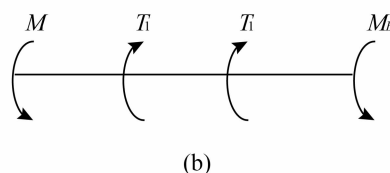
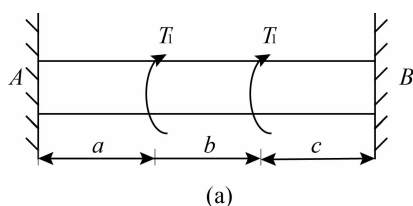
本题解析见精彩视频课程。

3. 已知一实心圆轴直径为 D , 两端作用的扭矩为 T , 测得该杆表面 A 点与轴线成 45° 方向上的正应变为 ε , 求材料的切变模量 G 。



本题解析见精彩视频课程。

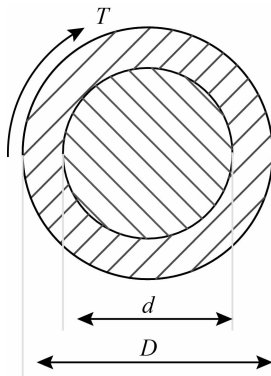
4. 如图(a)所示, 两端固定的圆截面钢杆 AB 受扭矩 T_1 、 T_2 作用, 求钢杆两端的反作用力偶矩 M_A 和 M_B 。



本题解析见精彩视频课程。

5. 如图所示组合轴, 由一直径 $d = 75\text{mm}$ 的圆钢杆, 外部牢固粘结一内径为 $d = 75\text{mm}$, 外径为 D 的空心黄铜圆管构成。组合轴两端承受扭矩 $T = 16\text{kN} \cdot \text{m}$, 若钢杆的 $G_s = 80\text{GPa}$, 铜管的 $G_A = 20\text{GPa}$,

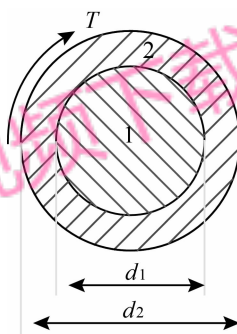
(1) 若两种材料的杆横截面上分担的扭矩同样大, 求铜管的外径 D 为多少? (2) 求内、外两杆中的最大切应力各为多少?



本题解析见精彩视频课程。

6. 图示组合杆由完好粘结的实心杆 1 和圆套管 2 组成, 横截面尺寸如图所示, 组合杆承受的扭矩为 T 。求:

(1) 当两杆材料相同, 切变模量均为 G 时, 两杆中的最大切应力? (2) 当两杆材料不同, 切变模量分别为 G_1 和 G_2 时, 二者分担的扭矩各为多少?



本题解析见精彩视频课程。

考点 4: 关于非圆截面杆的扭转

1. 扭转与自由扭转的概念:

(1) 非圆截面杆扭转时的现象:

与圆截面杆扭转时不同, 非圆截面杆扭转时将发生翘曲, 横截面不再保持为平面。

(2) 约束扭转: 杆件受扭时有约束作用。

(3) 自由扭转: 杆件受扭时没有约束作用。

(4) 约束扭转与自由扭转的异同:

杆件自由扭转时, 各横截面的翘曲程度相同, 故横截面上只有切应力, 没有正应力; 杆件约束扭转时, 各横截面的翘曲程度不同, 故横截面上既有切应力, 也有正应力。

注: 对实心的非圆截面杆, 约束扭转时横截面上的正应力很小, 可以忽略。

2. 截面杆扭转:

(1) 上切应力分布规律的主要结论:

(a) 周边上各点的切应力与周边相切;截面角点处切应力为零;沿截面的对称线各点的切应力垂直于对称轴;

(b) 最大切应力发生在长边中点处,其值为: $\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha h b^2}$;

(c) 最大切应力发生在短边中点处,其值为: $\tau_1 = \nu \tau_{\max} = \frac{\nu T}{\alpha h b^2}$

其中: ν 和 α 为与截面尺寸 h/b 比值有关的系数。

(2) 面杆扭转时,杆两端面间的扭转角: $\varphi = \frac{Tl}{G\beta h b^3} = \frac{Tl}{GI_t}$

其中: β 为与截面尺寸 h/b 比值有关的系数。

3. 开口与闭口薄壁杆件自由扭转时横截面上切应力分布规律

的主要结论:

(1) 开口薄壁杆件自由扭转时:

(a) 边上各点的切应力与周边相切;其他各处的切应力沿壁厚呈线性分布,方向与周边相切;最大切应力发生在壁厚最大的狭长矩形的长边中点处: $\tau_{\max} = \frac{T\delta_{\max}}{\frac{1}{3} \sum h_i \delta_i^3} = \frac{T\delta_{\max}}{I_t}$;

(b) 两端面间的扭转角: $\varphi = \frac{Tl}{\frac{1}{3} G \sum h_i \delta_i^3} = \frac{Tl}{GI_t}$ 。

(2) 闭口薄壁杆件自由扭转时:

(a) 横截面上各点的切应力与截面中线相切,并沿壁厚均匀分布;最大切应力发生在壁厚最小处:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{2\omega\delta_{\min}};$$

其中: ω 为截面中线所围面积;

(b) 两端面间的扭转角: $\varphi = \frac{Tl}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)}$

其中: s 为截面中线的弧坐标; ω 为截面中线所围面积。

例:

一闭口薄壁圆管受扭矩 T 作用,若在其他条件不变的前提下将其平均半径增加一倍,则杆中的应力和变形分别变为原来的_____和_____;同样情况的开口薄壁圆管中的应力和变形分别变为原来的_____和_____。

本题解析见精彩视频课程。



第四章 弯曲内力

考点 1: 基本内容

1. 若干基本概念:

(1) 弯曲: 直杆在作用于其轴线所在平面内的外力系作用下, 杆的轴线由直线变为曲线的变形形式。

(2) 平面弯曲: 外力系合力的作用线作用于梁的轴线所在平面内的, 使梁在弯曲后, 其轴线仍为该平面内的(平面)曲线的弯曲变形形式。

(3) 对称弯曲: 梁有一纵向对称平面, 外力系合力的作用线作用于此纵向对称平面内, 此时的平面弯曲称为对称弯曲。

(4) 横力弯曲: 梁(段)在垂直于其轴线的外力系作用下发生的弯曲。此时, 梁(或梁内的某若干段)内的横截面上既有弯矩又有剪力(从而在相应部分横截面上既有弯曲正应力又有弯曲剪应力)的弯曲变形形式(又称剪切弯曲)。

(5) 纯弯曲: 在外力系作用下, 梁(或梁内的某若干段)内的横截面上只有弯矩而无剪力(从而在相应部分横截面上只有弯曲正应力而无弯曲剪应力)的弯曲变形形式。

提问: 弯曲、平面弯曲、对称弯曲、横力弯曲、纯弯曲概念的相互关系如何?

答: 对称弯曲必为平面弯曲, 反之未必;

横力弯曲可能是平面弯曲, 也可能不是平面弯曲;

纯弯曲可能是平面弯曲, 也可能不是平面弯曲;

纯弯曲必定不是横力弯曲, 反之亦然。

注: 对于无对称截面的梁, 外力系合力的作用线必须处于与梁横截面弯(曲中)心与形心主惯性平面平行的平面内, 才能产生平面弯曲。

2. 梁的力学计算简图的建立过程与步骤:

(1) 以(变形前的)轴线代替梁的空间位置;

(2) 约束的简化: 约束所起限制作用的本质;

(3) 载荷的简化: 载荷的特征。

3. 静定(单)梁的三种基本形式:

(1) 简支梁; (2) 外伸梁; (3) 悬臂梁。

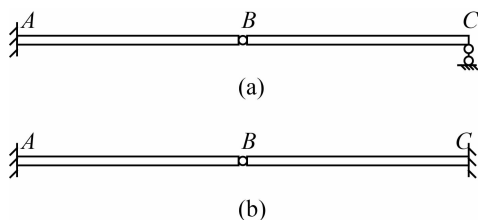
4. 组合梁的概念及构成形式:

(1) 组合梁: 由主梁与副梁组合构成的梁;

(2) 组合梁的构成形式: 主梁必有(至少一个); 副梁可有亦可无。

例：

如下两图所示组合梁，(a) 梁 AB 部分为主梁而 BC 部分为副梁；(b) 梁 AB 部分和 BC 部分均为主梁，无副梁。

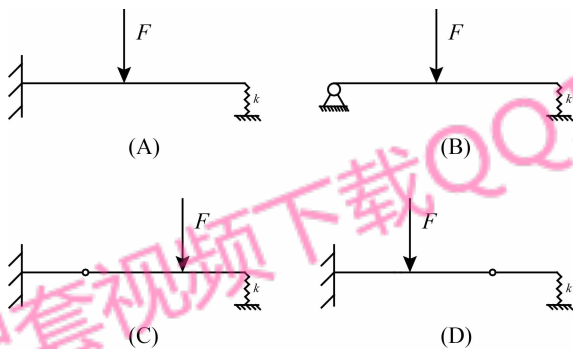


(3) 组合梁上不同部分载荷作用后引起的力学效应：

载荷作用于副梁上，将使副梁和主梁均产生力的内效应；载荷作用于主梁上，将使主梁产生力的内效应，而副梁只会产生相应的刚体位移，但不会产生力的内效应。

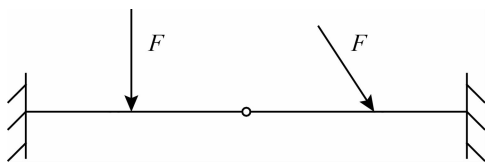
例：

1. 下列梁中，弹簧所受压力与弹簧刚度有关的是_____梁。



本题解析见精彩视频课程。

2. 下图所示梁为()梁。



A. 静定梁；

B. 一次超静定梁；

C. 二次超静定梁；

D. 三次超静定梁。

本题解析见精彩视频课程。

考点 2：梁的剪力图和弯矩图的绘制

1. 弯曲内力及其符号规定；弯曲内力的基本求解方法：

(1) 弯曲内力：剪力 F_s 和弯矩 M

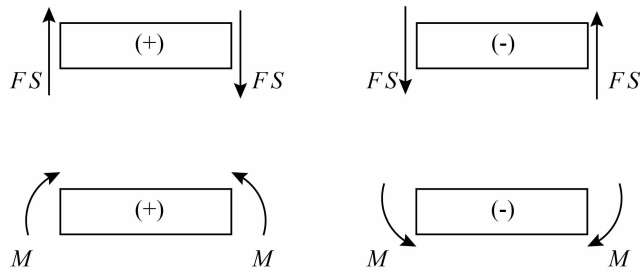
剪力 F_s ：内力系的主矢与横截面相切的分量；

弯矩 M ：内力系对横截面形心的主矩（其矢量方向垂直于杆件的轴线方向）。



(2) 弯曲内力的基本求解方法: 截面法 + 设正法;

(3) 弯曲内力的符号规定:



2. 剪力方程和弯矩方程:

剪力、弯矩与截面位置坐标之间的函数关系。

直杆: $F_s = F_s(x)$; $M = M(x)$;

曲杆: $F_s = F_s(s)$; $M = M(s)$ 。(s 为曲杆轴线的弧坐标)

3. 剪力、弯矩与载荷集度间的微积分关系:

$$(1) \text{关系: } q(x) = \frac{dF_s(x)}{dx}; F_s(x) = \frac{dM(x)}{dx}; \Rightarrow q(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2}。$$

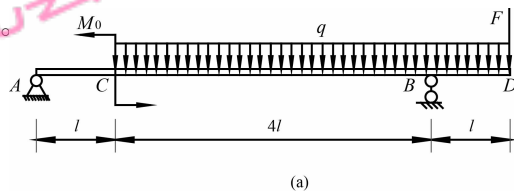
(2) 应用:

(a) 检验梁的剪力图、弯矩图和受力图的关系;

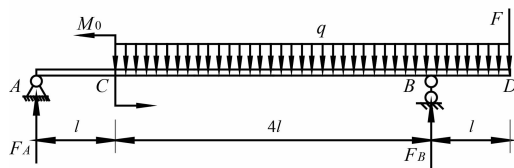
(b) 绘制梁的剪力图 and 弯矩图。

例: 1. 写出图示梁的剪力方程和弯矩方程, 并作出梁的剪力图 and 弯矩图。其中: $M_0 = 16 \text{ kN} \cdot \text{m}$, F

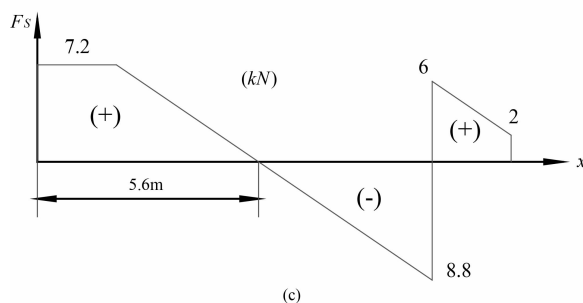
$= 2 \text{ kN}$, $q = 2 \text{ kN/m}$, $l = 2 \text{ m}$ 。



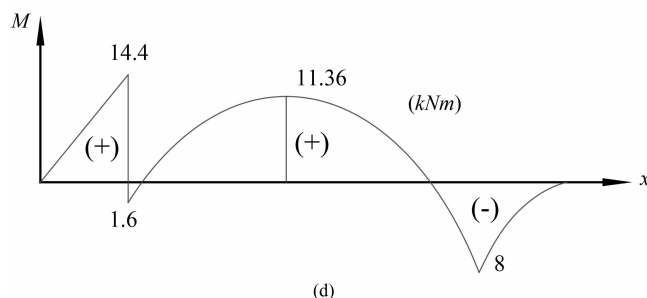
(a)



(b)



(c)



解:(1)求支反力:分析受力如图(b)所示:

$$\begin{cases} \sum Y = 0, F_A + F_B - F - 5ql = 0 \\ \sum M_B = 0, -F_A \times 6l + 5ql \times 1.5l + M_0 - Fl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_A = 7.2 \text{ (kN)} \\ F_B = 14.8 \text{ (kN)} \end{cases}$$

(2)写梁的剪力方程和弯矩方程:

AC 段($0 \leq x \leq 5l$): $F_S(x) = F_A = 7.2 \text{ (kN)}$

$M(x) = F_A x = 7.2x \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

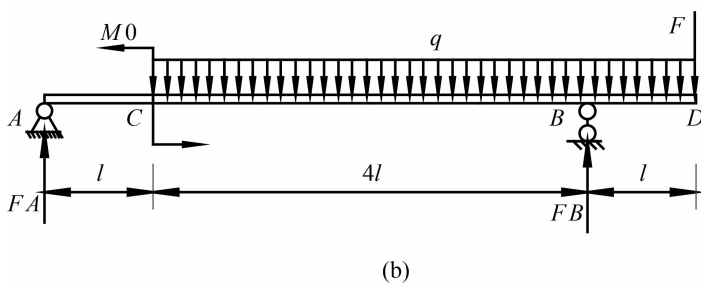
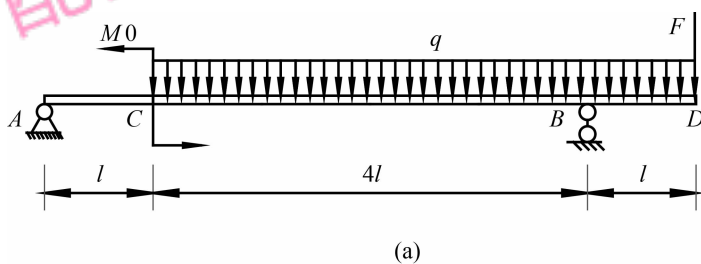
CB 段($5l \leq x \leq 10l$): $F_S(x) = F_A - q(x - 5l) = 7.2 - 2(x - 5) \text{ (kN)}$

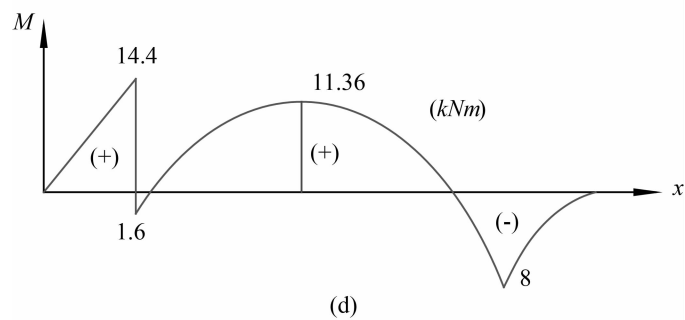
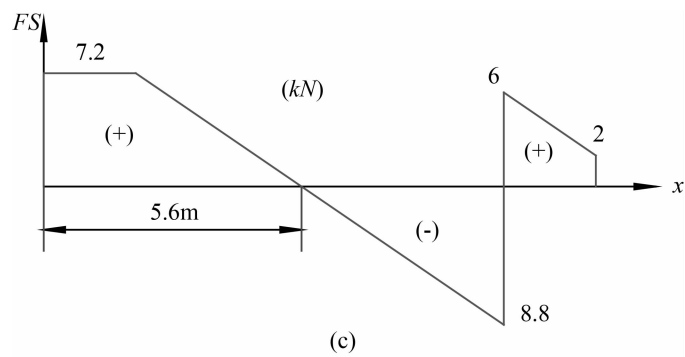
$M(x) = F_A x - M_0 - \frac{1}{2}q(x - 5l)^2 = 7.2x - 16 - (x - 5)^2 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

BD 段($10l \leq x \leq 15l$): $F_S(x) = F_A + F_B - q(x - 5l) = 22 - 2(x - 5) \text{ (kN)}$

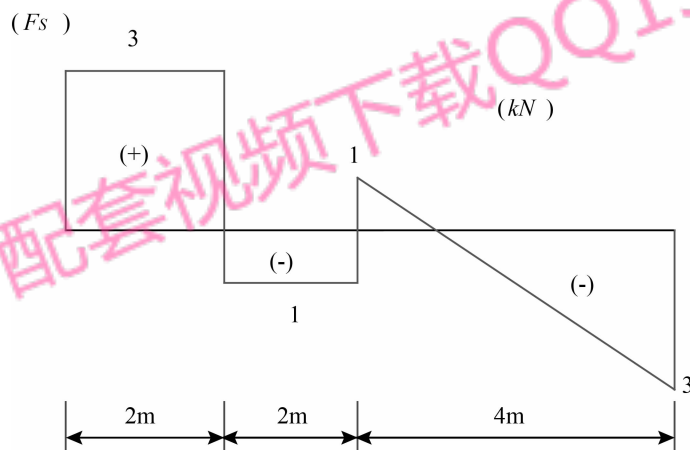
$M(x) = F_A x + F_B(x - 5l) - M_0 - \frac{1}{2}q(x - 5l)^2 = 7.2x + 14.8(x - 10) - 16 - (x - 5)^2 \text{ (kN} \cdot \text{m)}$

(3)作梁的剪力图和弯矩图如图(c)、(d)所示。



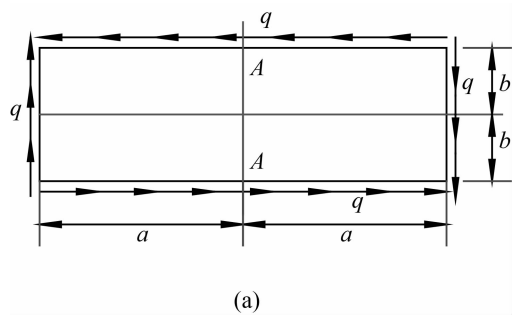


2. 设梁的剪力图如图所示,作出梁的受力图和弯矩图。已知梁上没有集中力偶作用。



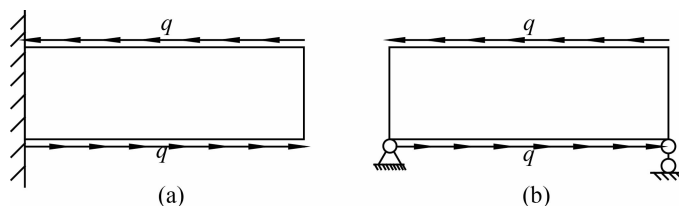
本题解析见精彩视频课程。

3. 平面框架受力如图(a)所示,四边均受到切向的均布载荷 q 作用,则 A - A 截面上的轴力、剪力、弯矩分别为_____、_____、_____。



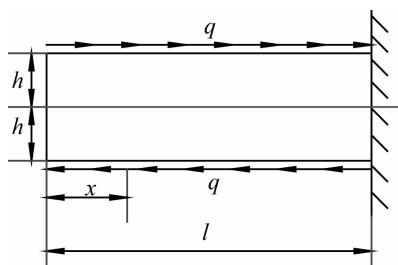
本题解析见精彩视频课程。

4. 图(a)与(b)所示矩形截面梁上下表面均受到切向的均布载荷 q 作用,则_____梁的任意截面上剪力均为零。



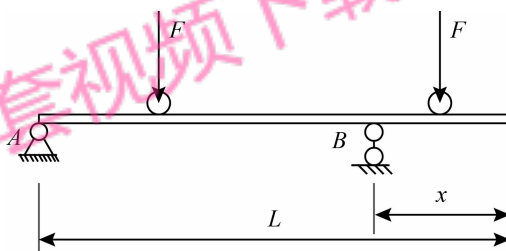
本题解析见精彩视频课程。

5. 作出图示梁的内力图。



本题解析见精彩视频课程。

6. 独轮车过跳板,若跳板的支座 A 为固定铰支座,则从最大弯矩考虑,活动铰支座 B 应置于何处为合理?



本题解析见精彩视频课程。

4. 用取点连线法绘制梁的剪力图和弯矩图:

(1) 基本结论 1: 求内力值

(a) 某面上剪力 = 该面以左部分向上之力 - 向下之力;

或: 某面上剪力 = 该面以右部分向之下力 - 向上之力;

(b) 某面上弯矩 = 该面一侧(以左部分或以右部分)


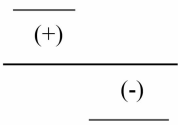
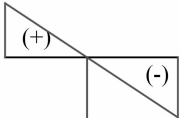


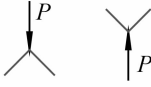
向上之力对截面形心点之矩 - 向下之力对截面形心点之矩;

若所取一侧有集中力偶,则其矩方向与向上之力对截面形心点之矩方向相同者为“+”;反之为“-”。

注意:应用以上结论求内力值,必须将待求内力的方向“设正”。

(2) 基本结论 2:

常用内力图线形状与载荷关系表:

	$q=0$	$q=C$ 	集中力 P 处	集中力偶 M 处
(FS)			突变，突 变值= P 值	不受影响， 没有变化
(M)		 二次抛物线	有尖点，但 仍然连续 	突变，突 变值= M 值

补充:自由端无集中力偶作用,则 $M = 0$;

铰支端无集中力偶作用,则 $M = 0$ 。

(3)用取点连线法绘制梁的剪力图和弯矩图的步骤:

(a)求支反力:二矩式求解;投影式校核;

(b)在坐标系中取点:用基本结论 1 求特殊截面的内力值;

(c)连线:用基本结论 2 将(b)中各点连成曲线;

(d)校核:用结论 2 进行检验。

注:取点(求特殊截面的内力值)的另一方法:

由于: $F_s(x) = \frac{dM(x)}{dx} \Rightarrow dM(x) = F_s(x)dx \Rightarrow \int_A^B dM(x) = \int_A^B F_s(x)dx \Rightarrow$

$M_B - M_A = \int_A^B F_s(x)dx \Rightarrow M_B = M_A + \int_A^B F_s(x)dx$

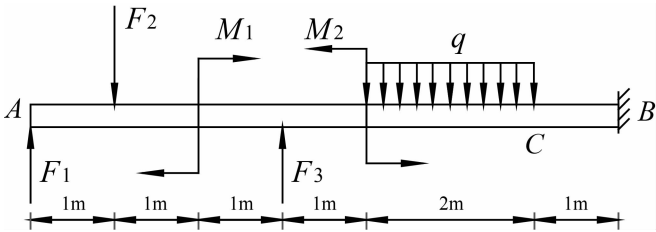
即: $M_B = M_A$ + 梁的 A、B 两截面之间剪力图的面积

提醒:注意所取的梁的 A、B 两截面的相互位置关系。

例:

1. 求图示悬臂梁 C 截面上的内力,其中: $M_1 = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $M_2 = 1 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $F_1 = 1 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$, $F_3 = 3$

kN , $q = 2 \text{ kN/m}$ 。



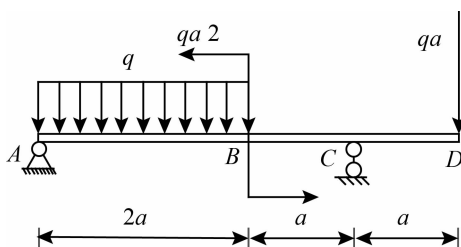
本题解析见精彩视频课程。

2. 将梁上的集中力偶左右平移时,梁的_____。



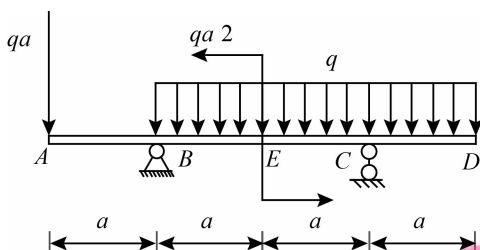
- A. 剪力图不变, 弯矩图变;
B. 剪力图不变, 弯矩图不变;
C. 剪力图变, 弯矩图不变;
D. 剪力图变, 弯矩图变。

3. 作出图示梁的剪力图和弯矩图。



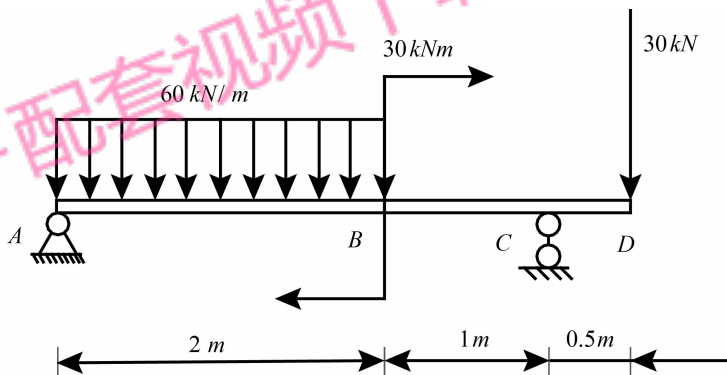
本题解析见精彩视频课程。

4. 作出图示梁的剪力图和弯矩图。



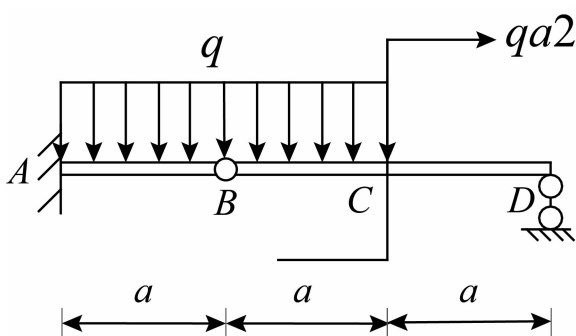
本题解析见精彩视频课程。

5. 作出图示梁的剪力图和弯矩图。



本题解析见精彩视频课程。

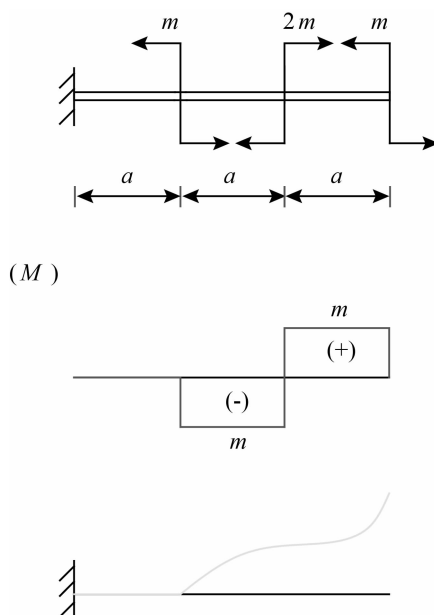
6. 作出图示梁的剪力图和弯矩图。



本题解析见精彩视频课程。



7. 作出图示梁的弯矩图,并画出梁的挠曲线的大致形状(不必计算)。



本题解析见精彩视频课程。

考点3:平面简单刚架、曲杆的内力计算和内力图的绘制

1. 平面简单刚架的内力计算和内力图的绘制:

(1) 平面刚架的内力:轴力、剪力、弯矩、扭矩;

(2) 内力符号的规定:轴力、剪力、扭矩同前;弯矩无符号规定;

(3) 内力图的绘制:弯矩约定画在受压一侧,即杆件弯曲变形凹入的一侧。习惯上以刚架外侧的弯矩为正。

2. 平面曲杆的内力计算和内力图的绘制:

(1) 平面曲杆的内力:轴力、剪力、弯矩、扭矩;

(2) 内力符号的规定:轴力、剪力、扭矩同前;弯矩以使曲杆的曲率增加(曲率半径减小、弯曲程度增大)者为正;

(3) 内力图的绘制:弯矩约定画在受压一侧,即杆件弯曲变形凹入的一侧。习惯上以曲杆内侧的弯矩为正。

注:

(1) 作刚架平面和平面曲杆的内力图的基本步骤同前,基本方法有二:一是根据内力方程描点作图;二是取点连线法。

(2) 用取点连线法作图时,应将前述基本结论修正为如下所述:

取点(即求内力值):

(a) 某面上剪力 = 该面一侧所有力之代数和;

(b) 某面上弯矩 = 该面一侧所有力对截面形心点之矩之代数和;

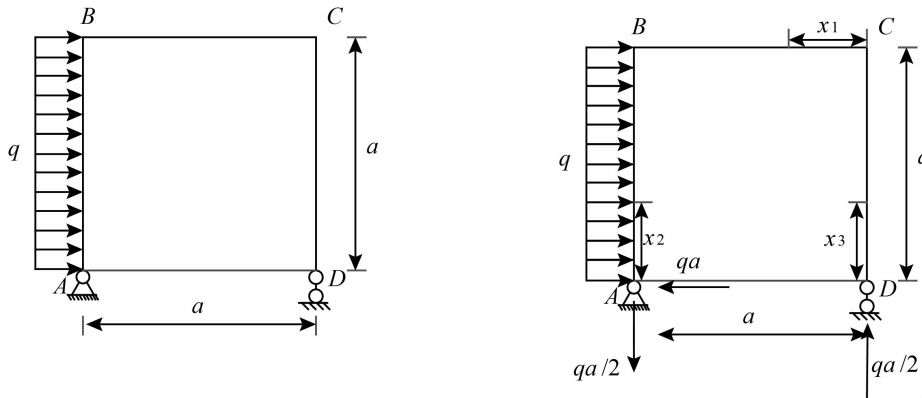


若所取一侧有集中力偶, 则其矩为“+”或为“-”应视求代数和时方向之约定, 二者方向相同者为“+”, 反之为“-”。

注意:应用以上结论求内力值, 未必将待求内力的方向“设正”。

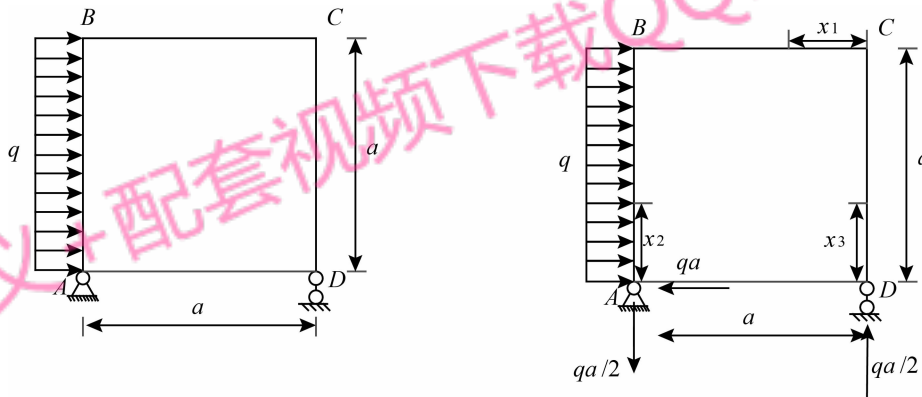
例:

1. 作出图示平面刚架的轴力图、剪力图和弯矩图。



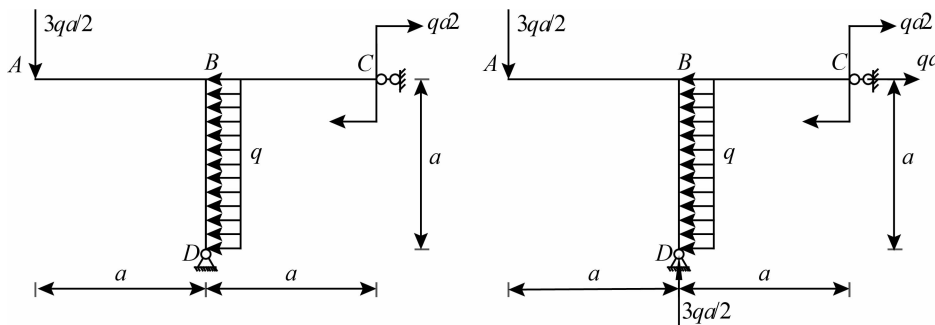
本题解析见精彩视频课程。

2. 作出图示平面刚架的轴力图、剪力图和弯矩图。



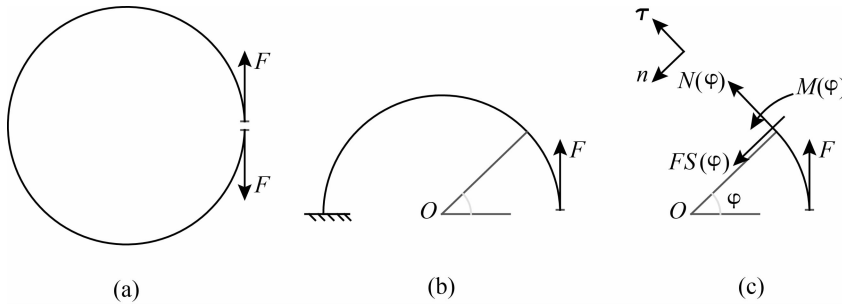
本题解析见精彩视频课程。

3. 作出图示平面刚架的轴力图、剪力图和弯矩图。



本题解析见精彩视频课程。

4. 写出图(a)所示平面开口圆形曲杆的内力方程, 已知圆半径为 R。



本题解析见精彩视频课程。

完整讲义+配套视频下载QQ1393546828



第十二章 超静定结构

考点 1: 基本内容

1. 超静定问题(静不定问题)的概念:

只依赖静力学平衡方程不能求得所有未知量(外部约束反力和内力)确定解答的问题。

2. 超静定问题的表现:

未知因素的个数 $n >$ 独立静力学平衡方程式的个数 m

注:超静定次数 k (静不定次数 k)的概念: $k = n - m$

3. 超静定问题的本质:

结构中存在“多余”约束。

4. 超静定结构的特点:

(1)刚度比同类静定结构大;强度比同类静定结构高;

(2)内力(从而应力)分配的额度自动正比于各构件的刚度;

(3)温度变化、制造误差及支座沉陷等因素均会导致结构出现内力(应力)。

5. 超静定结构的分类:

外部(外力)超静定结构;

内部(内力)超静定结构;

混合超静定结构。

6. 超静定问题的求解思想:

静力学平衡方程

变形协调程(几何方程)

物理方程(本构方程)

讨论:

从对偶空间的统一观点推导本章的重要结论(二)

当系统为线弹性体,且为准静态加载(即外力由零开始缓慢增大至终值)并系统始终处于平衡状态时,已有:

(1)功能原理: $U = \sum_{i=1}^m \int_G F_i \cdot d r_i = U(r_1, r_2, \dots, r_m) = W = V_\varepsilon$, 即系统的应变能此时与系统的势

函数 $U = U(r_1, r_2, \dots, r_m)$ 对应;

(2)与系统的余函数 $U^C = \sum_{i=1}^m F_i \cdot r_i - U = U^C(F_1, F_2, \dots, F_m)$ 对应的系统的应变余能,在数值上

有: $V_\varepsilon = V_C$;

$$\text{故: } F_i = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r_i}, r_i = \frac{\partial V_C}{\partial F_i} = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_i}, (i = 1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots(7)$$

式(7)分别表示卡氏第一定理、余能定理和卡氏第二定理。

以下由卡氏第二定理证明求解 n 次静不定结构的力法正则方程:

若杆系为 n 次超静定结构, 记已知外力引起的结构内力为 $M_p(x)$, 未知反力 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 引起的结构内力为 $M_{X_i}(x, X_i)$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ 。由于是静不定结构, 则以上两种载荷(外力和未知反力)同时存在, 故结构的总内力为: $M(x) = M_p(x) + \sum_{i=1}^n M_{X_i}(x, X_i)$ 。

应注意: 此处每个函数 $M_{X_i}(x, X_i)$ 均只是位置坐标 x 和对应指标的未知反力 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的函数, 而与其他未知反力 $X_j (i \neq j)$ 无关。

$$\text{从而结构的应变能为: } V_\varepsilon = \int_l \frac{M^2(x)}{2K} dx = \int_l \frac{[M_p(x) + \sum_{i=1}^n M_{X_i}(x, X_i)]^2}{2K} dx$$

因结构为线弹性, 故由卡氏第二定理可得未知反力 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 作用点沿力 X_i 作用方向的位移(记为 Δ_i)为:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_i} \int_l \frac{[M_p(x) + \sum_{i=1}^n M_{X_i}(x, X_i)]^2}{2K} dx \\ &= \int_l \frac{\partial}{\partial X_i} \frac{[M_p(x) + \sum_{i=1}^n M_{X_i}(x, X_i)]^2}{2K} dx \\ &= \int_l \frac{M_p(x) + \sum_{i=1}^n M_{X_i}(x, X_i)}{K} \cdot \frac{\partial M_{X_i}(x, X_i)}{\partial X_i} dx \dots\dots(\Delta) \end{aligned}$$

由于 $M_{X_i}(x, X_i)$ 只可能是未知反力 X_i 的一次函数, 故一般地可设:

$$M_{X_i}(x, X_i) = (k_i x + b_i) \cdot X_i = \bar{M}_i(x) \cdot X_i$$

其中 $k_i, b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为任意参数。则有: $\frac{\partial M_{X_i}(x, X_i)}{\partial X_i} = k_i x + b_i$, 则(Δ)式成为:

$$\Delta_i = \int_l \frac{M_p(x) + \sum_{j=1}^n M_{X_j}(x, X_j)}{K} \cdot (k_i x + b_i) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{即: } \Delta_i = \int_l \frac{(k_i x + b_i) M_p(x)}{K} dx + \int_l \frac{(k_i x + b_i) \cdot \sum_{j=1}^n M_{X_j}(x, X_j)}{K} dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

亦即:

$$\Delta_i = \int_l \frac{(k_i x + b_i) M_p(x)}{K} dx + \sum_{j=1}^n \int_l \frac{(k_i x + b_i) \cdot M_{X_j}(x, X_j)}{K} dx \dots(\Delta\Delta), (i = 1, 2, \dots, n)$$



若力 $X_i = 1$, 则: $M_{X_i}(x, X_i) = (k_i x + b_i) \cdot X_i = k_i x + b_i \triangleq \bar{M}_i(x)$

此时 $\bar{M}_i(x)$ 只是位置坐标 x 的函数; 同理, 若力 $X_j = 1$, 则:

$$M_{X_j}(x, X_j) = (k_j x + b_j) \cdot X_j = k_j x + b_j \triangleq \bar{M}_j(x)$$

此时 $\bar{M}_j(x)$ 只是位置坐标 x 的函数。因结构为线弹性, 当力 X_j 为任意值时, 有:

$$M_{X_j}(x, X_j) = (k_j x + b_j) \cdot X_j = X_j \cdot \bar{M}_j(x)$$

从而 $(\Delta \Delta)$ 式成为:

$$\Delta_i = \int_l \frac{\bar{M}_i(x) M_P(x)}{K} dx + \sum_{j=1}^n \int_l \frac{\bar{M}_i(x) \cdot X_j \bar{M}_j(x)}{K} dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

即:

$$\Delta_i = \int_l \frac{\bar{M}_i(x) M_P(x)}{K} dx + \sum_{j=1}^n \left[X_j \cdot \int_l \frac{\bar{M}_i(x) \cdot \bar{M}_j(x)}{K} dx \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{采用记号: } \Delta_{iP} = \int_l \frac{\bar{M}_i(x) M_P(x)}{K} dx ;$$

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{\bar{M}_i(x) \bar{M}_j(x)}{K} dx ,$$

则上式成为:

$$\Delta_i = \Delta_{iP} + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

并且易见: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, 即柔度阵为对称阵。

此即 n 次静不定结构的力法正则方程, 若按照指标 $i = 1, 2, \dots, n$ 展开后即可写成常见的矩阵形式。

考点 2: 力法正则方程及其应用

1. n 次超静定结构力法正则方程的形式:

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. 力法正则方程中各项系数的意义:

δ_{ij} :

力 $X_j = 1$ 单独作用于结构时在力 X_i 作用点沿 i 方向所产生的位移;

Δ_{iP} :

已知外力单独作用于结构时在力 X_i 作用点沿 i 方向所产生的位移。

注：

若所拆除的约束不是刚性约束(即所拆除的约束为弹性约束)时,方程等号右端必为非零值,而应为弹性约束在力 X_i 作用点沿 i 方向所产生的变形量。

3. 力法正则方程的本质：

变形协调方程

4. 力法正则方程的应用：

(1) 利用结构的对称性简化超静定结构：

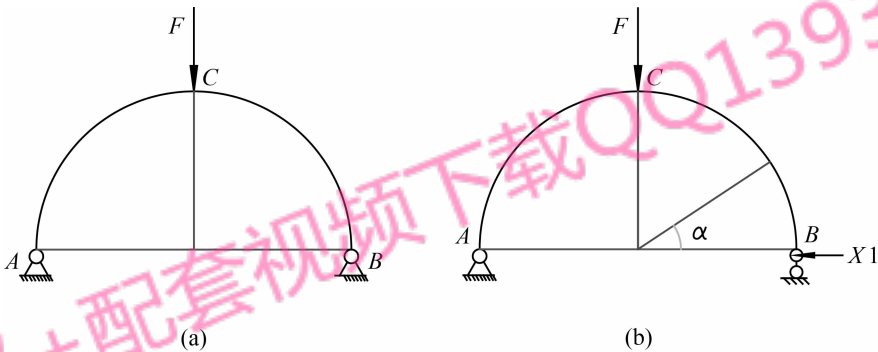
结构对称、载荷对称,则在对称截面处的反对称内力为零；

结构对称、载荷反对称,则在对称截面处的对称内力为零。

(2) 力法正则方程求解超静定结构。

例：

1. 图(a)所示为圆弧形小曲率杆,其抗弯刚度 EI 为常量,半径为 R ,所受集中力 F 铅垂向下,求其支反力。

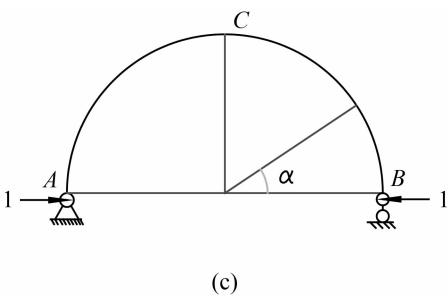


解：(1) 构建相当系统如图(b)所示,变形协调关系为： $\Delta_1 = 0$ 。

(2) 列出内力方程：

$$M(\alpha) = \begin{cases} X_1 \cdot R \sin \alpha - \frac{1}{2} F R (1 - \cos \alpha) & \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ X_1 \cdot R \sin \alpha - \frac{1}{2} F R (1 - \cos \alpha) + F R \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) & \left(\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \right) \end{cases}$$

(3) 列出单位力单独作用时(如图(c)所示)的内力方程：



$$\bar{M}(\alpha) = R \sin \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$



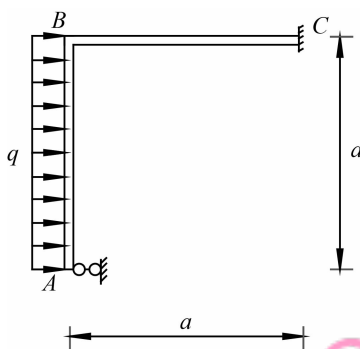
(4) 由莫尔积分求位移 Δ_1 :

$$\Delta_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(X_1 \cdot R \sin \alpha - \frac{1}{2} FR(1 - \cos \alpha) \right) R \sin \alpha}{EI} d(R\alpha) = 0$$

$$\text{解得: } X_1 = \frac{2}{\pi} F \quad (\leftarrow)$$

(4) 由平衡方程, 得: $X_A = \frac{2}{\pi} F \quad (\rightarrow)$; $Y_A = Y_B = \frac{1}{2} F \quad (\uparrow)$

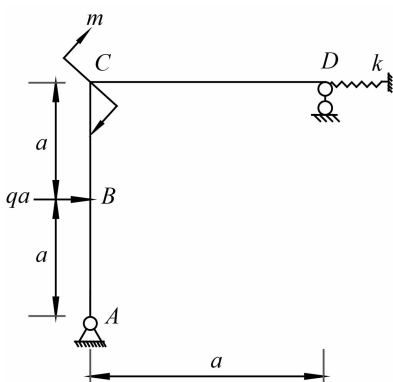
2. 如图(a)所示, 平面刚架各段的抗弯刚度均为 EI , (1) 求 A 点的水平反力; (2) 求 A 点的垂直位移。



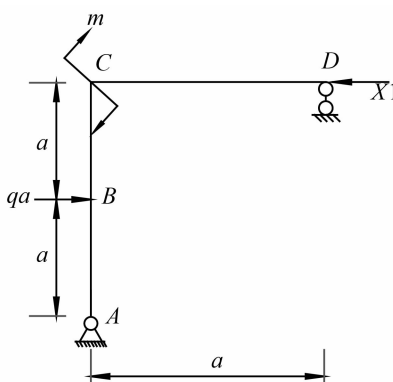
(a)

本题解析见精彩视频课程。

3. 平面刚架受力及尺寸如图(a)所示, 刚架的两段杆抗弯刚度均为 EI (常数), 水平弹簧的刚度系数 $k = -\frac{8EI}{3a^3}$, 不计轴力和剪力对变形的影响, 求: (1) 刚架所受的全部约束反力; (2) 刚架 CD 段中点处的铅垂位移。



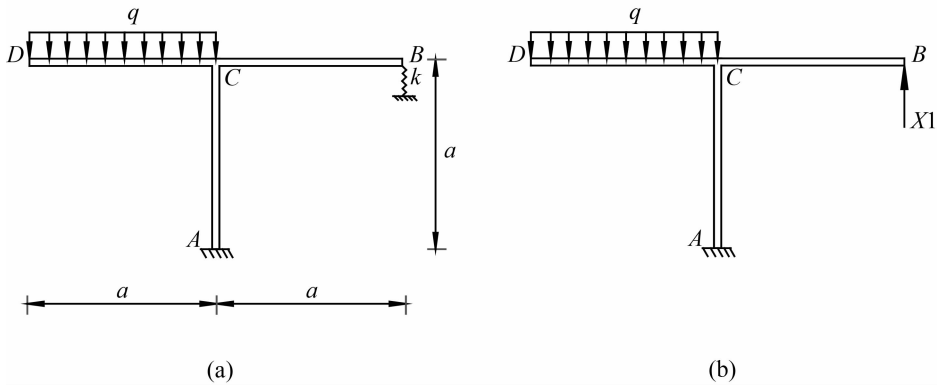
(a)



(b)

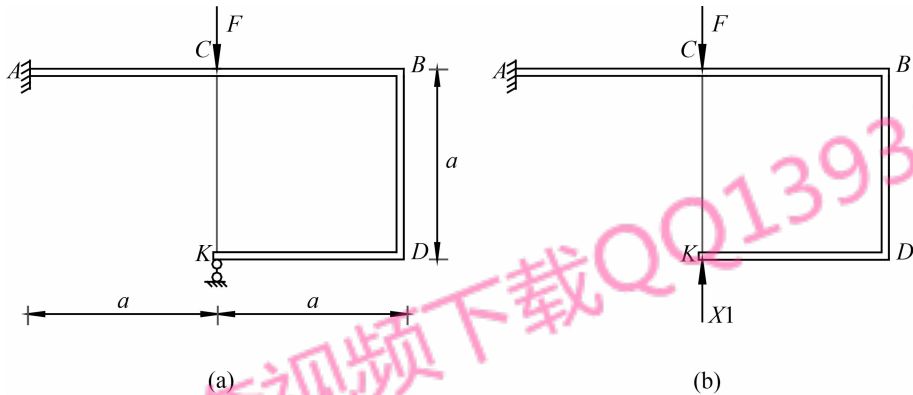
本题解析见精彩视频课程。

4. 如图(a)所示平面刚架, 各段的抗弯刚度均为 EI (常数), 竖直弹簧的刚度系数为 k (引起单位位移所需的力), 不计轴力和剪力对变形的影响, 求弹簧的受力; 并进一步讨论当弹簧的刚度系数为 0 和无穷大时 D 端约束力的大小, 从而得出 D 端约束力的数值与弹簧的刚度系数之间关系的一般性结论。



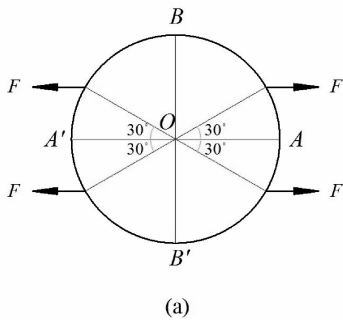
本题解析见精彩视频课程。

5. 如图(a)所示平面刚架,各段的抗弯刚度均为 EI(常数),力 F 铅垂,求最大弯矩及其发生的位置。



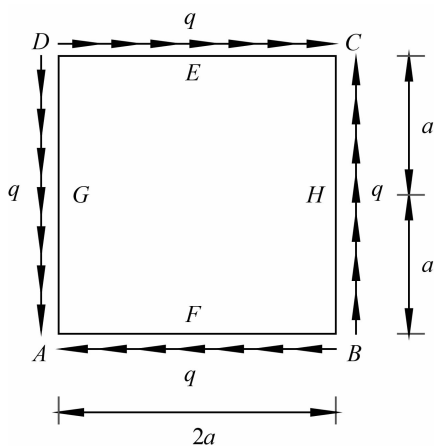
本题解析见精彩视频课程。

6. 半径为 R 的圆环受力如图(a)所示,求截面 A、B 处的内力。



本题解析见精彩视频课程。

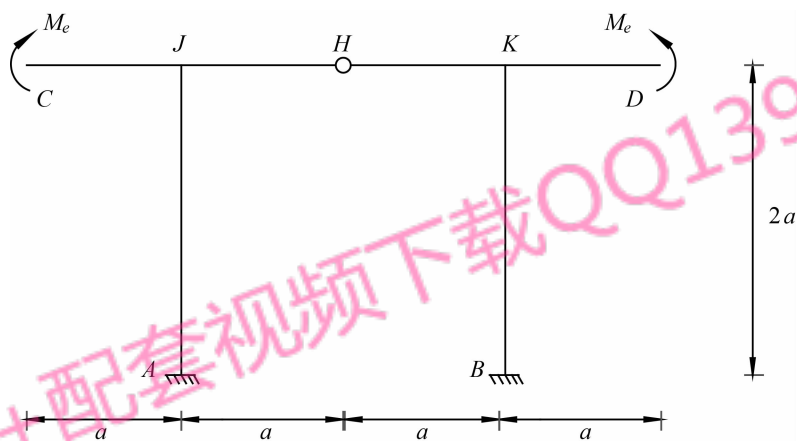
7. 如图(a)所示正方形刚架 ABCD 边长为 2a,抗弯刚度为 EI,受到反对称均布载荷 q 作用。设在变形过程中刚架对角线 AC 和 BD 的方位保持不变,求两水平边中点截面处的内力以及 E、F 两点的相对位移。



(a)

本题解析见精彩视频课程。

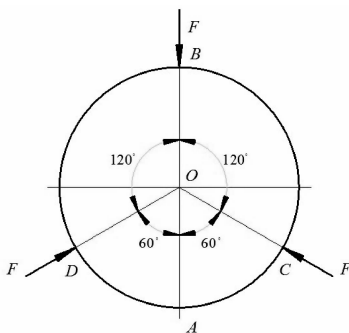
8. 如图(a)所示平面刚架,各段的抗弯刚度均为 EI (常数),求最大弯矩及其发生的位置。



(a)

本题解析见精彩视频课程。

9. 图(a)所示薄壁圆环的直径为 D ,抗弯刚度为 EI (常数),求:(1)圆环内的最大弯矩;(2)力 F 作用点 B 点的位移。



(a)

本题解析见精彩视频课程。