

绝密 * 启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二 (模拟三) 试题答案和评分参考

一、选择题

(1) 答案: 选 (A).

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \arctan(x^2)] = 0 + 0 = 0$, 故 $x = 0$ 不是垂直渐近线.

又由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} [x \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \arctan(x^2)] = 1 + 0 = 1 = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \arctan(x^2) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [\frac{\arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} \arctan(x^2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \arctan(x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{3}(\frac{1}{x})^3}{\frac{1}{x^2}} + 0 = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = b,$$

所以 $y = x$ 为斜渐近线.

(2) 答案: 选 (A).

解 $F(x) \stackrel{u=x^2-t}{=} \int_0^{x^2} (x^2 - u)f(u)du = x^2 \int_0^{x^2} f(u)du - \int_0^{x^2} uf(u)du$, 故 $F'(x) = 2x \int_0^{x^2} f(u)du$.

当 $x < 0$ 时, $F'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在点 $x = 0$ 处取最小值, 选 (A).

或 取 $f(x) = 1$, 则 $F(x) = \frac{1}{2}x^4$, 同样选 (A).

(3) 答案: 选 (D).

解 由题意知 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, 故

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(-x) \stackrel{t=-x}{=} \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(-\frac{1}{x}) \stackrel{t=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = f(1).$$

(4) 答案: 选 (C).

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} \stackrel{\text{罗比达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

所以 $F'(0) = 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x)}{x} \stackrel{\text{罗比达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

所以 $G'_-(0) = 1$; 又

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

所以 $G'_+(0) = 0$, 故 $G(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

(5) 答案: 选 (C).

解 因为在 D 上 $xy \geq 0$, $(x+y)^2 < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin(x^2 + y^2) \leq \sin(x+y)^2$, 且等于号仅在原点处成立,

$$\text{从而 } \iint_D \sin(x^2 + y^2) d\sigma < \iint_D \sin(x+y)^2 d\sigma.$$

又因为在 D 上 $0 \leq y \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\sin(x+y)^2 \leq \sin(4x^2)$, 且等于号仅在直线段 $y = x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) 上成立,

$$\text{从而 } \iint_D \sin(x+y)^2 d\sigma < \iint_D \sin(4x^2) d\sigma, \text{ 故选 (C).}$$

(6) 答案: 选 (D).

解 令 $y = f^{-1}(x)$, 则 $x = f(y)$, 两边同时对 x 求导得 $1 = f'(y) \frac{dy}{dx}$, 故

$$(f^{-1}(x))' = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

(7) 答案: 选 (C).

解 若 $Ax = 0$ 仅有 1 个线性无关的解, 则 $r(A) = n - 1$, 故 $r(A^*) = 1$, 从而 (C) 正确.

(8) 答案: 选 (B).

解 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|\lambda E - A| = \lambda[(\lambda - b)(\lambda - 2) - 2a^2]$, B 的特征值为 $2, 2, 0$.

一方面, 如果 A 与 B 相似, 则 A 的特征值也为 $2, 2, 0$, 故 $a = 0, b = 2$, 此时

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

B 能对角化的条件为

$$r(2E - B) = r \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1,$$

故 c 为任意常数. 另一方面, 如果 $a = 0, b = 2, c$ 为任意常数时, 可直接验证 A 与 B 相似, 故选 (B).

二、填空题

(9) 答案: 填 “ $\frac{1}{2} - \ln 2$ ”.

解 因为 $f(x) = [\ln(x+1)]' = \frac{1}{x+1}$, 所以

$$F(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^3 [f(x + \frac{1}{t}) - f(x)] \cdot \frac{x}{t^2} = x \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{t}) - f(x)}{\frac{1}{t}} = xf'(x) = x(\frac{1}{x+1})' = -\frac{x}{(x+1)^2},$$

$$\text{故 } \int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 \frac{x+1-1}{(1+x)^2} dx = -\int_0^1 [\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}] dx = -[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

$$\text{或 } \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x d\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} - \ln(x+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 2.$$

(10) 答案: 填 “ $\frac{1}{2}x^2$ ”.

解 由题意知 $\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}$. 令 $y' = p$, 由 $\int \frac{1}{(\sqrt{1+p^2})^3} dp = \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} dx$ 解得

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C_1.$$

又由 $y'(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$, 故 $y' = x$, 积分得 $y = \frac{1}{2}x^2 + C_2$, 又 $y(0) = 0$ 得 $C_2 = 0$, 所以 $y(x) = \frac{1}{2}x^2$.

(11) 答案: “ 8π ”.

$$\text{解法 1 } V = 4 \times 4\pi - \pi \int_{-1}^3 (1+y) dy = 8\pi.$$

$$\text{解法 2 } V = 2\pi \int_1^2 x(x^2-1) dx + 2\pi \int_0^1 x(1-x^2) dx + (4\pi - \pi) \times 1 = 8\pi.$$

$$\text{解法 3 } V = 2\pi \int_1^2 x(x^2-1) dx + \pi \int_{-1}^0 [2^2 - (1+y)] dy = 8\pi.$$

解法 4 将曲边梯形上移一个单位, 即为曲线 $y = x^2$, 直线 $y = 0, x = 2$ 所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V = 2\pi \int_0^2 x \cdot x^2 dy = 8\pi$.

$$\text{错误解法 1 } V = 2\pi \int_0^2 x(x^2-1) dx.$$

$$\text{错误解法 2 } V = 2\pi \int_0^2 x|x^2-1| dx.$$

(12) 答案: 填 “ $\frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2$ ”.

解 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, 得 $\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 为 x 的可微函数, 于是

$$\frac{\partial z(x, 0)}{\partial x} = \varphi(x), \quad (1)$$

由 $z(x, 0) = x$ 得

$$\frac{\partial z(x, 0)}{\partial x} = 1. \quad (2)$$

故由 (1), (2) 知 $\varphi(x) = 1$, 所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + 1$, 从而 $z = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + \psi(y)$, 其中 $\psi(y)$

为 y 的可微函数. 由 $z(0, y) = y^2$ 得 $\psi(y) = y^2$, 因此

$$z = z(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + x + y^2.$$

(13) 答案: 填 “ $(-1)^{n-1} 2n(2n+1) \cdot 2^{2n-1}$ ”.

$$\text{解 } f^{(2n+1)}(x) = C_{2n+1}^0 \cdot x^2 (\sin 2x)^{(2n+1)} + C_{2n+1}^1 \cdot 2x (\sin 2x)^{(2n)} + C_{2n+1}^2 \cdot 2 (\sin 2x)^{(2n-1)},$$

$$f^{(2n+1)}(0) = (2n+1) \cdot 2n \cdot 2^{2n-1} \cdot \sin(n\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{n-1} \cdot (2n)(2n+1) \cdot 2^{2n-1}.$$

(14) 答案: 填 “ $-\frac{3}{5}\beta_1 + \frac{1}{5}\beta_2$ ”.

$$\text{解 设 } \xi = y_1\beta_1 + y_2\beta_2, \text{ 故 } -\alpha_1 + \alpha_2 = y_1\beta_1 + y_2\beta_2, \text{ 即 } (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ 得}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2)^{-1} (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$\text{所以 } \xi = -\frac{3}{5}\beta_1 + \frac{1}{5}\beta_2.$$

三、解答题

(15) 证 由题意知 $f(1) > f(3) > f(5) > \dots > f(2)$, 故数列 $\{f(2n-1)\}$ 单调下降且有下界, 从而数列 $\{f(2n-1)\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2n-1) = a$.

同理, $f(1) > \dots > f(6) > f(4) > f(2)$, 故数列 $\{f(2n)\}$ 单调上升且有上界, 从而数列 $\{f(2n)\}$ 收敛, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2n) = b$4 分

又由拉格朗日中值定理得

$$f(2n) - f(2n-1) = f'(\xi_n), \quad (1)$$

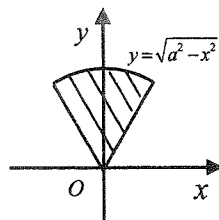
其中 $2n-1 < \xi_n < 2n$6 分

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = +\infty$. 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(\xi_n) = 0$. 在(1)式两边令 $n \rightarrow \infty$, 得 $b - a = 0$, 故有 $a = b$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2n-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(2n)$, 所以数列 $\{f(n)\}$ 收敛.10 分

(16) 解 (I) 由对称性知 $\iint_{D(a)} 2xy d\sigma = 0$, 所以2 分

$$\iint_{D(a)} (x+y)^2 d\sigma = \iint_{D(a)} (x^2 + y^2) d\sigma = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \int_0^a r^2 r dr = \frac{\pi}{12} a^4; \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \iint_{D(a)} \frac{\pi}{3} y d\sigma = \frac{\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} d\theta \int_0^a r \sin \theta \cdot r dr = \frac{\pi}{9} a^3; \quad \iint_{D(a)} 6 d\sigma = 6 \cdot \frac{1}{6} \pi a^2 = \pi a^2, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$



所以 $I(a) = \pi a^2 \left(\frac{a^2}{12} - \frac{a}{9} - 1 \right)$7 分

(II) $I'(a) = \frac{\pi}{3} a^3 - \frac{\pi}{3} a^2 - 2\pi a = \frac{\pi}{3} a(a^2 - a - 6) \stackrel{\text{令}}{=} 0$, 又因为 $a > 0$, 所以 $a = 3$.

$I''(a) = \pi a^2 - \frac{2\pi}{3} a - 2\pi$, $I''(3) = 5\pi > 0$. 从而当 $a = 3$ 时, $I(a)$ 最小.10 分

(17) 解 $m = e^{-x}(x^2 - 3)$, 令 $\varphi(x) = e^{-x}(x^2 - 3)$, 则

$\varphi'(x) = -e^{-x}(x^2 - 3) + e^{-x} \cdot 2x = -e^{-x}(x+1)(x-3)$, 解 $\varphi'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = 3$,3 分

由此可得

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$\varphi'(x)$	-	0	+	0	-
$\varphi(x)$	单调递减	$-2e$	单调递增	$6e^{-3}$	单调递减

故 $\varphi(x)$ 当 $x = -1$ 时取极小值 $-2e$; 当 $x = 3$ 时取极大值 $6e^{-3}$, 又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\varphi(x) \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) \rightarrow 0$, 因此6 分

① 当 $m < -2e$ 时方程无实根;

② 当 $-2e < m \leq 0$ 及 $m = 6e^{-3}$ 时, 方程有两个实根;

③ 当 $0 < m < 6e^{-3}$ 时方程为三个实根;

④ 当 $m > 6e^{-3}$ 时, 方程有一个实根.10 分

(18) 证 (I) 由于

$$I_n \stackrel{x=-t}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{(1+2^{-t}) \sin t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^t \sin nt}{(1+2^t) \sin t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^x \sin nx}{(1+2^x) \sin x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx - I_n,$$

$$\text{所以 } I_n = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \stackrel{\text{奇偶性}}{=} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } I_n - I_{n-2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx - \sin(n-2)x}{\sin x} dx = 2 \int_0^{\pi} \cos(n-1)x dx = \frac{2}{n-1} \sin(n-1)x \Big|_0^{\pi} = 0,$$

得 $I_n = I_{n-2}$. 又 $I_0 = 0, I_1 = \pi$, 所以 $I_n = \begin{cases} I_0, & n \text{ 为偶数,} \\ I_1, & n \text{ 为奇数} \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数,} \\ \pi, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$

(19) 解 $\frac{\partial z}{\partial x} = f + xf'_1 + xy^2 \varphi' f'_2$;2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_1 \cdot (-1) + f'_2 \varphi' 2xy + x[(f''_{11} \cdot (-1) + f''_{12} \varphi' 2xy)]$$

$$\begin{aligned}
 & +xy^2\varphi'[(f_{21}'' \cdot (-1) + f_{22}''\varphi'2xy)] + xy^2f_2'\varphi'' \cdot 2xy + 2xy\varphi'f_2' \\
 & = -f_1' + 4xy\varphi'f_2' + 2x^2y^3\varphi''f_2' - xf_{11}'' + (2x^2y - xy^2)\varphi'f_{12}'' + 2x^2y^3\varphi'^2f_{22}'', \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

又因为 $\varphi(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(x)-1}{(x-1)^2} = 1$, 故

$$\varphi(1)=1, \varphi'(1)=0, \varphi''(1)=2, \quad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

从而

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{(1,1)} = -f_1'(0,1) + 4f_2'(0,1) - f_{11}''(0,1). \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

$$(20) \text{ 证 (I) 由于 } \ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{1+\xi}, \text{ 其中 } 0 < \xi < x, \text{ 所以 } 1 < 1+\xi < 1+x, \text{ 得 } \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1,$$

$$\text{故 } \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} < x, \text{ 即得 } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \quad \cdots\cdots 4 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 由 (I) 得 } \frac{xt}{1+xt} < \ln(1+xt) < xt, \text{ 其中 } x > 0, 0 < t < 1, \frac{x}{1+xt} < \frac{\ln(1+xt)}{t} < x.$$

$$\text{由于 } 0 < t < 1, \text{ 故 } \frac{x}{1+xt} > \frac{x}{1+x}, \text{ 得 } \frac{x}{1+x} < \frac{\ln(1+xt)}{t} < x, \text{ 进而}$$

$$\frac{x}{1+x} \cos \frac{\pi}{2} t < \frac{\ln(1+xt)}{x} \cos \frac{\pi}{2} t < x \cos \frac{\pi}{2} t, \quad \cdots\cdots 8 \text{ 分}$$

$$\text{在 } (0,1) \text{ 内对 } t \text{ 积分得 } \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1+x} < I(x) < \frac{2}{\pi} x, \text{ 故 } \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x} < \frac{I(x)}{x} < \frac{2}{\pi}. \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{2}{\pi}, \text{ 由夹逼定}$$

$$\text{理得 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{I(x)}{x} = \frac{2}{\pi}. \quad \cdots\cdots 10 \text{ 分}$$

(21) 证 (I) 用反证法. 假设 $g(b) - g(a) = g'(a)(b-a)$, 由 Lagrange 中值定理知, 存在 $\xi_1 \in (a, b)$, 使 $g(b) - g(a) = g'(\xi_1)(b-a)$, 从而由假设知 $g'(\xi_1) = g'(a)$, 再由 Rolle 中值定理知, 存在 $\xi_2 \in (a, \xi_1) \subset (a, b)$, 使 $g''(\xi_2) = 0$, 这与 $g''(x) \neq 0$ 矛盾, 因此 $g(b) - g(a) \neq g'(a)(b-a)$. $\cdots\cdots 4 \text{ 分}$

(II) 令 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$, $G(x) = g(x) - g(a) - g'(a)(x-a)$, 则

$$F(a) = G(a) = 0, \quad F'(a) = G'(a) = 0, \quad \text{且 } F''(x) = f''(x), G''(x) = g''(x), \quad \cdots\cdots 7 \text{ 分}$$

故对 $F(x), G(x)$ 在 $[a, b]$ 上两次运用 Cauchy 中值定理得,

$$\frac{f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)}{g(b) - g(a) - g'(a)(b-a)} = \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi_3)}{G'(\xi_3)} = \frac{F'(\xi_3) - F'(a)}{G'(\xi_3) - G'(a)} = \frac{F''(\xi)}{G''(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)},$$

其中 $\xi_3 \in (a, b)$, $\xi \in (a, \xi_3) \subset (a, b)$. $\cdots\cdots 11 \text{ 分}$

(22) 解 由题意可知 $r(A) = 2$, 且有

$$\begin{cases} \beta = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \alpha_3 = \alpha_1 - \alpha_2, \\ \alpha_4 = -\alpha_1 - 2\alpha_2, \\ \beta = 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 0 \cdot \alpha_3, \end{cases}$$

可知 α_1, α_2 线性无关, 故 $r(B) = 2$, 并由此知 $By = 0$ 的基础解系中只含一个向量, 且 $(2, -5, 0)^T$ 为 $By = \beta$ 的一个特解. $\cdots\cdots 6 \text{ 分}$

又由 $-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ 知 $(-1, 1, 1)^T$ 为 $By = 0$ 的非零解, 可作为基础解系, 故 $By = \beta$ 的通解为

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k \in R. \quad \cdots\cdots 11 \text{ 分}$$

$$(23) \text{ 解 (I) 二次型 } f(x_1, x_2, x_3) \text{ 的矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \end{pmatrix}, |A| = a^2 - 4. \quad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + (-1) + 0 = 0$. 若 $a > 2$, 则 $|A| > 0$, 故 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$. 由

此知 A 的特征值为正负负, 故 A 的规范形为 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. $\cdots\cdots 7 \text{ 分}$

(II) 由题意知 $|A| = 0$, 从而 $a^2 = 4$, 从而 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - (5 + a^2)\lambda - a^2 + 4 = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3)$, 所以在正交变换下的标准形为 $3y_1^2 - 3y_2^2$. $\cdots\cdots 11 \text{ 分}$