绝密★启用前

2016年全国硕士研究生招生考试

数学(二)预测卷(一)

(科目代码:302)

考生注意事项

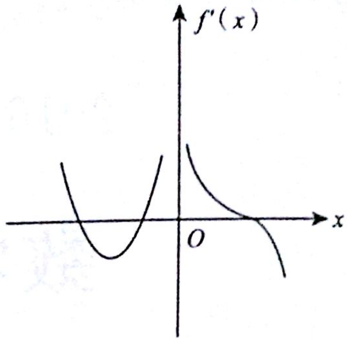
1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如右图所示，并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 亦存在. 则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为



(A) 0.　　(B) 1.

(C) 2.　　(D) 3.

(2) 当 $x\to0^+$ 时下列3个无穷小

① $\sqrt{1-x^2}-1$；② $(1-\sqrt{\cos\sqrt{x}})^3$；③ $\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt$，

按照后一个比前一个高阶的次序排列正确的是

(A) ①③②.　(B) ③①②.　(C) ①②③.　(D) ②①③.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\cdot\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{h}\right)-f(x_0)\right]$ 存在.

(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{2h}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]$ 存在.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(x_0)-f(x_0-h)]$ 存在.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$，则 $f(x)$

(A) 在区间 $(-\infty,0)$ 上严格单调增加，在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调减少.

(B) 在区间 $(-\infty,0)$ 上严格单调减少，在区间 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加.

(C) 在区间 $(-\infty,0)$ 与区间 $(0,+\infty)$ 上都严格单调增加.

(D) 在区间 $(-\infty,0)$ 与区间 $(0,+\infty)$ 上都严格单调减少.

(5) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有二阶导数且 $g''(x)>0$. 若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 处取得极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a)>0$.　(B) $f'(a)<0$.　(C) $f''(a)>0$.　(D) $f''(a)<0$.

(6) 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$

(A) 函数连续但偏导数不存在.

(B) 偏导数存在但函数不连续.

(C) 函数连续，偏导数也存在，但不可微.

(D) 函数可微.

(7) 设 $m\times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量线性无关，则

(A) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A})=n$.　(B) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A})<n$.　(C) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A})>n$.　(D) $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{A})>m$.

(8) 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\ (s>1)$，则向量

组的秩

(A) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) < r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

(B) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) > r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

(C) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) < r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

(D) $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$.

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{\mathrm{e}^x} =$ ________.

(10) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y =$ ________.

(11) 极坐标曲线 $r=a(1+\cos\theta)$(常数 $a>0$),在点 $M\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$处的曲率 $k=$ ________.

(12) 设 $f(x)=(x^2-1)^n$,则 $f^{(n+1)}(-1)=$ ________.

(13) 设 $f(u)$ 可导,$P(x,y)=\dfrac{1}{x}f\left(\dfrac{x}{y}\right)+y$,$Q(x,y)=-\left[\dfrac{1}{y}f\left(\dfrac{x}{y}\right)+x\right]$,其中 $xy\neq 0$,则

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=$ ________.

(14) 行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \text{________}.$$

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设常数 $a>0$,求不定积分$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设常数 $a>0$,平面图形 D 为由摆线 $L:\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$一拱与 x 轴所围成,设其点密度 μ 为常数,求该图形的质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D(t)=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,-\dfrac{2}{t-2}\leqslant y\leqslant 1\right\}$,其中 $4\leqslant t\leqslant 6$.令

$$f(t)=\iint\limits_{D(t)}[(t-2)y+2]\mathrm{d}\sigma,$$

求 $f(t)$ 在区间$[4,6]$上的最大值.

(18)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且当 $x(1+x)\neq 0$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{\ln|1+x|}-\dfrac{1}{x}$.

（Ⅰ）求 $f(0)$ 与 $f(-1)$ 的值；（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调区间、极值.

(19)（本题满分 10 分）

设 $-\infty<x<+\infty, y>0$. 证明

$$xy\leqslant \mathrm{e}^{x-1}+y\ln y,$$

并指出何时等号成立.

(20)（本题满分 11 分）

设 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，并设

$$f(x)=2\int_0^x f'(x-t)t^2\mathrm{d}t+\sin x,$$

求 $f(x)$.

(21)（本题满分 11 分）

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 8, y\geqslant \dfrac{x^2}{2}\right\}$，求二重积分

$$I=\iint_D[(x-1)^2+y^2]\mathrm{d}\sigma.$$

(22)（本题满分 11 分）

证明：非齐次线性方程组（Ⅰ）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

有解的充分必要条件是齐次线性方程组（Ⅱ）

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m=0, \\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m=0, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m=0 \end{cases}$$

的任意一组解 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 必满足方程组（Ⅲ）

$$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m=0.$$

(23)（本题满分 11 分）

设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 为 n 个实数，方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

（Ⅰ）若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 是一个特征值，证明：$\boldsymbol{\alpha}=(1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于 λ 的特征向量；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值两两互异，则求一可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生招生考试

数学(二)预测卷(二)

(科目代码:302)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内具有连续的一阶导数且 $g'(x) > 0$,并设 $f(x) = \int_0^x g'(x-t)t^2 \mathrm{d}t$. 则

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是凹弧,在 $(0, +\infty)$ 上是凸弧.

(D) 曲线 $y = f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是凸弧,在 $(0, +\infty)$ 上是凹弧.

(2) 当 $x \to 0$ 时,下列 4 个无穷小量关于 x 的阶数最高的是

(A) $x^2 + x^4$.　　(B) $(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} - 1$.

(C) $\int_0^{x^2} \left(\frac{\sin t}{t} - 1\right) \mathrm{d}t$.　　(D) $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$.

(3) 下列反常积分收敛的是

(A) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.　　(B) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2}$.　　(C) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.　　(D) $\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln \sqrt{x})^2}$.

(4) 由曲线 $y = \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}t (x \geqslant 0)$ 和其水平渐近线 $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 以及 y 轴所围区域的面积 A 为

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $\frac{\pi}{2}$.　　(C) $\frac{3}{2}$.　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(5) 船航行每小时的费用由两个部分组成. 日常开销(固定部分)为 k_1,燃油费(变动部分)与速度立方成正比,比例系数 $k_2 > 0$. 在航程确定的情况下,使船航行总费用最小的航速为

(A) $\sqrt[3]{\frac{k_2}{2k_1}}$(km/h).　　(B) $\sqrt[3]{\frac{k_1}{2k_2}}$(km/h).

(C) $\sqrt{\frac{k_1}{2k_2}}$(km/h).　　(D) $\sqrt{\frac{k_2}{2k_1}}$(km/h).

(6) $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t^2} \int_t^{2t} \mathrm{d}x \int_t^x e^{(x-y+1)^2} \mathrm{d}y =$

(A) e.　　(B) 2e.　　(C) $\frac{e}{2}$.　　(D) e^2.

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是 4 个 4 维非零列向量,$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$. 且 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{0}$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, k 为任意常数,则以下 5 个向量组,

①$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$; ②$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$; ③$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_1$;

④$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$; ⑤$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$,

可作为 $\boldsymbol{A}^* \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系的向量组的个数为

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(8) 设矩阵 $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-1&2\\0&0&2&2\end{pmatrix}$，矩阵 $A\sim B$，则秩 $r(A-E)+r(A-3E)=$

(A)6.　　(B)7.　　(C)5.　　(D)4.

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设常数 $a\neq 2$. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+(a-1)x^n+1}{x^{2n}-ax^n+1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续的充要条件是 $a=$ ________.

(10) 设常数 $a>0,b>0$. 则 $\int_0^1 dx\int_a^b x^y dy=$ ________.

(11) 设存在二元可微函数 $u(x,y)$，

$$du(x,y)=(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy,$$

则常数 $a=$ ________，$b=$ ________，函数 $u(x,y)=$ ________.

(12) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x+x^2}$，则 $f^{(2\,016)}(0)=$ ________.

(13) 微分方程 $y''+4y=2x^2$ 在原点处与直线 $y=x$ 相切的特解为________.

(14) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化成的标准形为 $f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,-1)^T$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+32=0$$

确定，讨论函数 $z(x,y)$ 的极大值与极小值.

(16)（本题满分 10 分）

设 $x<1$ 且 $x\neq 0$. 证明：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}<1$.

(17)（本题满分 10 分）

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$\exists\,\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$；

（Ⅱ）计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x-\frac{1}{x}}^{x+\frac{1}{x}}\dfrac{y^{1+y}}{(1+y)^y}dy$.

(18)（本题满分 10 分）

设曲线 $y=y(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{4}\right)$ 点与直线 $4x-4y-3=0$ 相切，且 $y=y(x)$ 满足方程 $y''=6\sqrt{y}$. 求该曲线在相应 $x\in[-1,1]$ 上点 (x,y) 处的曲率.

(19)(本题满分 11 分)

设 $z=f(x,y)$ 满足关系：$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2k}{3}\cdot\frac{1}{y^3}$($k$ 是正常数)，且 $f(0,k)=\frac{1}{3k}$.

(Ⅰ)求 $f(x,y)$；

(Ⅱ)$\forall x_0>0,x_{n+1}=f(x_n,x_n)(n=0,1,2,\cdots)$，证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(20)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}$，其中常数 $a>0,b>0$，求二重积分

$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$.

(21)(本题满分 11 分)

设一个平板浸没在水中且垂直于水面($\rho=1\ 000\ \mathrm{kg/m^3}$)，平板的形状为双曲四边形，即平板的图形由双曲线 $4x^2-y^2=4$，直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 围成(长度单位：m).

(Ⅰ)如果平板的上边缘与水面相齐，那么平板一侧所受到的总压力是多少？

(Ⅱ)设水位下降，如果在时刻 t 时水面位于 $y=h(t)$ 处，且水面匀速下降速率为 0.01(m/s). 问：当水面下降至平板的中位线时，一侧所受到的水压力的下降速率是多少？

(22)(本题满分 11 分)

已知齐次线性方程组(i)为

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\x_2+x_3-x_4=0.\end{cases}$$

齐次线性方程组(ii)的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1,2,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(1,0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

(Ⅰ)求方程组(i)的基础解系；

(Ⅱ)求方程组(i)与(ii)的全部非零公共解，并将非零公共解分别由方程组(i)，(ii)的基础解系线性表示.

(23)(本题满分 11 分)

若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B},r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，证明：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 必为相似矩阵.

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生招生考试

数学(二)预测卷(三)

(科目代码:302)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x-1}{1-e^x}$ 有渐近线

(A) 0 条.　(B) 1 条.　(C) 2 条.　(D) 3 条.

(2) 设以下的 A、B、C 为某些常数，微分方程 $y''+2y'-3y=e^x\sin^2 x$ 有特解形如

(A) $e^x(A+B\cos 2x+C\sin 2x)$.　(B) $e^x(Ax+B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(C) $e^x(A+Bx\cos 2x+Cx\sin 2x)$.　(D) $xe^x(A+B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|f(x)|}{x-a}$ 存在，则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 不可导，但 $|f(x)|$ 可导.

(B) $f(x)$ 不可导，且 $|f(x)|$ 也不可导.

(C) $f(x)$ 可导，且 $f'(a)=0$.

(D) $f(x)$ 可导，但对不同的 $f(x)$，$f'(a)$ 可以等于 0，也可以不等于 0.

(4) 下列结论正确的是

(A) $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内两个偏导数存在，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(B) $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在.

(C) $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内两个偏导数存在且有界，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(D) $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域内连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 该邻域内两个偏导数有界.

(5) 设 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 的某邻域 U 内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=a$，常数 $a>\dfrac{1}{2}$，则

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(D) 所给条件还不足以确定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(6) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，交换累次积分

$$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$$

的次序为先 x 后 y 成为

(A) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$.

(B) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)dx$.

(D) $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx-\int_{-1}^0 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y}f(x,y)dx$.

(7) 设3阶矩阵A有3个互不相同的特征值λ_1,λ_2和λ_3，其对应的特征向量分别为ξ_1,ξ_2和ξ_3. 则向量组ξ_1、$A(\xi_1+\xi_2)$、$A^2(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$线性无关的充要条件是

(A)$\lambda_1\lambda_2\neq 0$.　(B)$\lambda_1\lambda_3\neq 0$.　(C)$\lambda_2\lambda_3\neq 0$.　(D)$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$.

(8) 设A为n阶矩阵，A^*是A的伴随矩阵，齐次线性方程组$Ax=0$有两个线性无关的解，则

(A)$A^*x=0$的解均是$Ax=0$的解.

(B)$Ax=0$的解均是$A^*x=0$的解.

(C)$Ax=0$与$A^*x=0$无非零公共解.

(D)$Ax=0$与$A^*x=0$仅有两个非零公共解.

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分.

(9) 设$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-\pi}{e^{\frac{2}{x}}+1}+a\arctan\dfrac{1}{x}\right)$存在，则常数$a=$______.

(10) 设$G(x)=\int_{x^2}^{1}\dfrac{t}{\sqrt{1+t^3}}dt$，则$\int_0^1 xG(x)dx=$______.

(11) 已知曲线$y=ax^2$与$y=\ln x$正好有2个不同的交点，则常数a的取值范围是______.

(12) 设ξ为$f(x)=\arcsin x$在区间$[0,b]$上使用拉格朗日中值公式中的ξ，则$\lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{\xi}{b}=$______.

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(1+\tan\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta=$______.

(14) 若二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正、负惯性指数都是1，则$a=$______.

三、解答题：15～23小题，共94分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分10分）

设$f(x)=(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}(x\neq 0)$，且$f(x)$在$x=0$处连续. 求$f(0)$的值并求曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程.

(16)（本题满分10分）

设$F(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{-t^2}dt-\dfrac{1}{2}(e^{-1}+1)$，讨论$F(x)$在区间$[-1,1]$上的零点个数.

(17)（本题满分10分）

设$z=z(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$z=z(x+y,x-y)$满足微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=1.$$

(Ⅰ) 求$z=z(u,v)$所满足关于u、v的微分方程；

(Ⅱ) 由(Ⅰ)求出$z=z(x+y,x-y)$的一般表达式.

(18)（本题满分10分）

设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续.

(Ⅰ)证明:存在 $\xi \in (0,1)$,使 $\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t = (1-\xi)f(\xi)$;

(Ⅱ)若进一步设当 $x \in [0,1]$ 时 $f(x) > 0$ 且单调减少,证明:这种 ξ 是唯一的.

(19)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)设 $x>0, y>0, z>0$,求函数 $f(x,y,z) = xyz^3$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2 = 5R^2$($R>0$ 为常数)下的最大值;

(Ⅱ)由(Ⅰ)的结论证明:当 $a>0, b>0, c>0$ 时,下述不等式成立:

$$abc^3 \leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

(20)(本题满分 11 分)

求一条凹曲线,已知其上任意一点处的曲率 $k = \dfrac{1}{2y^2\cos\alpha}$,其中 α 为该曲线上在相应的点处的切线的倾角,$\cos\alpha > 0$. 并设该曲线在点 $(3,2)$ 处的切线的倾角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)设平面区域 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$,求二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|\,\mathrm{d}\sigma$;

(Ⅱ)设 $f(x,y)$ 在上述 D 上连续,且 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = -\dfrac{\pi}{4}$,$\iint\limits_D f(x,y)(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma = \dfrac{20}{3}$,证明:存在点 $(\xi,\eta) \in D$ 使 $|f(\xi,\eta)| \geqslant 1$.

(22)(本题满分 11 分)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 乘积可交换,$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1}$、$\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 分别是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,且对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$,满足 $r(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB}) = n$.

(Ⅰ)证明:$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} = n$,且 $\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 线性无关;

(Ⅱ)证明:$\boldsymbol{\xi}_1,\cdots,\boldsymbol{\xi}_{r_1},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r_2}$ 是方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

(23)(本题满分 11 分)

设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

已知 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = a \neq 0$. 证明:矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵.

绝密★启用前

2016年全国硕士研究生招生考试

数学(二)预测卷(四)

(科目代码:302)

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内。超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题册上答题无效。
3. 填（书）写部分必须使用黑色字迹签字笔书写，字迹工整、笔迹清楚；涂写部分必须使用2B铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

(以下信息考生必须认真填写)

考生编号															
考生姓名															

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

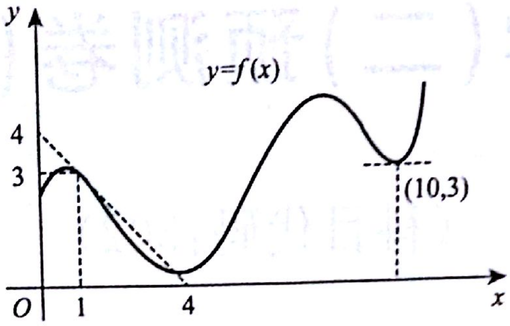
(1) 设 $f(x)$ 三阶导数连续,其图形如下图所示,则必有

(A)$\int_1^{10}[f(x)-f'(x)]\mathrm{d}x<0$.

(B)$\int_1^{10}[f'(x)-f''(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0$.

(C)$\int_1^{10}[f'''(x)-f''(x)]\mathrm{d}x>0$.

(D)$\int_1^{10}[f'''(x)-f'(x)]\mathrm{d}x>0$.



(2) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在3阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\sqrt[3]{1-x^3}}=a(a>0)$. 则

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) 曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$左侧邻域是凹的,右侧邻域是凸的.

(D) 曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,f(0))$左侧邻域是凸的,右侧邻域是凹的.

(3) 设 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内有定义,$f(x)=|x-x_0|g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导的充要条件是

(A)$g(x_0)=0$.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)$ 都存在且反号.

(C)$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

(D)$g'(x_0)$ 存在.

(4) 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足:①$f(a)=f(b)=0$;②$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$,其中连续函数 $g(x)$ 为$[a,b]$上有定义的某个已知函数. 则 $f(x)$ 在$[a,b]$上

(A) 必大于0.　(B) 必小于0.　(C) 必恒为0.　(D) 正负不确定.

(5) 曲线 $y=\dfrac{x^4}{x^2-1}\arctan\dfrac{1}{x}$ 的渐近线有

(A)2条.　(B)3条.　(C)4条.　(D)5条.

(6) 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $g(x,y)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+yf\left(\dfrac{x}{y}\right)$,则 $x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=$

(A) $\dfrac{2y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.　(B) $\dfrac{2x}{y}f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.　(C) $\dfrac{2y}{x}f'\left(\dfrac{x}{y}\right)$.　(D) $\dfrac{2x}{y}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

(7) 设4阶行列式的第2列元素依次为 $2,a_{22},a_{32},3$,第2列元素的余子式依次为 $1,-1,1,-1$. 第4列元素的代数余子式依次为 $3,1,4,2$,且行列式的值为1,则 a_{22},a_{32} 的取值为

(A)$a_{22}=-4,a_{32}=-2$.

(B)$a_{22}=4,a_{32}=-2$.

(C)$a_{22}=-\dfrac{12}{5},a_{32}=-\dfrac{12}{5}$.

(D)$a_{22}=\dfrac{12}{5},a_{32}=\dfrac{12}{5}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶非零矩阵,已知 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$. 则下列3个说法:

①0 未必是 A 和 B 的特征值；

②1 必是 A 和 B 的特征值；

③ 若 α 是 A 的属于特征值 1 的特征向量，则 α 必是 B 的属于特征值 0 的特征向量，

正确说法的个数为

(A)0 个.　　(B)1 个.　　(C)2 个.　　(D)3 个.

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

(9) 设 y'' 前的系数为 1 的某二阶常系数线性非齐次微分方程的两个特解分别为 $y_1^* = (1-x+x^2)e^x$ 与 $y_2^* = x^2e^x$，则该微分方程为________.

(10) 设常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{1}{n}}\right) =$ ________.

(11) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\left(\dfrac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}\right)\mathrm{d}x =$ ________.

(12) 设直角坐标系下的曲线 $y=y(x)$ 由极坐标式 $r=a(1+\cos\theta)$ 给出，其中常数 $a>0$，则该曲线在其极坐标点 $(r,\theta) = \left(\dfrac{a}{2}(2+\sqrt{2}),\dfrac{\pi}{4}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为________.

(13) 极坐标曲线 $\theta = \dfrac{1}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)$ 在 $1\leqslant\rho\leqslant 3$ 上一段的弧长为________.

(14) 若实对称矩阵 A 与矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 合同，则二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 的规范形为________.

三、解答题：15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{f(x)} - \cos x + \sin x}{x}\right] = 0$，求 $f(0)$ 并讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导，请求出 $f'(0)$.

(16)（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<1$，$\ln(1+x_n) = e^{x_{n+1}} - 1\quad (n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ) 证明：当 $0<x<1$ 时，$\ln(1+x)<x<e^x-1$；

(Ⅱ) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求该极限.

(17)（本题满分 10 分）

(Ⅰ) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续且不恒为零，证明：必有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0;$$

(Ⅱ) 是否存在 $[0,2]$ 上的可导函数 $f(x)$，满足

$$f(0)=f(2)=1,\ |f'(x)|\leqslant 1,\ \left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 1.$$

并说明理由.

(18)（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线（$y(x)$ 的一阶导数连续）. 当

$-\pi < x < 0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0 \leqslant x < \pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求函数 $y(x)$ 的表达式.

(19)（本题满分 11 分）

设一长度为 1 的非均匀细直杆，其上一点 $x \in [0,1]$ 处的线密度分布函数 $\mu = \rho(x)$，满足关系式：$\rho(0) = 0, \rho'(1) = 1$，当 $u = \rho(xyz)$ 时，$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = x^2 y^2 z^2 \rho'''(xyz)$. 求：

（Ⅰ）$\rho(x)$；

（Ⅱ）此细直杆的质心.

(20)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$ 上的最大值和最小值.

(21)（本题满分 11 分）

求 $I = \iint\limits_D (|x| + |y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 D 是由曲线 $xy = 2$，直线 $y = x - 1$ 及 $y = x + 1$ 所围成的区域.

(22)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，

求满足 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}^4\boldsymbol{C} + \boldsymbol{\gamma}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

(23)（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 n 维非零列向量，且满足 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}_j = 0 (i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n)$. 试证：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.