考研数学高数冲刺常考结论、公式答题技巧总结【超赞】

目 录

第一部分：文登精编的高数小结论

1. 等价无穷小（**x→0**）

$(1).\sin x \sim x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \ln[1+x] \sim arc\sin x \sim \arctan x$

$(2).1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$(3).(1+x)^a - 1 \sim ax$

$(4).a^x - 1 \sim x\ln a$

$(5).1-\sqrt[n]{1-x} \sim \frac{x}{n}$

$(6).\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

$(7).\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$

2. $0 < x < \frac{\pi}{2}$时 $\sin x < x < \tan x$；$0<|x|<\frac{\pi}{2}$时 $1-\cos x < \frac{1}{2}x^2$

3. 如果 $\lim U = 1, \lim V = \infty$

则 $\lim U^V = e^{\lim(U-1)V}$

4. $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$表示偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$表示奇函数

5. 直线$L: y = kx+b$为函数$y = f(x)$的渐近线的充分必要条件为：

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$　　$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]$　　这里的∞包括$+\infty$和$-\infty$

6. 常见函数的导数 **(记熟后解题快)**

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$　　$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$　　$(x^x)' = x^x(1+\ln x)$

7.关于 n 阶导数的几个重要公式

$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ $(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$(x^n)^{(n)}=n!$ $(a^x)^{(n)}=(a^x)(\ln a)^n$

$(e^x)^{(n)}=e^x$ $(\frac{1}{t-x})^{(n)}=\frac{n!}{(t-x)^{n+1}}$

$(\frac{1}{t+x})^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(t+x)^{n+1}}$ $[\ln(t+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(t+x)^n}$

8. 泰勒公式(用来求极限)

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)$ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3+o(x^3)$

$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$ $\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x)$

$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ $\arccos x=\frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

$\tan(\tan x)=x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$ $\sin(\sin x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

9. 重要不定积分

$$\int\frac{dx}{(\sin x)^{(2n+1)}\cos x}=\int\frac{\sec x dx}{(\sin x)^{2n+1}}=\int\frac{(\sec x)^{(2n+2)}dx}{\frac{(\sin x)^{(2n+1)}}{(\cos x)^{(2n+1)}}}=\int\frac{(\sec x)^{2n}d(\tan x)}{(\tan x)^{(2n+1)}}$$

$$\int\frac{dx}{(\cos x)^{(2n+1)}\sin x}=-\int\frac{[1+(\cot x)^2]^n}{(\cot x)^{(2n+1)}}d\cot x$$

$$\int\frac{1}{1+\cos x}dx=\tan\frac{x}{2}+C$$

$$\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\tan x-\sec x+C=\frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C$$

$$\int(\tan x)^n dx=\int(\tan x)^n\frac{(\sec x)^2}{(\sec x)^2}dx=\int(\tan x)^n\frac{d(\tan x)}{1+(\tan x)^2}$$

$$\int(\cot x)^n dx=\int(\cot x)^n\frac{(\csc x)^2}{(\csc x)^2}dx=-\int\frac{(\cot x)^n d(\cot x)}{1+(\cot x)^2}$$

$$\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int (\sin x)^2 dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int (cox)^2 dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int (\tan x)^2 dx = \tan x - x + C$$

$$\int (\cot x)^2 dx = -\cot x - x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \pm\frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

10． y=sinwx(w>0)

它的半个周期与 **x** 轴围成的面积为 **s=2/w**

把它的半个周期分成三等分,中间的那部分面积为 **s’=1/w**

显然 **s=2s’**

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{w}} \sin wxdx = \frac{2}{w}$$

$$S' = \int_{\frac{2\pi}{3w}}^{\frac{\pi}{3w}} \sin wxdx = \frac{1}{w}$$

11. 定积分部分

（**1**）如果函数 **f**（**x**）在**[-a,a]**上连续

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx = \frac{0(\text{如果f}(x)\text{为奇函数})}{2\int_{0}^{a} f(x)dx(\text{如果}f(x)\text{为偶函数})}$$

（2）

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin kx)^2 dx = \pi$$

(3)

设$k, l \in N^+$,且$k \neq l$,则

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lxdx = 0$$

(4). 设 **f(x)**是以周期为 **T** 的连续函数

$$(1).\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$(2).\int_{a}^{a+nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx$$

(5). 特殊积分

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}(a > 0)$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-pt} \sin wtdt = \frac{w}{p^2 + w^2}(p > 0, w > 0)$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-pt} \cos wtdt = \frac{p}{p^2 + w^2}(p > 0, w > 0)$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

(6). 关于三角函数定积分简化(注意：**f(x)**是定义在**[0,1]**上的函数**)**

$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ 特别的 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$

$(2)\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

特别的 $\int_0^{\pi}(\sin x)^n dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx$

$$(3)\int_0^{\pi}(\cos x)^n dx=\begin{cases}0 & (n\text{为奇数})\\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$(4)\int_0^{2\pi}(\sin x)^n dx=\begin{cases}0 & (n\text{为奇数})\\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$(5)\int_0^{2\pi}(\cos x)^n dx=\begin{cases}0 & (n\text{为奇数})\\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx & (n\text{为偶数})\end{cases}$$

$$(6)\int_0^{2\pi}(\sin x)^n dx=\int_0^{2\pi}(\cos x)^n dx$$

$$(7)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{2}{3}\quad (n\text{为正奇数})$$

$$=\frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\quad (n\text{为正偶数})$$

$$(8)\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

11. 图像分段的函数不一定是分段函数（如 **y=1/x**）
分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线（如 **y=|x|**）

12. 如何证明一个数列是发散的？
（**1**）只要找到的两个子数列收敛于不同的值
（**2**）找一个发散的子数列

13. 必记极限

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

$$(3)\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$$

$$(4)\lim_{x\to 0^+}x^x=1$$

$$(5)\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

14. 函数 **f(x)**在**[a,b]**有定义，且**|f(x)|**在**[a,b]**上可积，此时 **f(x)**在**[a,b]**上的积分不一定存在
列如：

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ -1 & x\text{为无理数}\end{cases}$$

15. 注意

若$f'(a)>0$，只能得到结论：$f(x)$在a点严格增加。即$\forall x\in(a-\delta,a)$有$f(x)<f(a)$
$\forall x\in(a,a+\delta)$有$f(x)>f(a)$;但不能得到结论：$f(x)$在U（a，δ）内单调增大

16.

设f(x)=|x-a|g(x),其中g(x)在x=a处连续，则f(x)在x=a处可导$\Leftrightarrow$g(a)=0

应用：求函数f(x)=|x(x-1)(x-2)|(x^2-3x+2)的可导的点

显然为1,2

17. 函数取得极值的第二充分条件

设$f(x)$在x_0处n阶可导，且$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$

$f^{(n)}(x_0)\neq 0 \quad (2\leq n)$

(1) $n=2k$且$f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow f(x_0)$为极大值

(2) $n=2k$且$f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow f(x_0)$为极小值

(3)n=2k+1 $f(x_0)$不是极值点

18. 拐点的第二充分条件

设$f(x)$在x_0处n阶可导（n>2且为奇数）

若$f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$

则$(x_0, f(x_0))$为拐点

19 .用求导法判断数列的单调性

设$A_{n+1}=f(A_n)$, $A_n\in I$ 若$f(x)$在区间I上单调递增

则：（1） $A_2>A_1$ $\{A_n\}\nearrow$

(2) $A_2<A_1$ $\{A_n\}\searrow$

注意：若$f(x)$在区间I上单调递减

则:$\{A_{2n-1}\}$与$\{A_{2n}\}$两数列具有相反的单调性

20. 题目中如果出现$f''(x)\neq 0\Rightarrow f'(x)$单调

21. $\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x \quad (x\to 0)$

22. 无穷小小谈

当$x\to 0$时，有

(1)当 $0<n\leq m\Rightarrow x^m=o(x^n)$

(2)当 $0<n\leq m\Rightarrow o(x^m)+o(x^n)=o(x^n)$

(3)当 $0<n\leq m\Rightarrow \dfrac{o(x^m)}{x^n}=o(x^{m-n})$

注意：两个$o()$不可以相除

(4)当 $m,n>0\Rightarrow x^m\bullet o(x^n)=o(x^{m+n})$

$o(x^m)\bullet o(x^n)=o(x^{m+n})$

23. 无穷个无穷小之和与无穷个无穷小之积一定都是无穷小吗？？？？？

哈哈！显然都是NO

之和：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n})=1$ (其中$\frac{1}{n}$有无穷多个)

之积：取$\frac{k^n}{n!}\to 0$ (其中$n\to\infty, k=1,2,3\cdots\cdots$)

显然$\frac{1^n}{n!}\frac{2^n}{n!}\frac{3^n}{n!}\cdots\cdots\frac{n^n}{n!}=\frac{(n!)^n}{(n!)^n}=1$

24. 反三角

(1) $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

(2) $\arcsin(\sin t)=\dfrac{t\quad ,0\le t\le\frac{\pi}{2}}{\pi-t\quad ,\quad \frac{\pi}{2}\le t\le\pi}$

25. 求$A(b)=\int_{a_1}^{a_2}|x-b|dx$的最小值

结论：当$b=\frac{a_1+a_2}{2}$时 $A_{\min}(b)=\frac{1}{4}(a_1-a_2)^2$

26. $\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx=0$

27. $\int_0^1\ln xdx=-1$

28. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

作用：$\int_0^1 x(1-x)^9 dx=\int_0^1 x^9(1-x)dx$ 这下就好求了

29.

若f(x)在[a, b]上可积

则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]dx$

特别的当$a=0$时，有如下推论：

(1) $\int_0^b f(x)dx=\int_0^b f(b-x)dx$

(2) $\int_0^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^b[f(x)+f(b-x)]dx$

30. 若f(x)在[a, b]上可积,则：

$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}[f(x)+\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})]dx$

31． $\int f(x)f'(x)dx=\dfrac{f^2(x)}{2}+C$

32．连续函数必有原函数且原函数连续，若 f（x）是不连续的分段函数，则 f（x）的原函数就一定不存在

33．

有极限 $\leftarrow$ 连续

$\swarrow$ $\nwarrow$

$\swarrow$ 可微 $\leftarrow$ 偏导连续

$\swarrow$ $\swarrow$

有定义 $\leftarrow$ 偏导存在

34．对

$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$进行推广：

设$f(x)$在[0,1]上连续，且$a+b=n\pi(n=0,1,2...)$

有以下结论：

（1）n为奇数 $\int_a^b xf(\sin x)dx=\dfrac{n\pi}{2}\int_a^b f(\sin x)dx$

n为偶数 $\int_a^b xf(\cos x)dx=\dfrac{n\pi}{2}\int_a^b f(\cos x)dx$

（2）若f(x) 为偶函数，则

$$\int_a^b xf(\sin x)dx=\frac{n\pi}{2}\int_a^b f(\sin x)dx$$

$$\int_a^b xf(\cos x)dx=\frac{n\pi}{2}\int_a^b f(\cos x)dx$$

35． 线、面积分中的对称简化

（1）对弧长的曲线积分

设连续且分段光滑的平面线弧L关于y轴对称，函数f(x, y)在L上有定义且连续,$\dfrac{L}{2}$为$x\geq 0$的半个区域，则：

若f(−x, y)=f(x, y) $\int_L f(x,y)ds=2\int_{\frac{L}{2}} f(x,y)ds$

若f(−x, y)=−f(x, y) $\int_L f(x,y)ds=0$

例一 $I=\int_L (xy+x^2)ds,\ L$为y=$\sqrt{a^2-x^2}$

解:I=$\int_L (xy+x^2)ds=\int_L xyds+\int_L x^2ds=0+2\int_{\frac{L}{2}} x^2ds$

$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\bullet ad\theta=\frac{\pi}{2}a^3$

例二 $I=\oint_L (x+y^3)ds, L$为$x^2+y^2=R^2$

解：$I=\oint_L (x+y^3)ds$=$\oint_L xds$+$\oint_L y^3ds$=0+0=0(自己体会一下，为什么？)

（2）对坐标的曲线积分

A.设连续且分段光滑的平面有向曲线弧L关于y轴对称，函数P(x,y)在L上有定义且连续，$\frac{L}{2}$为$x\geq 0$的半个区域，则：

若P(-x,y)=P(x,y) $\int_L P(x,y)dx=2\int_{\frac{L}{2}} P(x,y)dx$

若P(-x,y)=-P(x,y) $\int_L P(x,y)dx=0$

例一 $I=\int_L xy(ydx-xdy)$,其中L为$y=\sqrt{R^2-x^2}$,方向为从左到右

解:$I=\int_L xy(ydx-xdy)=\int_L xy^2dx-\int_L x^2ydy=0-\int_L x^2ydy=0$(这要用到下面$B$的结论)

例二 $I=\oint_L x^2ydy$,其中L为双组线的右半支：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\geq 0$的逆时针方向

解： 由于图像关于x轴对称，则$I=0$

B.设连续且分段光滑的平面有向曲线弧L关于y轴对称，函数P(x,y)在L上有定义且在左半平面部分L1与右半平面部分L2方向相反，则：

若P(-x,y)=P(x,y) $\int_L P(x,y)dy=0$(上面讲到的就是用的这个结论)

若P(-x,y)=-P(x,y) $\int_L P(x,y)dy=2\int_{L1} P(x,y)dy$

注意：这里的方向相反是指：关于哪个轴对称就关于谁的方向相反

对于关于x轴对称的情况就不写了，其实是一个道理！一定要把A,B好好的比较看看两者之间的区别与联系

例一 $I=\int_L x|y|dx$,其中L为$y^2=x$上从$A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段弧

解：L关于x轴对称且方向相反且被积函数x|y|为y的偶函数

故I=0

例二 $I=\int_{ABCD}\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$,其中ABCD是A(1, 0)B(0, 1)C(−1, 0)D(0, −1)为顶点的正方形的边界线，方向为逆时针方向

解：$I=\int_{ABCD}\frac{dx}{|x|+|y|}+\int_{ABCD}\frac{dy}{|x|+|y|}$

第一部分积分：曲线关于x轴对称，且方向相反，而函数$\frac{1}{|x|+|y|}$是y的偶函数，故积分为0，同理第二部分积分也为0

故I=0

(3)对面积的曲面积分

设分片光滑的曲面$\sum$关于yoz平面对称，$f(x,y,z)$在$\sum$上连续，$\frac{\sum}{2}$是$\sum$中$x\geq 0$的一半

则有：当f(−x, y, z)=−f(x, y, z)时， $\iint\limits_{\sum} f(x,y,z)ds=0$

当f(−x, y, z)=f(x, y, z)时 $\iint\limits_{\sum} f(x,y,z)ds=2\iint\limits_{\frac{\sum}{2}} f(x,y,z)ds$

对于关于zox, xoy的平面对称有类似的性质

例一 $I=\iint\limits_{\sum}(x+y+z)ds$,其中$\sum$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$上$z\geq h$（0<$h<a$）的部分

解:$\sum$关于yoz, xoz面对称，故$I=\iint\limits_{\sum} zds=\pi a(a^2-h^2)$

例二 $I=\iint\limits_{\sum}(xy+yz+zx)ds$,其中$\sum$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所截的部分

解:$\sum$关于xoz面对称，故$I=\iint\limits_{\sum} zxds=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$

(4)对坐标的曲面积分

设分片光滑的曲面$\sum$关于yoz面对称，函数$p(x,y,z)$在$\sum$上连续，$\frac{\sum}{2}$是$\sum$中$x\geq 0$的一半，则：

当f(−x, y, z)=f(x, y, z)时， $\iint\limits_{\sum} f(x,y,z)dydz=0$

当f(−x, y, z)=−f(x, y, z)时 $\iint\limits_{\sum} f(x,y,z)dydz=2\iint\limits_{\frac{\sum}{2}} f(x,y,z)dydz$

例一 $I=\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$,其中$\sum$是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧在$x\geq 0, y\geq 0$的部分。

解:$\sum$关于xoy面对称，故$I=\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy=2\iint\limits_{\Sigma_2} xyzdxdy=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

例二 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$,其中$\sum$为曲线弧段z=y^2$(x=0,1\leq z\leq 4)$绕z轴旋转所成的旋转曲面的非封闭侧。

解：显然曲面$\sum$关于yoz,zox面对称，故$I=\iint\limits_{\Sigma} z^2dxdy=21\pi$

36．轮换对称性在积分计算中的应用举例

1.设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，D对坐标x, y具有轮换对称性，则：

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(y,x)dxdy$$

何为轮换对称性：将x, y互换后D不变

例一 $I=\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$,其中$D$为$x+y=2$与两坐标轴围成

解：D关于x,y具有轮换对称性，则:

$$I=\iint\limits_D (3x+2y)dxdy=\iint\limits_D (3y+2x)dxdy=\frac{5}{2}\iint\limits_D (x+y)dxdy=5\iint\limits_D xdxdy=\frac{20}{3}$$

例二 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} (y^2-x^2)dxdy$

解:$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} (y^2-x^2)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} (x^2-y^2)dxdy=-I$,故$I=0$

2.设函数$f(x,y,z)$在空间有界闭区域Ω上连续，Ω对坐标x, y具有轮换对称性，则：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint_{\Omega} f(y,x,z)dv$$

例一　求$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv$, Ω为$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x^2+y^2+z^2=R^2$

解：由于积分区域关于x, y, z具有轮换对称性，则：

$$\iiint_{\Omega} xdv=\iiint_{\Omega} ydv=\iiint_{\Omega} zdv$$

$$\iiint_{\Omega}(x+y+z)dv=3\iiint_{\Omega} zdv=\frac{3}{16}\pi R^4$$

例二　求$I=\iiint_{\Omega}(z-x^2+y^2)dv$, Ω为$z=x^2+y^2$和$z=h$（$h>0$）围成的区域

解：积分区域关于x, y具有轮换对称性

$$I=\iiint_{\Omega}(z-x^2+y^2)dv=\iiint_{\Omega}(z-y^2+x^2)dv=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega} 2zdv=\frac{\pi}{3}h^3$$

3.设L是xoy面上一条光滑的曲线弧，L对坐标x, y具有乱换对称性，f(x, y)在L上连续，则：

$$\int_{L} f(x,y)ds=\int_{L} f(y,x)ds$$

例一　$I=\oint_{L} x^{\frac{2}{3}}ds$, L为星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

解：显然L对x,y具有轮换对称性，则：

$$I=\oint_{L} x^{\frac{2}{3}}ds=\oint_{L} y^{\frac{2}{3}}ds=\frac{1}{2}\oint_{L}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})ds=\frac{1}{2}a^{\frac{2}{3}}\oint_{L} ds=3a^{\frac{5}{3}}$$

例二　求$\oint_{F}(x^2+z)ds$, F是圆周$x^2+y^2+z^2=R^2, x+y+z=0$

解：F关于x,y,z具有轮换对称性，则：

$$\oint_{F} x^2ds=\oint_{F} y^2ds=\oint_{F} z^2ds,\qquad \oint_{F} xds=\oint_{F} yds=\oint_{F} zds$$

$$故\oint_{F}(x^2+z)ds=\frac{1}{3}\oint_{F}(x^2+y^2+z^2)ds+\frac{1}{3}\oint_{F}(x+y+z)ds=\frac{R^2}{3}\oint_{F} ds=\frac{2\pi R^3}{3}$$

4.设L是xoy面上一条光滑的或者分段光滑的有向曲线弧，L对坐标x,y具有轮换对称性，$f(x,y)$在L上连续，则：

$$\int_{L} f(x,y)ds=-\int_{L} f(y,x)ds$$

或者$\int_{L} f(x,y)ds+\int_{L} f(y,x)ds=0$

例一 $I=\int_L ydx+xdy, L$为$x+y=R$上A$(R,0)$到B$(0,R)$的一段弧

解：L对坐标x,y具有轮换对称性，故$\int_L ydx+xdy=0$

例二 $I=\oint_L y^{\frac{2}{3}}dx+y^{\frac{2}{3}}dx, L$为双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$位于第一象限部分

取逆时针方向

解：L关于x,y具有轮换对称性，则$\int_L y^{\frac{2}{3}}dx+x^{\frac{2}{3}}dy=0$

5.设$\sum$是光滑曲面或者分片光滑曲面,$\sum$对坐标x,y具有轮换对称性，$f(x,y,z)$在$\sum$上连续，则：

$$\iint_{\sum} f(x,y,z)ds=\iint_{\sum} f(y,x,z)ds$$

例一 $I=\iint_{\sum}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)ds, \sum: x^2+y^2+z^2=R^2$

解： $\iint_{\sum} x^2ds=\iint_{\sum} y^2ds=\iint_{\sum} z^2ds$

$$I=\iint_{\sum}(x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2)ds=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\iint_{\sum} z^2ds$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\frac{1}{3}\iint_{\sum}(x^2+y^2+z^2)ds=\frac{7}{3}\pi R^4$$

例二 $I=\iint_{\sum}(ax+by+cz)ds, \sum: x^2+y^2+z^2=R^2$位于第一挂限部分

解： $\iint_{\sum} xds=\iint_{\sum} yds=\iint_{\sum} zds$

$$I=(a+b+c)\iint_{\sum} zds=\frac{1}{4}\pi R^3(a+b+c)$$

6.设$\sum$是光滑曲面或者分片光滑曲面,$\sum$对坐标x,y具有轮换对称性，$f(x,y,z)$在$\sum$上连续，则：

$$\iint_{\sum} f(x,y,z)dydz=\iint_{\sum} f(y,x,z)dzdx$$

例一 $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy, \sum$为$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$(0\le z\le h)$的外侧

解:$\sum$关于x,y具有轮换对称性，则:

$\iint\limits_{\Sigma}(y-z)dydz=\iint\limits_{\Sigma}(x-z)dxdz$

$\iint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy=\iint\limits_{\Sigma}(y-x)dydx=0$

所以$I=0$

例二 $I=\iint\limits_{\Sigma}xydydz+yzdzdx+zxdxdy, \sum$为平面$x+y+z=1$位于第一挂限的外侧

解:$\sum$关于x,y,z具有轮换对称性，则:

$\iint\limits_{\Sigma}xydydz=\iint\limits_{\Sigma}zydydx=\iint\limits_{\Sigma}zxdxdy$

$I=3\iint\limits_{\Sigma}xydydz=\frac{1}{8}$

37. 广义的罗尔定理

设$f(x)$满足：(1)在区间$(a,+\infty)$上连续

(2)在区间$(a,+\infty)$内可导

(3) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

则：$\exists\xi>a$ 使得$f'(\xi)=0$

38. 需要记忆的反例

(1) $f(x)=|x|$在$x=0$处不可导

(2) $f(x)=1 \quad x\ne 0$

$f(x)=0 \quad x=0$ 在$x=0$点不可导

应用：设$f(0)=0$,则$f(x)$在$x=0$点处可导的充分必要条件为:

$(A)\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在 $(B)\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1-e^h)}{h}$存在

$(C)\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在 $(D)\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}$存在

用(1)检验AC,用(2)检验D,答案为B

39.

(1)若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$且$\lim\frac{\alpha}{\beta}\ne1$

则:$(\alpha-\beta)\sim(\alpha'-\beta')$

(2)若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$且$\lim\frac{\alpha}{\beta}\ne-1$

则:$(\alpha+\beta)\sim(\alpha'+\beta')$

40. 特别要注意的地方

设$f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的连续，函数$F(x)$为$f(x)$的一原函数，则：

(1) $f(x)$为奇函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$任意原函数$F(x)$为偶函数

(2) $f(x)$为偶函数 $\Leftrightarrow$ $f(x)$的原函数只有一个是奇函数,即为$\int_0^x f(t)dt$

(3) $f(x)$任意原函数$F(x)$为周期函数 $\Rightarrow$ $f(x)$为周期函数

(4) $f(x)$以T为周期的函数且$\int_0^T f(x)dx=0 \Rightarrow$ $f(x)$任意原函数$F(x)$以T为周期

(5)函数的单调性与其原函数的单调性之间没有逻辑上的因果关系

41. 几个极限之间的关系

1.若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}=a$

2.若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$且$a_n>0$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

3.若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a$且$a_n>0$ 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$

但要注意：若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$且$a_n>0$，不能推出$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=a$

反例：$a_n=2(n\text{为偶数})$

$\qquad=3(n\text{为奇数})$

42. 函数与其反函数图像交点问题

函数与其反函数图像交点有如下两个结论：

(1)设$f(x)$是增函数，其反函数为$f^{-1}(x)$，如果这两个函数图像有交点，则交点必在函数$y=x$上

(2)设$f(x)$是减函数，其反函数为$f^{-1}(x)$，如果这两个函数图像有交点，则交点不一定都在函数$y=x$上

例如：$y=-x+2$,其反函数就是其本身

43．**阶乘不等式**

阶乘不等式在极限证明中的应用

(1)设n为自然数，则$(\frac{n}{e})^n < n! < e(\frac{n}{2})^n$

应用：证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

$$证明:\frac{n!}{n^n}<\frac{e(\frac{n}{2})^n}{n^n}<\frac{e}{2^n},n\to\infty时,\frac{e}{2^n}\to 0,\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$($a$为任意实数)

证明:$a=0$，显然成立

$$a\neq 0, 0<|\frac{a^n}{n!}|<|a^n|(\frac{e}{n})^n=(\frac{|a|e}{n})^n$$

$$n\to\infty时,\frac{|a|e}{n}\to 0,(\frac{|a|e}{n})^n\to 0$$

$$\therefore 根据夹逼准则:\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$$

(2)一些不常用的，可以记忆玩玩

1°设$p\geq 2$且p为实常数，则$n!>(\frac{n}{p})^{\frac{n}{p}}$

2°当$n\geq 4$时，$n!>(\sqrt{n})^{\sqrt{n}}$

3°当$n\geq 2$时，则$n!>(\ln n)^{\ln n}$

44. 中值定理

$$中值定理\begin{cases}微分中值定理\begin{cases}罗尔定理\\拉格朗日定理\\柯西定理\end{cases}\\ \\积分中值定理\begin{cases}第一积分中值定理\\推广的第一积分中值定理\\第二积分中值定理\end{cases}\end{cases}$$

罗尔定理

$y=f(x)$满足:

(1)在区间$[a,b]$上连续

(2)区间(a,b)内可导

(3)$f(a)=f(b)$

$\rightarrow$在区间(a,b)内至少存在一点ξ使得$f'(\xi)=0$

注意：该定理的条件只是充分的，本定理可以推广为：

$y=f(x)$在区间(a,b)内可导, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$

$\rightarrow$在区间(a,b)内至少存在一点ξ使得$f'(\xi)=0$

拉格朗日定理

$y=f(x)$满足:

(1)在区间$[a,b]$上连续

(2)区间(a,b)内可导

$\rightarrow$在区间(a,b)内至少存在一点ξ使得$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西定理

$f(x)$及$F(x)$满足:

(1)在区间$[a,b]$上连续

(2)区间(a,b)内可导

(3)区间(a,b)内$F'(x)\neq 0$

$\rightarrow$在区间(a,b)内至少存在一点ξ使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

45．需注意的地方

●可积与连续之间的关系

1.闭区间上的连续函数一定是可积的；

2.可积函数不一定是连续的，但是一定有无穷多个处处稠密的连续点

●可积与存在原函数之间的关系

1.$f(x)$存在原函数，但其不一定可积，例如$f(x)=\dfrac{1}{x},x\in(0,+\infty)$

2.$f(x)$在$[a,b]$上可积，但$f(x)$不一定存在原函数，例如：

$$f(x)=\begin{cases}1,0\le x<\dfrac{1}{2}\\[2mm] 0,x=\dfrac{1}{2}\\[2mm] -1,\dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

，易知$f(x)$在$[0,1]$上可积，积分值为0

46．用泰勒公式分解既约分式

用泰勒公式分解既约真分式（以下只给出结论）

设$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$是既约真分式，$Q(x)$在复数范围内可以分解为$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_r)^{n_r}$，则其能唯一分解为：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=[\frac{b_1^{\ 1}}{(x-a_1)^{n_1}}+\frac{b_1^{\ 2}}{(x-a_1)^{n_1-1}}+\cdots\frac{b_1^{\ n_1}}{(x-a_1)}]+[\frac{b_2^{\ 1}}{(x-a_2)^{n_2}}+\frac{b_2^{\ 2}}{(x-a_2)^{n_2-1}}+\cdots\frac{b_2^{\ n_2}}{(x-a_2)}]+\cdots$$

$$+[\frac{b_i^{\ 1}}{(x-a_i)^{n_i}}+\frac{b_i^{\ 2}}{(x-a_i)^{n_i-1}}+\cdots\frac{b_i^{\ n_i}}{(x-a_1)}]+\cdots[\frac{b_r^{\ 1}}{(x-a_r)^{n_r}}+\frac{b_r^{\ 2}}{(x-a_r)^{n_r-1}}+\cdots\frac{b_r^{\ n_r}}{(x-a_r)}]$$

其中$b_i^{\ j}(i=1,2,\cdots,r;\ j=1,2,\cdots n_i)$都是待定的常数

设$f_i(x)=\dfrac{P(x)}{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_{i-1})^{n_{i-1}}(x-a_{i+1})^{n_{i+1}}\cdots(x-a_r)^{n_r}}$，且$b_i^{\ j}=\dfrac{f_i^{(j-1)}(a_i)}{(j-1)!}$

例一　　将$\dfrac{3x}{(x-1)(x+1)^2}$分成部分分式

解：令$f_1(x)=\dfrac{3x}{(x+1)^2}$，则$f_1(1)=\dfrac{3}{4}$

$f_2(x)=\dfrac{3x}{x-1}$，则$f_2\,'(-1)=-\dfrac{3}{4}$，$f_2(-1)=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\ \frac{3x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{3}{4}[\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}]$$

例二　　将$\dfrac{2x+7}{x(x-1)(x+3)}$分成部分分式

解：$f_1(x)=\dfrac{2x+7}{(x-1)(x+3)}$，$f_1(0)=-\dfrac{7}{3}$

$f_2(x)=\dfrac{2x+7}{x(x+3)}$，　$f_2(1)=\dfrac{9}{4}$

$f_3(x)=\dfrac{2x+7}{x(x-1)}$，　$f_3(-3)=\dfrac{1}{12}$

$$\therefore\ \frac{2x+7}{x(x-1)(x+3)}=-\frac{7}{3x}+\frac{9}{4(x-1)}+\frac{1}{12(x+3)}$$

由此可见此法对分母都是一次时特别简单

例三　　将$\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x+1)(x-2)^4}$分成部分分式

解：$f_1(x)=\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4}$，$f_1(-1)=-1$

$f_2(x)=\dfrac{9x^3-24x^2+48x}{(x+1)}$，$f_2(2)=24$，$f_2\,'(2)=12$，$\dfrac{f_2\,''(2)}{2!}=6$

$\dfrac{f_2\,'''(2)}{3!}=1$

$$\therefore\ \frac{9x^3-24x^2+48x}{(x+1)(x-2)^4}=-\frac{1}{x+1}+\frac{24}{(x-2)^4}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{1}{x-2}$$

47．求不定积分的几种特殊技巧

求定积分的几种特殊技巧

1.定义在对称区间[a, b]上的任何函数都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和

$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$表示偶函数，$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$表示奇函数

2.$f(x)$定义在对称区间[a, -a]上

$f(x)$为奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$

$f(x)$为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

(1) 求定积分$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx$

$$\Theta(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{x\ln(1+e^x)+x\ln(1+e^{-x})}{2}=x\ln(1+e^x)-\frac{1}{2}x^2\text{表示奇函数}$$

$$\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)dx=\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2dx=\int_{-2}^{2}[x\ln(1+e^x)-\frac{1}{2}x^2]dx+\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=0+\int_{0}^{2} x^2dx=\frac{8}{3}$$

(2)求定积分$\int_{-1}^{1}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}dx$

值得注意的是一眼看去$\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}$不是奇函数，实际求一下发现它是奇函数

3.巧用几何意义求定积分

求$\int_{a}^{b}\sqrt{(x-a)(b-x)}dx(b>a)$

解：被积函数$f(x)=\sqrt{(x-a)(b-x)}=\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2-(x-\frac{a+b}{2})^2}$是以$(\frac{a+b}{2},0)$为圆心，$\frac{b-a}{2}$为半径的上半圆，上半圆的面积为$S=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi(\frac{b-a}{2})^2=\frac{\pi}{8}(b-a)^2$

根据定积分的几何意义，$\int_{a}^{b}\sqrt{(x-a)(b-x)}dx=\frac{\pi}{8}(b-a)^2$

4.前面我面有这样一个结论:$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)dx$

现在我们再给出特殊一点的式子:$\int_{a}^{b} xf(x)dx=?$

以下有结论：设函数$f(x)$在[a, b]上连续，且$f(x)$关于$x=\frac{a+b}{2}$对称，则：

$$\int_{a}^{b} xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

48．矩阵积分法

设$u_i=(u_{i-1})'\qquad v_i=\int v_{i-1}dx\qquad (i=1,2,\cdots)$

函数序列一：$u_0,u_1,u_2,\cdots u_n,\cdots$

函数序列二：$v_0,v_1,v_2,\cdots v_n,\cdots$

一. 形如$\int x^n\sin axdx$的积分

函数序列一：$u_0=x^n,u_1=nx^{n-1},\cdots u_n=n!$

函数序列二：$v_0=\sin ax,v_1=\frac{-1}{a}\cos ax,\cdots v_n=\frac{(-1)^n}{a^n}\sin[ax+\frac{\pi}{2}n]$

函数序列一和函数序列二作为矩阵的一二行，构造一个辅助矩阵，就可以方便的求得结果

求$\int(x^3+2x+3)\sin 3xdx$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x^3+2x+3 & & 3x^2+2 & & 6x & & 6 & & 0 \\
 & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & \\
\sin 3x & & -\frac{1}{3}\cos x & & -\frac{1}{9}\sin 3x & & \frac{1}{27}\cos 3x & & \frac{1}{81}\sin 3x
\end{array}$$

$$原式=(x^3+2x+3)(-\frac{1}{3}\cos x\ \ )-(3x^2+2)(\ -\frac{1}{9}\sin 3x)+6x(\frac{1}{27}\cos 3x)-6(\frac{1}{81}\sin 3x)$$

$$=-\frac{1}{3}\cos 3x(x^3+2x+3)+\frac{(3x^2+2)}{9}\sin 3x+\frac{2x}{9}\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$$

注：按u_nv_{n+1}规则进行斜线相乘，每一项正负交替出现

二. 形如$\int x^n\cos axdx,\int x^ne^{ax}dx$的积分

方法与上述一样

三. 形如$\int e^{ax}\sin bxdx$的积分

函数序列一：$u_0=\sin bx,u_1=b\cos bx,u_2=-b^2\sin bx\cdots$

函数序列二：$v_0=e^{ax},v_1=\frac{1}{a}e^{ax},v_2=\frac{1}{a^2}e^{ax}\cdots$

求$\int e^{2x}\sin 3xdx$的积分

$$\begin{array}{ccccc}
\sin 3x & & 3\cos 3x & & -9\sin 3x \\
 & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & & \nwarrow\!\!\!\!\searrow & \\
e^{2x} & & \frac{1}{2}e^{2x} & & \frac{1}{4}e^{2x}
\end{array}$$

2015 考研数学 66 条笔记

1、

对于不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边取极限时（以极限存在为前提），除不等号外还要带上等号，即 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n \le \lim\limits_{x\to\infty} y_n$。

2、对于任意数列 $\{a_n\}$，若满足 $|a_n - A| \le k|a_{n-1} - A| (n = 2,3....)$ 其中 $0 < k < 1$，则必有 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$。这一结论在求解递归数列的极限时是很有用的。

3、设 $g(x)$ 在 $x = a$ 可导，$\varphi(x)$ 在 $x = a$ 连续而不可导，则 $g(x)\ \varphi(x)$ 在 $x = a$ 处

$$\begin{cases} \text{不可导} & \text{若} g(a) \ne 0 \\ \text{可导且导数为} g'(a)\varphi(a) & \text{若} g(a) = 0 \end{cases}$$

4、证明 $f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)$ 在 (a,b) 存在零点，等价于证明 $u(x)[f'(x) + P(x)f(x) - Q(x)]$ 在 (a,b) 存在零点，其中 $u(x)$ 为 (a,b) 内任意恒正的函数。受求解一阶线性方程积分因子法的启示，取 $u(x) = e^{\int P(x)dx}$，$F(x) = e^{\int P(x)dx} f(x) - \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$

5、曲率：$K = \left|\dfrac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\right| = \dfrac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$

6、参数方程的重积分换元 $\begin{cases} x = F_1(r,s,t) \\ y = F_2(r,s,t) \\ z = F_3(r,s,t) \end{cases}$ $\quad dxdydz = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = drdsdt$

7、若 $f(x)$ 以 T 为周期的周期函数，$f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充要条件是 $\int_0^T f(t)dt = 0$

8、若 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点，则 $f(x)$ 在 I 上不存在原函数；若 $f(x)$ 在区间 I 上有第二类间断点，不确定 $f(x)$ 在 I 上存不存在原函数。

9、多元初等函数的偏导数仍是初等函数，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

10、旋转面与柱面方程

命题 1：设空间曲线 Γ 的曲线参数方程为 $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$，则 Γ 绕 z 轴旋转

一 周 的 曲 面 方 程 为 ： $\begin{cases} x=\sqrt{\varphi(x)^2+\psi(x)^2}cos\theta \\ y=\sqrt{\varphi(x)^2+\psi(x)^2}sin\theta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

命题 2：准线方程为 Γ： $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 当母线的方向向量为 $s=\{l,m,n\}$ 则柱面方程

$f(x-\frac{l}{n}z,y-\frac{m}{n}z)=0$

命题 3：若准线方程是 Γ： $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t),t\in(\alpha,\beta) \\ z=h(t) \end{cases}$，母线的方向向量是 $s=\{l,m,n\}$，柱

面方程是 $\begin{cases} x=f(t)+lu \\ y=g(t)+mu \\ z=h(t)+nu \end{cases}$

11、两个随机变量 X,Y，若 $X=aY+b$，则当 $a>0$ 时 $\rho_{XY}=1$；当 $a<0$ 时 $\rho_{XY}=-1$

12、 设 $f(x)$ 在 (a,b) 非负， $\forall[\alpha,\beta]\subset(a,b)$， $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积，又设 $x=a(或x=b)$ 是 $f(x)$ 的瑕点，且 $\lim\limits_{x\to a+0}(x-a)^p f(x)=l(或\lim\limits_{x\to b-0}(b-x)^p f(x)=l)$ 则当 $p<1且0\le l<+\infty时$，瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。

13、 实对称的矩阵的属于不同特征值的特征值向量正交

14、 正交的向量组必线性无关

15、 知道三边长求面积用“海伦公式” $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p},p=\frac{1}{2}(a+b+c)$

16、 $z=f(x,y,r)$ 条件“z 与 r 无关”，潜台词就是说 $\frac{\partial z}{\partial r}=0$

17、 $f(x,y)=g(x,y)$ 两边对 x，y 求偏导是相等的

18、 有 $z=f(x,y)$ 区域 D_{xy} 求极值（最值）用拉格朗日函数，求出 λ 若有两个，则分别算出后求其极（最）值大小

19、 秩为 1 的矩阵可以化为两个向量的积 $A=\alpha\alpha^T$， α 为 n 维列向量。并且 A 的自乘积 $A^2=aA$，a 为常数

20、 A 的行（列）向量相互垂直，且长度相同为 a， $B=\frac{1}{a}A$ 为正交矩阵

21、 $(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$ 满足交换律

22、 $ABx=0$① $Bx=0$② 由于②的解必是方程组①的解。因此，R（②的解向量）≤R（①的解向量）

23、 求矩阵的n次幂可化为对角阵（可化为对角阵的矩阵）来求：$A\sim\Lambda\Rightarrow A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

24、 矩阵A的正负惯性指数<u>不等于</u>主子式的正负个数

25、 时间A、B相互独立，A、B、$\bar{\text{A}}$、$\bar{\text{B}}$相互独立

26、 在使用公式$P\{a<x<b\}=F(b)-F(a)$时，在这里{}中的不等式应该是左开右闭的

27、 是对称矩阵的特征向量相互正交，$Q^{-1}AQ=\Lambda$已知Λ求A（已知A的一个特征向量）；先求出A的另外的特征向量（利用正交条件），求出Q，然后求出A

28、 对角阵左乘A，$A=[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n],A\Lambda=A\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots\lambda_n\alpha_n)$

29、 对于连乘式的处理，可以将式子取对数，转换成和式进行分析

30、 E(X+Y)=E(X)+E(Y) X、Y不作独立要求 E(XY)=E(X)E(Y) X、Y必须独立 Cov（X，Y）=0

31、 ①矩阵A满足f（A）=0，矩阵A的特征值由$f(\lambda)=0$确定 ②$f(\lambda)=0$解出来的 $\lambda=\lambda_i$只是确定了λ的取值范围，具体特征值是否有？有几个同样的特征值？还需要增加题目条件

32、 矩阵$A_{m\times n}$，对于A^TA的特征值为非负：$(Ax)^TAx\ge0\Rightarrow x^TA^TAx\Rightarrow A^TA$正定或半正定，$\lambda\ge0$

33、 A对应的线性无关特征向量的个数≤特征值的重数

34、 最大似然估计值不一定要求似然函数的导数为零，有可能似然函数是恒增或者是恒减的，那么根据定义域的范围来求解最大似然估计值

35、 初等矩阵均是可逆的，并且有这样的表示方法（要会写出初等矩阵的表示）：

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij},E_i^{-1}(k)=E\left(\frac{1}{k}\right),E_{ij}^{-1}(k)=E(-k)$$

36、 两个极限反常积分审敛法：①反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(a>0)$当p>1时收敛，当p≤1时发散

②反常积分$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx$当0<p<1时收敛，当p≥1时发散

37、 $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是存在常数 a、b 使 $P\{Y=aX+b\}=1$

38、 证明一元函数 f（x）的极限不存在的一种方法：若 $\exists x_n \to x_0, x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在或 $\exists x_n \to x_0, x_n \neq x_0, y_n \to x_0, y_n \neq x_0$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

39、 对于任意数列 $\{a_n\}$，若满足 $|a_n - A| \leq k|a_{n-1} - A|$ 其中 0<k<1，则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$（求解递归数列的极限，数列不是单调的，先求 A，后证明存在）

40、 设 $a_{n+1} = f(a_n)(n=1、2、3\cdots), a_n \in$ 区间I，若 f（x）在区间 I 单调上升，并且 $a_2 > a_1(a_1 > a_2)$，则 $\{a_n\}$ 单调上升（单调递减）；若 f（x）在区间 I 单调递减，则 $\{a_n\}$ 不具有单调性（对于递归系列的复杂的数列，可以从递归函数入手，PS：先说明有界）

41、 证明两条曲线在某一点相切 $M(x_0, y_0)$，先求交点，后求交点的导数相等/方向向量相等

42、 “f（x）在 $x=x_0$ 邻域二阶可导”换句话“f（x）在 $x=x_0$ 处的导数二阶导数连续”

43、 一般的，设 f（x）在[a,b]连续，在（a,b）n 阶可导， $f^n(x)$ 在（a,b）无零点，则 f（x）在（a，b）至多有 n 个不同的根

44、 用泰勒公式的证明，关键在于选取展开点，一般来说已知条件给的点作为展开点，若已知条件给出 f(x)，f’(x)的特征，可选在 x 处展开

45、 注意用词：“某点二阶可导”说明二阶导数在其邻域内是连续的；“在某点存在二阶导数”说明在该店处是可导的，但是在其邻域内不一定可导

46、 周期函数的导数依然是以 T 为周期的周期函数，而周期函数的原函数可就不一定是周期函数。只有当 $\int_0^T f(t)dt = 0$ 时，f（x）的全体原函数为周期为 T 的周期函数

47、 求取不定积分原函数的时候有一种方法，叫做“分项积分”一般应用在同种类型的函数结构构成的分式中（裂项公式）

48、 两个矩阵相似可以推出 A_1, A_2 的特征值相同，两矩阵的特征值相同不能推出相似；A_1, A_2 特征值相等并且 $R(\lambda E - A_1) = R(\lambda E - A_2)$ 可以得出结论“ A_1, A_2 相似”

49、 求 $x \to +\infty$ 时的极限，通常以“抓大头”的办法，所谓“抓大头”就是取分子、分母中趋于 $+\infty$ 最快的项（指数式>幂式>对数式）

50、 看清题目中的用字：“任意”一般来说范围很广，可以向要处理的式中带入特定的的值或表达式，向目标推导

51、 关于倒代换，设 m、n 分别为被积函数分子、分母关于（x±a）的最高次数，当 n-m ≥1 时，用到代换可能成功（设 x±a=1/t）

52、 $D(X+2Y)=0 \Rightarrow X+2Y=c(常数) \Rightarrow X=-2Y+c, \rho_{XY}=-1$

53、 $F_X(x)$为分布函数，考察 $x=a$ 点是否连续： $P\{X \le a\} - P\{X < a\} = 0$ 则连续，否则不连续

54、 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx (r>0)$ 是参数 r 的函数，称为 Γ 函数， Γ 函数的一个重要性质为 $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$，特别的 $\Gamma(n+1) = n!$

55、 $D(X) = D(\sum_i X_i) \xrightarrow{X_i与X_j相互独立} \sum_i D(X_i)$

$D(X) = D(\sum_i X_i) \xrightarrow{X_i与X_j不相互独立} \sum_i D(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$

56、 $f(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 则 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面？将 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 对角化，可以得到 $f = 4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$，f 表示椭圆柱面

57、 正交变换不改变向量长度

58、 矩阵 A 正定的必要条件 $a_{ii} > 0 (i = 1,2,3\cdots n), |A| > 0$，合同变换不改变矩阵的 特征值

59、 旋转曲面围成的平面的方向为右手螺旋定则所规定的

60、 已 知 $y = y(x)$ 的 曲 线 ， 与 x 轴 围 成 图 形 的 型 心 $\overline{x}, \overline{y}$

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{y(x)} x dy}{\int_a^b y dx} = \frac{\int_a^b y(x) x dx}{\int_a^b y dx}$$

$$\overline{y} = \frac{\int_a^b dx \int_0^{y(x)} y dy}{\int_a^b y dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

61、 对于 $F(x,y,z)=0$的隐函数的形式$dS = \dfrac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}{|F_y'|} dxdy$ 可以使得计算得到化简

62、 $f(x,y)$ 在公共点 M_0 处的法向量为 $(f_x', f_y')|_{M_0} = grandf(x,y)|_{M_0}$

63、 $(kA)^* = k^{n-1}A^*; (A^*)^* = |A|^{n-2} A; |A^*| = |A|^{n-1}$

64、 若 A 列满秩 $R(AB) = R(B)$， $R(A^T A) = R(A)$（2012 年数学一考过）

65、 $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^q n} \begin{cases} q > 1, & 收敛 \\ q \le 1, & 发散 \end{cases}$$

66、 $\{X + Y \le 2x\} \subset \{X \le x\} \cup \{Y \le x\}$

第三部分、考研数学 42 条必看核心笔记

1. 对于不等式 $x_n < y_n$ 时 $(n>N)$ 如果两极限存在则有不等式 $\lim\limits_{x\to\infty} x_n \le \lim\limits_{x\to\infty} y_n$（注意等号）.

2. 对于数列 $\{x_n\}$, 如果满足 $|a_n - A| \le k|a_{n-1} - A|$ $(n=2,3\cdots)$ 其中 $0<k<1$, 则必有 $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = A$.

3. 若 $f(x)$ 的周期为 T, $f(x)$ 的全体原函数以 T 为周期的充要条件: $\int_0^T f(x)dx = 0$

4. 如果 $f(x)$ 在区间上存在第一类间断点则 $f(x)$ 不存在原函数. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有第二类间断点不确定 $f(x)$ 在 I 上不存在原函数.

5. 多元初等函数的偏导数仍为初等函数: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$

6. 设空间曲线 Γ 的参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ 则 Γ 绕 z 轴旋转一周的曲面方程为:
$x=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\cos\theta$, $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}\sin\theta$.
$z=\omega(t)$.

7. 如果准线方程 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$ $t\in(\alpha,\beta)$, 母线的方向向量为 $s=\{l,m,n\}$, 则柱面方程方程: $\begin{cases} x=f(t)+lu \\ y=g(t)+mu \\ z=h(t)+nu. \end{cases}$

8. 两个随机变量 (RV), 若 $X=aY+b$ 则 $a>0$ 时 $\rho_{XY}=1$
如 $a<0$ 时 $\rho_{XY}=-1$.

9. $f(x)$在(a,b)非负，$[\alpha,\beta]\subset(a,b)$，$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积，设$x=a$（或$x=b$）为$f(x)$的瑕点，且$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)=t$或$\lim\limits_{x\to b^-}(b-x)^p f(x)=t$，则$p<1$且$0\le t<+\infty$时$\int_a^b f(x)dx$收敛。

10. 实对称矩阵A属于不同特征值的特征向量必正交。

11. 正交的向量组必然线性无关。

12. $z=f(x,y,r)$条件"z与r无关"即$\frac{\partial z}{\partial r}=0$。

13. 如果矩阵A的伴随矩阵A^*的秩为$r(A)=n-1$则$(A^*)^2=kA^*$.（k为实数）。

14. 矩阵A的正负惯性指数不等于二次式的正负个数。

15. A与B，A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$只要有一组相互独立其余相互独立。

16. X和Y相互独立$\Rightarrow E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow cov(X,Y)=0$

17. 如果矩阵A满足$f(A)=0$，矩阵A的特征值$f(\lambda)=0$

18. 设A为$m\times n$矩阵则A^TA的特征值必为非负。
$(AX)^T(AX)\geqslant 0\Rightarrow X^TA^TAX\geqslant 0\Rightarrow A$为正定（半正定）$\lambda\geqslant 0$.

19. 反常积分$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$ $p>1$时收敛，$p\le 1$时发散。

20. 反常积分$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ $(0<p<1)$时收敛$p\geqslant 1$时发散。

21. $|\rho_{XY}|=1$的充要条件：存在a,b使$P(Y=ax+b)=1$.

22. 对于任何$k\in(0,1)$，满足$|a_n-A|\le k|a_{n-1}-A|$则必有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

23. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{q}n}=\begin{cases} q>1 & 收敛 \\ q\le 1 & 发散 \end{cases}$

24. $(X+Y\le 2x)\subset(X\le x)\cup(Y\le x)$.

25. 如果A列满秩 $r(AB)=r(B)$. $r(A^TA)=r(A)$.

26. 正交变换不改变长度 $x=Py$ $(Py)^T\cdot Py=y^TP^TPy=\|y\|$.

27. $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}dx$ 为参数r的函数称为Γ函数

$\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)$. 特别 $\Gamma(n+1)=n!$, $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$

28. 设$f(x)$在$[a,b]$连续且$f(x)$关于$x=\frac{1}{2}(a+b)$对称则有

$\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

29. $\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx\ (b>a)=\frac{\pi}{8}(a-b)^2$.

30. $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$.

31. $\arcsin(\sin t)=t\ \ (0\le t\le\frac{\pi}{2})$, $\arcsin(\sin t)=\pi-t$, $(\frac{\pi}{2}\le t\le\pi)$

32. $f(x)=|x-a|g(x)$, 其中$g(x)$在$x=a$处连续则$f(x)$

在$x=a$处可导的充要条件: $g(a)=0$

33. $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)dx=0$.

$\int_{-\pi}^{\pi}(\cos kx)^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin kx)^2dx=\pi$.

34. 设$k,L\in N^+$且$k\neq L$则下列定积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin Lx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\cos Lx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos Lx\,dx=0$$

35. 特殊积分:

① $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (2). $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{1}{a}\ (a>0)$

③ $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, (4) $\int_0^{+\infty}e^{-px}\sin(wx)\,dx=\frac{w}{p^2+w^2}$

40. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,dx$.

41. $\int_0^{\pi}(\cos x)^n dx=\begin{cases} n=2k+1 & 0 \\ n=2k\text{时} & 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx. \end{cases}$

42. $\int_0^{2\pi}(\sin x)^n dx=\begin{cases} n=2k+1\text{时} & 0 \\ n=2k\text{时} & 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx. \end{cases}$

第四部分、2015 考研数学最常考最易错的结论

最常考的真假命题

1 若$f(x)$在点x_0连续，则$|f(x)|$在点x_0也连续。

2 若$|f(x)|$在点x_0连续，则$f(x)$在点x_0也连续。

3 两个无穷大量之和必定为无穷大量。

4 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$。

5 如果$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

6 如果$x\to\infty$时，曲线$y=f(x)$有水平渐近线，则该曲线一定没有斜渐近线

7 如果$f(x)$与$g(x)$均为可积函数且$f(x)\ge g(x)$则$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$

8 如果$f(x)$为连续的奇函数，则其原函数$F(x)$必定为偶函数

9 如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$为连续的奇函数则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

10 如果$f(x)$为连续函数则$\int_a^x f(t)\,dt$必定可导

最常考的真假命题

11 若$y=f(x)$在点$x=a$可导，则曲线$y=f(x)$的过点(a,b)的切线方程为：$y-b=f'(a)(x-a)$。

12 如果$f'(x_0)>0$，则必定存在$\delta>0$，使得$f(x)$为$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内的单调增函数。

13 若x_0为$q=f(x)$的极值点，则点$(x_0,f(x_0))$必定不为曲线$y=f(x)$的拐点。

14 如果$f'(x)$为(a,b)内的有界函数则$f(x)$也为(a,b)内的有界函数

15 如果$f(x)$是以T为周期的可导函数则其导函数$f'(x)$也是以T为周期的函数。

16 如果 $f(x)$为(a,b)内的单调函数且可导则$f'(x)$也为(a,b)内的单调函数

17 若$f(x)$在点x_0处可导则$|f(x)|$在点x_0必定可导。

18 初等函数在其定义区间内必定可导。

19 拉格朗日微分中值定理$f(x)-f(a)=f'(\varepsilon)(x-a)$其中$\varepsilon$必定为$x$的连续函数。

20 如果$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$|f(x)|$在$[a,b]$上可积。

21 连续曲线段$y=f(x)$，$a\le x\le b$绕直线$y=y_0$旋转一周所得旋转体的体积$V=\int_a^b \pi[f(x)-y_0]^2\,dx$。

22 如果$f(x)$是周期为T的连续函数，则对于任意的常数a均有$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx$。

23 如果$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上必可积。

24 定积分$\int_a^b f(x)\,dx$其值为介于曲线$y=f(x)$，x轴与直线$x=a$，$x=b$之间的曲边梯形的面积。

25 如果$f(x)$在点x_0处有一阶二阶三阶导数，$f'(x_0)=f''(x_0)=0$且$f'''(x_0)\neq 0$则$(x_0,f(x_0))$为$y=f(x)$的拐点。

26 数列$\{u_n\}$的收敛性与其前有限项值无关

27 若对任意给定的$\varepsilon > 0$，数列$\{u_n\}$中仅有有限多项不满足

$|u_n - A| < \varepsilon$，则数列$\{u_n\}$的极限必定为 A

28 设对任意的x总有$\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$

则$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$必定存在

29 若$f(x)$在点x_0处有直至n阶导数且$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots$

$= f^{(n-1)}(x_0) = 0$ 而$f^{(n)}(x_0) \ne 0$（$n \ge 2$）则n为偶数时x_0为$f(x)$的

极值点，当n为奇数时x_0不为$f(x)$的极值点

30 设$f(x)$为连续函数，若对于任意的区间$[a,b]$都有$\int_a^b f(x)\,dx =$

则必有$f(x) = 0$

31 若$z = f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处存在偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$与$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$则$z=f(x,y)$在

点$M_0(x_0,y_0)$处必定连续。

32 如果点$M_0(x_0,y_0)$为$z = f(x,y)$的极值点则必有$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$。

33 如果$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0$ 则点$M_0(x_0,y_0)$必为$z = f(x,y)$的极值点。

34 若$z = f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处存在偏导数$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$与$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$则若

$z = f(x,y)$在点$M_0(x_0,y_0)$处必定可微且$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

35 若$z = f(x,y)$在点$p(x,y)$处可微处必定可微且$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\Delta z - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} = 0$ 则

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p = A$，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p = B$

36 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 Σu_n 必定发散。

37 如果级数 $\Sigma(u_n+v_n)=\Sigma u_n+\Sigma v_n$。

38 如果 Σu_n 收敛，则 Σu_n^2 必定收敛

39 如果 Σu_n 收敛，Σv_n 发散，则 $\Sigma(u_n+v_n)$ 必定发散。

40 若 Σu_n 与 Σv_n 都发散，则 $\Sigma(u_n+v_n)$ 必定发散。

41 如果 Σu_n 收敛，则 Σu_{2n} 必定收敛。

42 若 $\Sigma|u_n|$ 收敛，则 Σu_n 必定收敛

43 设函数 $f(x)$ 为连续函数，则二重积分 $F(t)=\iint_D f(x^2+y^2)dxdy$ (D: $x^2+y^2\le t^2$)为可导函数

44 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导的点个数为 2 个

45 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 不连续则 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在 x_0 均不连续

46 若级数 Σa_n 与 Σb_n 都发散，则 Σ（$|a_n|+|b_n|$）发散

47 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$ （m、n 为正整数）

48 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处均可导且取极大值，则 $f(x)\,g(x)$ 在 x_0 一定取极大值

49 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)'}{n'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

50 如果 $f(x)\ge g(x)$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

51 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 则存在 $\delta>0$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\ge g(x)$。

52 如果 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界。

53 P=$\int_0^1 x\ln^2 x\,dx$ 为定积分且值为 $\frac{1}{4}$。

54 如果 Σu_n^2 与 Σv_n^2 都收敛则无穷级数 $\Sigma(u_n+v_n)^2$ 收敛

55 如果 $\Sigma(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 Σu_n 收敛。

56 广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ 与$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$均收敛.

57 设函数$f(x)$连续 ，则 $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$一定为偶函数.

58 设常数$k>0$，则级数$\Sigma(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$为条件收敛.

59 设函数$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)=0$.

60 设$\delta>0$，$x\in(a-\delta,a+\delta)$ $|f(x)|\le L|x-a|^{\lambda}$且$\lambda>1$常数则 $f'(a)$一定存在.

61 如果$f(x)$在$x=x_0$处的左右导数存在且$f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$则$f(x)$在 $x=x_0$处连续.

62 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$不存在

63 一个奇函数与一个偶函数构成的复合函数必为偶函数.

64 设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=0$ 且$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$为无穷小则$\{y_n\}$必为无穷小.

65 若$f(x)$在$x=x_0$处可微分，则$f(x)$在x_0的某邻域内有界.

66 设函数$f(x)$与$g(x)$在(a,b)上可导$f(x)>g(x)$，则$f'(x)>g'(x)$.

67 设$F(x)$为$f(x)$的原函数如果$f(x)$的周期为T则$F(x)$的周期也是T.

68 设$f(x)$为已知的连续的函数 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,dx$,其中$t>0$ $s>0$则 I为恒定值.

69 设可微函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处取得极小值则$f(x_0,y)$在$y=y_0$处的导数等于0.

70 如果级数Σa_n收敛，则$\Sigma a_n a_{n+1}$收敛.

71 若函数可导，则其导函数一定为连续函数.

72 两个间断函数之积不一定为间断函数.

73 有第二类间断点的函数一定不存在原函数.

74 若函数只有有限个第一类间断点，则该函数一定存在原函数.

75 函数$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$在点(0,0)处连续且可导但不可微.

76 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta$当$0 < |x-a| < \delta$恒有$|f(x)-A| < e^{\frac{\varepsilon}{10}}$ 则$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

77 若$x = x_0$是$f(x)$的无穷间断点，则它不是函数$f(x)$的极小值点.

78 如果$\frac{1}{f(x)}$在$x = a$处连续，则$f(x)$在$x = a$处也必连续 .

79 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，当$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$时曲线$y = f(x)$必有斜渐近线.

80 当$\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq \infty$则$x = 0$一定不是曲线$y = f(x)$的垂直渐[illegible]

81 若 A 为n阶反对称矩阵即$A^T = -A$，则$|A|=0$.

82 如果 A 为正交矩阵，则$|A| = 1$.

83 如果 A 为$m \times n$矩阵，B 为$n \times m$的矩阵且$m > n$则$|AB| = 0$.

84 n阶行列式$|A| = 0$的充要条件是A矩阵的各行（列）均可被其余行（列）线性表示.

85 设 A 为$m \times n$矩阵且$A^T A=0$，则$A = 0$.

86 设 A,B 均为n阶可逆矩阵，则$(A+B)^{-1} = A^{-1}+B^{-1}$.

87 设 A 为$m \times n$矩阵，B 为n阶可逆矩阵，则秩（AB）=秩（A）.

88 若果矩阵 A 与 B 等价，则$|A| = |B|$.

89 若 A 为正交矩阵，则A^T、A^{-1}、A^*也必是正交矩阵.

90 设 A、B 均为同阶对称矩阵，则AB也为对称矩阵的充要条件是 A 与 B 可以交换.

91 设 A 为$m\times n$矩阵，则齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是$m<n$.

92 若齐次线性方程组$Ax=0$只有零解，则对应非齐次线性方程组$Ax=b$必有唯一解.

93 非齐次线性方程组 $Ax=b$有解的充要条件是b可以被 A 的列向量组线性表示.

94 设 A、B 均为$m\times n$矩阵，则秩（A+B）≤秩（A）+秩（B）.

95 设n阶矩阵 A 满足等式$A^2=A$，则必有特征值 0 和 1.

96 若n阶矩阵 A，B 有相同的特征值，则 A 与 B 必定相似.

97 设 A 与 B 为n阶矩阵，则 AB 与 BA 有相同的特征值.

98 设n阶矩阵 A 与 B 合同，则 A 与 B 必相似.

99 设n阶矩阵 A 与 B 合同，则 A 与 B 必等价.

100 设 A 为n阶矩阵，则线性方程组$A^n x=0$与$A^{n+1}x=0$为同解方程.

101 如果η_1、η_2、η_3为三阶矩阵 A 的三个线性无关的特征向量，则 A 的全部特征向量可表示为：$C_1\eta_1+C_2\eta_2+C_3\eta_3$.

102 设 A 与 B 为n阶矩阵，如果 A,B 相似则任意常数t，$tE-A$与$tE-B$必相似.

103 设 A 与 B 为n阶矩阵且$B=P^{-1}AP$,若向量α为 A 的特征值λ对应的特征向量，则 B 的特征值为λ且对应的特征向量为$p^{-1}\alpha$.

104 n阶矩阵 A 与A^T有相同的特征值与特征向量.

105 若设 A 与 B 为n阶实对称矩阵，则 A 与 B 合同的充要条件是 A,B 正负惯性指数相同.

106 若设 A 为n阶实对称矩阵，则 A 为正定矩阵的充分条件是 A 的所有的子均大于零.

107 如 A 为正定矩阵，则其主对角线元素均为正，即$a_{ii}>0$ ($i=1,2,3...$).

108 设 A 为二阶矩阵，若$|A|<0$，则一定与对角矩阵Λ相似.

109 设 A 为$m\times n$ 实矩阵，则A^TA与AA^T必与对角矩阵相似.

110 设 A 为三角矩阵，且主对角线上的元素互不相等，若$|a_{ii}|<1$则

111 设 A 为m阶正定矩阵，B 为$m\times n$矩阵，则B^TAB为正定矩阵的充要条件是$r(B)=n$.

112 若 A 为n阶实对称矩阵且存在n阶矩阵 C，使得 A=C^TC，则 A 为正定矩阵.

113 若 A,B 均为n阶实对称矩阵，则 A，B 合同的充分条件是 A 与 B 相似.

114 若 A,B 均为n阶实对称矩阵，则 A，B 合同的充分必要条件是 A 与 B 的特征值相同.

115 已知n阶矩阵合同于对角矩阵Λ，则 A 必定为对称矩阵.

116 设 A 为n阶矩阵，则秩(A^n)=秩(A^{n+1}).

117 设 A,B 均为n阶矩阵，则秩$(AB)\le min${秩(A),秩(B)}.

118 设 A,B 为满足$AB=0$的任意两个非零的矩阵，则必定有 A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

119 如果对于任意一组不全为零的数k_1，$k_2...k_s$都有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...k_s\alpha_s\neq 0$则$\alpha_1\alpha_2..\alpha_s$线性无关.

120 若矩阵 A 与 B 等价则$|A|=|B|$.

第五部分、总结 16 种方法求极限

首 先 对 极 限 的 总 结 如 下
极限的保号性很重要 就是说在一定区间内 函数的正负与极限一致
1 极限分为 一般极限 ， 还有个数列极限，（区别在于数列极限时发散的， 是一般极限的一种）
2 解决极限的方法如下：（我能列出来的全部列出来了！！！！！你还能有补充么？？？）
1 等价无穷小的转化，（只能在乘除时候使用，但是不是说一定在加减时候不能用 但是前提是必须证明拆分后极限依然存在） e 的 X 次方-1 或者 （1+x）的 a 次方-1 等价于 Ax 等等 。 全部熟记
（x 趋近无穷的时候还原成无穷小）
2 落笔他 法则 （大题目有时候会有暗示 要你使用这个方法）
首先他的使用有严格的使用前提！！！！！！
必须是 X 趋近 而不是 N 趋近！！！！！！！（所以面对数列极限时候先要转化成求 x 趋近情况下的极限， 当然 n 趋近是 x 趋近的一种情况而已，是必要条件
（还有一点 数列极限的 n 当然是趋近于正无穷的 不可能是负无穷！）
必须是 函数的导数要存在！！！！！！！！（假如告诉你 g（x），没告诉你是否可导， 直接用无疑于找死！！）
必须是 0 比 0 无穷大比无穷大！！！！！！！！！
当然还要注意分母不能为 0
落笔他 法则分为 3 中情况
1 0 比 0 无穷比无穷 时候 直接用
2 0 乘以无穷 无穷减去无穷 （ 应为无穷大于无穷小成倒数的关系）所以 无穷大都写成了无穷小的倒数形式了。通项之后 这样就能变成 1 中的形式了
3 0 的 0 次方 1 的无穷次方 无穷的 0 次方
对于（指数幂数）方程 方法主要是取指数还取对数的方法， 这样就能把幂上的函数移下来了， 就是写成 0 与无穷的形式了 ， （ 这就是为什么只有 3 种形式的原因， LNx 两端都趋近于无穷时候他的幂移下来趋近于 0 当他的幂移下来趋近于无穷的时候 LNX 趋近于 0）
3 泰勒公式 (含有 e 的 x 次方的时候 ，尤其是含有正余旋 的加减的时候要 特变注意！！！！）
E 的 x 展开 sina 展开 cos 展开 ln1+x 展开
对题目简化有很好帮助
4 面对无穷大比上无穷大形式的解决办法
取大头原则 最大项除分子分母！！！！！！！！！！！
看上去复杂处理很简单！！！！！！！！！！
5 无穷小于有界函数的处理办法
面对复杂函数时候， 尤其是正余旋的复杂函数与其他函数相乘的时候，一定要注意这个方法。
面对非常复杂的函数 可能只需要知道它的范围结果就出来了！！！
6 夹逼定理（主要对付的是数列极限！）

这个主要是看见极限中的函数是方程相除的形式，放缩和扩大。
7 等比等差数列公式应用（对付数列极限）（q 绝对值符号要小于 1）
8 各项的拆分相加（来消掉中间的大多数）（对付的还是数列极限）
可以使用待定系数法来拆分化简函数
9 求左右求极限的方式（对付数列极限） 例如知道 Xn 与 Xn+1 的关系， 已知 Xn 的极限存在的情况下， xn 的极限与 xn+1 的极限时一样的 ，应为极限去掉有限项目极限值不变化
10 2 个重要极限的应用。 这两个很重要 ！！！！！ 对第一个而言是 X 趋近 0 时候的 sinx 与 x 比值 。 地 2 个就如果 x 趋近无穷大 无穷小都有对有对应的形式（地 2 个实际上是 用于 函数是 1 的无穷的形式 ）（当底数是 1 的时候要特别注意可能是用地 2 个重要极限）
11 还有个方法，非常方便的方法
就是当趋近于无穷大时候
不同函数趋近于无穷的速度是不一样的！！！！！！！！！！！！！！
x 的 x 次方 快于 x! 快于 指数函数 快于 幂数函数 快于 对数函数 （画图也能看出速率的快慢） !!!!!!
当 x 趋近无穷的时候 他们的比值的极限一眼就能看出来了
12 换元法 是一种技巧，不会对模一道题目而言就只需要换元， 但是换元会夹杂其中
13 假如要算的话 四则运算法则也算一种方法 ，当然也是夹杂其中的
14 还有对付数列极限的一种方法，
就是当你面对题目实在是没有办法 走投无路的时候可以考虑 转化为定积分。 一般是从 0 到 1 的形式。
15 单调有界的性质
对付递推数列时候使用 证明单调性！！！！！！
16 直接使用求导数的定义来求极限，
（一般都是 x 趋近于 0 时候，在分子上 f（x 加减麽个值）加减 f（x）的形式， 看见了有特别注意）
（当题目中告诉你 F(0)=0 时候 f（0）导数=0 的时候 就是暗示你一定要用导数定义！！!!）
函数是表皮
函数的性质也体现在积分微分中
例如他的奇偶性质 他的周期性。 还有复合函数的性质
1 奇偶性，奇函数关于原点对称 偶函数关于轴对称 偶函数左右 2 边的图形一样
（奇函数相加为 0）
2 周期性也可用在导数中 在定积分中也有应用 定积分中的函数是周期函数 积分的周期和他的一致
3 复合函数之间是 自变量与应变量互换 的关系
4 还有个单调性。(再求 0 点的时候可能用到这个性质！)
（可以导的函数的单调性和他的导数正负相关）
:o 再就是总结一下间断点的问题 （应为一般函数都是连续的 所以 间断点 是对于间断函数而言的）
间断点分为第一类和第二类剪断点
1 第一类是左右极限都存在的 （左右极限存在但是不等 跳跃的间断点 或者 左右极限存在相等但是不等于函数在这点的值 可取的间断点
地二类 间断点是 震荡间断点 或者是 无穷极端点
（这也说明极限即是 不存在也有可能是有界的）

:o 下面总结一下
求极限的一般题型
1 求分段函数的极限
当函数含有绝对值符号时，就很有可能是有分情况讨论的了！！！！！！！
当 X 趋近无穷时候 存在 e 的 x 次方的时候 ， 就要分情况讨论 应为 E 的 x 次方的函数正负无穷的结果是不一样的！！！！！！！！

2 极限中含有变上下限的积分 如何解决类？？？？
说白了 就是说 函数中现在含有积分符号，这么个符号在极限中太麻烦了 你要想办法把它搞掉！！！！！！！！！！！！！！
解决办法：
1 求导， 边上下限积分求导， 当然就能得到结果了 这不是很容易么？
但是！！！！！有 2 个问题要注意！！！！
问题 1 积分函数能否求导？ 题目没说积分可以导的话，直接求导的话是错误的！！！！
问题 2 被积分函数中 既含有 T 又含有 x 的情况下如何解决？？？？？？
解决 1 的方法： 就是方法 2 微分中值定理！！！！！！！！！！
微分中值定理是函数与积分的联系！ 更重要的是他能去掉积分符号！！！！!!
解决 2 的方法 ：当 x 与 t 的函数是相互乘的关系的话 ，把 x 看做常数提出来 ，再求导数！！！！！！
当 x 与 t 是除的关系 或者是加减的关系 ， 就要 换元了！！！！！！！!!
（换元的时候积分上下限也要变化！！！！）
3 求的是数列极限的问题时候
夹逼 或者 分项求和 定积分 都不可以的时候
就考虑 x 趋近的时候函数值， 数列极限也满足这个极限的
当所求的极限是递推数列的时候
首先 ：判断数列极限存在极限的方法 是用的单调有界的定理 。判断单调性不能用导数定义！！！ 应为是 离散的 只能用 前后项的 比较 （前后项相除相减）， 数列极限是否有界 可以使用 归纳法 最后对 xn 与 xn+1 两边同时求极限， 就能出结果了！！！！!!
4 涉及到极限已经出来了 让你求未知数和位置函数的问题
解决办法 ：主要还是运用等价无穷小 或者是同阶无穷小 。应为 例如 当 x 趋近 0 时候 f（x）比 x =3 的函数 ， 分子必须是无穷小 否则极限为无穷
还有落笔他 法则的应用 ， 主要是应为 当未知数有几个时候， 使用 落笔他 法则可以消掉模些未知数， 求其他的未知数
5 极限数列涉及到的证明题 ，只知道是要构造新的函数 但是不太会!!!!!!!!!!!!!!!!!
:o 最后总结一下间断点的题型
首先 遇见间断点的问题 连续性的问题 复合函数的问题， 在莫个点是否可导的问题。
主要解决办法是 3 个 一个是 画图 ， 你能画出反例来 当然不可以了
你实在画不出反例， 就有可能是对的， 尤其是那些考概念的题目， 难度不小， 对我而言证明很难的 ！ 我就画图！！我要能画出来当然是对的， 在这里就要很好的理解一阶导的性质 2 阶导的性质， 函数图形的凹凸性， 函数单调性 函数的奇偶性在图形中的反应！！！！！！！
（在这里尤其要注意分段函数！！！！！！！！！ ） （例如分段函数导数存在还相等 但是却不连续 这个性质就比较特殊！！！ 应为一般的函数都是连续的）

方法 2 就是举出反例 ！（在这里也是尤其要注意分段函数！！！！！！！!!!）

例如 一个函数是个离散函数 还有个也是离散函数 他们的复合函数是否一定是离散的类??

答案是 NO 举个反例就可以了

方法 3 上面的都不行那就只好用定义了 主要是写出公式， 连续性的公式 求在抹一点的导数的公式

:o 最后了

总结一下 函数 在抹一点是否可导 的问题

1 首先 函数连续不一定可导， 分段函数 x 绝对值函数在 （0 ，0 ） 不可导， 我的理解就是 ：不可导=在这点上图形不光滑。 可导一定连续， 应为他有个前提， 在点的领域内有定义， 假如没有这个前提，分段函数左右的导数也能相等

1 主要考点 1

函数在抹一点可导 ， 他的 绝对值函数 在这点是否可导 ?

解决办法: 记住 函数绝对值的导数等于 f（x）除以 （绝对值（f（x）） 再 乘以 F（x）的导数。

所以判断绝对值函数不可导点，首先判断函数等于 0 的点， 找出这些点之后 ， 这个导数并不是百分百不存在， 原因很简单 分母是无穷小， 假如分子式无穷小的话，绝对值函数的导数依然存在啊， 所以还要找出 f（a）导数的值，不为 0 的时候， 绝对值函数在这点的导数是无穷 ， 所以绝对值函数在这些点上是不可导的啊

考点 2

处处可导的函数与在抹一些点不可以导但是连续的函数相互乘的函数,这个函数的不可导点的判断

直接使用导数的定义就能证明 ，

我的理解是 f（x）连续的话 但是不可导 ， 左右导数存在但是不等，左右导数实际上就是 X 趋近 a 的 2 个极限， f（x）乘以 G（x）的函数在 x 趋近 a 的时候 f（x）在这点上的这 2 个极限乘以 g（a） ， 当 g（a）等于 0 的时候， 左右极限乘以 0 当然相等了 ，乘积的导数=f（a）导数乘以 G(a) + G(a)导数乘以 F（a）， 应为 f（a）导数乘以 G(a) =0， 前面推出来了， 所以乘积函数

第六部分、考研数学高分答题策略、答题技巧及注意事项

主要是回归教材，总结基本概念、基本公式、基本定理，放慢节奏，调整心态，将自己调整为最佳状态，争取将平时的积累最大化的 发挥出来。为了将平时自己掌握的知识内容在考场上进行充分发挥，答题过程中的一些小技巧也是不容忽视的，专家们从答题思路及时间分配上总结了一些考场经 验，供广大考生参考，希望对大家能起到一定的指导作用。

一、检查试卷，稳定心情

拿到试卷以后不要着急做题，花一两分钟时间把卷子通篇看一下，检查一下考研数学试卷是不是 23 道题目，大致都是什么题型的题目。这样做有两个好处：一 是可以有效防止因粗心大意而漏掉一些题目，漏题就太可惜了;二是可以加强自己的信心，稳定心情，通过长达一年时间的复习，看了这么多参考书，听了那么多考 研课程，相信试卷中肯定有不少题型你是非常熟悉的，看了这些题目以后，你会感到非常高兴，自信心会猛烈增长，原本紧张的心情也会放轻松，这样才能正常发 挥。

二、按序做题，先易后难

考研数学题量都是 23 道题目，其中选择题 8 道，填空题 6 道，解答题 9 道。题目类型也是固定的，数学一和数学三 1-4 题是高数选择 题，5-6 题是线代选择题，7-8 题是概率选择题;9-12 题是高数填空题，13 题是线代填空题，14 题是概率填空题，15-19 题是高数解答 题，20-21 题是线代解答题，22-23 题是概率解答题。数学二 1-6 题是高数选择题，7-8 题是线代选择题;9-13 是高数填空题，14 题是线代填空 题，15-21 题是高数解答题，22-23 题线代解答题。

选择题和填空题主要考察的是基本概念、基本公式、基本定理和基本运算，解答题包括计算题和证明题考察内容比较综合，往往一个题目考查多个知识点，从近 些年的试卷特点，题型都比较常见，难度不算大，我们最好按题目顺序做，这样能稳定心情，很快进入状态，也不容易漏做题目，如果遇到自己不熟悉的题目也不要 发慌，可以暂时放下接着做下一个题目。等容易的题目有把握的题目都做完之后，再静心研究有疑问的题目，但如果实在没有思路也要学会放弃，留出时间检查自己 会做的题目，争取会做的题目不丢分，因为数学的

分数最依赖的还是能否将会做的题都做对。

此外，有些同学喜欢先做高数，再做线代，这样的做题顺序也可以，关键是看你平时训练时是如何训练的，选择适合自己的就是最好的，但在此提醒一下大家一定不要漏做题。

三、合理分配答题时间 根据以往考生的经验，一道客观题控制在 3 分钟左右，最多不要超过 5 分钟，解答题一般 10 分钟左右，根据难易程度适当调整。最后至少留出 30 分钟时间检查，确保会做的题目计算正确。

说到考研数学答题技巧，可作为一种辅助性的工具，在实力不过硬的考生身上绝对会起到锦上添花的作用。

首先，要提醒大家考研数学考试没有答题卡，在试卷上填写选择题答案。这里主要注意解答题的回答。尽量安排好回答的空间，如果不会做，可以先放一放，先把会做的题目答完，再回来做。

其次，强烈建议对于考研数学的选择题和填空题，如果三分钟没有思考出来结果，就果断放弃。

最后，要记住的是考研数学选择题和填空题的解答时间不要影响后面的大题目。毕竟很多大题目还是很简单的。在解答主观大题目的时候，也一定要学会放弃不 会做的题，或者是暂时放弃不会做的题，不要为了一道题目苦苦思考很长时间，每道题思考时间一般不应超过 10 分钟，否则容易导致概率和线性代数等部分的题目 无法解答，其实我们仔细想想，

概率和线性代数的题目相对要比高等数学的内容简单，题型也很可能是曾经做过的，因此不要为了一道题目耽误了后面 20～30 分 的内容。每年考研均有人在此犯下错误。

我们再来谈一下考研数学选择题的答题技巧。一般来说每个大题答案中的 ABCD 分布是均匀的。据统计，近几年的考题，无论是政治、英语还 是数学，只有少数几年出现了一个字母多一个的情况，大多数的年份呈均匀分布。当你在做选择题时，除了一道题外，其余题目都已经完成并且对于自己的答案胸有 成竹。而对于那一道没有做的题却感到一筹莫展时，可以看一下 A、B、C、D 的情况，然后根据平均分布的原则确定那道题的答案。大家千万不要小看了答题的技 巧。虽然，对于你考研的最后成绩可能起不到什么决定性的作用，但是在微观上绝对会起到锦上添花的作用。

考研数学有三部分，即高等数学，线性代数和概率统计，其中数学二不考概率统计。在答题时，应该优先选择自己擅长的科目或者题型。比如，可以先做线性代 数和概率统计的大题，然后回过头来做填空题，其次做高数中自己会做的大题，接着做选择题，最后做高数其余的大题。反正大家一定要记住这样一个原则：在最短 的时间内，拿下最多的卷面分。事实证明，这种方法确实比较有效。而且，最为关键的是，能在心态上给考生以极大的安全感。

考研数学科答题注意事项概括如下：

1)合理地安排好答题的答题空间，答题时尽量不要跳步，因为每一步都是有步骤分的。

2)合理的安排好自己的答题顺序，千万不要将大把时间浪费在分值较小的题上，这样会

得不偿失。

3)该放弃的就放弃，尽快调整好自己的心态，要相信自己做不好的题别人很可能也做不好；自己没有做出的题，别人很可能也做不出。

先来说考研数学客观题部分。考研数学客观题就分填空和选择，整个的卷子里边填空是6道题，选择是8道题，这个占了很大的比例，14道题要占到56分， 三分之一多的分数，这块历届考研数学的丢分比较严重，因为6道填空题是在第一道出的，8道选择题是第二道出的，根据判卷老师的经验，发现有很多的同学在前 面的56分可能才得了20多分!如果基本题丢掉30多分，这个时候总分要上去是一件非常不容易的事情。

考研数学填空题比较多的是考察基本运算和基本概念，或者说填空题比较多的是计算，同学丢分的主要原因是，运算的准确率比较差，这种填空题出的计算题题本身不难，方法我们一般同学拿到都知道，但是一算就算错了，结果算错了，填空题只要是答案填错了就只能给0分。

从这个意义上讲，填空题对我们同学来讲应该是非常残酷的一个事情。那么，怎么来提高运算准确率呢?这就要求我们同学平时复习的时候，这种计算题，一些 基本的运算题不能光看会，就不去算，很多的同学看会在草稿纸上画两下，没有认真地算。平时没有算过一定量的题，考试的时候就容易错，这就要求我们平时对一 些基本的运算题，不是说每道题都认真地做到底，但每一种类型的计算题里面拿出一定量进行练习，这样才能提高你的准确率。

填空题里面本身有一些特殊的方法和技巧，同学做这种题还是按照常规，有的时候方法不当，本来很简单的题做成了很复杂的题，有些题可以根据几何意义，结 果一眼就看出来了，有些题是根据一些特殊的性质，有的同学习惯做填空题还是按照常规的主观题的方法去做，对一些特殊方法和技巧不了解。

选择题一共有八道题，这个丢分也很严重，这个丢分的原因跟填空题有差异，就是选择题考的重点跟填空题不一样，填空题主要考基本运算概念，而选择题很少考计算题，它主要考察基本的概念和理论，就是容易混淆的概念和理论。

这个地方丢分的原因主要是三个方面。第一个方面我们同学学数学，一个薄弱环节就是这个地方的基本概念和基本理论比较强势的是计算题，喜欢做计算题，相 对来说计算题也比较扎实，薄弱环节就是概念和理论，这个本身是我们的薄弱环节。第二个原因，选择题里面确实有些题是有相当难度的，本身有难度，不是说一个 卷子里边前面的八道选择题都是很基本的题。第三个原因就是选择题，我们同学做的时候还是缺乏相应的一些方法和技巧，跟刚才填空题一样的还是用常规题的方法 去做，同样一个题出成选择题的时候就有很巧妙的方法，由于对这种方法不了解，用常规的方法做，使简单的题变成了复杂的题，丢分原因主要是这几个方面。

要想解决应该从三个方面去解决。第一，基本理论和基本概念是我们的薄弱环节，就必须在这下功夫，实际上它的选择题里边要考的东西往往就是我们原来的定 义或者性质，或者一个定理这些内容的外延，所以我们复习一个定理一个性质的时候，即要注意它的内涵又要注意相应的外延。比如说原来的条件变一下，这个题还 对不对，平时复习的时候就有意

识注意这些问题，这样以后考到这些的时候，你已经事先对这个问题做了准备，考试就很容易了，平时在复习的时候要注意基本的概 念和理论，本身有些题有难点，但是也不是说选择题有很多有难度的题，一般来说每年的卷子里边八道选择题里面一般有一两道是比较难的，剩下的相对都是比较容易的。

所以不能为了这一两道题我们花了很多的时间，这个不应该作为重点，另外客观题有一些方法和技巧，我们通常做客观题用直接法，这是用得比较多的，但是也 有一些选择题用排除法更为简单，我们考研的卷子里边有很多题用排除法一眼就可以看出结果，所以要注意这些技巧，我们在强化班讲课的时候也给同学做了归纳和 总结，我想经过我们的讲解和同学们的努力这个地方应该可以做得很好。

在整张试卷中，选择题总共 8 小题，每小题 4 分，合计 32 分。绝大多数考生拿到考卷之后都是按试卷编排的顺序开始作答，单项选择也就成为第一个需要拿下的题型，且作答的感觉很可能影响到做后边填空、解答题的情绪，因此分值不多但仍很重要。

单项选择题重点考查考生对基本概念、基本性质、基本定理的理解与掌握的程度，运算量相对较小，像等价无穷小、二重积分的对称性、积分上限函数的图象、 过渡矩阵、伴随矩阵、随机变量的数字特征、分布函数等问题，只要掌握基本概念和性质就可解决。这一部分内容只要基本功扎实，顺利拿下不成问题。但 8 道题目中偶尔会出现一道具有一定难度的单选题，建议如果一时没有思路也不要过多浪费时间，灵活调控作答时间。