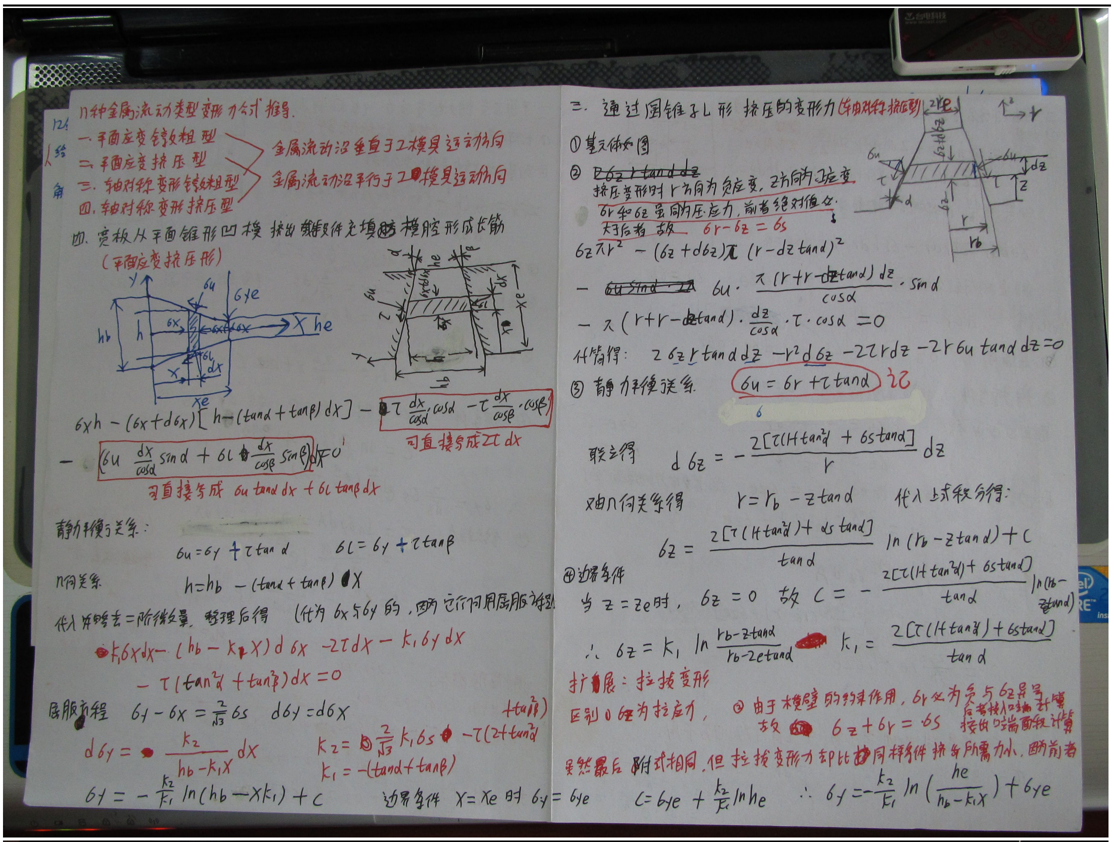


Ⅱ种金属流动类型变形力公式推导.

一、平面应变镦粗型　二、平面应变挤压型 —— 金属流动沿垂直于工模具运动方向
三、轴对称变形镦粗型　四、轴对称变形挤压型 —— 金属流动沿平行于工模具运动方向

四、宽板从平面锥形凹模挤出，锻件充填模腔形成长筋
（平面应变挤压形）

$\sigma_x h-(\sigma_x+d\sigma_x)[h-(\tan\alpha+\tan\beta)dx]-\boxed{\tau\frac{dx}{\cos\alpha}\cos\alpha-\tau\frac{dx}{\cos\beta}\cos\beta}$　可直接写成 $2\tau\,dx$

$-\boxed{\sigma_u\frac{dx}{\cos\alpha}\sin\alpha+\sigma_L\frac{dx}{\cos\beta}\sin\beta}=0$

可直接写成 $\sigma_u\tan\alpha\,dx+\sigma_L\tan\beta\,dx$

静力平衡关系：
$\sigma_u=\sigma_y+\tau\tan\alpha$　　$\sigma_L=\sigma_y+\tau\tan\beta$

几何关系　$h=h_b-(\tan\alpha+\tan\beta)x$

代入并略去二阶微分量，整理后得　（代为 σ_x 与 σ_y 的，因为它们可用屈服方程）

$k_1\sigma_x dx-(h_b-k_1x)d\sigma_x-2\tau dx-k_1\sigma_y dx$
$-\tau(\tan^2\alpha+\tan^2\beta)dx=0$

屈服方程　$\sigma_y-\sigma_x=\frac{2}{\sqrt3}\sigma_s$　$d\sigma_y=d\sigma_x$

$d\sigma_y=\frac{k_2}{h_b-k_1x}dx$　　$k_2=\frac{2}{\sqrt3}k_1\sigma_s-\tau(2+\tan^2\alpha+\tan^2\beta)$
$k_1=-(\tan\alpha+\tan\beta)$

$\sigma_y=-\frac{k_2}{k_1}\ln(h_b-xk_1)+C$　边界条件 $x=x_e$ 时 $\sigma_y=\sigma_{ye}$　$C=\sigma_{ye}+\frac{k_2}{k_1}\ln h_e$　$\therefore\sigma_y=-\frac{k_2}{k_1}\ln\left(\frac{h_e}{h_b-k_1x}\right)+\sigma_{ye}$

三、通过圆锥孔形挤压的变形力（轴对称挤压型）

① 基元体如图
② ~~$\sigma_z\,r\tan\alpha\,dz$~~
挤压变形时 r 方向为负应变，z 方向为正应变，
σ_r 和 σ_z 虽同为压应力，前者绝对值大于后者　故 $\sigma_r-\sigma_z=\sigma_s$

$\sigma_z\pi r^2-(\sigma_z+d\sigma_z)\pi(r-dz\tan\alpha)^2$
$-\sigma_u\cdot\frac{\pi(r+r-dz\tan\alpha)dz}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha$
$-\pi(r+r-dz\tan\alpha)\cdot\frac{dz}{\cos\alpha}\cdot\tau\cdot\cos\alpha=0$

化简得：$2\sigma_z r\tan\alpha\,dz-r^2d\sigma_z-2\tau r\,dz-2r\sigma_u\tan\alpha\,dz=0$

③ 静力平衡关系　$\sigma_u=\sigma_r+\tau\tan\alpha$　记

联立得　$d\sigma_z=-\frac{2[\tau(1+\tan^2\alpha)+\sigma_s\tan\alpha]}{r}dz$

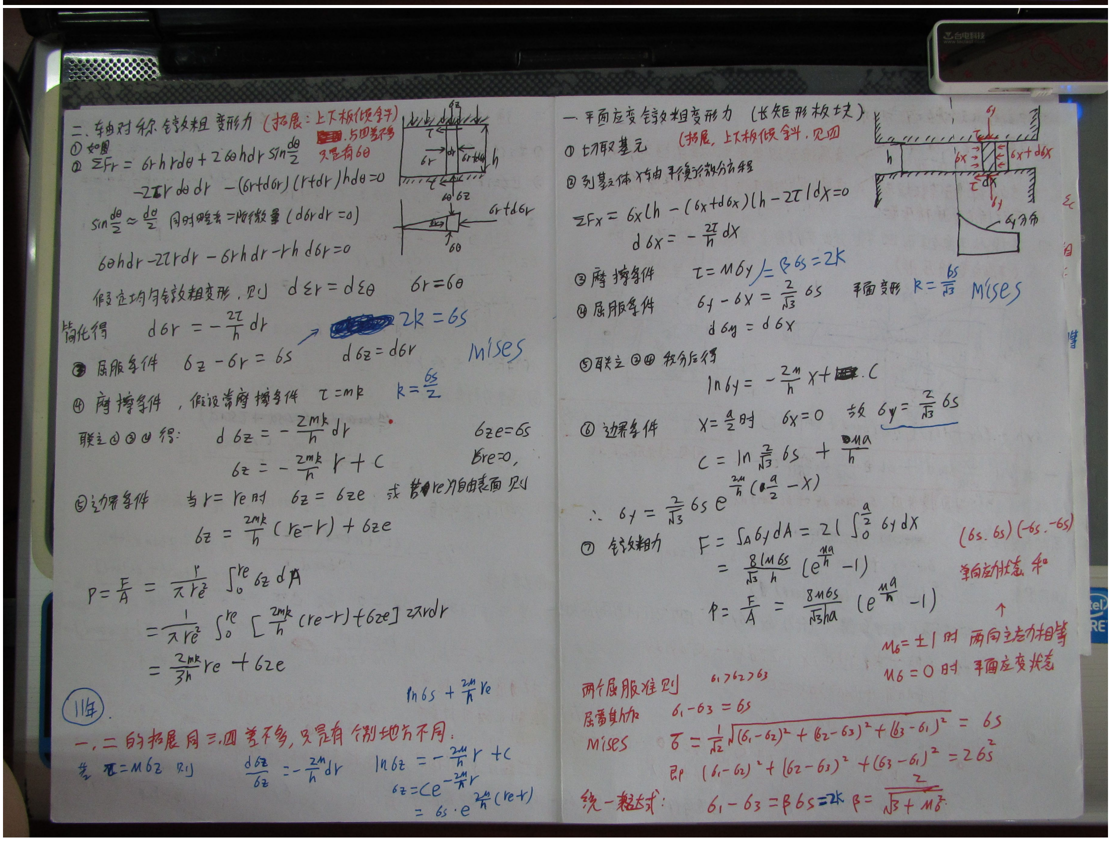
又由几何关系得　$r=r_b-z\tan\alpha$　代入上式积分得：

$\sigma_z=\frac{2[\tau(1+\tan^2\alpha)+\sigma_s\tan\alpha]}{\tan\alpha}\ln(r_b-z\tan\alpha)+C$

④ 边界条件
当 $z=z_e$ 时，$\sigma_z=0$　故 $C=-\frac{2[\tau(1+\tan^2\alpha)+\sigma_s\tan\alpha]}{\tan\alpha}\ln(r_b-z_e\tan\alpha)$

$\therefore\sigma_z=k_1\ln\frac{r_b-z\tan\alpha}{r_b-z_e\tan\alpha}$　$k_1=\frac{2[\tau(1+\tan^2\alpha)+\sigma_s\tan\alpha]}{\tan\alpha}$

扩展：拉拔变形
区别 ① σ_z 为拉应力，② 由于模壁的约束作用，σ_r 必为负与 σ_z 异号　故 $\sigma_z+\sigma_r=\sigma_s$　后者按入口端计算，按出口端面积计算
虽然最后的式相同，但拉拔变形力却比同样条件挤压所需力小，因为前者



二、轴对称镦粗变形力（拓展：上下板倾斜，与四差不多，只是有 σ_θ）

① 如图
② $\Sigma F_r=\sigma_r h r d\theta+2\sigma_\theta h dr\sin\frac{d\theta}{2}$
$-2\tau r\,d\theta\,dr-(\sigma_r+d\sigma_r)(r+dr)h\,d\theta=0$

$\sin\frac{d\theta}{2}\approx\frac{d\theta}{2}$　同时略去二阶微量（$d\sigma_r dr=0$）

$\sigma_\theta h dr-2\tau r dr-\sigma_r h dr-rh\,d\sigma_r=0$

假设均匀镦粗变形，则 $d\varepsilon_r=d\varepsilon_\theta$　$\sigma_r=\sigma_\theta$

简化得　$d\sigma_r=-\frac{2\tau}{h}dr$　　$2k=\sigma_s$

③ 屈服条件　$\sigma_z-\sigma_r=\sigma_s$　$d\sigma_z=d\sigma_r$　Mises

④ 摩擦条件，假设常摩擦条件　$\tau=mk$　$k=\frac{\sigma_s}{2}$

联立 ②③④ 得：　$d\sigma_z=-\frac{2mk}{h}dr$　　$\sigma_{ze}=\sigma_s$
$\sigma_z=-\frac{2mk}{h}r+C$　　$\sigma_{re}=0$,

⑤ 边界条件　当 $r=r_e$ 时　$\sigma_z=\sigma_{ze}$　或 r_e 为自由表面 则
$\sigma_z=\frac{2mk}{h}(r_e-r)+\sigma_{ze}$

$p=\frac{F}{A}=\frac{1}{\pi r_e^2}\int_0^{r_e}\sigma_z\,dA$
$=\frac{1}{\pi r_e^2}\int_0^{r_e}\left[\frac{2mk}{h}(r_e-r)+\sigma_{ze}\right]2\pi r\,dr$
$=\frac{2mk}{3h}r_e+\sigma_{ze}$

11年.
一、二的拓展同三、四差不多，只是有个别地方不同.

若 $\tau=\mu\sigma_z$ 则　$\frac{d\sigma_z}{\sigma_z}=-\frac{2\mu}{h}dr$　$\ln\sigma_z=-\frac{2\mu}{h}r+C$　$\ln\sigma_s+\frac{2\mu}{h}r_e$
$\sigma_z=Ce^{-\frac{2\mu}{h}r}$
$=\sigma_s\cdot e^{\frac{2\mu}{h}(r_e-r)}$

一、平面应变镦粗变形力（长矩形板坯）

① 切取基元　（拓展，上下板倾斜，见四）
② 列基元体 x 轴平衡微分方程
$\Sigma F_x=\sigma_x h-(\sigma_x+d\sigma_x)h-2\tau dx=0$
$d\sigma_x=-\frac{2\tau}{h}dx$

③ 摩擦条件　$\tau=\mu\sigma_y$　$=\beta\sigma_s=2k$

④ 屈服条件　$\sigma_y-\sigma_x=\frac{2}{\sqrt3}\sigma_s$　平面变形 $k=\frac{\sigma_s}{\sqrt3}$　Mises
$d\sigma_y=d\sigma_x$

⑤ 联立 ②④ 积分后得
$\ln\sigma_y=-\frac{2\mu}{h}x+C$

⑥ 边界条件　$x=\frac{a}{2}$ 时　$\sigma_x=0$　故 $\sigma_y=\frac{2}{\sqrt3}\sigma_s$
$C=\ln\frac{2}{\sqrt3}\sigma_s+\frac{\mu a}{h}$

$\therefore\sigma_y=\frac{2}{\sqrt3}\sigma_s e^{\frac{2\mu}{h}\left(\frac{a}{2}-x\right)}$

⑦ 镦粗力　$F=\int_A\sigma_y dA=2l\int_0^{\frac{a}{2}}\sigma_y dx$　　$(\sigma_s,\sigma_s)(-\sigma_s,-\sigma_s)$
$=\frac{8l\mu\sigma_s}{\sqrt3 h}\left(e^{\frac{\mu a}{h}}-1\right)$　　单向应力状态 和
$p=\frac{F}{A}=\frac{8\mu\sigma_s}{\sqrt3 ha}\left(e^{\frac{\mu a}{h}}-1\right)$

$\mu_\sigma=\pm1$ 时　两向主应力相等
$\mu_\sigma=0$ 时　平面应变状态

两个屈服准则　$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$
屈雷斯加　$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s$
Mises　$\bar\sigma=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sigma_s$
即　$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2$

统一表达式：　$\sigma_1-\sigma_3=\beta\sigma_s=2k$　$\beta=\frac{2}{\sqrt{3+\mu_\sigma^2}}$

$M(D-d)$

1. 直角坐标平面应变问题 $\tau = f\sigma_y$　　$\sigma_z = Ce^{\frac{2f}{h}x}$（矩形块压缩）

2. 圆柱坐标轴对称问题（混合摩擦条件下）（圆柱镦粗）

$\boxed{\sigma_x h - (\sigma_x + d\sigma_x)h - 2\tau_k \cdot dx = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_r h r d\theta - (\sigma_r + d\sigma_r)h(r+dr)d\theta - 2\tau_k r d\theta dr + 2\sigma_\theta h dr \sin\frac{d\theta}{2} = 0}$

$\Rightarrow \frac{d\sigma_z}{dr} = -\frac{2\tau_k}{h}$

- 滑动区：$\tau_k = f\sigma_z$　边界条件 $r=R$ 时，$\sigma_r = ?$
- 粘着区：$\tau_k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$　与滑动区分界点为 r_b，$\tau_k = f\sigma_{zb} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$

  $=k$　轴对称 k 应该为 $\frac{1}{2}\sigma_s$　$\frac{1}{2}\sigma_s$
- 停滞区：与粘着区的分界位置 近似取 $r_c = h$

$\tau = \frac{k}{r_c} r$

$\frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{r}{h r_c} = 0$　$(\tau_k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\frac{r}{r_c})$

滑动区与粘着区的分界位置可由滑动区在此点 σ_z 与粘着区在此点 σ_z 相等来确定

上一张

3. 极坐标平面应变问题（不变薄拉深）

$\boxed{\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0}$　积分常数 C 利用凸缘处的 σ 与边压力 Q 引起摩擦阻力相平衡来确定 $\sigma_r 2\pi r t = 2fQ$

4. 球坐标轴对称问题

定径区：　$\sigma_{\rho a} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \tau_{k_1} \pi d l_1$　　d：挤压后圆棒直径，l_1 定径长度.

锥形塑性变形区：　$\Sigma X = R_x - T_x - Q_x = 0$

$R_x = (\sigma_\rho + d\sigma_\rho) \cdot \pi [(\rho + d\rho)\sin\alpha]^2 - \sigma_\rho \pi (\rho \sin\alpha)^2$

$T_x = \tau_{k_2} \cdot 2\pi \left[\frac{\rho\sin\alpha + (\rho + d\rho)\sin\alpha}{2}\right] d\rho \cos\alpha$　　图.

$Q_x = \sigma_\theta \cdot 2\pi \left[\frac{\rho\sin\alpha + (\rho + d\rho)\sin\alpha}{2}\right] d\rho \cdot \sin\alpha$

边界条件　$\sigma_\rho = \sigma_{\rho a}$　　$\sigma_{\rho b} = \cdots\cdots$

后端弹性区　　$\bar{p} = \sigma_{\rho b} + \frac{\tau_{k_3} \pi D l_D}{\pi D^2/4} = \sigma_{\rho b} + \frac{4\tau_{k_3} l_D}{D}$

多种功和多余应变区