

3. 加工硬化: 在金属压力加工过程中, 变形抗力随着变形增加而增大的现象, 即材料的屈服应力与后续屈服应力随着等效应变增大而单调递增这一物理现象

4. 残余应力: 在金属的塑性变形过程中, 由于变形不均匀, 材料内部的各个微块之间相互作用的一种内应力, 当外载除去后, 这种内应力能保存下来, 称为残余应力。

5. 最小阻力定律: 在金属的塑性变形过程中, 金属质点总是沿着流动阻力最小的方向运动

6. 压力加工: 利用金属的塑性, 在外力的作用下, 实现工件的体积转移, 从而达到我们所需(设计)的形状的一种工艺方法

7. 摩擦: 在金属的塑性成形过程中, 被加工金属(工件)与模具之间都有相对运动或相对运动的趋势, 因而在接触表面之间使产生阻碍切向运动的阻力, 即(外)摩擦。

8. 库仑摩擦定律:  $\tau_f = \mu \sigma_n$ ,  $\mu$  - 摩擦系数,  $\sigma_n$  - 法向接触应力

9. 郎穆尔力条件:  $\tau_f = mk = m \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ ,  $m$  - 摩擦因子

$\tau_f = \mu' \sigma_s = \mu' S_1 = 69$ ,  $\mu' = \frac{m}{\sqrt{3}}$ , 修正的摩擦因子

10. 冷、热、温变形  $T < T_{\text{再}}$  (静态回复温度), 冷变形;  
 $T > T_{\text{再}}$  (静态再结晶温度), 热变形;  
 $T_{\text{再}} \leq T < T_{\text{再}}$ , 温变形

## 二、论述题(定性分析)

1. 压力加工工艺的优点:

- ① 提高工作的组织与性能(热锻)
- ② 通过体积转移来实现加工目的, 材料利用率高, 金相分布合理
- ③ 有较高的加工精度, 例如冷挤;
- ④ 生产率高

2. 静态回复 静态再结晶, 动态回复与再结晶

① 静态回复: 压力加工后的工件, 加热到  $T_{\text{回}}$  以上时, 能够消除晶格的畸变, 但没有产生新晶粒, 工件性能力学得到一定的恢复。  $T_{\text{回}} = (0.25 \sim 0.3) T_{\text{再}}$

② 静态再结晶: 压力加工后的工件, 加热到  $T_{\text{再}}$  以上并保温一段时间, 工件中能产生新晶粒, 并完全取代旧晶粒, 工件的力学性能得到完全的恢复, 新、旧晶粒的晶格形式相同,  $T_{\text{再}} = (0.4 \sim 0.5) T_{\text{再}}$

③ 应力作用下的回复与再结晶称为动态回复与再结晶, 例如热锻。

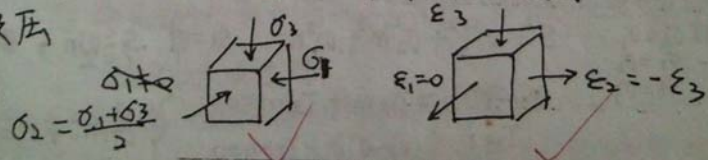


3. 应力不变量的表达式, 并说明  $J_1, J_2$  的一、二次不变量的物理意义  
 $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_m$ , 描述了应力状态的受压情况, 体积变化情况  
 $J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ ,  $J_2$  是弹性形变能, 塑性形变的基本功

4. 影响金属塑性的因素:  
1) 单相组织比多相组织好

5. Mises 屈服准则与 Tresca 准则的联系与区别  
1) 写出这两个准则:  $T: \sigma_1 - \sigma_3 = 2K = \sigma_s$      $M: (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 = 6K^2$   
2) Mises 准则全面考虑了三个主应力对金属屈服的影响, 而 Tresca 准则忽略了中间主应力 ( $\sigma_2$ ) 对金属屈服的影响  
在应力空间的  $\pi$  平面上, Mises 的轨迹是一个圆, 而 Tresca 的轨迹是内接于该圆的正六边形。  
3) 在单向应力状态下, 这两个准则是一致的。

6. 塑性变形时体积不可压缩条件的力学意义  
 $d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$   
它的力学意义是应力偏张量的第一不变量  $J_1'$   
 $J_1' = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0$

7. 平面锻压 (锻粗) 与拉拔时主应力图、主应变图  
1) 平面锻压  
  
圆柱体单向拉伸:  $\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0; \epsilon_1 = -(\epsilon_2 + \epsilon_3), \epsilon_2 = \epsilon_3, \bar{\sigma} = \sigma_1, \bar{\epsilon} = \epsilon_1$   
圆柱体单向压缩应力状态:  $\bar{\epsilon} = -\epsilon_1, \bar{\sigma} = -\sigma_1$  (消除接触表面的摩擦)

平面应变单向压缩时的应力状态与应变状态: P277  
 $\sigma_3, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \epsilon_2 = 0, \epsilon_1 = -\epsilon_3$   
等效应力  $\bar{\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_2$   
等效应变  $\bar{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \epsilon_3$

2) 拉拔

在这两种工艺中, 压应力起主导作用, 变形抗力增大, 塑性也增加

8. 塑性变形的本构方程有二类:  
1) 增量理论 (流动理论)  $\sigma'_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} d\epsilon_{ij}$   
增量理论是普遍适用的  
 $d\epsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma'} = d\lambda \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma'}$      $d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}}$   
2) 全量理论 (形变理论)  
 $\sigma'_{ij} = \frac{2\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \epsilon_{ij}$  式中,  $\epsilon_{ij}$  是沿主方向的对数应变。  
全量理论仅在简单加载 (比例加载) 的条件下适用。  
 $\epsilon_{ij} = \lambda \sigma'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}$      $\lambda = \frac{3}{2} \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}$

9. 试论述金相组织对金属塑性的影响  
10. 试论述温度对金属塑性的影响 (5条)  
11. 试论述应力状态对金属塑性的影响 (简单记住结论)  
12. 试论述提高金属塑性的主要途径 (4条)

影响塑性的因素: ① 金属的内在因素: 如晶体结构、化学成分、组织状态等  
② 金属变形的条件: 即工艺过程, 如变形温度、变形速率、变形的力学状态等

合金元素加入钢中, 使金属的塑性降低, 变形抗力增加。  
原因: ① 几乎所有的合金元素都能使铁原子的晶格发生不同的畸变, 而造成变形抗力的提高和塑性的降低



② 有些合金元素在钢中形成硬而脆的碳化物  
(如: 碳化铜、碳化钨、碳化钒、TiC)而使金属塑性降低

③ 合金元素改变钢中相的组成, 造成组织的多相性, 从而使钢的塑性降低, 变形抗力提高。

④ 合金元素一般都使钢的再结晶温度提高。  
再结晶速度降低, 使钢的硬化倾向增加, 塑性降低

温度对塑性的影响:

✓ 随着温度升高, 有利于回复与再结晶, 可在变形过程中实现软化以消除加工硬化  
降低变形抗力, 使塑性变形过程中所造成的破坏和缺陷有可能得到修复;  
同时, 随温度的升高, 可使多相组织转变为单相组织, 导致塑性提高和变形抗力的降低。塑性随温度升高只在一定条件下才是正确的, 因为变形温度的影响是和材料本身的组织结构有密切联系的

应变速率的影响

一般地, 当  $\dot{\epsilon}$  不大时, 随应变速率的提高塑性降低, 变形抗力增大;  
而在  $\dot{\epsilon}$  较大时, 随  $\dot{\epsilon}$  的提高塑性增加

应力状态的影响

在塑性成型的应力状态中, 压应力个数愈多, 数值愈大, 金属塑性愈高, 同时变形抗力也愈大。反之拉应力个... , 金属塑性愈低

应变状态:

压应变有利于塑性的发挥, 而拉应变则对塑性不利

提高塑性的途径 ✓

① 提高材料成分和组织的均匀性。

② 合理选择变形温度和应变速率。

③ 选择三向压缩性较强的变形方式

④ 减小变形的不均匀性。变形不均匀会引起附加应力, 促使裂纹的产生

影响因素: 金属的本身性质, 变形的温度—速度条件

变形的力学条件以及其他条件。

基本公式  
1. 应力分析

基本公式

1. 应力分析 <sup>P248</sup>

$$\sigma_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$\sigma_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n$$

$$l = \cos(x, N) \quad m = \cos(y, N) \quad n = \cos(z, N)$$

$$\sigma = \sigma_x l + \sigma_y m + \sigma_z n$$

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$$

$$\tau^2 = \sigma^2 - \sigma^2$$

$$\text{等效应力 } \bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\text{等效应力强度 } \bar{\sigma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

二. 应变分析 塑性变形时体积不变,  $\epsilon_m = 0$

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

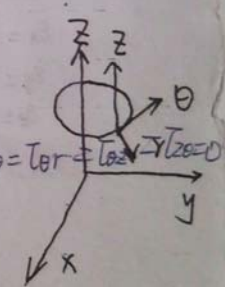
$$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{略})$$

$$\text{轴对称问题} \quad \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_r = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \tau_{rz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (\text{略})$$

$\sigma_r$  永远是主应力  $du_r, du_z$  沿  $r$  方向 (径向),  $dz$  方向的位移增量  
 $u_r, u_z$  : 速率

$$\text{等效应变 } \bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + 6(\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2 + \epsilon_{zx}^2)}$$





$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2}$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_1^2 + \dot{\epsilon}_2^2 + \dot{\epsilon}_3^2)}$$

屈服准则

Mises  $\bar{\sigma} = \sigma_s$ Tresca  $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = k$  (最大剪应力) ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ )

本构方程与塑性功

$$\text{平均应力 } \sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\sigma'_x = \sigma_x - \sigma_m, \quad \sigma'_y = \sigma_y - \sigma_m, \quad \sigma'_z = \sigma_z - \sigma_m$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy}, \quad \tau'_{yz} = \tau_{yz}, \quad \tau'_{zx} = \tau_{zx} \quad (r.p. \theta, z)$$

$$\sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_s}{\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{2\sigma_s}{3\bar{\epsilon}} d\epsilon_{ij} \quad (i, j = x, y, z)$$

$$\text{增量理论 } d\epsilon_{ij} = d\lambda \cdot \sigma'_{ij} \quad d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}}$$

全量理论

$$\sigma'_i = \frac{2\sigma_s}{3\bar{\epsilon}} \epsilon_{ij} \quad (i = x, y, z, \text{ or } i = 1, 2, 3)$$

$$dW_P = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij} = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon} = \sigma_s d\bar{\epsilon} \quad dW_P \cdot W_P \text{ 塑性功密度 } C$$

$$W_P = \sigma'_i \epsilon_{ij} = \bar{\sigma} \bar{\epsilon} = \sigma_s \bar{\epsilon}$$

主应力法

微元面体力平衡微分方程为(求塑性成形问题的基本方程)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

P361 19-7 本构方程

$$\text{解: } dW_P = \sigma_s d\bar{\epsilon} = \sigma_s \delta \Rightarrow d\bar{\epsilon} = \delta$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\delta}{r}$$

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{\delta}{r} = \dot{\epsilon}_r$$

$$\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_z = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_z = -\delta$$

$$d\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_\theta^2 + \dot{\epsilon}_z^2 + 2\dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_\theta)} = \delta$$

$$\Rightarrow \delta^2 + \frac{4}{3} \dot{\epsilon}_r^2 = \delta^2 \Rightarrow \dot{\epsilon}_r = 0$$

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{3\sigma_s}{2\sigma_s} \sigma'_r \quad \frac{\delta}{r} = \frac{3\sigma_s}{2\sigma_s} \sigma'_r \Rightarrow \sigma'_r = \frac{\sigma_s}{3}$$

$$\sigma'_r = \sigma_r - \sigma_m \Rightarrow \sigma_m = \sigma_r - \sigma'_r = \frac{\sigma_s}{3} - \frac{\sigma_s}{3} = 0$$

$$\sigma'_z = \frac{2\sigma_s}{3\bar{\epsilon}} \dot{\epsilon}_z = \frac{2\sigma_s}{3\bar{\epsilon}} (-\delta) = -\frac{2}{3} \sigma_s$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma_m = -\frac{2}{3} \sigma_s + 0 = -\frac{2}{3} \sigma_s$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_s}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_s}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\sigma_s}{3} \end{bmatrix}$$

研 2008.4 主应力

$$\Rightarrow \sigma_r = \sigma'_r + \sigma_m = \sigma'_r + \sigma_m = \sigma_\theta$$

$$d\sigma_r = \frac{2\sigma_s}{h} dr$$

注:  $\sigma_z, \sigma_r = \sigma_\theta$  都是正应力, 且  $\sigma_z$  的绝对值最大, 故有  
 $\sigma_1 = -\sigma_r, \quad \sigma_3 = -\sigma_z$

由近似塑性材料条件, 有  $\sigma_1 - \sigma_3 = -\sigma_r - (-\sigma_z) = \sigma_z - \sigma_r = s$

$$\therefore d\sigma_z = d\sigma_r \Rightarrow d\sigma_z = \frac{2\sigma_s}{h} dr$$

$$\therefore \sigma_z = \int \frac{2\sigma_s}{h} dr = \frac{2\sigma_s}{h} r + C$$

在内表面处  $\sigma_r = 0 \Rightarrow \sigma_z - \sigma_r = \sigma_z = \gamma$

$$\sigma_z \Big|_{r=\frac{d}{2}} = \frac{2\sigma_s}{h} \cdot \frac{d}{2} + C = \gamma \Rightarrow C = \gamma - \frac{\sigma_s d}{h}$$



$$\sigma_z''' = \gamma - \frac{u\gamma d}{h} + \frac{2u\gamma}{h} r = \gamma + \frac{u\gamma}{h} (2r - d)$$

由于圆环(II)的接触表面上的摩擦应力 $\tau_t$ 的方向与圆环(II)的接触表面相反,于是同理可得

$$d\sigma_z^{(II)} = \frac{2\tau_t}{h} dr \quad d\sigma_z^{(II)} = -\frac{2\tau_t}{h} dr \quad \sigma_z^{(II)} = -\frac{2u\gamma}{h} r + C$$

$$\sigma_z^{(II)}|_{r=\frac{D}{2}} = \gamma \quad (\sigma_r^{(II)}|_{r=\frac{D}{2}} = 0) \quad -\frac{2u\gamma}{h} \frac{D}{2} + C = \gamma$$

$$C = \gamma + \frac{u\gamma D}{h}$$

$$\sigma_z^{(II)} = \gamma + \frac{2u\gamma}{h} \left( \frac{D}{2} - r \right)$$

在分流点处,由 $\sigma_r - \sigma_z = \gamma$ ,得 $\sigma_r = \gamma + \sigma_z$

$$\sigma_r''' = \gamma + \gamma + \frac{2u\gamma}{h} \left( r_0 - \frac{D}{2} \right) = \sigma_r'' = \gamma + \left[ \gamma + \frac{2u\gamma}{h} \left( \frac{D}{2} - r_0 \right) \right]$$

$$r_0 - \frac{D}{2} = \frac{D}{2} - r_0 \quad r_0 = \frac{1}{4}(D + d) \quad P = \int_{r_0}^R \sigma_z''' 2\pi r dr + \int_{r_0}^R \sigma_r''' 2\pi r dr$$

$$P = \frac{P}{\pi(R_0^2 - r_0^2)} \quad R_0 = \frac{D}{2} \quad r_0 = \frac{d}{2}$$

## 第二章 液态金属的结构和性质

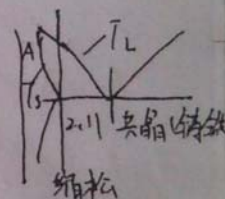
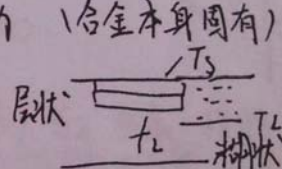
### 1. 加热、熔化、液态金属结构

### 2. 液态金属的性质

界面张力 表面张力 润湿角  $0^\circ$  绝对润湿  
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  部分润湿  
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  不润湿  
 $180^\circ$  绝对不润湿

### 3. 流动性及充型能力 (合金本身固有)

$$\Delta T_s = T_L - T_s = 0$$

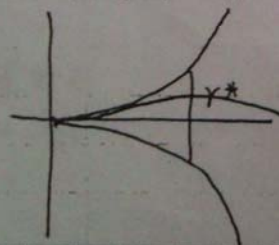


充型能力  $\left\{ \begin{array}{l} \text{内因 流动性} \\ \text{外因 温度 (T 浇)} \text{ 压力 铸型结构} \end{array} \right.$

## 第三章 热力学、动力学

### 1. 热学

$$\text{凝固条件 } \Delta T = T_0 - T$$



$$\Delta G = -\frac{4}{3}\pi r^3 \Delta G_v \quad \text{体积能}$$

$$+ 4\pi r^2 \sigma_{CL} \quad \text{表面能}$$

① L



$\Delta G_v$  吉布斯自由能差值 — 结晶驱动力

$$\Delta G_{\text{均}} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \Delta G_v + 4\pi r^2 \sigma_{CL} \text{ 界面能}$$

$$\Delta G_v = \frac{L\Delta T}{T_m}$$

$$\frac{d\Delta G_{\text{均}}}{dr} = 0 \Rightarrow r_{\text{临}} = \frac{2\sigma_{CL}}{\Delta G_v} = \frac{2T_m\sigma_{CL}}{L\Delta T}$$

$L = H_L - H_S$  结晶潜热  
 $\Delta T = T_m - T$  过冷度

$$\Delta G_{\text{临}}^* = \frac{4}{3}\pi r_{\text{临}}^3 \Delta G_v = \frac{16}{3}\pi \frac{\sigma_{CL}^3 T_m^2}{L^2 \Delta T^2}$$

$A^* = 4\pi r_{\text{临}}^2$  临界晶核表面积

## 2. 热力学能障

是由被压入处于高能而随液体长大的界面原子所产生的。它直接影响平衡态自由能的大小。界面自由能属于两种性质。

## 动力学能障

金属原子跨越界面过程所引起的，它与驱动力的大小无关，而只取决于界面的性质与结构。  
 $\Delta G_a$  固液界面 高能态

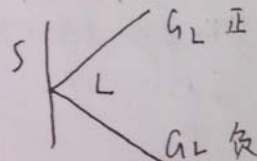
## 3. 晶体长大方式

取决于界面前方液体中的温度分布即温度梯度

宏观：平面晶、树枝晶

P45

$G_L > 0$   $G_L < 0$



微观： $\alpha = \frac{L}{k_0 T_m} \left( \frac{1}{V} \right) \leq 2$  金属 粗糙界面

P46

原子尺寸  $\rightarrow$  粗糙界面 (非小平面界面) 生长快 非小平面生长

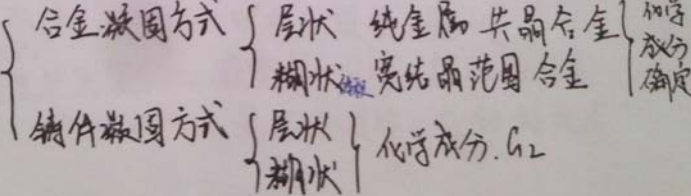
$\alpha > 2$  非金属 化合物 小平面生长

平整界面 (由较厚的小平面组成) (小平面界面) 小平面生长

$\alpha$  越小, 界面越粗糙,  $\alpha$  越大, 界面越光滑。光滑界面是由台阶形的小平面组成。

## 第四章 晶体的生长机理 P49

### 1. 凝固方式



### 2. 凝固时间

$$t = \frac{R^2}{k^2} \rightarrow t = \frac{R^2}{k^2}$$

冒口形状  $\rightarrow$  凝固时间

球形, 圆柱形, 立方体

平衡凝固 溶质再分配  $C_0$  液相合金原始成分  $|| C_L$

平衡分配系数  $k = \frac{C_s}{C_L} = \frac{C_s^*}{C_L^*}$  平衡凝固 固相溶质浓度  $C_s$  液相溶质浓度  $C_L$

### 3. 溶质再分配

① Scheil 公式 非平衡 杠杆定律 近平衡 杠杆定律

固相无扩散  $C_s^* = k_0 C_0 (1 - f_s)^{k_0-1}$

液相均匀混合  $C_L^* = C_0 f_L^{k_0-1}$

$$C_s f_s + C_L f_L = C_0 \quad f_L = 1 - f_s$$

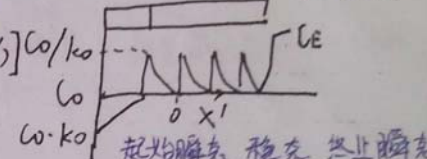
$$\Rightarrow C_s = \frac{C_0 f_L}{1 - f_s(1 - k)}$$

$$C_L = \frac{C_0}{1 - f_s(1 - k)}$$



### ② Tiller 公式

$$C_L(x') = C_0 \left[ 1 + \frac{1-k_0}{k_0} \exp\left(-\frac{R}{D_L} x'\right) \right] \frac{C_0}{k_0}$$



$G_L, R$  可人为控制

$m_L, C_0, k_0, D_L$  由合金性质决定

## 第五章

### 一、过冷

1. 纯金属  $\Delta T = T_0 - T$  热过冷度

P60 2. 合金 成分过冷  $\Delta T_c$  是由固-液界面前方溶质再分配引起的, 这样

$$\frac{G_L}{R} = \frac{G_L}{V} = \frac{m_L C_0 (1 - k_0)}{D_L k_0}$$

无成分过冷: 平面

窄成分过冷: 胞状

较宽成分过冷: 柱状树枝晶

宽成分过冷: 等轴树枝晶

只有扩散而无对流时“成分过冷”判据

$D_L$  — 溶质在液相中的扩散系数

$m_L$  — 液相线斜率

## 第六章 多相合金凝固

### 一、近平衡结晶 共晶、共析、伪共晶

### 二、规则共晶 (非小面 - 非小面) 金属-金属共晶合金 对称型共晶组织

1. 层片状 P69  $V_2 > 1$

该共晶组织是数种常见的规则共晶组织。组织中两相呈片状交替生长。其长大速度在四周各个方向是均一的。



2. 棒状(规则)  $V_2 < \infty$ 

证明 设以片状生长

1 数长均设为 1

$$W_{片} = S \cdot \delta = (1 \times 1 + 1 \times 1) \delta = 2\delta$$

$$W_{棒} = \pi d \cdot 1 \cdot \delta = 2\sqrt{\pi} \sqrt{\delta}$$

 $V_2 < \infty$   $W_{棒} < W_{片}$  棒状生长

三、非规则共晶 (非对称型共晶主区 小平面-小平面共晶)  
 金属-非金属 非金属-非金属 (非小平面-小平面共晶合金)  
 $Fe-Fe_3C$   $Fe-C$   $Al-Si$

考破碎-更氏体板状共晶

## 第七章

金属基-纤维颗粒

 $Al-SiCp$  颗粒状 $Ni-C$  涂层材料

## 第八章

细晶粒, 柱状晶, 等轴晶 (机理)

① 过冷熔体非自发形核理论

② 激冷形成的晶核卷入理论

③ 型壁晶粒脱落和枝晶熔断理论

(措施) ④ 结晶理论

## 第十三章

析出性气孔 (氢气) ① 金属熔炼时控制熔炼温度勿使其过高 ② 消除气体

反应性气孔 同铸型 → 除气措施

侵入性气孔

夹杂物

## 第十四章

## 缩孔 缩松

HT: 层状, 无冒口, 自补缩

坚硬壳

析出石墨 6 体积膨胀 2%

QT: 糊状, 冒口

无冒口, 刚性铸型

2003

A=1 液态合金流动性是液体本身能力, 与外界无关系  
液态合金充型能力是流动性与外界影响因素综合作用

2 金属结晶时的固液界面是粗糙界面, 晶体的生长为垂直生长, 故产生树枝晶

3 合金凝固时, 体系自由能 (界面能) 升高

4 细晶区 过冷度大 柱状晶 外壳 细晶粒 择优生长

5 大于  $10^6 / s$ 

二、热过冷度 合金的理论结晶温度与实际结晶温度之差  
 成分过冷 成分的再分配引起的过冷度  
 因为只有在过冷度, 体系的自由能才能降低, 凝固才会进行

三、凝固方式有层状凝固与糊状凝固两种, 影响因素有  
 化学成分, 温度梯度与分布, 凝固方式会产生



缩孔, 缩松, 夹杂物, 成分偏析

四、理想液态金属的结构是原子均匀混合的混合物, 实际工业生产中的液态金属有残留晶核, 游离原子, 空穴, 夹杂等。理想液态金属凝固是均匀形核方式, 实际液态金属凝固是非均匀形核方式

五、提高冷却速度, 过冷度, 采用金属型, 振动 (有利于液态金属与铸型接触散热; 增加枝晶振荡; 振动时中间产生真空, 外面金属快速冲入产生高压, 金属熔合温度提高, 过冷度增大)

B. 一、热过冷与成分没有关系。成分过冷与成分再分配有联系。无成分过冷时平面生长, 有成分过冷胞状生长, 较大时柱状生长。

二、灰铸铁是层状凝固方式, 球铁是糊状凝固方式。砂型铸造使灰铸铁形成坚硬外壳, 共晶凝固时析出大量石墨, 产生石墨化膨胀, 坚硬外壳阻碍其移动, 在内部产生自补缩; 球铁是糊状凝固, 产生很薄, 脆弱凝固层, 共晶凝固时产生很大石墨膨胀, 使砂型型壁移动, 球铁体积增大, 无法自补缩。

合金结晶 择优生长

焊接热循环 WM 凝固 组织形态

HAZ 组织分布 HAZ 脆化

三个焊接冶金反应区

$N_2$   $H_2$   $O_2$  的危害性 氢脆  $N_2$   $H_2$  冶金处理方法  
熔渣碱度

扩散氧化 (脱氧) 置换氧化 (沉淀脱氧)

S, P 的冶金处理 合金过渡系数 熔合比

残余应力 BTR 热裂纹 (机理特征)

冷裂纹 (机理特征)

相变诱导开裂 应力诱导开裂

拘束度 预热, 后热的的作用



平衡分配系数  $k = \frac{C_s}{C_L} = \frac{C_s^*}{C_L^*}$   $P_{54} \sim P_{55}$

$f_s$  — 固相体积分数  $f_L$  — 液相体积分数

杠杆定律:  $C_s f_s + C_L f_L = C_0$  — 液态合金原始成分

$C_s, C_L$  — 平衡固相溶质浓度, 液相溶质浓度

1) 平衡凝固时溶质再分配:

$$\begin{cases} C_s = \frac{C_0 k}{1 - f_s(1-k)} & 1.5 \\ C_L = \frac{C_0}{k + f_L(1-k)} & 2.9 \\ & 2 \\ & 1.5 \\ & 4.1 \end{cases}$$

开始凝固:  $f_s \approx 0, f_L \approx 1$  则  $C_s = k C_0, C_L = C_0$

结束:  $f_s \approx 1, f_L \approx 0$  则  $C_s = C_0, C_L = \frac{C_0}{k}$

可见平衡凝固时溶质再分配仅取决于热力学参数  $k$ , 而与动力学无关, 即此刻的动力学条件是充分的。

2) 近平衡凝固时的溶质再分配

① 固相无扩散, 液相均匀混合的溶质再分配

$$(C_L^* - C_s^*) df_s = (1 - f_s) dC_L^* \quad C_L^* = \frac{C_s^*}{k}$$

$$\frac{dC_s^*}{C_s^*} = \frac{(1-k)}{1-f_s} df_s$$

$$\begin{cases} C_s^* = k C_0 (1 - f_s)^{k-1} \\ C_L^* = C_0 f_L^{k-1} \end{cases}$$

解决弹性和小塑性变形问题时主要用全量应变。

解决塑性成形问题时主要用应变增量或应变速率。

工程应变 (条件, 相对应变)  $\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$   $d\varepsilon = d(\frac{l-l_0}{l_0}) = \frac{dl}{l_0}$

对数应变 (自然, 真实应变)  $\varepsilon^* = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}$

代表尺寸无限小量与该变形瞬间时尺寸比值的积分

$$\varepsilon^* = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(\frac{l-l_0}{l_0} + 1) = \ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} \varepsilon^n}{n} + \dots$$

$$d\varepsilon^* = d(\ln \frac{l}{l_0}) = \frac{dl}{l} = d(\ln(1 + \varepsilon)) = \frac{d\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

对数应变为可加应变, 工程应变为不可加应变  $\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$   $\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$   
可叠加应变, 不可比应变

B37

$$\begin{cases} s_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ s_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ s_z = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \quad \text{①} \quad \begin{cases} s_x^2 = \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 \\ s_y^2 = \tau_{xy}^2 + \sigma_y^2 + \tau_{yz}^2 \\ s_z^2 = \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 + \sigma_z^2 \end{cases}$$

简记为  $s_i = \sigma_{ij} l_j$

切应力互等定律  $\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$

全应力  $S$  为  $S^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$

斜切面上的正应力  $\sigma_N$  等于全应力  $S$  在法线  $N$  上的投影, 也就是等于全应力  $S$  的三个分量  $s_x, s_y, s_z$  在法线  $N$  方向上的投影之和。即

$$\sigma_N = l s_x + m s_y + n s_z \quad \text{②}$$

将①代入②得  $\sigma_N = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy} ml + \tau_{yz} mn + \tau_{zx} nl)$

$$\tau_N^2 = S^2 - \sigma_N^2$$

已知过一点相互垂直的三个坐标面的九个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ , 则过该点任意截面上的应力可以根据①式计算。

应力张量: 过一点相互垂直的三个坐标面上的九个应力分量作为一个整体用来表示一点应力状态的这个物理量与坐标选取无关。这个物理量通常称一用  $\sigma_{ij}$  表示

即  $\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$  切应力互成对等  $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{pmatrix}$

Tresca 屈服准则 最大切应力准则

当变形体内部某点的最大切应力达到某一临界值时, 该点的材料发生屈服

$$\tau_{\max} = C \quad (\text{设 } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \text{ 则 } \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = C)$$

$C$  与应力状态无关, 可采用简单拉伸试验确定

数学表达式  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s = 2k$  当拉伸试样屈服时  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = \sigma_s$  代入得  $C = \frac{1}{2} \sigma_s$

Mises 屈服准则 (考虑中间主应力的影响, 且在主应力大小次序不明确的情况下使用)

$$\frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = C_1$$

$$\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = C_1 \quad C_1 \text{ 取决于材料在变形条件下的性质, 而与应力状态无关}$$

拉伸试样屈服时  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 = \sigma_s$  将其代入上式得  $C_1 = \frac{\sigma_s^2}{3} = \frac{\sigma_s^2}{3}$

薄壁管扭转时  $C_1 = \tau_s^2$



Mises 表达式  $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6\sigma_s^2$   
主应力表示  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2 = 6\tau_s^2$

Hencky (汉基)  $\frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2$   
E 弹性模量,  $\nu$  — 泊松比

材料质点屈服的条件是其单位体积的弹性形变能达到某个临界值;

无论在何种应力状态下,当变形体单位体积弹性变形能量达到某一定值时,材料进入塑性状态

Nadai 认为八面体切应力  $\tau_8$  达到某一常数时,材料即开始进入塑性状态

二个屈服准则的比较 P270

① 拉伸屈服应力与剪切屈服应力的关系

Tresca 中  $\sigma_s = 2k$ , Mises 中  $\sigma_s = \sqrt{3}k$

② 与坐标的选择无关

③ 中间主应力的影响

④ 静水压力的影响, 它对两种屈服准则没有影响

⑤ 在主应力空间中的形状 Tresca 与三个坐标轴等倾斜的六棱柱面,  $\pi$  上正六边形

⑥ 应用上的限制 Mises 与三个坐标轴等倾斜的圆柱面,  $\pi$  面上圆。

描述塑性应力应变关系的理论:

① 增量理论 — 描述材料在塑性状态下应力与应变增量或应变速度之间的关系, 如 Levy-Mises 理论和 Prandtl-Reuss 理论

② 全量理论 — 描述材料在塑性状态下应力与应变全量之间的关系, 如 Hencky 方程和伊留辛理论

等效应力:  $\bar{\sigma} = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_8 = \sqrt{\frac{3}{2} I_2} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$   
 $I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] + \tau_8^2 = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$

等效应变:  $\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \tau_8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$   
 $= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$

$\sqrt{\frac{2}{3}} \tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$

单向应力状态时, 主应变为  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , 且  $\epsilon_2 = \epsilon_3$

塑性变形时  $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$  故有  $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\frac{1}{2}\epsilon_1$

弹性变形时, 体积变化率  $\Delta V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  必须考虑。

塑性变形时, 虽然体积也有微小变化, 但与塑性应变相比很小, 可忽略不计。

一般认为塑性变形时体积不变  $\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0$

柯西方程 (几何方程):  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_{xy} = \tau_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$   
 $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{yz} = \tau_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$   
 $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{zx} = \tau_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)$

$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \right)$

$\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \right)$

$\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} \right)$

$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \right), \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)$

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}$   
 $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z}$   
 $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}$

(11-72) 应变连续方程, 应变协调方程

全量应变: 表示单元体从初始状态开始至变形过程终了时的全过程应变量, 大小与变量有关。

$d\epsilon$ : 应变增量, 变形体在变形过程中某一瞬时产生的无限小应变, 以瞬时的尺寸作为计算起点。

$d\epsilon_{ij}$  不表示  $\epsilon_{ij}$  的微分, 一点的应变增量也是应变增量张量, 用  $d\epsilon_{ij}$  表示, 应变增量与全量应变的计算起点及计算过程长度不同, 其它都相同

$d\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} d\epsilon_x & d\tau_{xy} & d\tau_{xz} \\ d\tau_{yx} & d\epsilon_y & d\tau_{yz} \\ d\tau_{zx} & d\tau_{zy} & d\epsilon_z \end{pmatrix}$



仿小变形几何方程, 可给应变增量与位移增量之间关系的几何方程

用  $de_{ij}$ ,  $d\omega_{ij}$  代表  $\epsilon_{ij}$ ,  $\omega_{ij}$  即可

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon_x &= \frac{\partial(du)}{\partial x} & dr_{xy} &= dr_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(du)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial x} \right) \\ d\epsilon_y &= \frac{\partial(dv)}{\partial y} & dr_{yz} &= dr_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(dw)}{\partial y} + \frac{\partial(dv)}{\partial z} \right) \\ d\epsilon_z &= \frac{\partial(dw)}{\partial z} & dr_{zx} &= dr_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(dw)}{\partial x} + \frac{\partial(dv)}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} (11-74)$$

$$\text{简记为 } de_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(du_j)}{\partial x_i} \right) \quad (11-75)$$

应变速率张量, 将式(11-74)两边同时除以时间增量  $dt$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} & \dot{r}_{xy} &= \dot{r}_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} & \dot{r}_{yz} &= \dot{r}_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} \right) \\ \dot{\epsilon}_z &= \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} & \dot{r}_{zx} &= \dot{r}_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

简记应变速率张量为  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{de_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right)$

$\dot{\epsilon}_{ij}$  是应变增量  $de_{ij}$  对时间增量  $dt$  的微分

$d\epsilon_{ij}$  不是全量应变  $\epsilon_{ij}$  的微分,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  一般也不是  $\epsilon_{ij}$  对时间  $t$  的导数

塑性影响因素 内在因素: 晶格类型、化学成分、组织状态。

外部因素: 变形温度、应变速率、变形力学状态。

P268  $\pi$  平面: 与  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  轴的夹角相等且正交于过原点的平面。

主应力空间: 以  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  这三个相互正交的应力分量为基底构造一个正交坐标系。

此空间坐标称为主应力空间

广义胡克定律 P278  $\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$   $r_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$   $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$   $G$  — 切变模量

$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$   $r_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$

$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$   $r_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G}$

广义胡克定律的张量表达式  $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_m \delta_{ij}$

当  $i=j$  时  $\delta_{ij}=1$  当  $i \neq j$  时  $\delta_{ij}=0$

增量理论(流动理论) Levy - Mises.

① 材料为理想刚塑性 即弹性应变增量为零, 材料塑性应变增量就是总的应变增量

② 材料服从 Mises 准则 即  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s$

③ 塑性变形时体积不变 即  $d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z = d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$ .  
 $de_{ij} = de_{ji}$

则应力应变有如下关系:  $\frac{d\epsilon_x}{\epsilon_x} = \frac{d\epsilon_y}{\epsilon_y} = \frac{d\epsilon_z}{\epsilon_z} = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} = \frac{dr_{xy}}{r_{xy}} = \frac{dr_{yz}}{r_{yz}} = \frac{dr_{zx}}{r_{zx}} = d\lambda$

即  $de_{ij} = \sigma'_{ij} d\lambda$

$\sigma'_{ij}$  — 应力偏张量  $d\lambda$  — 正应力的比例系数

表明: 主应变增量主轴与应力偏量主轴(应力主轴)重合。

应变增量与应力偏张量成比例。

$d\lambda = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}}$

$d\bar{\epsilon}$  — 增量形式的等效应变, 叫等效应变增量  $\bar{\sigma}$  — 等效应力, 由 Mises  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_s$

Levy - Mises 理论的张量表达式:  $de_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \sigma'_{ij}$

$d\epsilon_x = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]$

$dr_{xy} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} r_{xy}$

$d\epsilon_y = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \right]$

$dr_{yz} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} r_{yz}$

$d\epsilon_z = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]$

$dr_{zx} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} r_{zx}$



增量理论: 各塑性变形增量的各分量与相应的应力偏张量分量成正比

$$\frac{d\epsilon_x}{d\lambda} = \frac{d\epsilon_y}{d\lambda} = \frac{d\epsilon_z}{d\lambda} = \frac{d\tau_{xy}}{d\lambda} = \frac{d\tau_{yz}}{d\lambda} = \frac{d\tau_{zx}}{d\lambda} = d\lambda$$

$$d\epsilon_{ij} = d\lambda \cdot \sigma_{ij}$$

$$\frac{d\epsilon_x - d\epsilon_y}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{d\epsilon_y - d\epsilon_z}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{d\epsilon_x - d\epsilon_z}{\sigma_x - \sigma_z} = d\lambda$$

$$\frac{d\epsilon_1 - d\epsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{d\epsilon_2 - d\epsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{d\epsilon_3 - d\epsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = d\lambda$$

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}}$$

$$\text{故 } d\epsilon_x = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad d\tau_{xy} = \frac{3}{2} \times \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy}$$

$$d\epsilon_y = \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right] \quad d\tau_{yz} = \frac{3}{2} \times \frac{d\bar{\epsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz}$$

$$d\epsilon_z = \quad \quad \quad d\tau_{zx} =$$

对于平面变形,  $d\epsilon_z = 0$  则  $\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$

全量理论: 全量应变与应力之间的关系

$$\frac{\epsilon_x}{\sigma_x} = \frac{\epsilon_y}{\sigma_y} = \frac{\epsilon_z}{\sigma_z} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\tau_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\tau_{zx}}{\tau_{zx}} = \frac{1}{2G'} \quad G' - \text{塑性切变模数}$$

$$G' = \frac{1}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{3} E'$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2G'} \tau_{xy}$$

$$\epsilon_y =$$

$$\tau_{yx} =$$

$$\epsilon_z =$$

$$\tau_{zx} =$$

## 塑性成型中的基本规律

### 1. 体积不变定律

变形体塑性变形前的体积等于其变形后的体积

$$\epsilon_l + \epsilon_b + \epsilon_h = 0 \quad HBL = hbl \quad d\epsilon_x + d\epsilon_y + d\epsilon_z = 0$$

### 2. 最小阻力定律

### 3. 不均匀变形

变形过程中, 由于应力状态分布不均匀, 所以几乎得不到均匀的塑性变形。

热变形: 塑性成型时再结晶得以充分进行的过程, 称~

冷变形: 金属变形过程中只发生加工硬化, 不存在回复、再结晶的现象。~ 此过程。

变形抗力大, 塑性压低

直角坐标系应力平衡微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial i} = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

圆柱坐标系

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sigma_{xl} + \tau_{xy}l + \tau_{zx}n$$

$$\sigma_y = \tau_{xy}l + \sigma_{ym} + \tau_{zy}n$$

$$\sigma_z = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zn}$$

$$\sigma = \sigma_x l + \sigma_y m + \sigma_z n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2(\tau_{xy}lm + \tau_{yz}mn + \tau_{zx}nl)$$

$$\text{主应力 } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \quad \sigma = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

$$\text{此时 } \sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad \sigma_z = \sigma_3 \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \quad \sigma_x = \sigma_1 \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad \sigma_z = \sigma_3$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0 \end{aligned} \right\} l^2 + m^2 + n^2 = 1$$



$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x \tau_{xy}^2 + \sigma_y \tau_{yz}^2 + \sigma_z \tau_{zx}^2) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

$$\sigma_N^3 - I_1 \sigma_N^2 - I_2 \sigma_N - I_3 = 0$$

平均应力 (静水压力, 球张量)  $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

应力球张量  $\sigma_{ij} \sigma_m = \begin{pmatrix} \sigma_m & & \\ & \sigma_m & \\ & & \sigma_m \end{pmatrix}$

应力偏张量  $\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{pmatrix}$

球张量状态不能使物体产生形状变化和塑性变形, 而只能引起变形和体积变化, 该体积变化认为是弹性的

$$I_1' = \sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$$

应变分量与相对位移之间的关系

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2\epsilon_{xy} = 2\gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yx} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

即  $\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \text{小变形几何方程}$

圆柱坐标: 正应变与切应变与位移关系

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \gamma_{\theta r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \quad \gamma_{rz} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

位移增量分量代替位移分量

$$d\epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(du) \quad d\gamma_{xy} = d\gamma_{yx} = \frac{1}{2} d\phi_{xy} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial y}(du) + \frac{\partial}{\partial x}(dv) \right]$$

$$d\epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y}(dv)$$

$$d\epsilon_z = \frac{\partial}{\partial z}(dw)$$

主应力不变量  
 $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$   
 $J_2 = \frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2]$