

资料由研友提供，材料人考研整理

材料人网[www.cailiaoren.com](http://www.cailiaoren.com)

学院官方唯一QQ: 2794882380

材料资讯、实验耗材及测试、考研、就业尽在材料人网

# 材料成形理论基础

金属塑性加工力学基础

柳玉起

华中科技大学材料学院

# 参考书目

- 金属塑性成形原理 (\*\*\*\*\*)

俞汉清, 陈金德 编, 机械工业出版社, **1999**年, 北京。

- 材料成形理论基础 (\*\*\*\*\*)

刘雅政 主编, 国防工业出版社, **2004**年, 北京。

- 金属塑性加工原理 (\*\*\*\*)

陈森灿, 叶庆荣 编, 清华大学出版社, **1991**年, 北京。

# 课程总体安排

- 金属成形工艺简介
- 金属塑性成形基本假设
- 应力空间（**本构方程**）
- 应变空间（**几何方程**）
- **屈服准则**
- **本构方程**

# 课程学习目的

## ■ 早期

- 解析金属塑性变形过程
- 简化模型（平面应变、轴对称等；均匀受力；均匀变形）

## ■ 现代

- 金属塑性成形模拟
- 几何方程、本构方程、屈服准则
- 复杂塑性变形过程



# 金属压力加工

## ■ 应用领域

机械；电子；航空航天.....

## ■ 成形分类

冲压成形；锻造成形；拉拔成形；挤压成形；  
切削成形；轧制成形.....

## ■ 成形方法

冲压成形；锻造成形；数学化无模成形；爆炸  
成形；电磁成形；激光成形； .....

## ■ 发展前景

超大、超小、高精尖、高度集成

# 金属压力加工

## ■ 发展历史

- 1678年, Hooke (虎克) : 变形和外力成正比。
- 1820~1830年, Navier、Cauahy、Saint Venant (圣维南) : 应力、应变的概念, 变形体的平衡方程、几何方程、协调方程、广义虎克定律; -----弹性力学的理论基础。
- 1864年, Tresca (屈斯卡) : 最大剪应力屈服条件。
- 1871年, Levy (列维) : 三维塑性应力--应变关系。
- 1913年, Mises (米塞斯) : 形变能屈服条件。
- 1930年, Prandtl, Reuss (瑞斯) : 增量理论。
- 1943年, Hencky (汉基) , Nadai, Iliushin: 形变理论。
- 1950年~, 塑性位势理论、有限单元法原型(矩阵法)

# 塑性变形

- 什么是塑性变形
- 材料产生一定的永久变形又不破坏其完整性的能力
- 塑性加工是利用材料塑性而获得所需形状与尺寸的工件的一种加工方法

# 传统金属成形计算方法

- 滑移线法
- 上限法
- 下限法
- 主应力法\*

# 金属成形计算机模拟

## ■ 主要分类

板料冲压成形模拟

体积成形模拟

## ■ 主要方法

弹塑性有限元法

刚塑性有限元法

无网格法

# 金属成形计算机模拟应用

- 汽车覆盖件冲压成形过程模拟
- 板料液压成形过程模拟
- 弯管成形过程模拟
- 五金级进模零件成形过程模拟
- 金属锻造成形过程模拟
- 金属切削成形过程模拟
- 金属拉拔成形过程模拟
- .....

# 课程内容

- 金属塑性成形基本假设
- 应力
- 应变
- 屈服准则
- 本构方程
- 主应力法

# 重点内容

- 金属塑性成形中的基本概念
- 应力分析、应变分析、塑性、屈服准则、本构关系等等；
- 不讲传统的解析计算方法，如滑移线法、上限法、下限法等等；
- 本课程是金属塑性成形的基础课程，是后继课程“成形工艺与装备”、“材料成形过程数值模拟”的基础；



# 学习方法

- 塑性成形的基本理论发展的比较久远，理论系统比较完善，但随着计算机的发展和工程实际问题的需要，有限元数值方法已经完全取代了传统的理论解析计算方法；
- 重点学习概念，不要过分强调理论的完整性；
- 我们学习的目的不是为了理论解析计算，因此重点学习塑性成形理论中的一些重点基本概念；

# 金属塑性成形基本假设

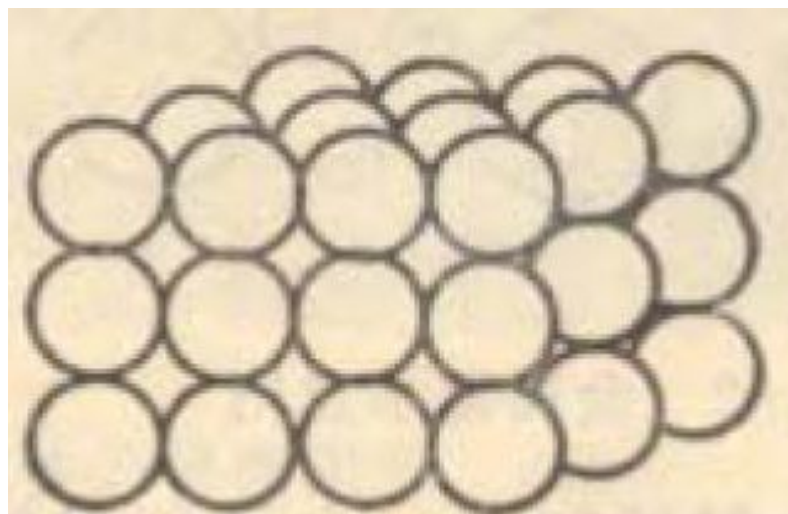
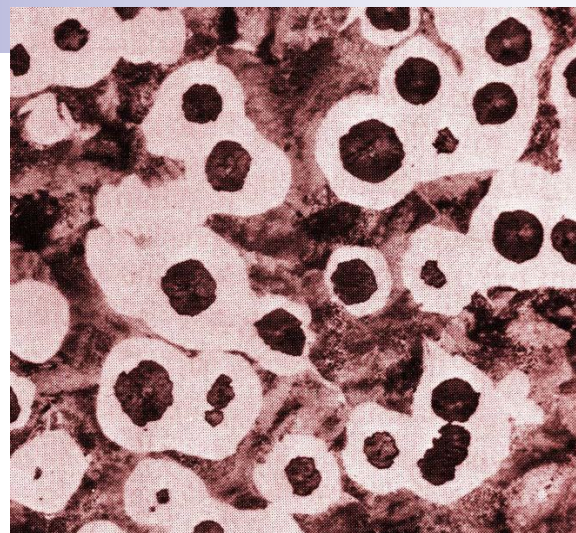
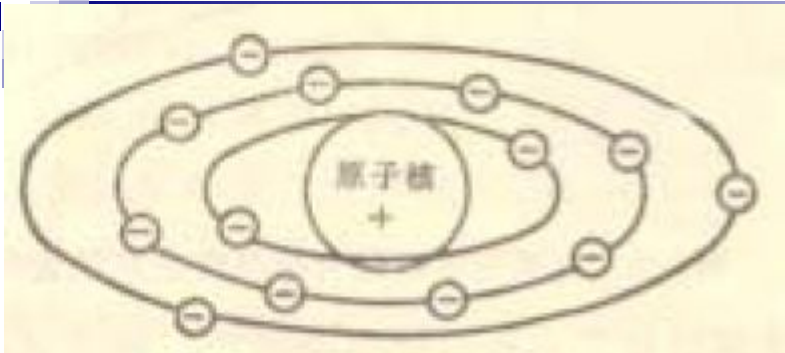
由于金属塑性成形非常复杂，数学与力学的处理非常困难，因此需要做一些假设和近似处理：

- 各向同性的均匀连续体
- 体积力为零
- 变形体在表面力作用下处于平衡状态
- 初始应力为零
- 体积不变假设

# 金属塑性成形基本假设

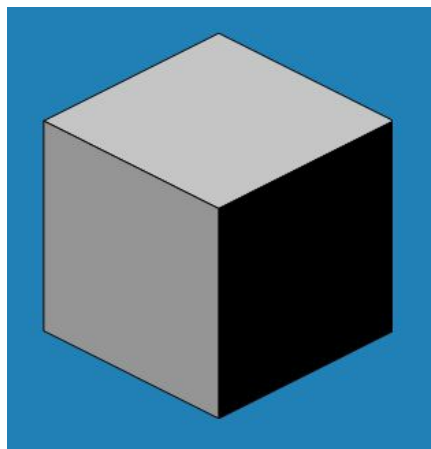
## ■ 各向同性的均匀连续体

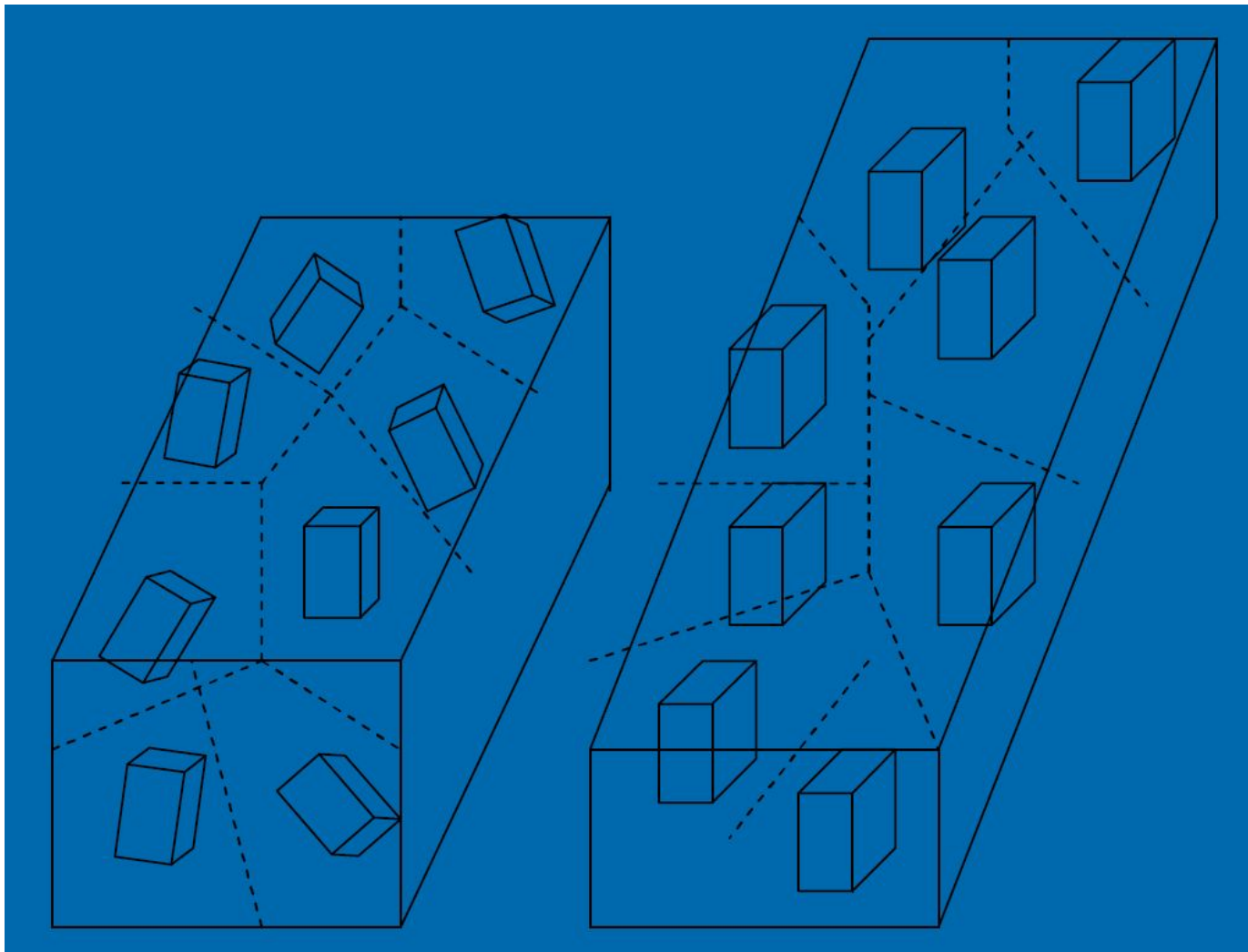
1. 假设材料是连续的，即在材料内不存在任何缺陷，应力、应变、位移等物理量是坐标的连续函数； **连续性假设**
2. 假设材料各质点的组织、化学成形相同；  
**均匀性假设**
3. 假设材料各质点在各方向上的物理性能和力学性能相同； **各向同性假设**



从统计平均的观点看，材料内部的空隙和非均匀性影响可以忽略

根据均匀连续性假设，就可以从构件内任意截取一部分来研究，且构件中的一些力学量（如各点的受力、位移）均可用坐标的连续函数表示，并能运用微积分学的无穷小分析方法





板料轧制前  
各向同性

板料轧制后  
带有方向性

# 金属塑性成形基本假设

## ■ 体积力为零

1. 成形过程中的外力可分为两类：表面力和体积力；
2. 体积力是作用在物体质点上的力，例如自重力、磁力和惯性力等等；
3. 对于塑性成形来说，除了高速锤锻造、爆炸等（动力问题）少数成形情况，体积力相对于其它成形外力很小（准静态问题），可以忽略不计；



# 金属塑性成形基本假设

## ■ 变形体在表面力作用下处于平衡状态

假设准静态力学问题（非动力学问题）

- 材料成形时模具和零件处于平衡状态；
- 如果零件划分为有限个单元体，每个单元体仍处于平衡状态；
- 每个单元体的外力系的矢量和为零，外力系对任一点的总力矩也为零；

# 金属塑性成形基本假设

## ■ 初始应力为零

为了解析问题方便

- 内力是由于外力作用下产生的，内力的变化达到一定程度就会使金属产生塑性变形；
- 课程内容主要考虑金属由于外力的作用下产生塑性变形，不考虑金属存在初始应力情况；



# 金属塑性成形基本假设

## ■ 体积不变假设

连续的、均匀的金属物体

- 弹性变形时，体积变化必须考虑；
- 塑性变形时，体积虽有微小变化，但与塑性变形量相比很小，可以忽略不计，因此一般假设金属在塑性变形前后的体积保持不变；

# 金属塑性成形基本假设

## ■ 为什么需要五点假设？

1. 为了可以解析计算简单的塑性成形问题；
2. 金属塑性成形基本假设与实际情况差别很大，只适用于金属塑性成形解析计算方法；
3. 由于计算机水平的发展，现代金属塑性成形计算基本不采用解析计算方法，而普遍采用计算机数值模拟方法；
4. 解析计算方法只能分析少数简单成形问题，计算机数值模拟方法能够模拟任何复杂的金属塑性成形问题；

# 金属塑性成形基本假设

## 金属塑性成形五点假设的合理性

- 各向同性的均匀连续体（部分合理）
- 体积力为零（较为合理）
- 变形体在表面力作用下处于平衡状态（合理）
- 初始应力为零（不合理）
- 体积不变假设（合理）

# 应力概念

## ■ 应力的概念

■ 内力：因外力作用在物体内部产生的力

■ 内力的特点：

1. 随外力的变化而变化，是“附加内力”

2. 内力是分布力系，常用其主矢量和主矩表示

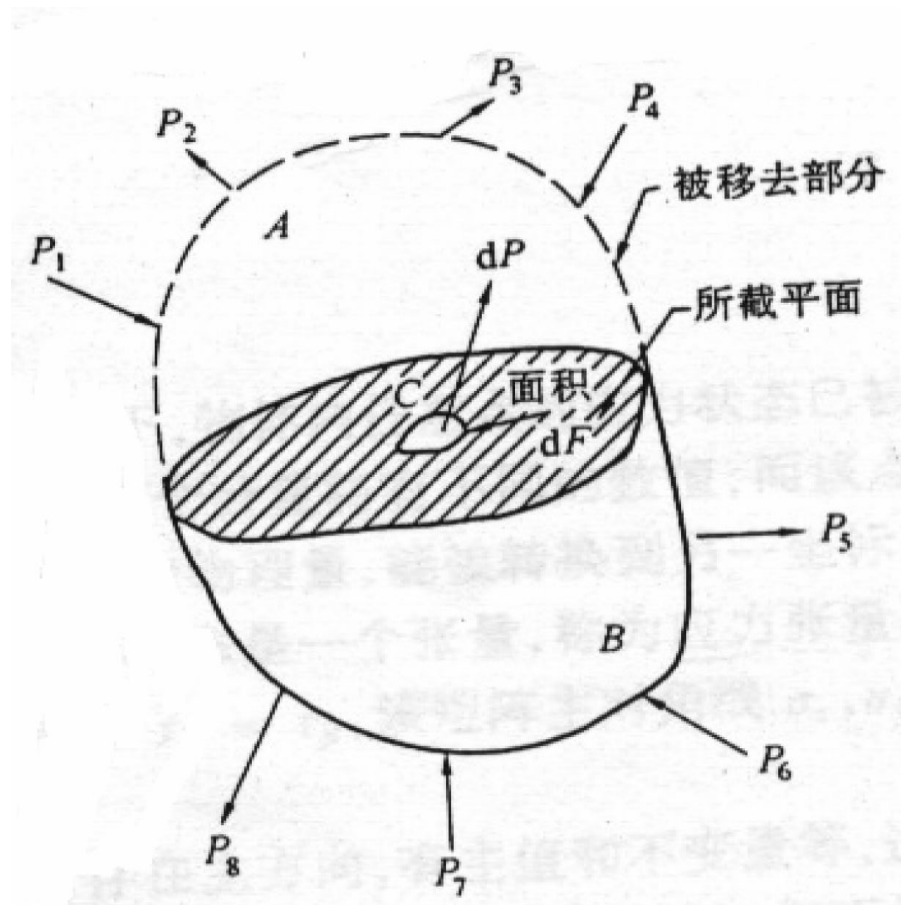
■ 应力：单位面积上的内力

应力表示内力的强度，作用于物体质点之间

■ 目的：

确定物体处于弹性或塑性阶段的强度问题或屈服条件问题都很重要，是建立在复杂应力状态下强度准则和屈服准则条件所必须的基础知识

# 应力概念



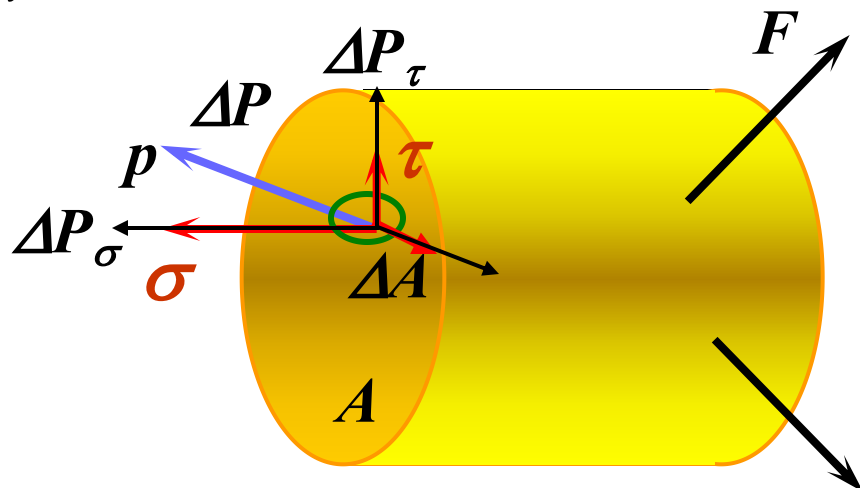
采用截面法分析结构的内力及应力

# 应力定义

- 假设 $\Delta A$ 为任意微元截面， $\Delta P$ 为截面上的作用力，则 $\Delta A$ 截面的应力向量 $p$

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

- $p$ 也称为全应力向量，可分解为三个应力分量，即一个正应力 $\sigma$ 和二个剪应力 $\tau$



$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_{\sigma}}{\Delta A} = \frac{dP_{\sigma}}{dA}$$

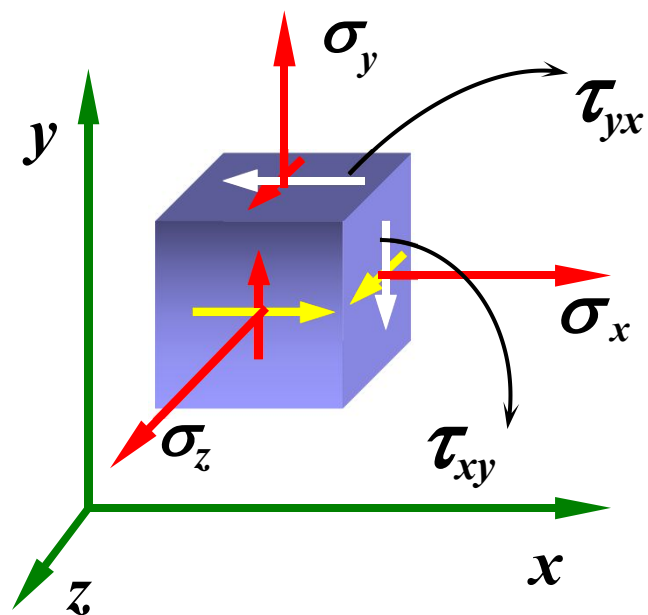
$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_{\tau}}{\Delta A} = \frac{dP_{\tau}}{dA}$$

# 应力状态

- 应力状态表示
- 应力状态一般用单元体表示
- 单元体：材料内的质点，包围质点的无限小的几何体，常用的是正六面体

## ➤ 单元体的性质

任一面上，应力均布  
平行面上，应力相等



# 应力分量

## ■ 应力分量

### ➤ 三个正应力分量

$\sigma_x$

$\sigma_y$

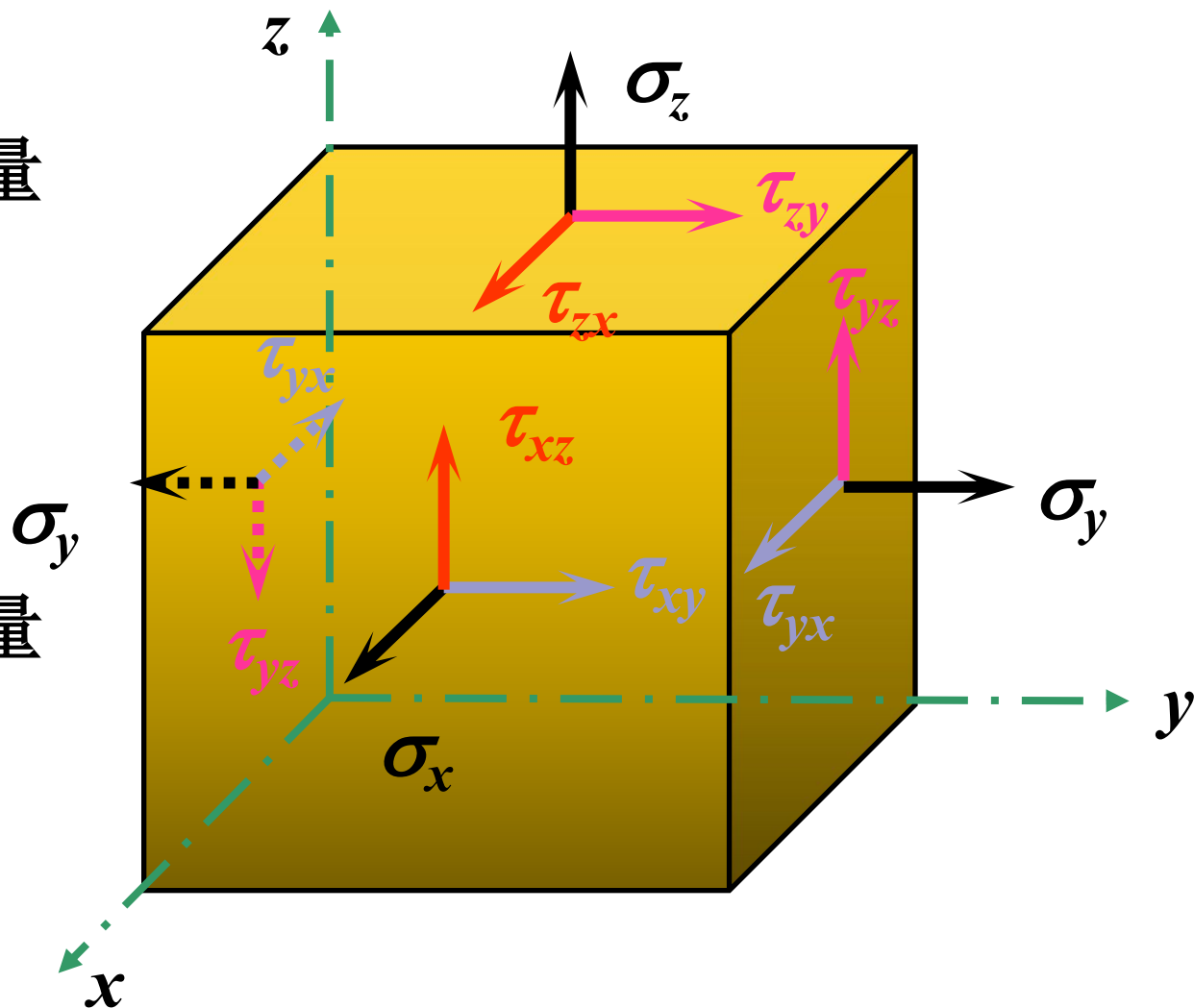
$\sigma_z$

### ➤ 六个剪应力分量

$\tau_{xy}$   $\tau_{yx}$

$\tau_{yz}$   $\tau_{zy}$

$\tau_{zx}$   $\tau_{xz}$





# 应力分量

## ■ 应力的分量表示及正负符号的规定

$$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{xx}、\sigma_{yy}、\sigma_{zz}、\tau_{xy}、\tau_{yz}、\tau_{xz}$$

$i$ ——应力作用面的外法线方向(与应力作用面的法线方向平行的坐标轴)

$j$ ——应力分量本身作用的方向

当  $i=j$  时为正应力  $\sigma$

$i、j$  同号为正（拉应力），异号为负（压应力）

当  $i \neq j$  时为剪应力  $\tau$

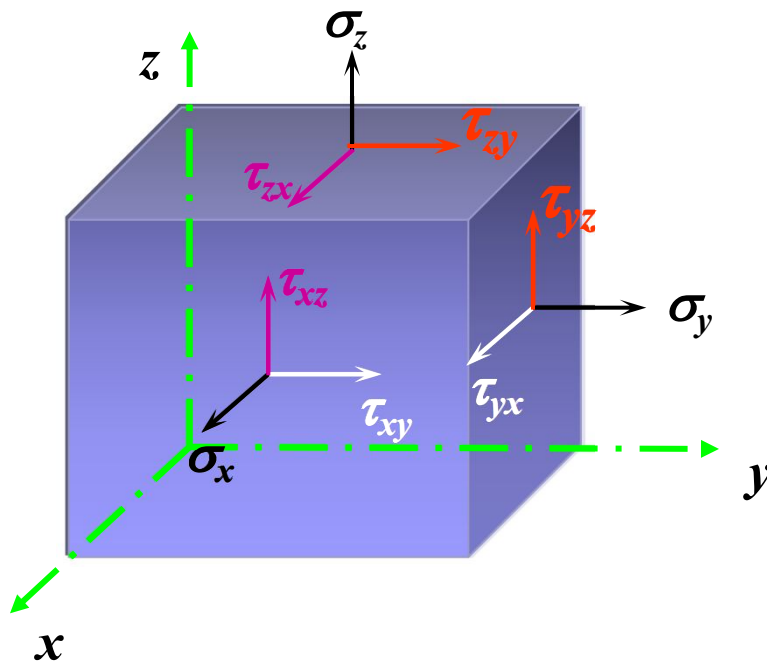
$i、j$  同号为正，异号为负

# 剪应力互等定理

- 剪应力互等定理
- 假设单元体处于平衡状态，则绕单元体轴向的合力矩一定为零，则

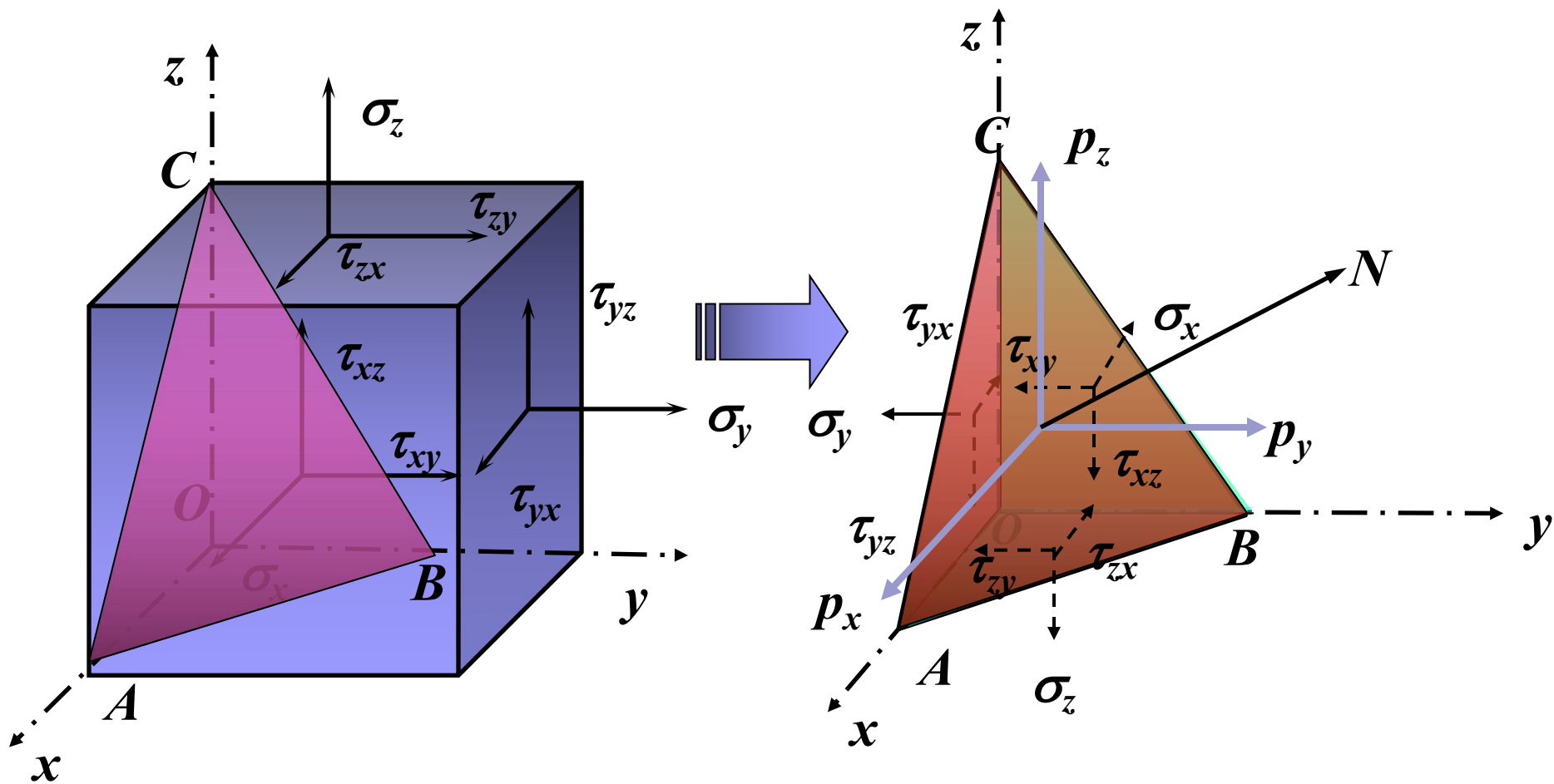
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

➤ 过一点的两个正交面上，如果有与相交边垂直的剪应力分量，则两个面上的这两个剪应力分量一定等值、方向相对或相离



# 斜面上的应力

## ■ 直角坐标系中斜截面上的应力



# 斜面上的应力

- 斜截面外法线单位向量  $N=(l \ m \ n)$

$$l=\cos(N,x) \quad m=\cos(N,y) \quad n=\cos(N,z)$$

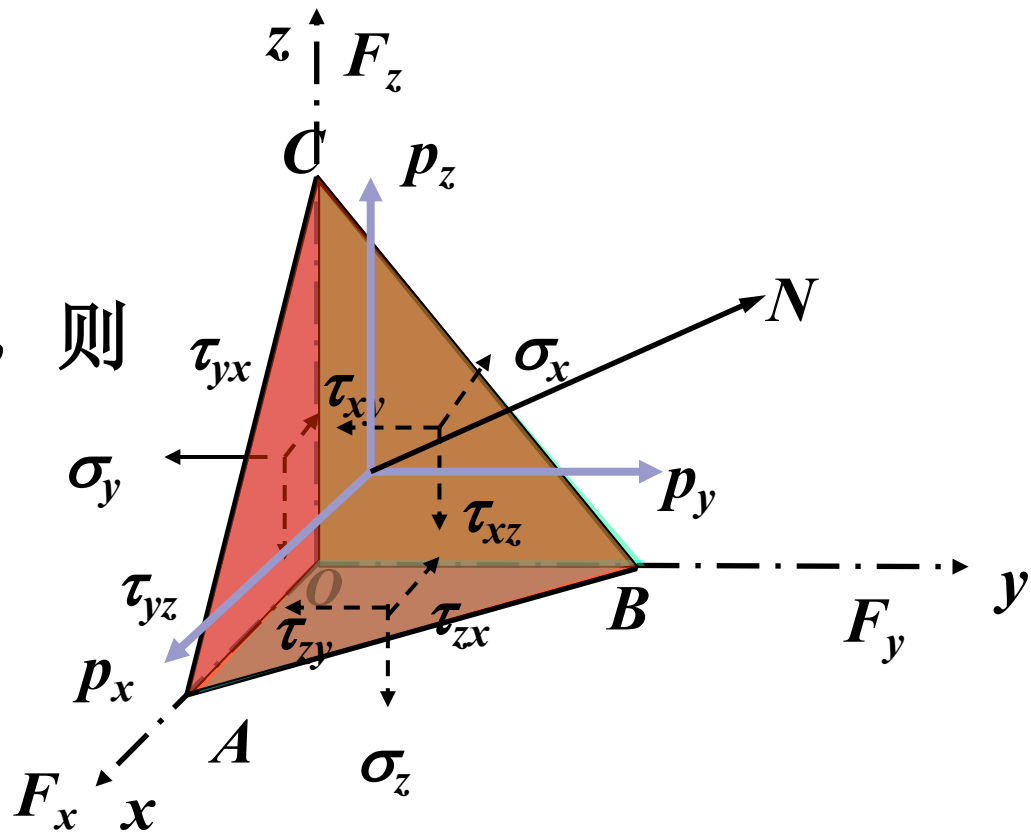
- 斜截面四面体的表面积分别为

$$S_{\Delta ABC}=S \quad S_{\Delta OBC}=lS$$

$$S_{\Delta OAC}=mS \quad S_{\Delta OAB}=nS$$

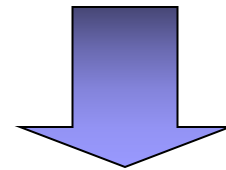
- 四面体处于平衡状态，则

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right.$$

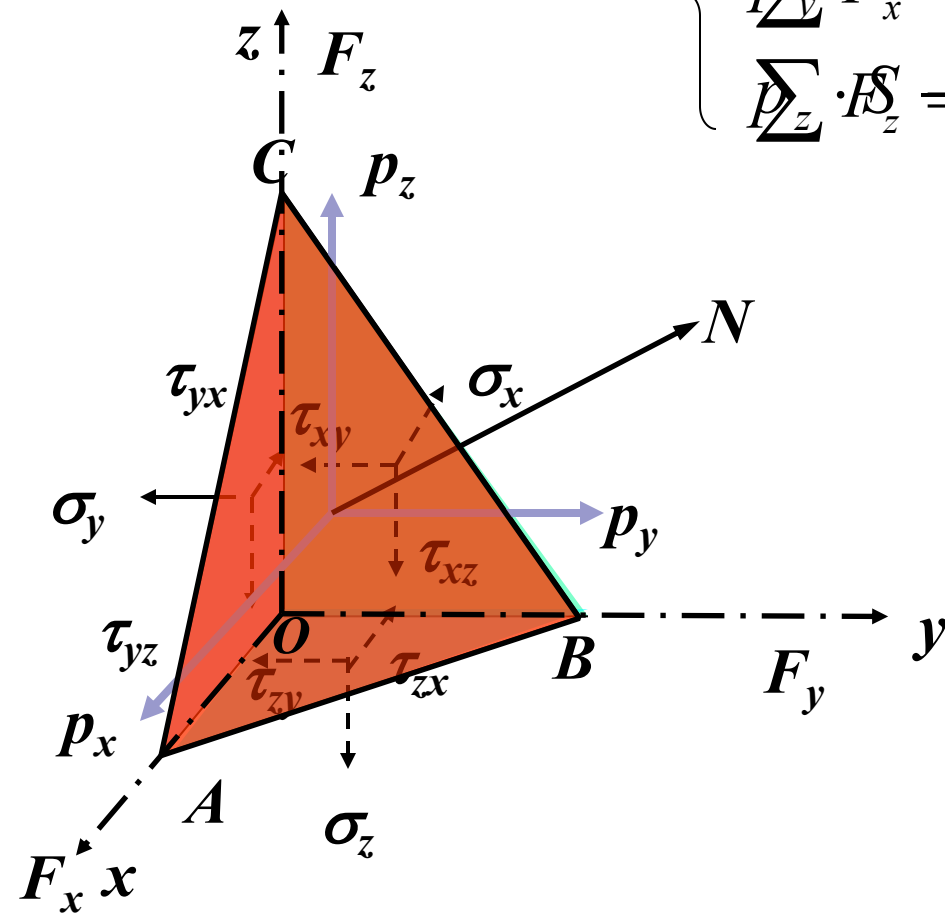


# 斜面上的应力

$$\begin{cases} \sum F_x = 0: \sigma_x \cdot lS - \tau_{yx} \cdot mS - \tau_{zx} \cdot nS = 0 \\ \sum F_y = 0: \sigma_{xy} \cdot lS - \sigma_y \cdot mS - \tau_{zy} \cdot nS = 0 \\ \sum F_z = 0: \sigma_{xz} \cdot lS - \tau_{yz} \cdot mS - \sigma_z \cdot nS = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases}$$



# 斜面上的应力

- 例题说明
- 已知某点应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

求过该点与三个坐标轴等倾角的斜面上的正应力  $\sigma$  和剪应力  $\tau$  值

# 斜面上的应力

- 由于斜面与三个坐标轴等倾角，所以

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+2+3) = 2\sqrt{3}$$

$$p_y = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+3+2) = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

$$p_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(3+2+1) = 2\sqrt{3}$$

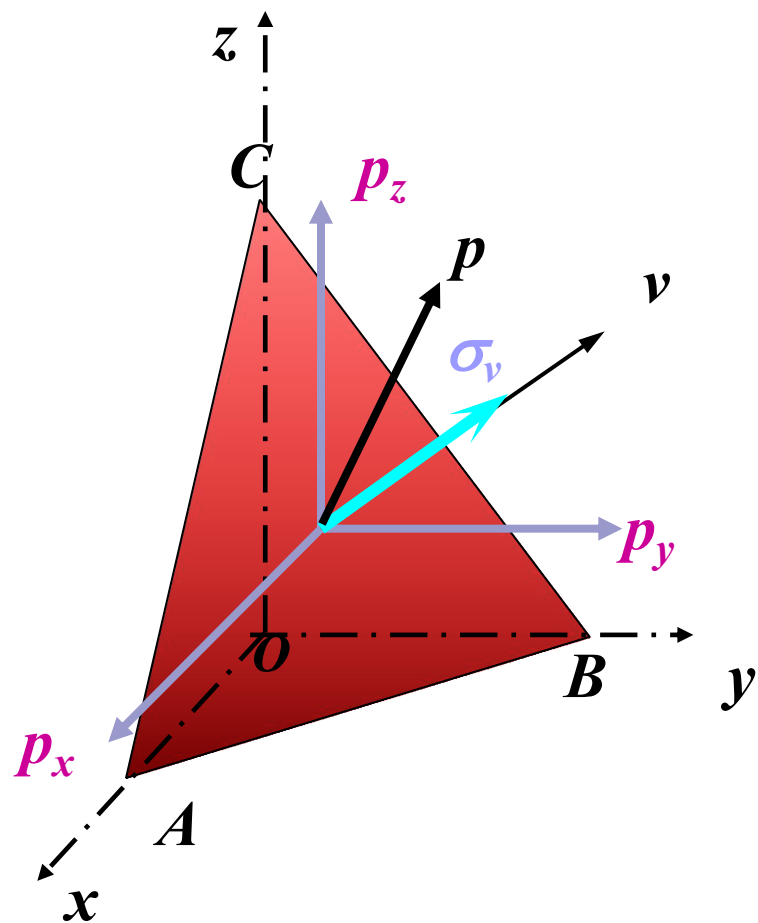
- 正应力  $\sigma$

$$\sigma = lp_x + mp_y + np_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3} + \frac{7}{3}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = \frac{19}{3}$$

- 剪应力  $\tau$

$$\tau = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

# 主平面主应力



## ■ 主平面

当向量 $v$ 位于某方向时，应力总矢量垂直于 $ABC$ 曲面，且在该面上的剪应力为零。则向量 $v$ 称为主轴

## ➤ 主应力

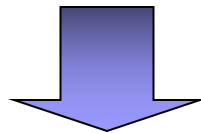
作用在主平面上（ $ABC$ 面）的法向应力 $\sigma_v$ 称为主应力



# 应力状态方程

- 如果  $\sigma_v$  为主应力，单位向量  $v=(l \ m \ n)$ ，则  $x$ 、 $y$ 、 $z$  坐标轴方向的应力分量分别为  $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$

$$\begin{cases} p_x = l\sigma_v = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ p_y = m\sigma_v = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ p_z = n\sigma_v = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases}$$



$$\begin{cases} l(\sigma_x - \sigma_v) + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = 0 \\ l\tau_{xy} + m(\sigma_y - \sigma_v) + n\tau_{zy} = 0 \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n(\sigma_z - \sigma_v) = 0 \end{cases}$$

# 应力状态方程

- 由于  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ，因此  $l$ 、 $m$ 、 $n$  不同时为零  
则三元齐次方程组的系数矩阵一定等于零

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_v & \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_v & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_v \end{vmatrix} = 0$$

- 展开方程组系数矩阵，可得应力状态特征方程

$$\sigma_v^3 - I_1 \sigma_v^2 + I_2 \sigma_v - I_3 = 0$$

# 应力张量不变量

## ➤ 应力状态特征方程

$$\sigma_v^3 - I_1 \sigma_v^2 + I_2 \sigma_v - I_3 = 0$$

## ➤ 应力张量不变量

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

$I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 分别称为应力张量的第一、第二、第三不变量

# 张 量

- 张量：与坐标系选择无关的集合。当坐标系变换时，集合的形式不改变
- 在塑性成形理论中，应力、应变、力、速度等物理量都是张量

# 应力张量不变量

- 主应力：应力状态特征方程的三个实根一般用  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  表示，即三个主应力满足

$$\sigma_v^3 - I_1 \sigma_v^2 + I_2 \sigma_v - I_3 = 0$$

- 应力状态特征方程与坐标系的选取无关，应力张量的第一、第二、第三不变量  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  也不随坐标而变化。

- 应力张量的第一、第二、第三不变量  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$  还可以表示为

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

# 应力张量不变量

- 例题说明
- 已知某点应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

➤ 求应力张量的第一、第二、第三不变量  
 $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$

# 应力张量不变量

## ➤ 应力张量不变量

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ &= 1 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 1 - 2 \times 2 - 2 \times 2 - 3 \times 3 \\ &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \\ &= 1 \times 3 \times 1 + 2 \times 2 \times 3 \times 2 - 1 \times 2 \times 2 - 3 \times 3 \times 3 - 1 \times 2 \times 2 \\ &= -8 \end{aligned}$$

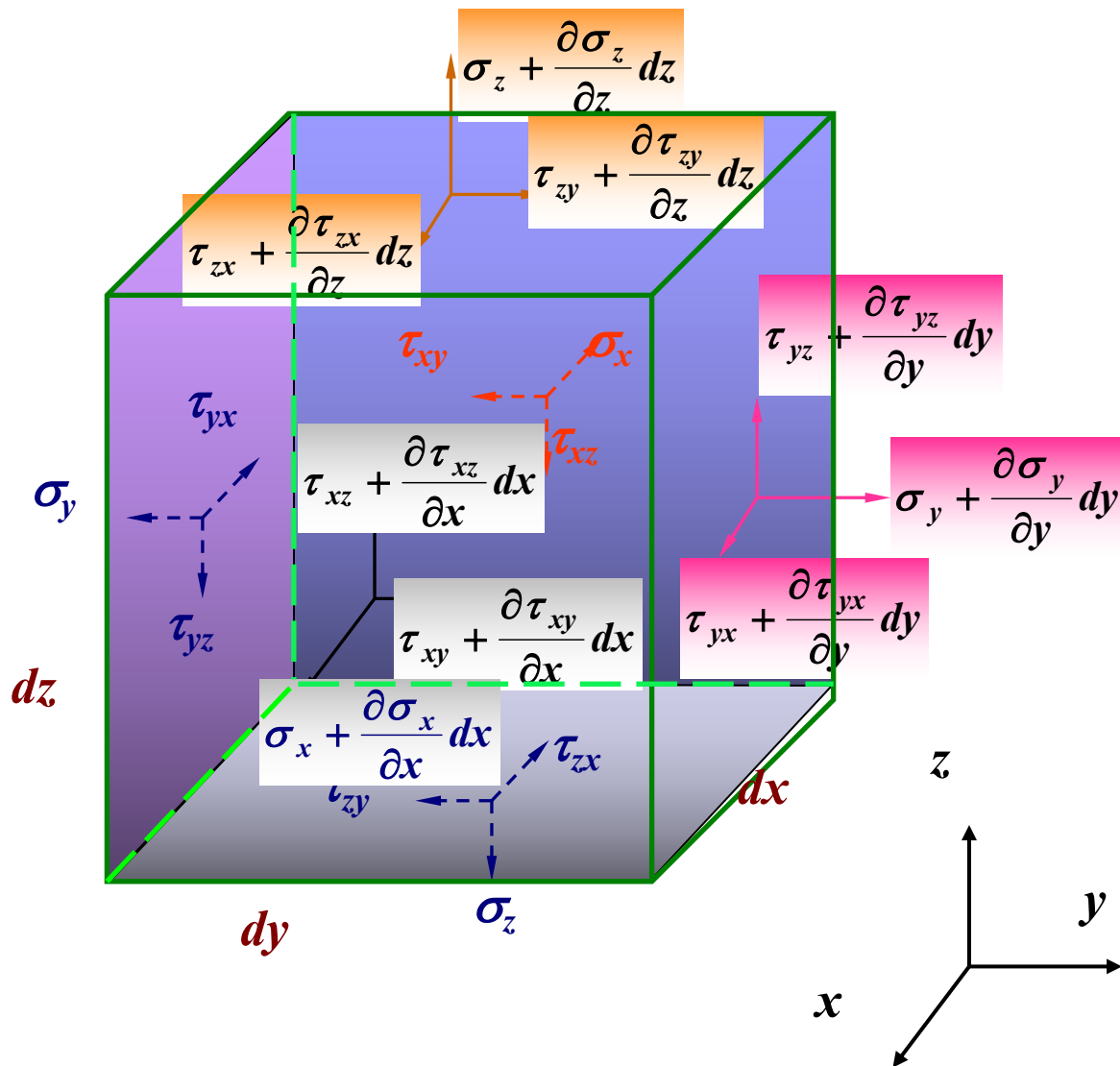
# 应力平衡方程式

➤ 正交直角坐标系

➤ 应力分量  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau_{xy}$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx}$ 、 $\tau_{xz}$  为点的坐标  $(x, y, z)$  的函数

➤ 体力分量为： $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$

➤ 微元体(不一定是正六面体，有限体积)处于平衡状态

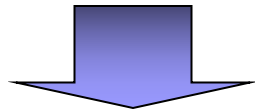




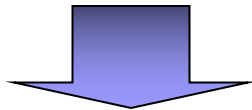
# 应力平衡方程式

➤ 由于单元体处于平衡状态

$$\Sigma F_x = 0$$



$$\begin{aligned} & (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dx dz - \tau_{zx} dx dz + f_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

# 应力平衡方程式

## ➤ 单元体的应力平衡微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases}$$

## ➤ 忽略体力 $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$

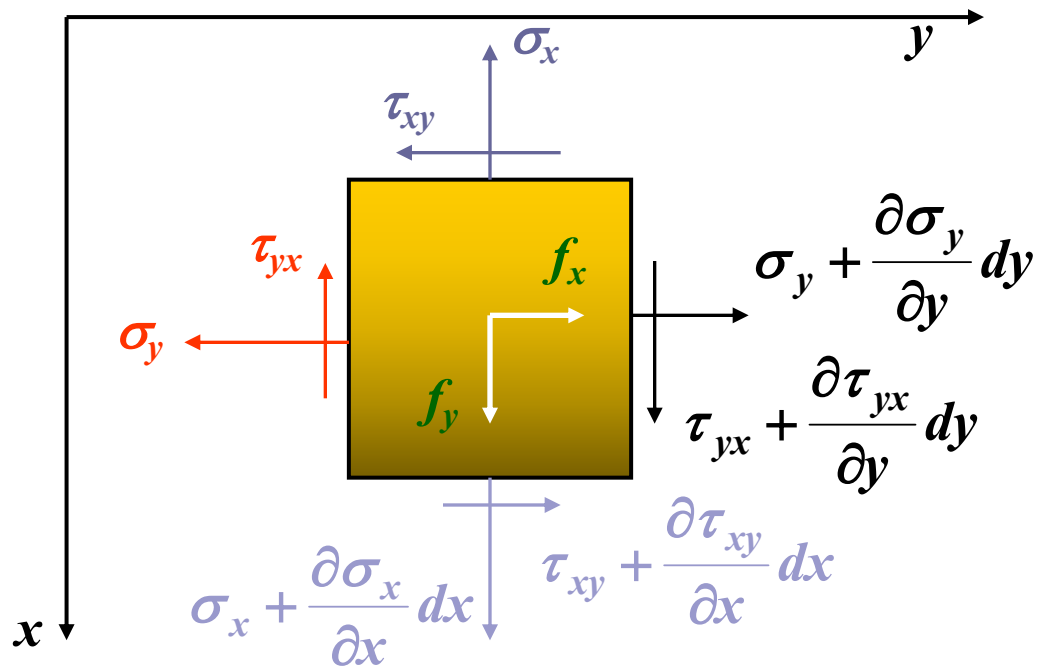
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

# 应力平衡方程式

## ► 平面应力问题的平衡微分方程

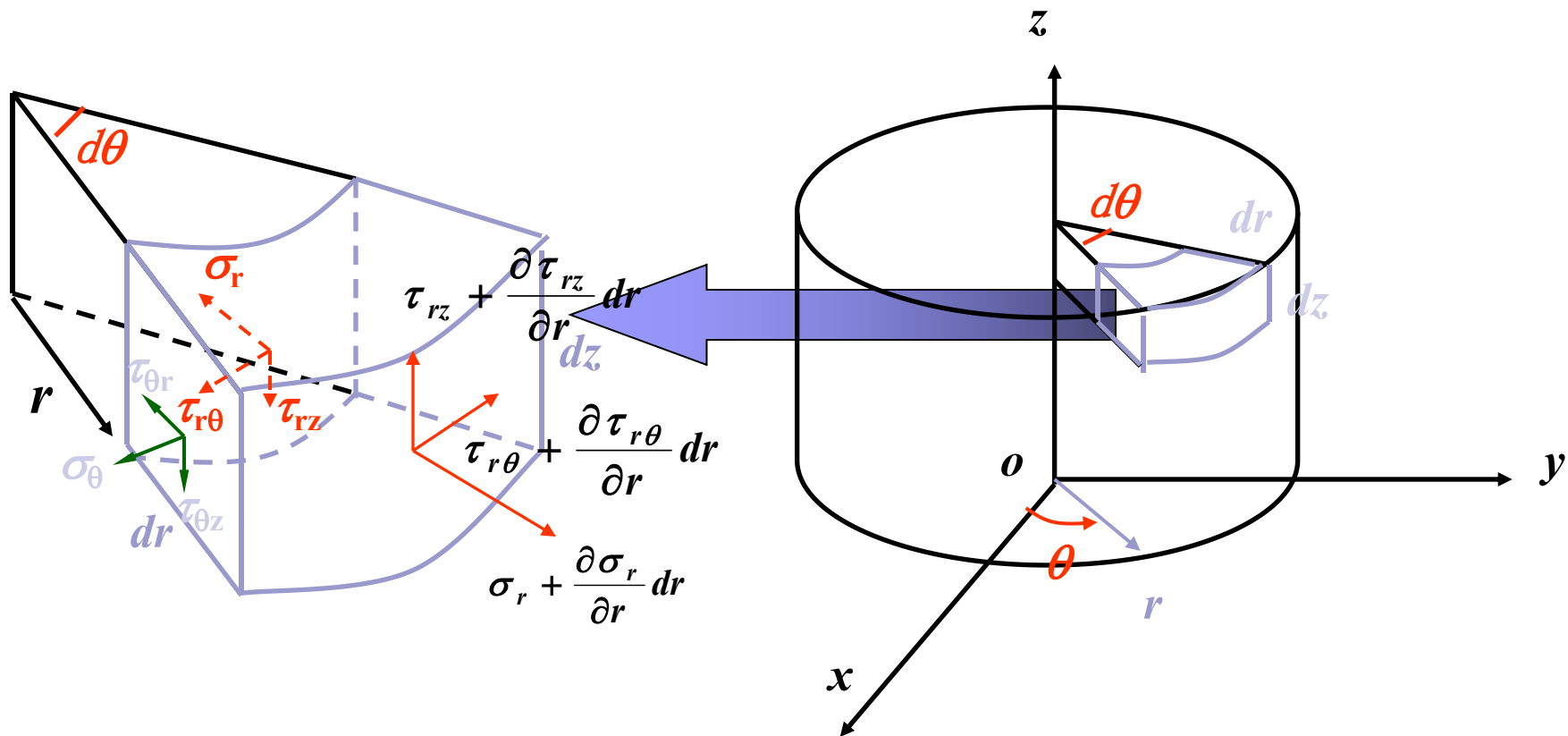
$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$



# 应力平衡方程式

## ➤ 轴对称问题的平衡微分方程



# 应力平衡方程式

## ► 轴对称问题的平衡微分方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + f_r = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + f_z = 0 \end{array} \right.$$

# 应力平衡方程式

► 设某物体内的应力场为

$$\sigma_x = -6xy^2 + c_1x^3$$

$$\sigma_y = -\frac{3}{2}c_2xy^2$$

$$\tau_{xy} = -c_2y^3 - c_3x^2y$$

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

试求系数 $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$

# 应力平衡方程式

将应力状态代入到应力平衡方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} -6y^2 + 3c_1x^2 - 3c_2y^2 - c_3x^2 = 0 \\ -2c_3xy - 3c_2xy = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-6 - 3c_2)y^2 + (3c_1 - c_3)x^2 = 0 \\ (-2c_3 - 3c_2)xy = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = -2 \quad c_3 = 3$$

# 应力张量及分解

## ■ 应力张量

- 张量：与坐标系选择无关的集合。当坐标系变换时，集合的形式不改变
- 在塑性成形理论中，应力、应变、力、速度等物理量都是张量

➤ 应力张量表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}$$



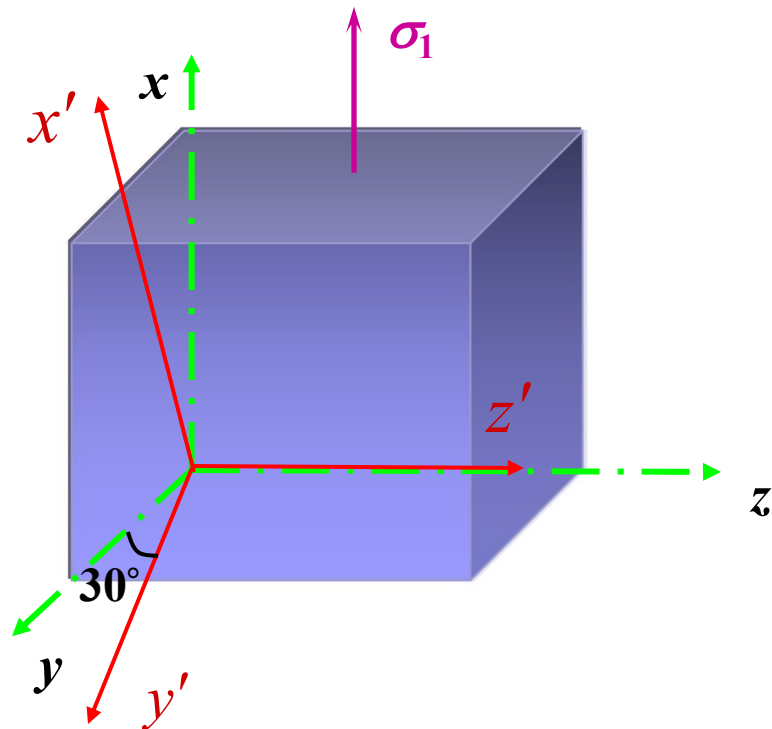
# 应力张量及分解

## ■ 例题说明

单向拉伸时，拉伸应力为  $\sigma_1$ ，若选坐标系  $(x, y, z)$ ，此时的应力张量为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当  $zx$  面绕  $y$  轴逆时针轴旋转  $30^\circ$  后，在新坐标系  $(x', y', z')$  下，应力张量则变为



# 应力张量及分解

$$\sigma'_{ij} = M^T \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 3\sigma_1/4 & \sqrt{3}\sigma_1/4 & 0 \\ \sqrt{3}\sigma_1/4 & \sigma_1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

➤ 应力张量的6个分量的具体数值与坐标的选择有关，然而其所代表的点的应力（单向拉伸状态）却没有因坐标系的选择而改变

# 应力张量及分解

## ■ 平均应力 $\sigma_m$

➤ 在塑性力学中平均应力只引起体积改变，而不引起形状改变，故可将应力张量进行分解

$$\sigma_m = \sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{1}{3} I_1$$

➤  $\sigma_m$  和  $\sigma_0$  也称为应力球张量，与坐标轴选择无关，与材料体积变形有关

➤ 应力球张量表示静水应力状态

# 应力偏张量

## ■ 应力偏张量 $\sigma'_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix}$$

- $\sigma'_{ij}$  称为应力偏张量，它是一个对称张量
- 应力偏张量与材料形状变形有关，与塑性变形有关

# 应力偏张量不变量

- 应力偏张量不变量
- 类似于应力张量，应力偏张量的特征状态方程可以表示为

$$\sigma'^3 - I'_1 \sigma'^2 + I'_2 \sigma' - I'_3 = 0$$

- 应力偏张量不变量分别为

$$I'_1 = \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z$$

$$= (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = 0$$

$$I'_2 = \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x - \tau_{xy}'^2 - \tau_{yz}'^2 - \tau_{zx}'^2$$

$$= \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]$$

# 应力偏张量不变量

$$I'_3 = \sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma'_x \tau_{yz}^2 - \sigma'_y \tau_{zx}^2 - \sigma'_z \tau_{xy}^2$$
$$= \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{vmatrix}$$

➤ 应力偏张量不变量用主应力表示分别为

$$I'_1 = 0$$

$$I'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$I'_3 = \sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m \quad \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m \quad \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m$$

# 应力强度

## ➤ 应力强度（等效应力）

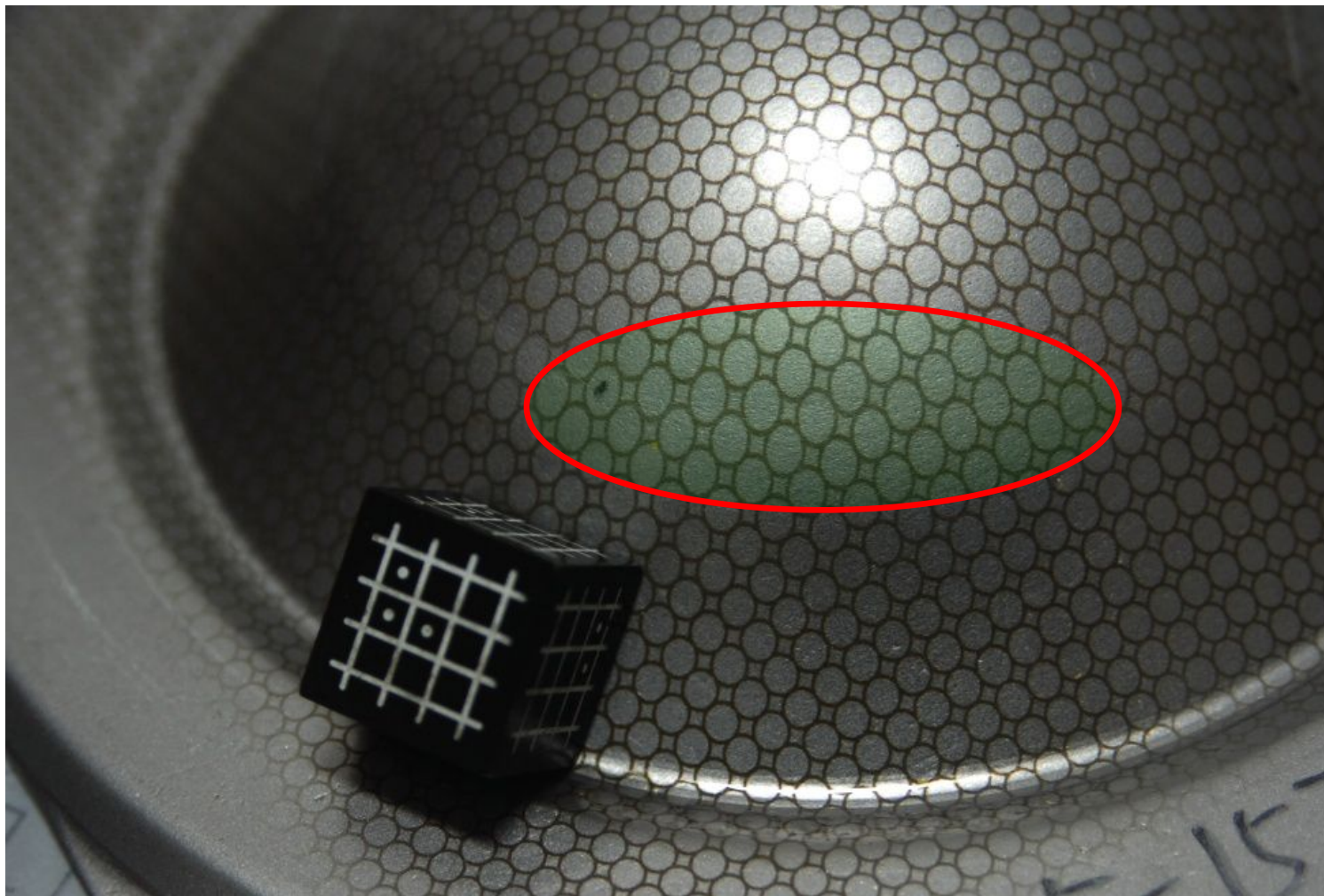
$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

## ➤ 如果采用应力偏量表示应力强度

$$\bar{\sigma} = \sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}$$

# 应变定义





# 应变概念

## ■ 应变

### ➤ 线应变（正应变）

表示线长度的相对伸长或缩短量。伸长为正值，缩短为负值

### ➤ 切应变（剪应变）

表示角度变化的量。角度减小为正值，角度增加为负值

# 应变定义

## ➤ 线应变（正应变）

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{du}{ds}$$

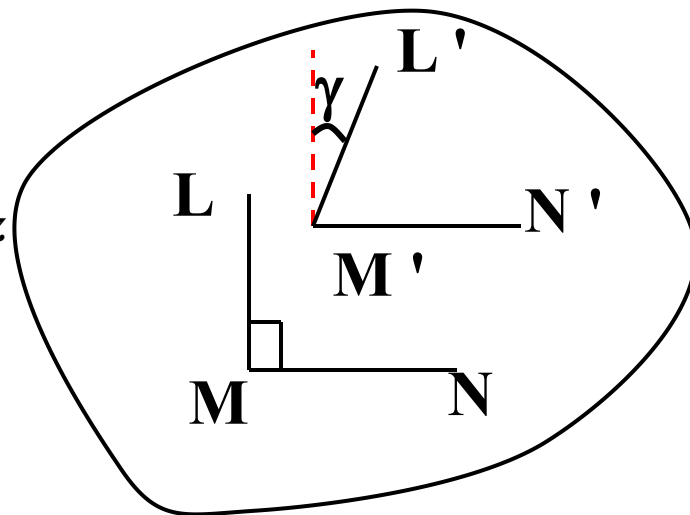
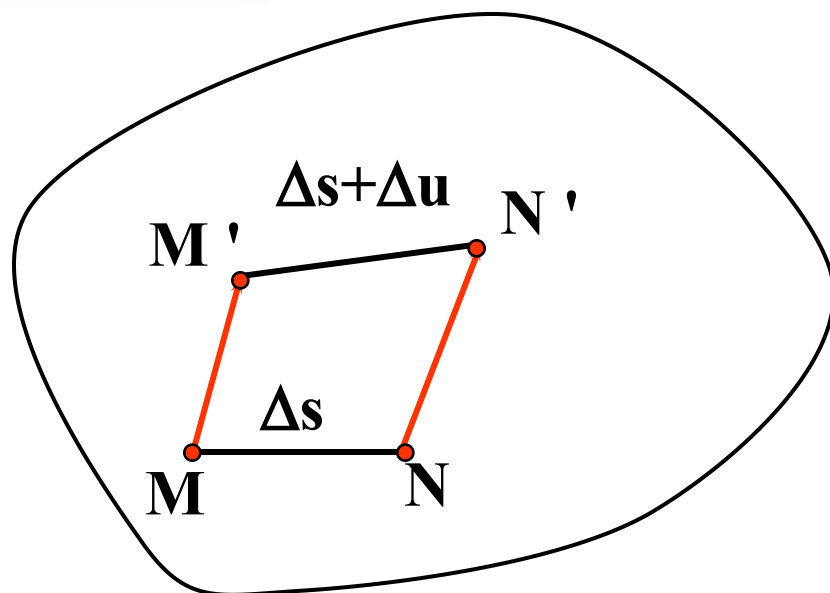
## ➤ 线应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

## ➤ 角应变（剪应变） $\gamma$

## ➤ 角应变分量

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$

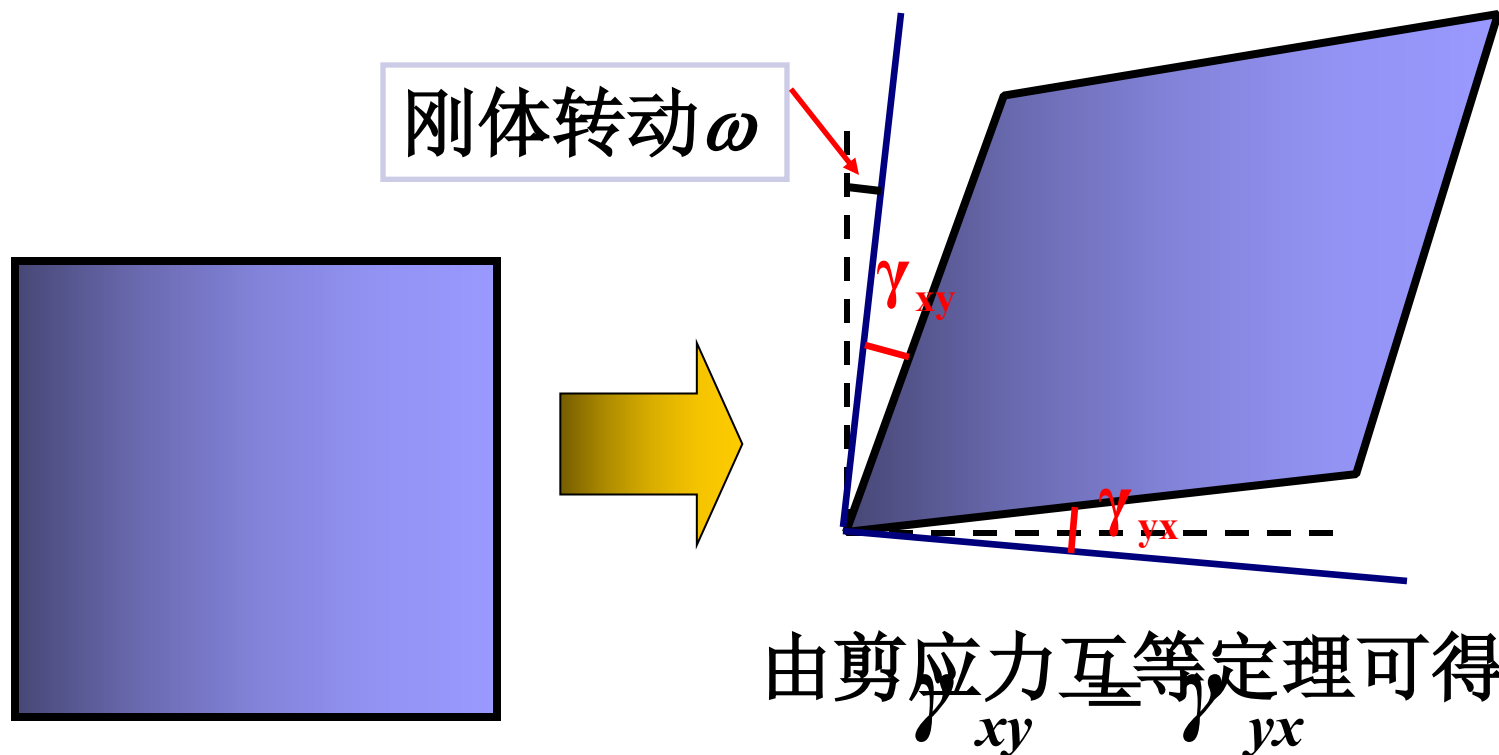
## ➤ 小应变，一般不超过 $10^{-2}$ 数量级



# 角应变互等

## ➤ 角应变分量互等

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$$



# 应变定义

## ■ 工程应变

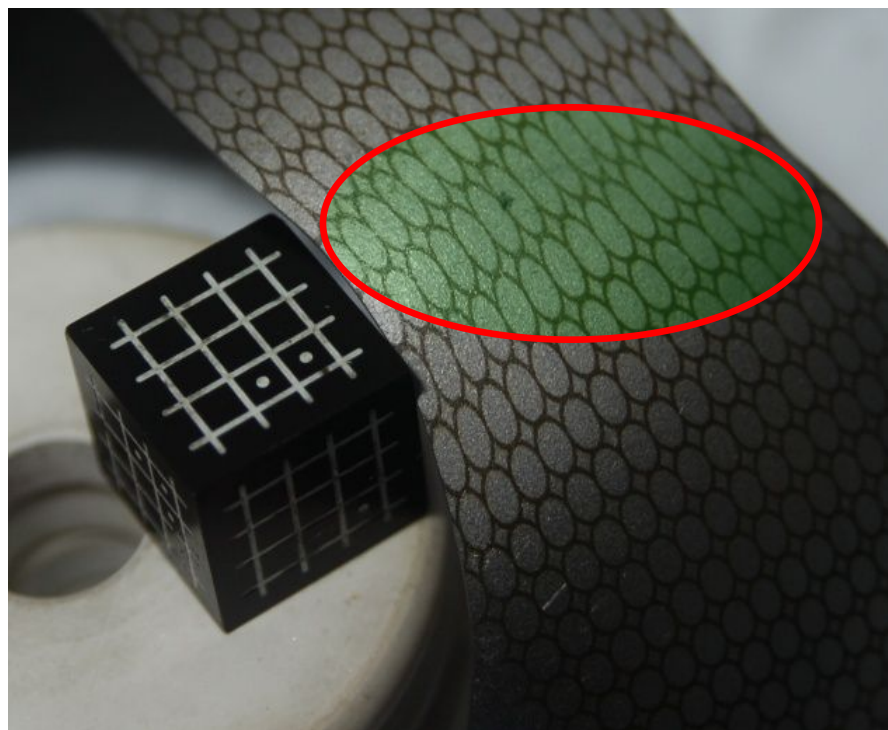
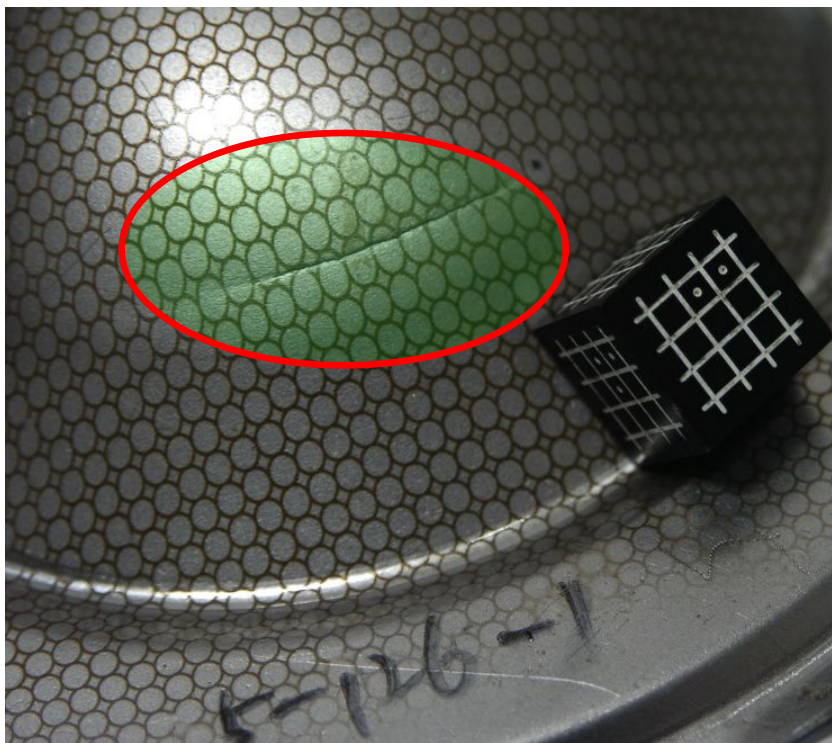
变形前后尺寸变化量与变形前尺寸之比，通常用百分数表示

➤ 假设 $l_0$ 为物体中两质点变形前的尺寸， $l_n$ 为变形后尺寸，则工程应变表示为

$$\varepsilon = \frac{l_n - l_0}{l_0} \times 100\%$$

➤ 工程应变一般适用于变形程度较小的情况，当变形程度较大时，工程应变不足以反映物体的实际变形过程。这时要采用对数应变。

# 应变定义



工程应变

# 应变定义

## ➤ 对数应变

在实际变形过程中，假设物体中两质点的距离由变形前的  $l_0$  经过  $n$  个变形过程后变为  $l_n$ ，则总应变量可近似为  $n$  个无限小的相对应变之和，即

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta l_{i+1}}{l_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{l_{i+1} - l_i}{l_i} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} + \frac{l_2 - l_1}{l_1} + \dots + \frac{l_n - l_{n-1}}{l_{n-1}}$$

➤ 当  $n$  无限增大时，则总的应变量为

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta l_{i+1}}{l_i} = \int_{l_0}^{l_n} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_n}{l_0}$$

$\epsilon$  称为对数应变，它反映了物体变形的实际情况

# 工程应变与对数应变

- 当变形比较大时，工程应变不能反映变形的实际情况；
- 当材料变形程度很小（ $\leq 10\%$ ）时，工程应变近似等于对数应变，当材料变形程度比较大时，变形程度越大，二者相差越大；
- 对数应变具有可加性，而工程应变不具有可加性；

❖ 某物从原长  $l_0 \xrightarrow{\varepsilon_1} l_1 \xrightarrow{\varepsilon_2} l_2 \xrightarrow{\varepsilon_3} l_3$ ，总工程应变为 0.65

$$\varepsilon = \ln \frac{l_3}{l_0} = \ln \frac{1.65}{1.00} = 0.6088 \approx \varepsilon$$

# 工程应变与对数应变

而各阶段的工程应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \quad \varepsilon_2 = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \quad \varepsilon_3 = \frac{l_3 - l_2}{l_2}$$

显然  $\varepsilon \neq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

❖ 各阶段的自然应变为

$$\varepsilon_1 = \ln \frac{l_1}{l_0} \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{l_2}{l_1} \quad \varepsilon_3 = \ln \frac{l_3}{l_2}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \ln \frac{l_1}{l_0} + \ln \frac{l_2}{l_1} + \ln \frac{l_3}{l_2} = \ln \frac{l_1 l_2 l_3}{l_0 l_1 l_2} = \ln \frac{l_3}{l_0} = \varepsilon$$



# 工程应变与对数应变

- 对数应变为可比应变，工程应变为不可比应变

❖ 若某物体由 $l_0$ 拉长一倍后变为 $2l_0$ ，其工程应变为

$$\varepsilon_{\text{拉}} = \frac{2l_0 - l_0}{l_0} = 1 = 100\%$$

若该物体缩短一倍，变为 $0.5l_0$ ，其工程应变为

$$\varepsilon_{\text{压}} = -\frac{0.5l_0}{l_0} = -0.5 = -50\%$$

拉长一倍与缩短一倍，物体的变形程度应该是一样的（体积不变）。然而如用工程应变表示拉压的变形程度，则数值相差悬殊，失去可以比较的性质

# 工程应变与对数应变

❖ 用自然应变表示拉压两种不同性质的变形程度，具有可以比较的性质

拉长一倍  $\epsilon_{\text{拉}} = \ln \frac{2l_0}{l_0} = \ln 2 = 69\%$

缩短一倍  $\epsilon_{\text{压}} = \ln \frac{0.5l_0}{l_0} = \ln \frac{1}{2} = -69\%$

- 工程应变计算简单。对数应变必须查找自然对数，在使用上不方便，除了要求计算精度较高的情况外，通常采用工程应变。

# 几何方程

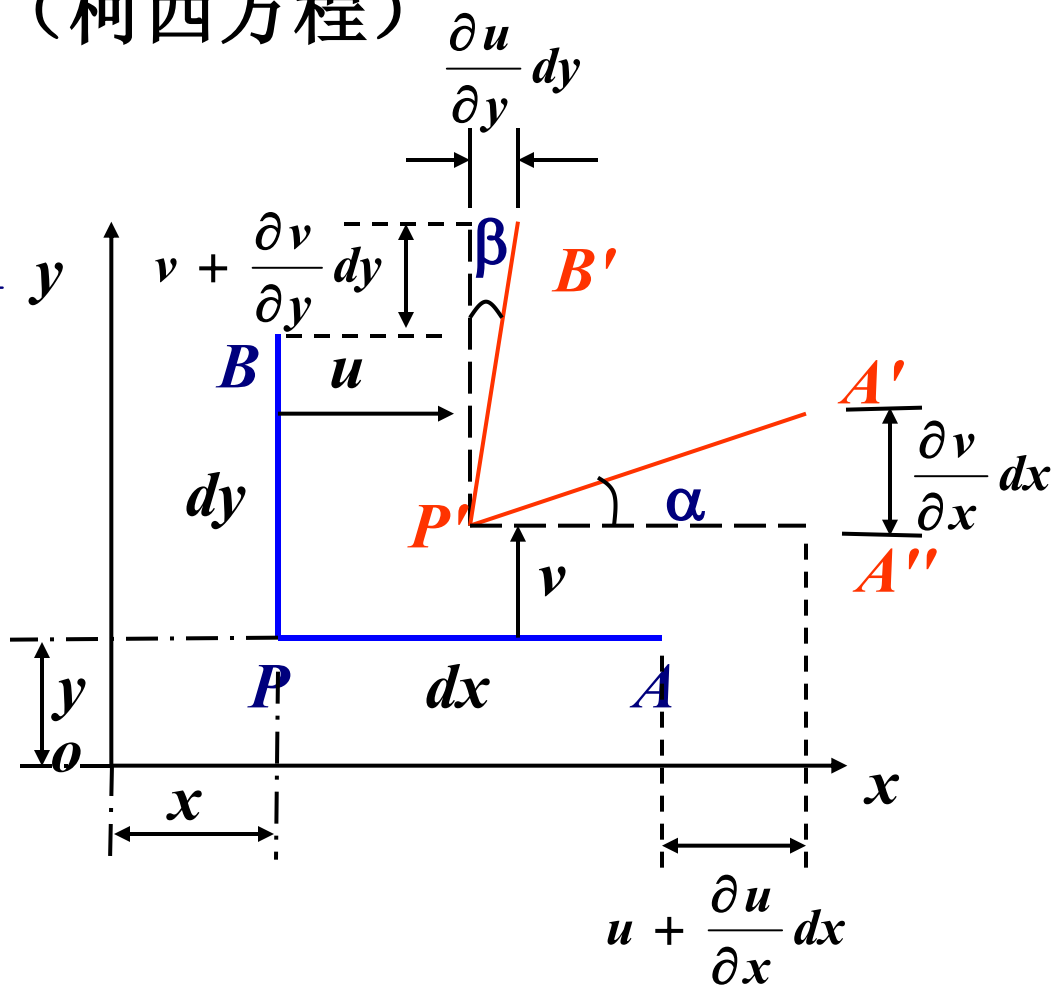
## ■ 小变形几何方程（柯西方程）

$$\varepsilon_x = \frac{\left( u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - u}{dx}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

$$= \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$



# 几何方程

## ■ 三维问题几何方程

柯西方程  
位移与应变关系

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right.$$

# 几何方程

## ■ 平面问题几何方程

二维问题的位  
移与应变关系

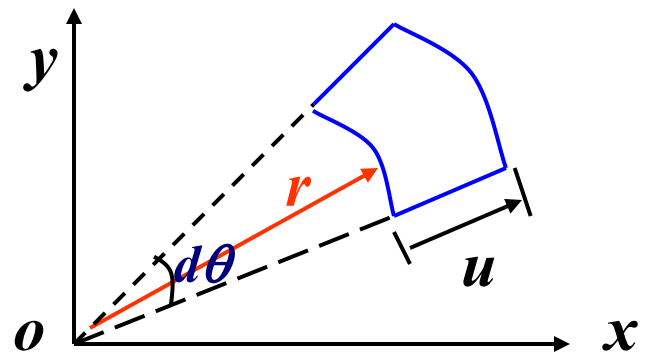
平面应力/应变

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned}$$

# 几何方程

## ■ 轴对称问题几何方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{array} \right.$$



# 塑性变形体积不变条件

- 设单元体的初始边长为 $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , 体积为 $V_0=dx \cdot dy \cdot dz$  ;
- 小变形时, 可以认为只有正应变才引起边长和体积的变化, 而切应变引起的边长和体积变化可以忽略, 变形后单元体的体积为:

$$V_1 = (1 + \varepsilon_x)dx(1 + \varepsilon_y)dy(1 + \varepsilon_z)dz \approx (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dxdydz$$

- 单元体的体积变化率为

$$\Delta V = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

# 塑性变形体积不变条件

## ■ 实验结果

- 金属塑性变形时，体积变化是由弹性变形引起的
- 当外力卸载后，体积恢复，而且弹性变形引起的体积变化相对于塑性变形也是很小的
- 例如，钢球在10000个大气压下，体积缩小仅仅为2.2%，当释放到标准大气压后，钢球的体积又恢复到初始大小。说明钢球体积缩小是由弹性变形引起的。



# 塑性变形体积不变条件

- 弹性变形时，体积变化率需要考虑
- 塑性变形时，虽然体积也有微量变化，但与塑性应变相比是很小的，可以忽略不计。因此，一般认为塑性变形时体积不变

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

- 常作为对塑性成形过程进行力学分析的一种前提条件，是金属塑性成形原理的基本假设之一
- 可用于工艺设计中计算原毛坯的体积

# 应变张量

## ■ 应变张量

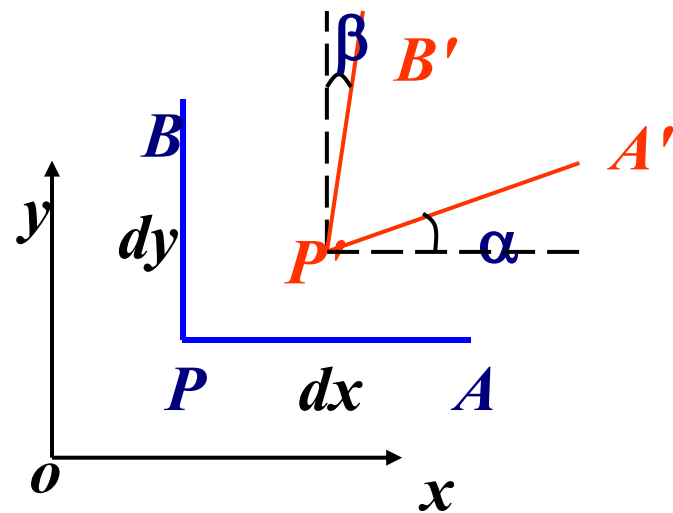
➤ 定义剪应变分量  $\varepsilon_{xy}$ 、 $\varepsilon_{yz}$ 、 $\varepsilon_{zx}$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$$



$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

# 应变张量

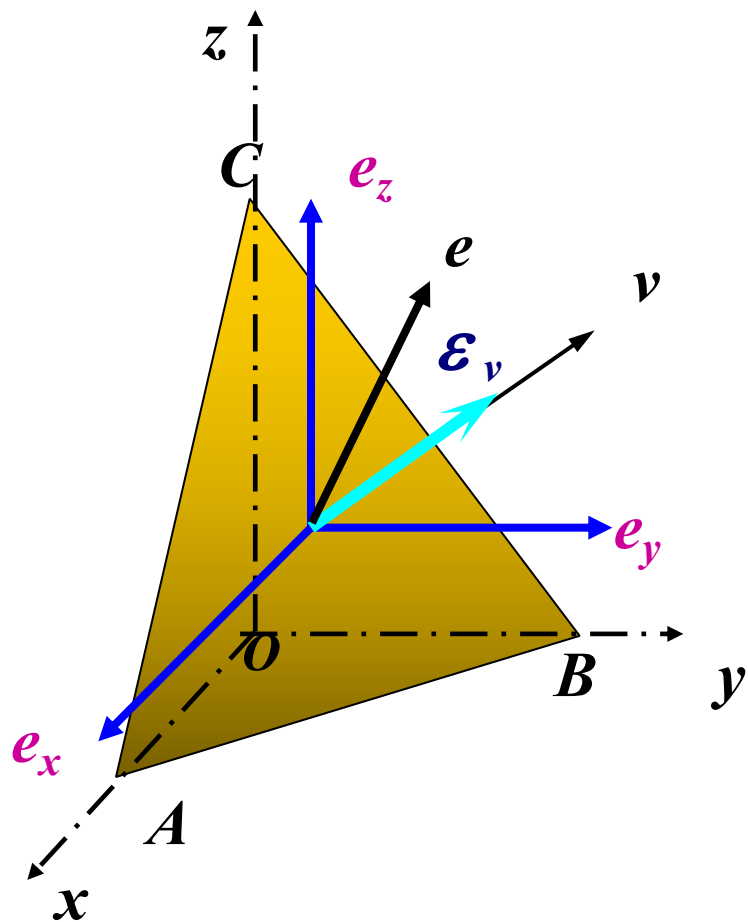
## ■ 应变张量

- 应变分量  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\varepsilon_z$ 、 $\varepsilon_{xy}$ 、 $\varepsilon_{yz}$ 、 $\varepsilon_{zx}$  满足张量的性质，构成应变张量

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$$

# 主应变



## ■ 应变主平面

当 向量 $v$  位于某方向时，应变总矢量垂直于 $ABC$ 曲面，且在该面上的剪应变为零， $ABC$ 曲面称为应变主平面。向量 $v$  称为主轴

## ➤ 主应变

作用在主平面上 $ABC$ 的法向应变  $\epsilon_v$

# 主应变

## ■ 主应变

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

➤ 应变张量 $\varepsilon_{ij}$ 的三个主应变 (假设)

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

# 主应变

## ■ 主应变

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

➤ 应变状态特征方程  $I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$

$$\varepsilon^3 - I'_1 \varepsilon^2 + I'_2 \varepsilon - I'_3 = 0$$

主应变：状态特征方程的三个实根  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

➤ 应变张量不变量  $I'_1, I'_2, I'_3$

$$I'_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$I'_2 = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2$$

$$I'_3 = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2$$

# 主应变

- 应变张量不变量可用主应变表示

$$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I'_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I'_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

- 塑性变形时，如果体积保持不变（材料不可压缩），则  $I'_1=0$
- 一般三个主应变，  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$

# 应变张量分解

➤ 应变张量可以分解为

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

➤ 应变球张量（平均应变  $\varepsilon_m$ ）

$$\varepsilon_m = \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

体积不可压缩时，平均应变  $\varepsilon_m = 0$



# 应变张量分解

## ➤ 应变偏张量

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{bmatrix}$$

- 应变偏张量描述单元体形状变化
- 当体积不可压缩时平均应变  $\varepsilon_m = 0$ ，则

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij}$$

# 应变强度

## ➤ 等效应变（应变强度）

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}\end{aligned}$$

## ➤ 等效应变是一个不变量；

## ➤ 等效应变在数值上等于单向均匀拉伸（或压缩）时的拉伸（或压缩）方向上的正应变

# 应变率

- 全量应变的大小与变形路径有关，只有确定的应变路径，才能确定全量应变的大小；
- 塑性变形是不可恢复的，单元体每经过一次加载产生的塑性变形在卸载之后仍然保留下来；
- 当温度较高或成形速度较快的条件下，应变变化率对金属成形有较大的影响；
- 金属塑性加工属于塑性大应变问题，只研究全量应变不能准确反映成形过程的物理量变化；
- 因此有必要研究应变随时间变化规律，即应变率

# 应变率

## ■ 应变率

单位时间内应变值的变化量

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

## ■ 几何关系

$$\because \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \therefore \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

# 应变率

## ■ 应变率分量与速度的几何关系

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

$$\dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y}$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z}$$

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x}$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}$$

# 应变增量

## ■ 应变增量

➤ 在变形过程中，物体各点都处于运动状态，假设某一时刻  $t$ ，速度分量

$$v_x, v_y, v_z \quad \text{or} \quad \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$$

➤ 速度分量是  $x, y, z, t$  的函数，在无限小时段  $dt$  内产生的位移增量为

$$du = \dot{u} dt, \quad dv = \dot{v} dt, \quad dw = \dot{w} dt$$

➤ 由  $du$ 、 $dv$ 、 $dw$  位移增量引起的应变称为应变增量

# 应变增量

## ■ 应变增量

### ➤ 应变增量的具体表达形式

$$d\varepsilon_x = \frac{\partial du}{\partial x} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} dt$$

$$d\gamma_{xy} = \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} dt + \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} dt$$

$$d\varepsilon_y = \frac{\partial dv}{\partial y} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} dt$$

$$d\gamma_{yz} = \frac{\partial \dot{v}}{\partial z} dt + \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} dt$$

$$d\varepsilon_z = \frac{\partial dw}{\partial z} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} dt$$

$$d\gamma_{zx} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} dt + \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} dt$$

# 应变增量张量

## ■ 应变增量张量

$$d\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} d\varepsilon_x & d\varepsilon_{xy} & d\varepsilon_{xz} \\ d\varepsilon_{yx} & d\varepsilon_y & d\varepsilon_{yz} \\ d\varepsilon_{zx} & d\varepsilon_{zy} & d\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

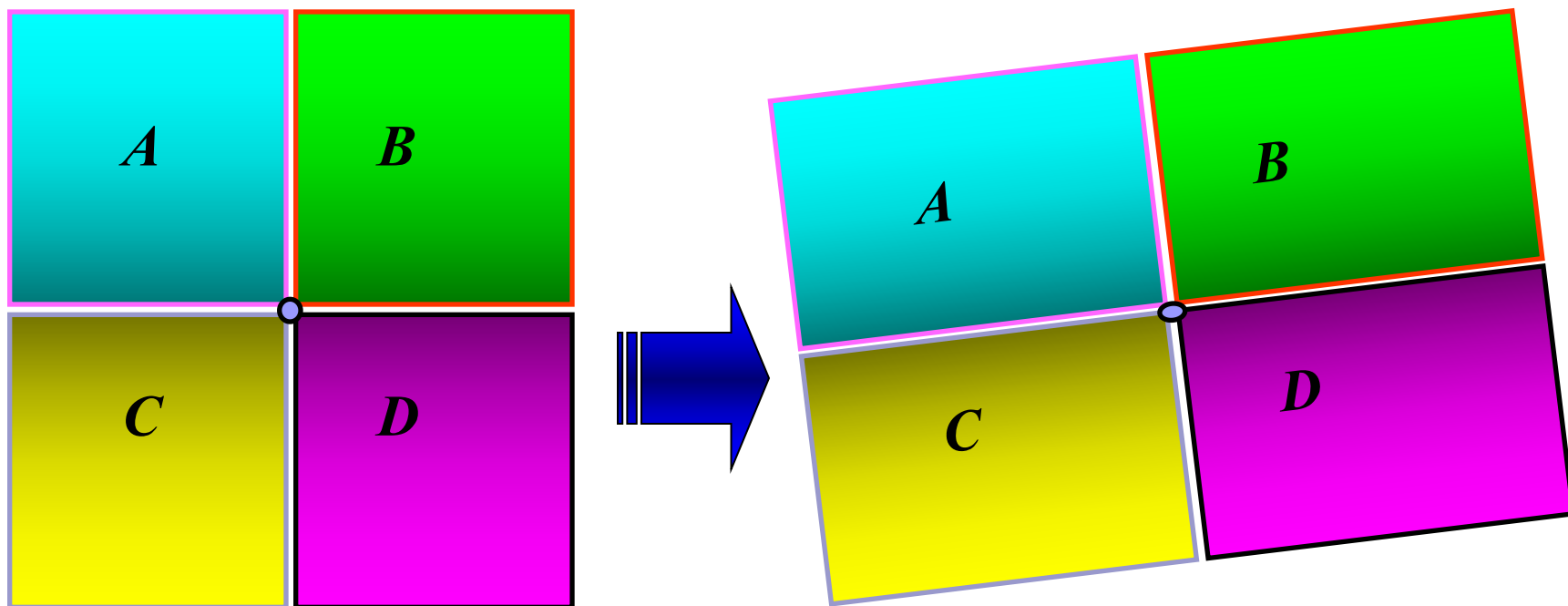
## ► 应变增量强度（等效应变增量）

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)} \end{aligned}$$



# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）



# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

- 变形前是连续的，变形后仍然是连续的。不允许出现裂纹或发生重叠现象；
- 为保证变形前后物体的连续性，应变之间必然存在某种关系，描述这种关系的数学表达式就是应变协调方程；

# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

### ➤ 几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

➤  $\varepsilon_x$  对  $y$  求两次偏导数，可得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

➤  $\varepsilon_y$  对  $x$  求两次偏导数，可得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

➤ 上面两项相加可得

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{array} \right.$$

# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

➤ 剪应变  $\gamma_{xy}$ 、 $\gamma_{yz}$ 、 $\gamma_{zx}$  分别对  $z$ 、 $x$ 、 $y$  求偏导数

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$$

$$+ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial x^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}$$

# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

➤ 应变协调方程一共6个方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$



# 应变协调方程

## ■ 应变协调方程（相容方程）

- 应变协调方程的物理意义
- ❖ 如将变形体分解为许多单元体，每个单元体的变形可用六个应变分量表示，若应变分量不满足应变协调方程，则单元体不能组成一连续体。若满足，则可保证变形前后物体是连续的；
- ❖ 利用应变协调方程可检验给定的应变状态是否为可能存在的？也可确定应变分量中的待定系数；

# 应变协调方程

## ■ 平面问题应变协调方程（相容方程）

- 平面问题应变协调方程可以由三维情况退化，由于平面问题只有  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\gamma_{xy}$  三个应变分量

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- 轴对称问题应变协调方程可以由三维情况退化

$$r \frac{d^2 \varepsilon_\theta}{dr^2} + 2 \frac{d \varepsilon_\theta}{dr} = \frac{d \varepsilon_r}{dr} \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

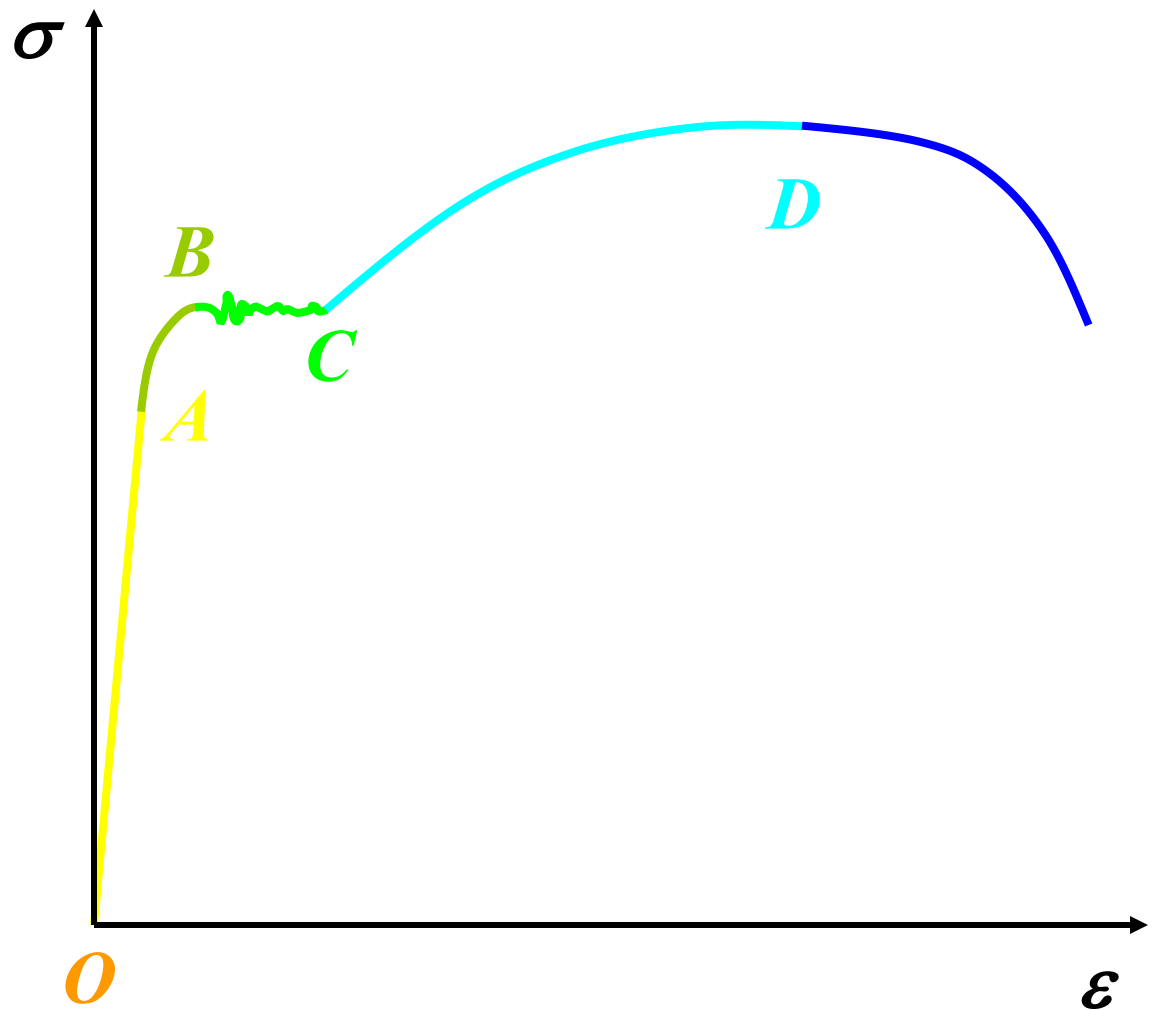
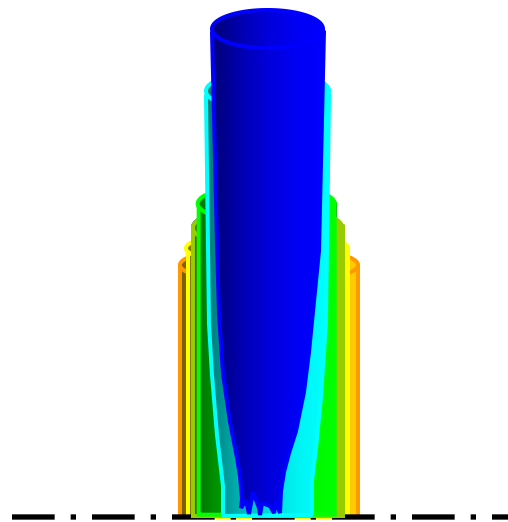
$$\frac{d \varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0$$

# 屈服准则

- 屈服准则
- 描述不同应力状态下变形体内某点由弹性状态进入塑性状态，并使塑性变形状态持续进行所必须遵守的条件
- 屈服准则也称为塑性条件或屈服条件
- 对于单向拉伸问题，变形体由弹性变形状态进入塑性变形状态，此时屈服准则为  $\sigma = \sigma_s$
- 对于任意应力状态，描述变形体应力状态需要6个应力分量（或3个主应力分量），应力状态非常复杂，因此描述材料由弹性变形状态进入塑性变形状态的判据只是一种假设

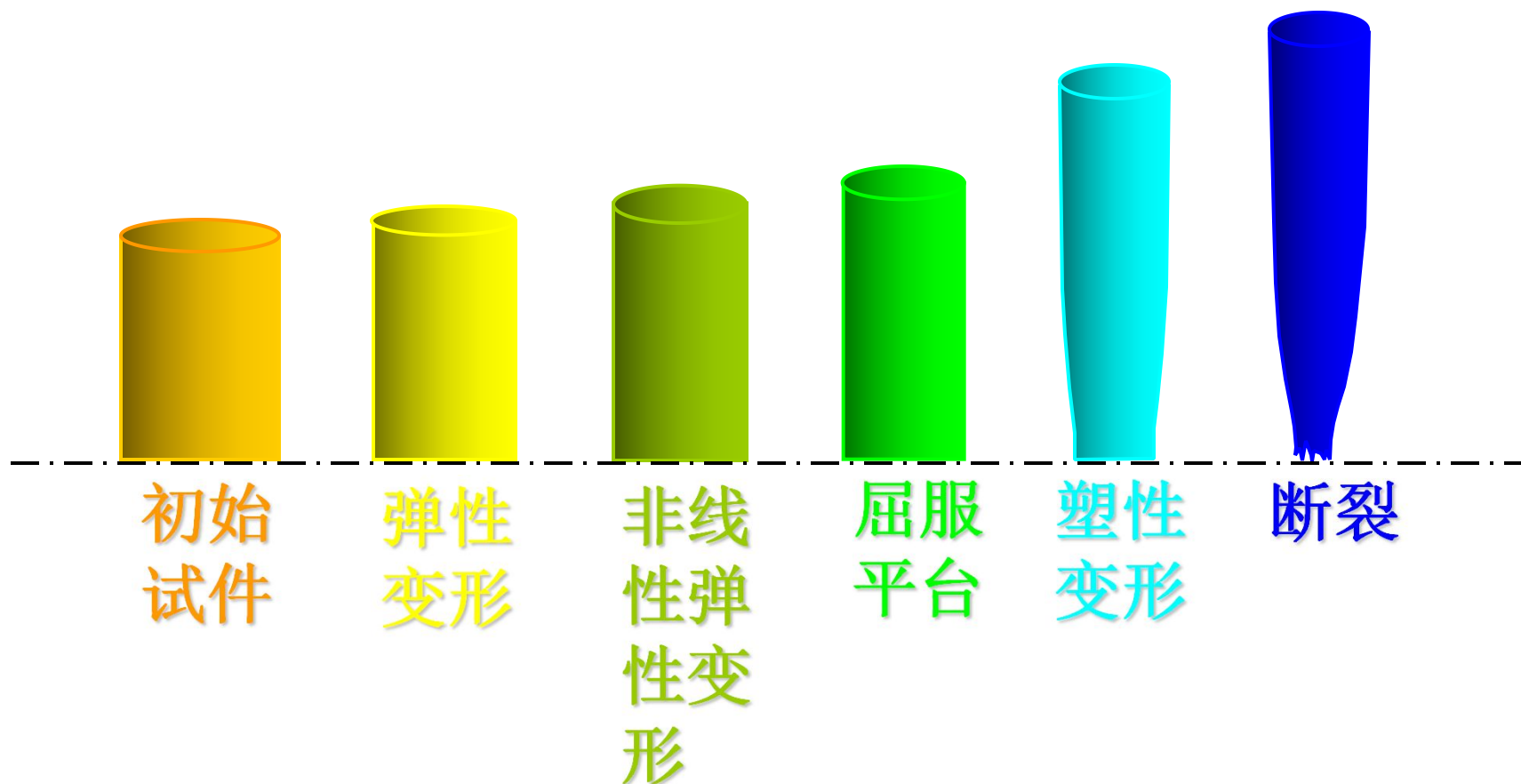
# 简单拉伸实验

- 简单拉伸  
名义应力  
名义应变  
曲线



# 简单拉伸实验

## ■ 简单拉伸实验



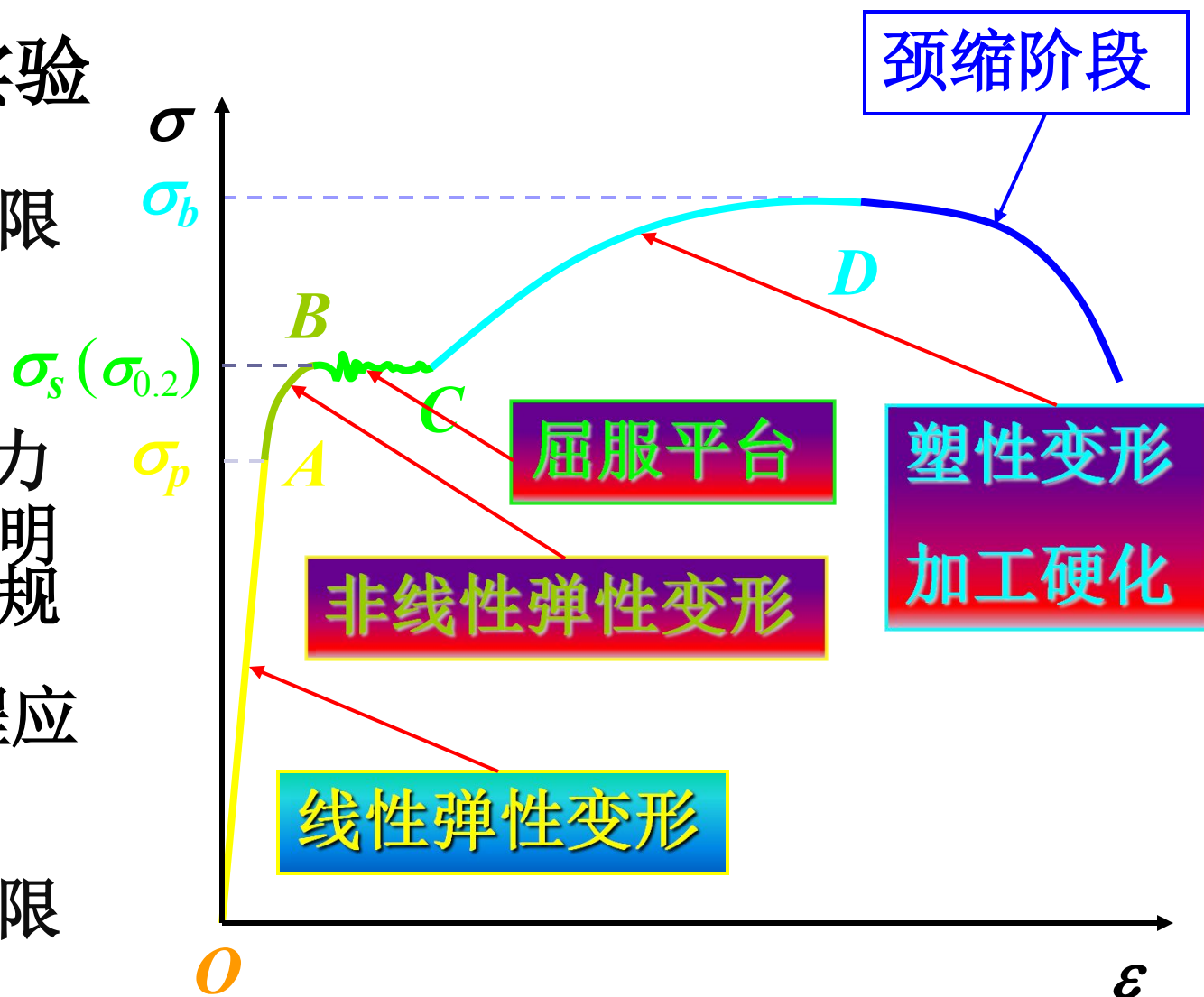
# 简单拉伸实验

## ■ 简单拉伸实验

$\sigma_p$  称为比例极限

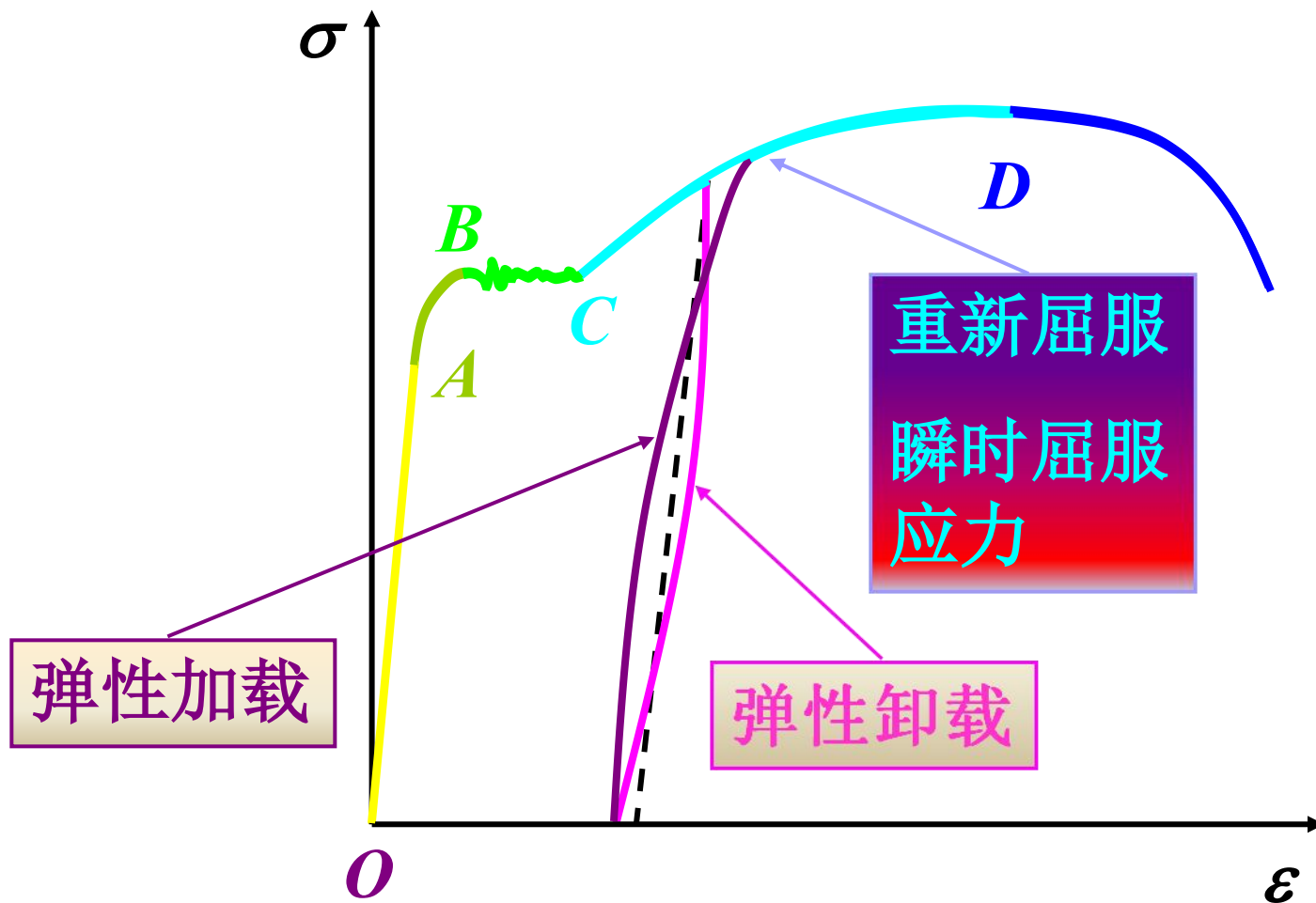
$\sigma_s$  称为屈服应力  
如果材料没有明显的屈服点，规定残余应变的0.2%时的工程应力为屈服应力

$\sigma_b$  称为强度极限



# 加载与卸载

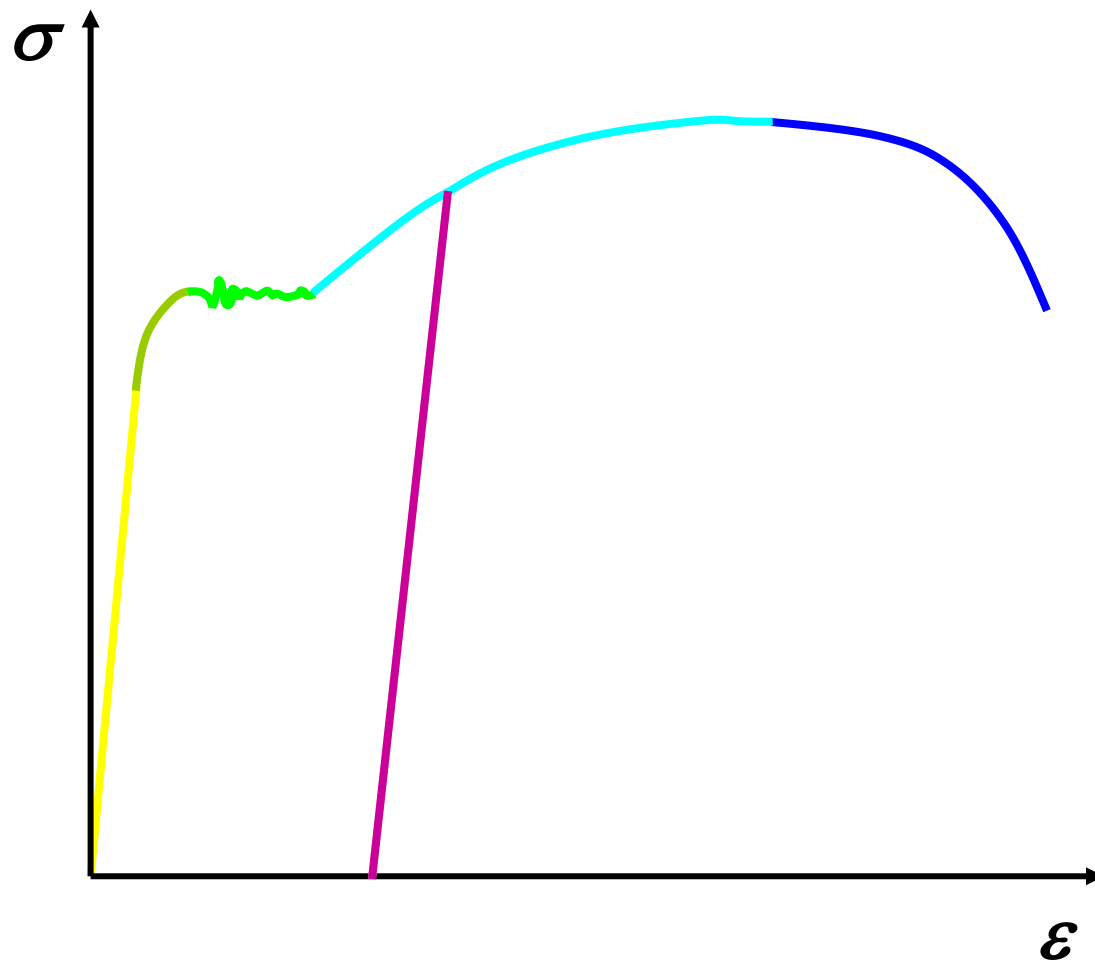
## ■ 塑性变形的加载与卸载



# 加载与卸载

## ■ 塑性变形的加载与卸载路径简化

由于卸载和再加载路径非常相近，而且都属于弹性变形，为了求解塑性成形问题方便，假设卸载和再加载路径完全重合，且为线性弹性变形





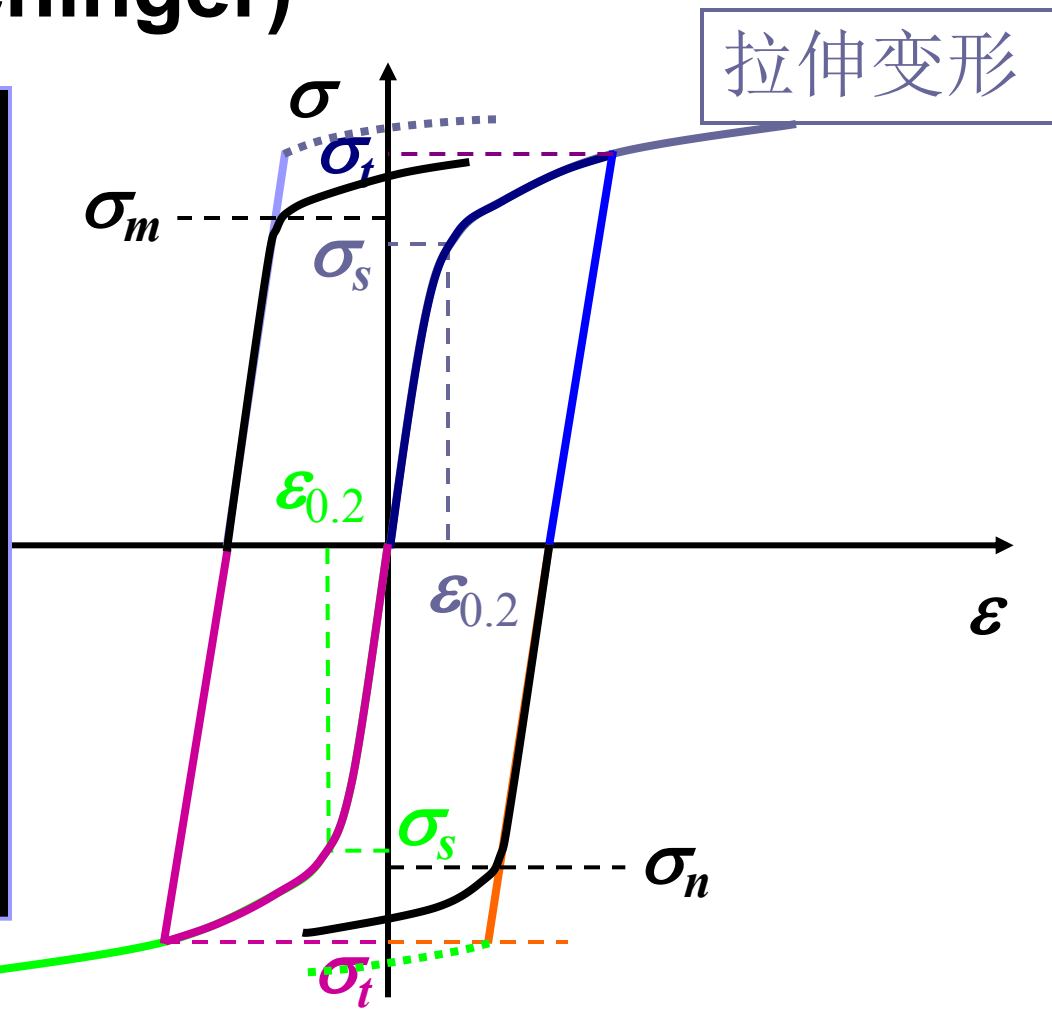
# 包辛格效应

## ■ 包辛格效应(Bauschinger)

在反向加载后使屈服应力降低的现象称为包辛格效应

一般材料的包辛格效应不明显，考虑它会使塑性问题求解更加复杂

对于反复加卸载问题，一般应该考虑包辛格效应



# 简单拉伸实验

- 简单拉伸实验结果分析结论：
- 在单向应力状态下，材料由弹性状态初次进入塑性状态的条件是：

当作用在变形体上应力等于材料的初始屈服应力

- 当应力小于材料的初始屈服应力时，材料处于弹状态
- 当应力大于等于材料的初始屈服应力时，材料开始进入塑性状态

# 简单拉伸实验

- 简单拉伸实验结果分析结论：
- 塑性变形是不可逆的
- 材料进入塑性状态后，应力与应变之间的关系是非线性的，不再保持弹性阶段的单值对应关系，而与加载历史有关
- 对于同一个应力数值，可以有很多不同的应变数值与之对应，同样，对于同一个应变数值，也可以有许多不同的应力数值与之对应

# 简单拉伸实验

- 对于具有应变硬化的材料，进入塑性状态后卸载并重新加载时，材料由弹性状态进入塑性状态的条件是作用在变形体上的应力等于瞬时屈服应力
- 当重新加载时的应力小于材料的瞬时屈服应力时，材料处于弹性状态；当应力大于材料的瞬时屈服应力时，材料会重新屈服进入塑性状态
- 简单拉伸实验结果与材料的组织状态、变形温度、应变速率等因素有关，这些因素在特定的条件下可以忽略

# 屈服准则

- 材料处于单向应力状态时，只要单向应力达到某一数值（屈服应力），材料即行屈服，进入塑性状态
- 简单拉伸实验的结果可以推广到复杂应力状态
- 对于任意应力状态下的屈服准则，不可能用一般的实验方法来确定材料是否进入塑性状态。因此，对于任意的应力状态，描述物体由弹性变形状态进入塑性变形状态的判据是一种假设

# 屈服准则

- 在复杂应力状态下，显然不能仅用其中某一、二个应力分量的数值来判断材料是否进入塑性状态，而必须同时考虑所有的应力分量
- 研究表明，只有当各应力分量满足一定的关系时，材料才能进入塑性状态，这种关系称为屈服准则

# 屈服准则形式

## ■ 屈服准则的一般形式

➤ 在任意应力状态下，不同应力分量之间的组合对材料屈服的影响，可以用统一的数学表达式描述

$$f(\sigma_{ij}) = C$$

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = C$$

$C$ 是与材料的力学性能参数有关常数

$\sigma_{ij}$ 是应力张量

# 屈服准则形式

- 假设材料初始是各向同性的，屈服准则与坐标轴选取无关。在应力状态中，与坐标轴选取无关的是主应力和应力张量的三个不变量，因此屈服准则也可表示为

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C$$

$$f(I_1, I_2, I_3) = C$$

- 静水压力实验表明，材料在很高的静水压力作用下的体积变化很小，而且体积的变化是弹性的。因此可以认为静水压力对材料的屈服没有影响，也就是应力球张量与材料的屈服无关，即与应力张量第一主变量 $I_1$ 无关

$$f(I_2, I_3) = C$$



# 屈服准则形式

- 屈服准则的一般形式为

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = C \quad f(I_2, I_3) = C$$

- 屈服准则在应力空间可以表示为一个曲面，这个曲面称为屈服表面
- 应力空间可以用应力分量 $\sigma_{ij}$ 表示，可以用主应力 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 表示，也可以用应力不变量 $I_2$ 、 $I_3$ 表示

# 屈服表面

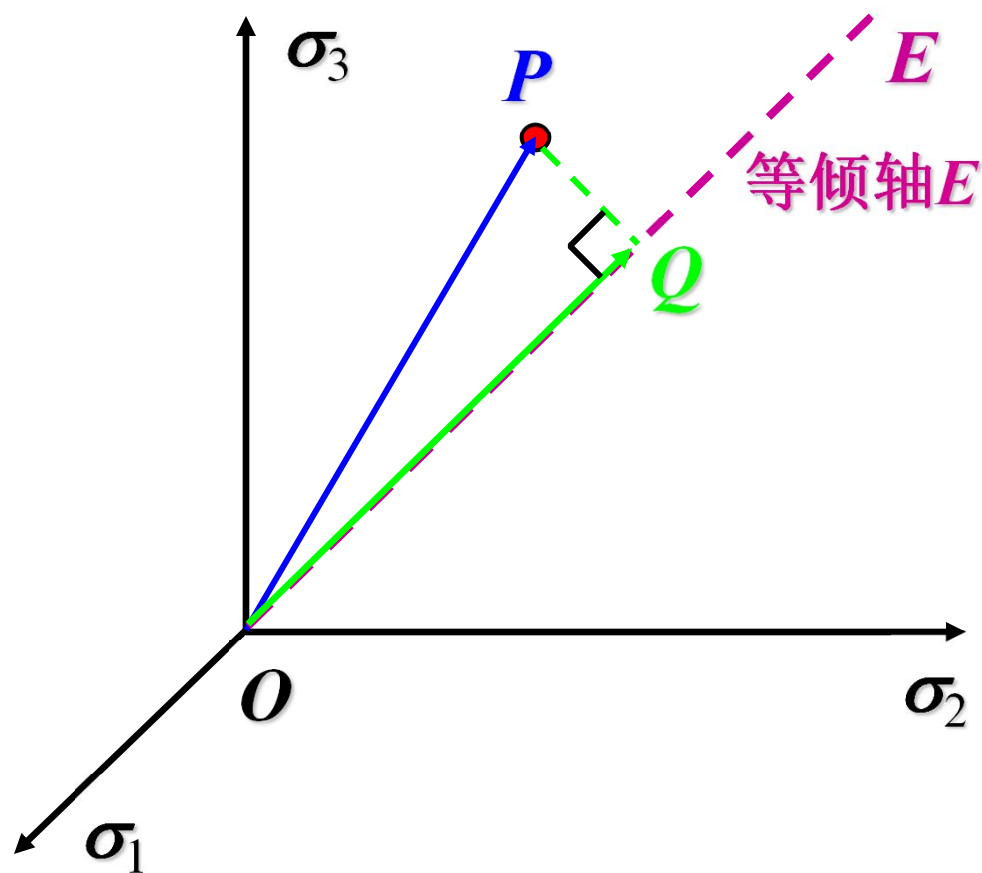
- 以主应力 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$ 作为坐标轴构成主应力空间。屈服函数在主应力空间所构成的几何曲面称为屈服表面

$$\vec{P}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

$OE$ 的方向余弦

$$l = m = n = 1/\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \sigma_1 l + \sigma_2 m + \sigma_3 n \\ &= 1/\sqrt{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \sqrt{3}\sigma_m \quad \text{平均应力}\end{aligned}$$

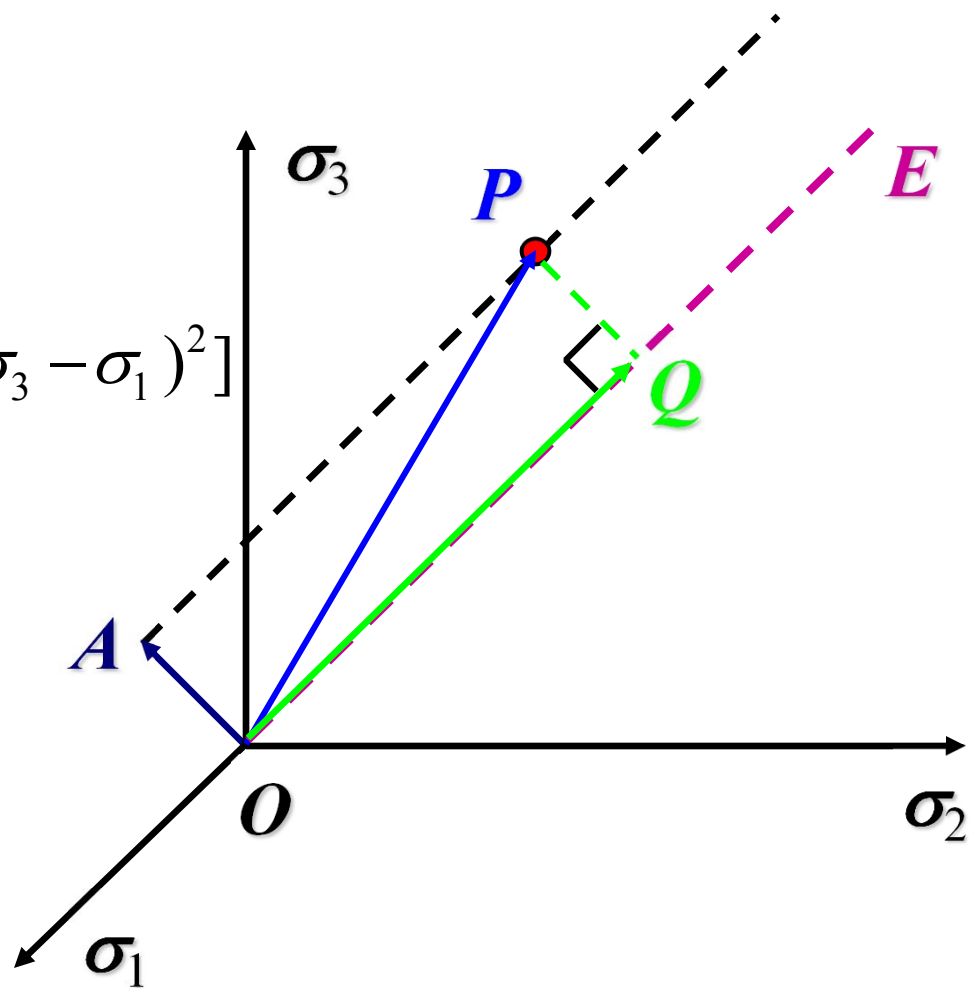


# 屈服表面

应力 $P$ 在垂直于等倾斜轴  
 $OE$ 平面上的投影为 $A$

$$\begin{aligned}\vec{A}^2 &= \vec{P}^2 - \vec{Q}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3\sigma_m^2 \\ &= \frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2\end{aligned}$$

结论：应力 $P$ 可以分解为  
球应力 $Q$ 和偏应力 $A$

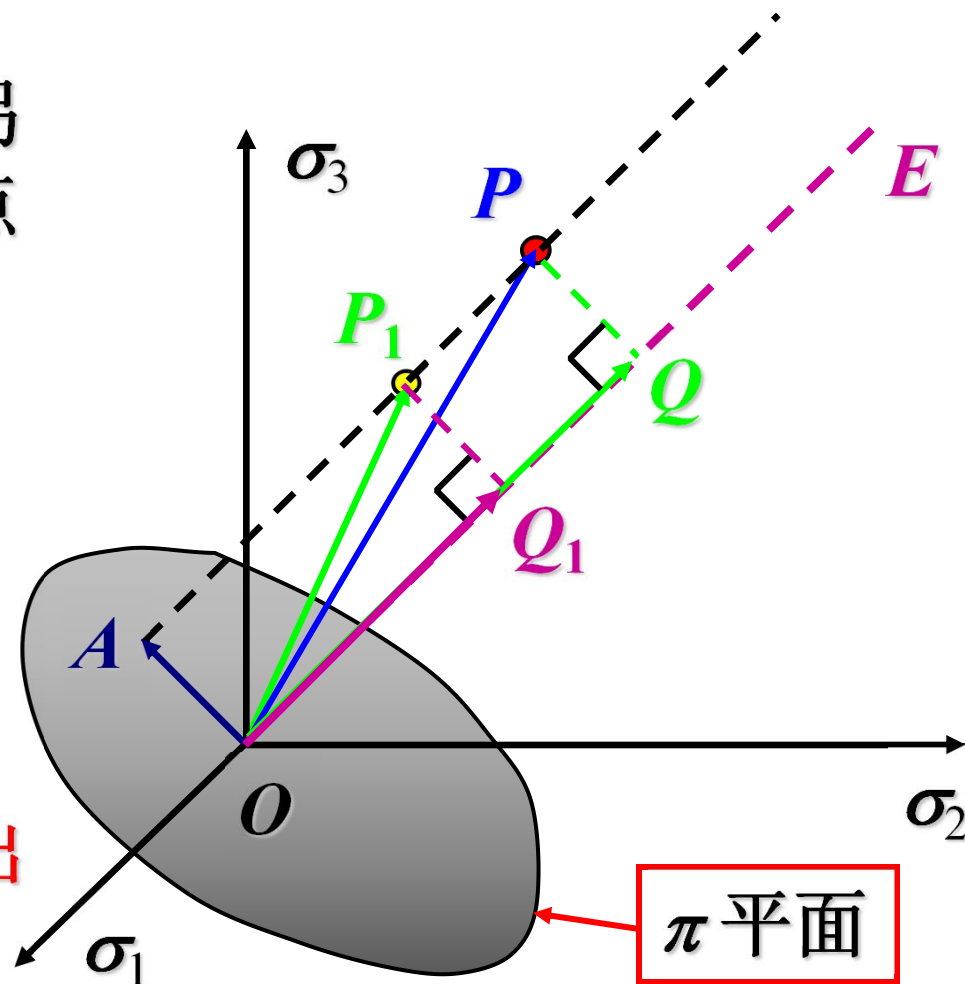


# 屈服表面

再考察主应力空间的另一点 $P_1$ 的应力状态，点 $P_1$ 位于 $AP$ 线上

应力 $P_1$ 也可以分解为：  
球应力 $Q_1$ 和偏应力 $A$

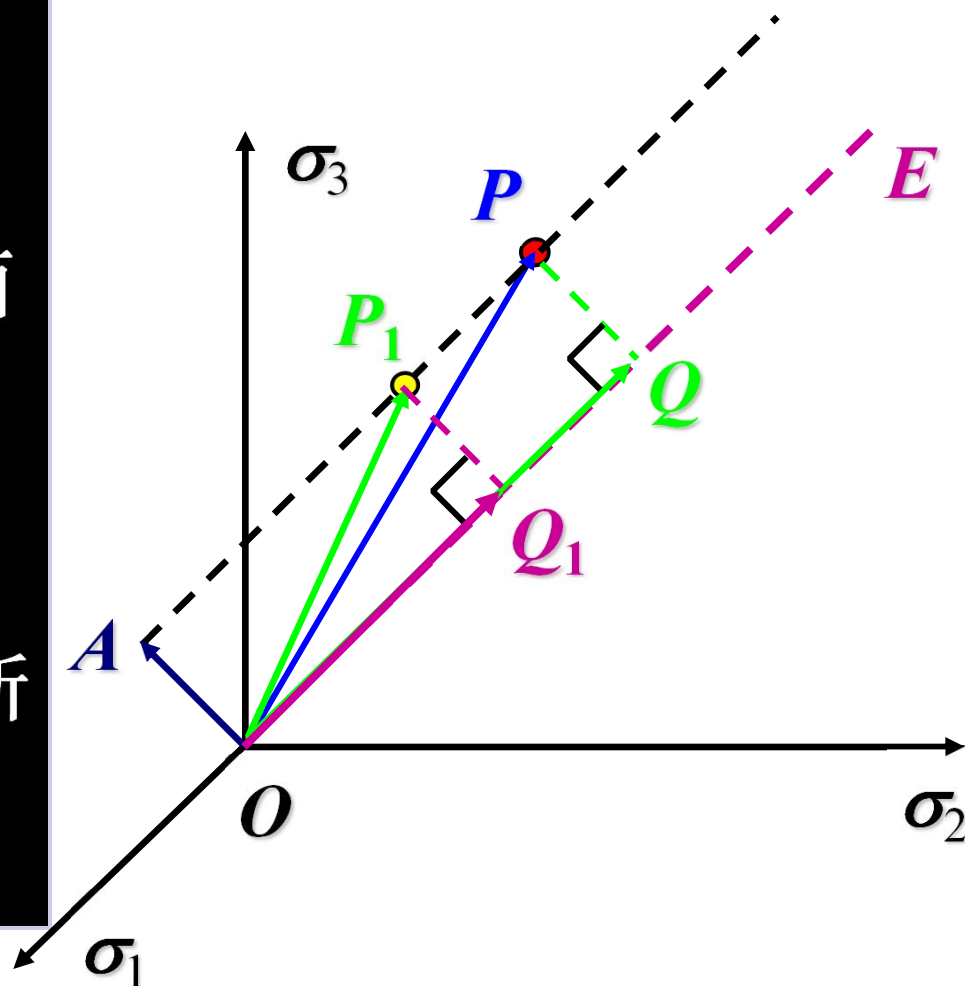
两个应力空间点分解出  
相同的偏应力 $A$



# 屈服表面

由于材料的屈服取决于偏应力的大小，与球应力无关，因此如果 $P$ 在屈服面上， $P_1$ 也一定位于屈服面上， $AP$ 线上的所有应力点都位于屈服面上

因此，屈服表面必然是由平行于等倾轴 $OE$ 的母线所构成的与三个应力轴等倾的柱面

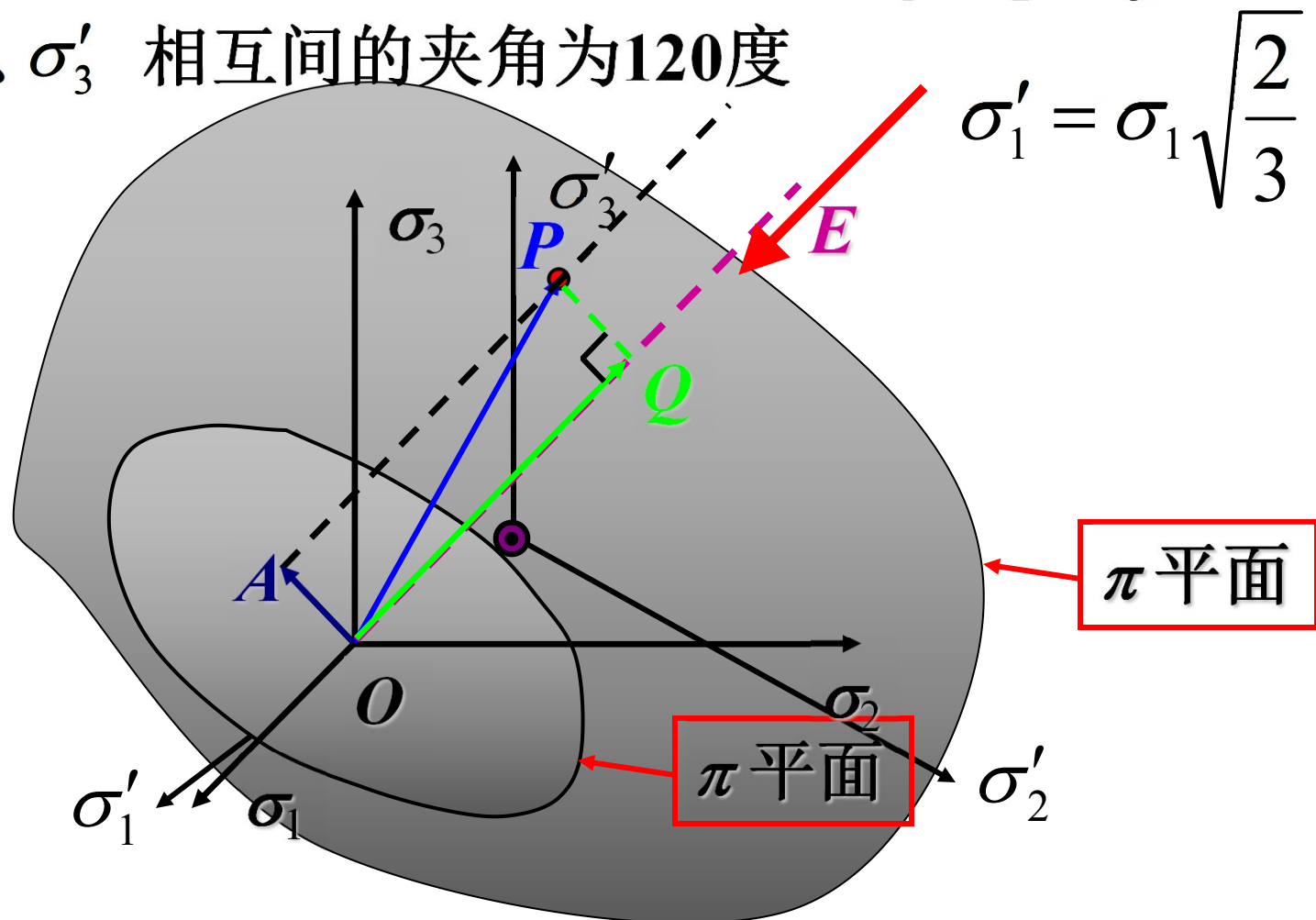


# 屈服表面

- 当主应力空间内任意一点的应力位于圆柱面以内时，该点处于弹性状态，当该点位于圆柱面上时，则该点处于塑性状态；
- 对于理想塑性材料来说， $P$ 点不可能位于圆柱面之外；
- 屈服表面与垂直于等倾轴 $OE$ 的任意平面的交线都是相同的，这些交线称为屈服轨迹；
- 过原点 $O$ 且与等倾轴 $OE$ 垂直的平面，称为 $\pi$ 平面；
- $\pi$ 平面上的平均应力为零；

# 屈服表面

➤ 主应力空间  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  的三个相互垂直的坐标轴在  $\pi$  平面上的投影 可分别用偏应力  $\sigma'_1$ 、 $\sigma'_2$ 、 $\sigma'_3$  表示， $\sigma'_1$ 、 $\sigma'_2$ 、 $\sigma'_3$  相互间的夹角为120度

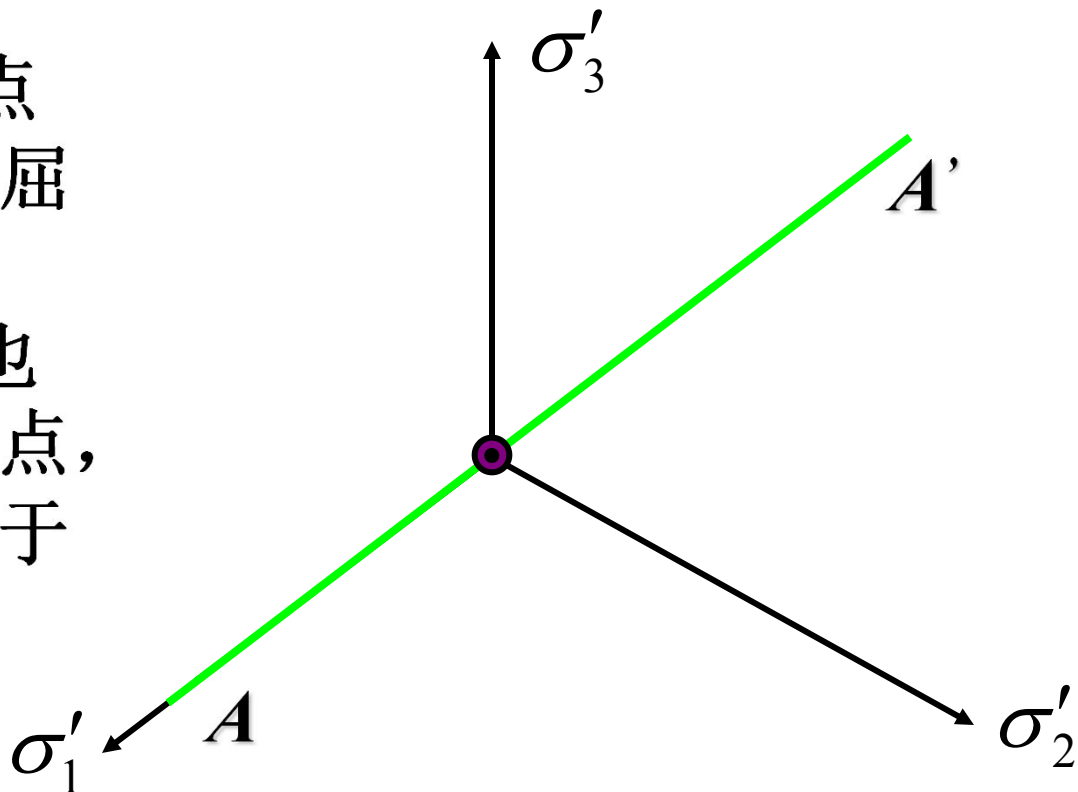




# 屈服表面特性

➤ 由于各向同性材料的屈服与坐标的选择无关，因此如果主应力空间中的点  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  位于屈服面，则点  $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)$  也必是屈服面上的点

➤ 在  $\pi$  平面上，如果点  $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$  是屈服轨迹上的点，则点  $(\sigma_1', \sigma_3', \sigma_2')$  也必是屈服轨迹上的一点，因此屈服轨迹必对称于在平面的投影线  $AA'$

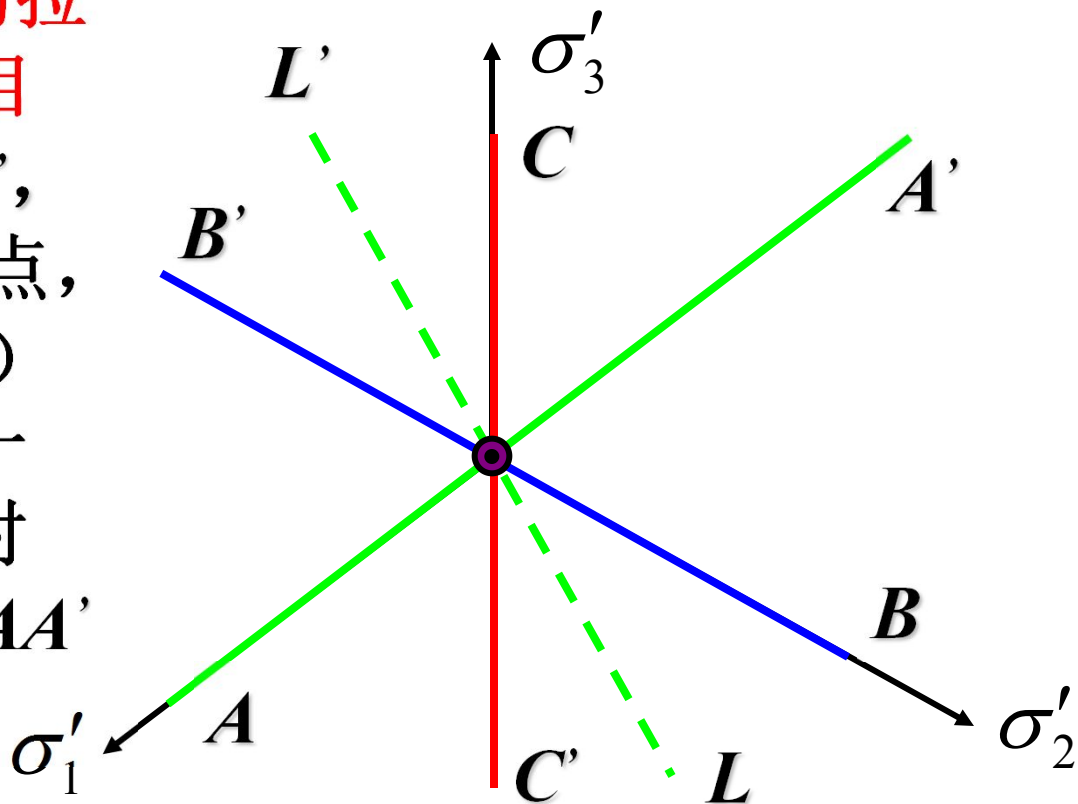




# 屈服表面特性

➤ 同理，屈服轨迹也必然对称于 $\sigma_2$ 和 $\sigma_3$ 在 $\pi$ 平面上的投影线 $BB'$ 和 $CC'$

➤ 假设各向同性材料的拉伸与压缩的屈服应力相同，如果点 $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ 是屈服轨迹上的点，则点 $(-\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ 也必是屈服轨迹上的一点，因此屈服轨迹必对称于在平面的投影线 $AA'$ 的垂线 $LL'$



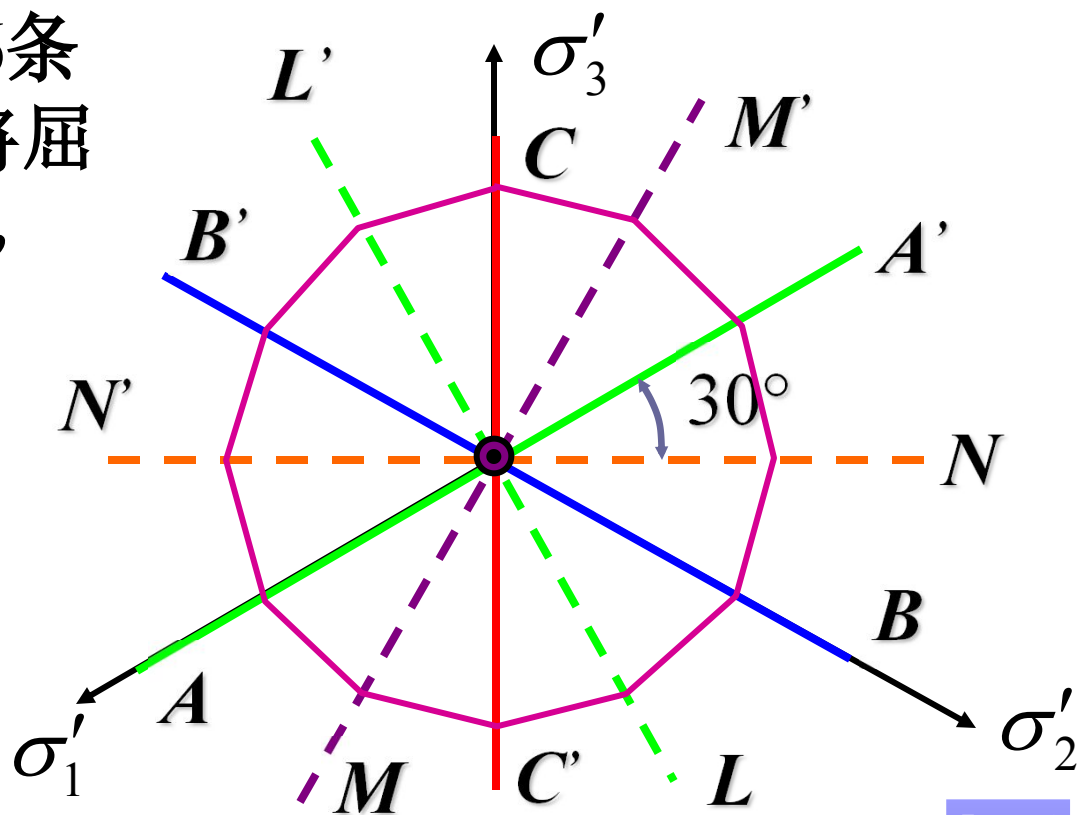
# 屈服表面特性

➤ 同理，屈服轨迹也对称于 $BB'$

和 $CC'$ 的垂线 $MM'$ 和 $NN'$

➤ 屈服轨迹至少存在6条对称轴，6条对称轴将屈服轨迹平分为12等份，每一等份为30度

➤ 只要确定了30度范围内的屈服轨迹，就可以根据对称关系确定整个屈服轨迹



# Tresca屈服准则

- 对于各向同性的材料，经实践检验并被普遍接受的屈服准则有两个：**Tresca**屈服准则和**Mises**屈服准则

➤ **Tresca**屈服准则（1864年法国H.Tresca）

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = C$$

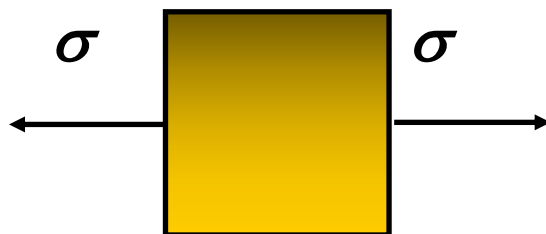
- ❖ **Tresca**屈服准则又称为最大剪应力准则
- ❖  $\sigma_1$ 和 $\sigma_3$ 为第一主应力和第三主应力，且 $\sigma_1 > \sigma_3$
- ❖  $C$ 可通过单向拉伸或纯剪切实验确定，与应力状态无关

# Tresca屈服准则

- **Tresca屈服准则**
- **1864年**，法国工程师**Tresca**公布的，结合库仑在岩石力学中的研究成果，再根据冲压和挤压的一些初步实验报告，提出了如下假设：  
当变形体内部某质点的最大剪应力  $\tau_{\max}$  达到某一临界值时，该质点的材料发生屈服；屈服临界值取决于材料在变形条件下的性质，而与应力状态无关。
- **Tresca屈服条件**表达式结构简单，计算方便，故较常用。但不足之处是未反映出中间主应力  $\sigma_2$  的影响，有时会带来很大的误差。

# Tresca屈服准则

- $C$  可通过实验确定
- 简单拉伸实验



当拉伸试样屈服时，  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ，  $\sigma_1 = \sigma_s$ ， 则

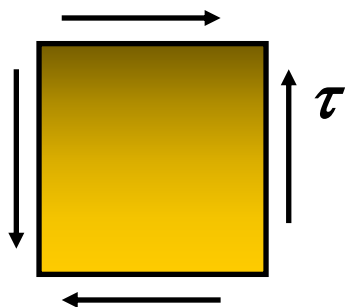
$$\tau_{\max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) = 0.5\sigma_s = C$$

因此， **Tresca**屈服准则的数学表达式为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

# Tresca屈服准则

- 薄壁管扭转实验（纯剪应力作用）



当扭转试样屈服时，  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau = k$ ， 则

$$\tau_{\max} = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) = k = 0.5\sigma_s = C$$

因而

$$C = k = 0.5\sigma_s$$

其中  $k$  为剪切强度极限

# Tresca屈服准则

- 如果不知道主应力大小次序时，**Tresca**屈服准则的普遍表达式为

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= \sigma_s \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= \sigma_s \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= \sigma_s \end{aligned} \right\}$$

三个等式中，只要其中任何一式得满足，材料就开始进入屈服

# Mises屈服准则

- **Mises**注意到**Tresca**屈服准则未考虑到中间主应力的影响，且在主应力大小次序不明确的情况下难以正确选用，于是从纯数学的观点出发，建议采用如下的屈服准则

$$\frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = C_1$$

或用主应力表示为

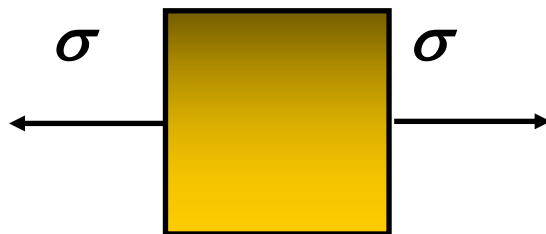
$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = C_1$$

$C_1$ 由材料在变形条件下的性质确定，与应力状态无关



# Mises屈服准则

- $C_1$  可通过实验确定
- 简单拉伸实验



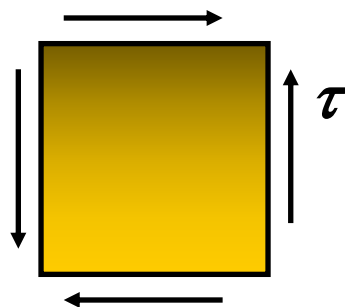
- 当拉伸试样屈服时,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_s$ , 则

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{6}[\sigma_s^2 + \sigma_s^2] = \frac{1}{3}\sigma_s^2 = C_1$$

$$C_1 = \frac{\sigma_s^2}{3}$$

# Mises屈服准则

- $C_1$  可通过实验确定
- 薄壁管扭转实验（纯剪应力作用）



当扭转试样屈服时， $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau = k$ ，则

$$\frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{1}{6}(\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2) = \tau^2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2$$

因而  $C_1 = \tau^2 = k^2 = 1/3 \sigma_s^2$ ，其中  $k$  为剪切强度极限

# Mises屈服准则

- **Mises**屈服准则是统一的方程式，既考虑了中间主应力的影响，且无需事先区分主应力的大小次序
- **Mises**在提出上述准则时，并没有考虑到它所代表的物理意义。但实验结果却表明，对于塑性金属材料，这个准则更符合实际

# Mises屈服准则

## ■ Mises 屈服准则与等效应力 $\bar{\sigma}$ 的关系

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2 = C_1$$

$$\begin{aligned}I'_2 &= \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_y \sigma'_z + \sigma'_z \sigma'_x - \tau'^2_{xy} - \tau'^2_{yz} - \tau'^2_{zx} \\ &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]\end{aligned}$$

# Mises屈服准则

- 为了说明**Mises**屈服准则的物理意义，**Hencky**（汉基）证明 **Mises**屈服准则又可以表述为：

材料质点屈服的条件是其单位体积的弹性形状变化能达到某个临界值；该临界值只取决于材料在变形条件下的性质，而与应力状态无关。故此，**Mises**屈服准则又称为**弹性形状变化能准则**

- **Nadai(1937)**对**Mises**方程作了另一个解释，他认为当**八面体剪应力 $\tau_8$** 达到某一常数时，材料即开始进入塑性状态。即

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = C = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_s$$

# Mises屈服准则

- 伊留辛认为当等效应力（应力强度）等于单向拉伸的屈服极限 $\sigma_s$ 时，即

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \bar{\sigma} = \sigma_s$$

材料便进入塑性状态

- 伊留辛把复杂应力状态的应力强度与单向拉伸的屈服极限 $\sigma_s$ 联系起来，对于建立小弹塑性变形理论，具有重要意义

# Tresca与Mises屈服准则的比较

## ➤ 两个屈服准则的特点

### ❖ 拉伸屈服应力 $\sigma_s$ 与剪切屈服应力 $\tau$ 的关系

在两个屈服准则中，拉伸屈服应力与剪切屈服应力具有固定的关系：

**Tresca** 屈服准则： $2k = 2\tau = \sigma_s$

**Mises** 屈服准则： $3k^2 = 3\tau^2 = \sigma_s^2$



### ❖ 与坐标的选择无关

**Tresca**屈服准则是用最大主应力和最小主应力表示的；**Mises**屈服准则是用应力偏张量的第二不变量表示的，因此两种屈服准则都与坐标的选择无关

# Tresca与Mises屈服准则的比较

## ❖ 中间主应力（第二主应力）的影响

**Tresca**屈服准则中只考虑了最大和最小主应力对材料屈服的影响，没有考虑中间主应力对材料屈服的影响

**Mises**屈服准则不仅考虑了最大和最小主应力对材料屈服的影响，还考虑了中间主应力对材料屈服的影响，因此实验结果的吻合程度比**Tresca**屈服准则好



# Tresca与Mises屈服准则的比较

## ❖ 静水压力的影响

静水压力对Tresca屈服准则和Mises屈服准则都没有影响。在原有应力状态上叠加一个正的或负的平均应力，两种屈服准则的表达形式不变

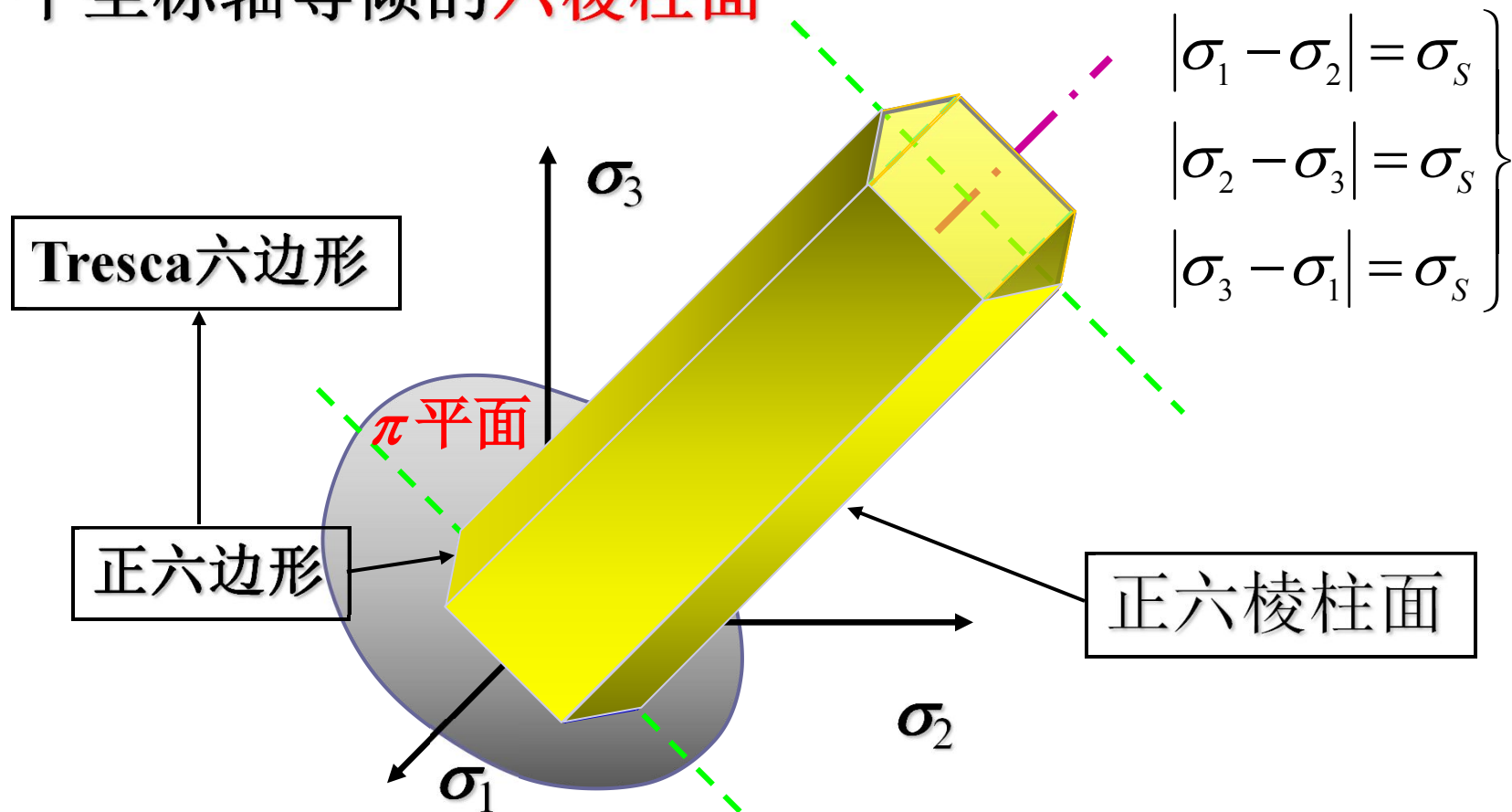
## ❖ 在应用方面的限制

在主应力顺序已知时，Tresca屈服准则是主应力分量的线性函数，使用起来非常方便，在传统解析计算中被采用，而Mises屈服准则的表达式要复杂很多。但是当主应力顺序未知时，Tresca屈服准则为六次方程，此时要比Mises屈服准则复杂得多

# Tresca与Mises屈服准则的比较

## ❖ 在主应力空间中屈服面几何形状

在主应力空间中，Tresca屈服准则是一个与三个坐标轴等倾的**六棱柱面**

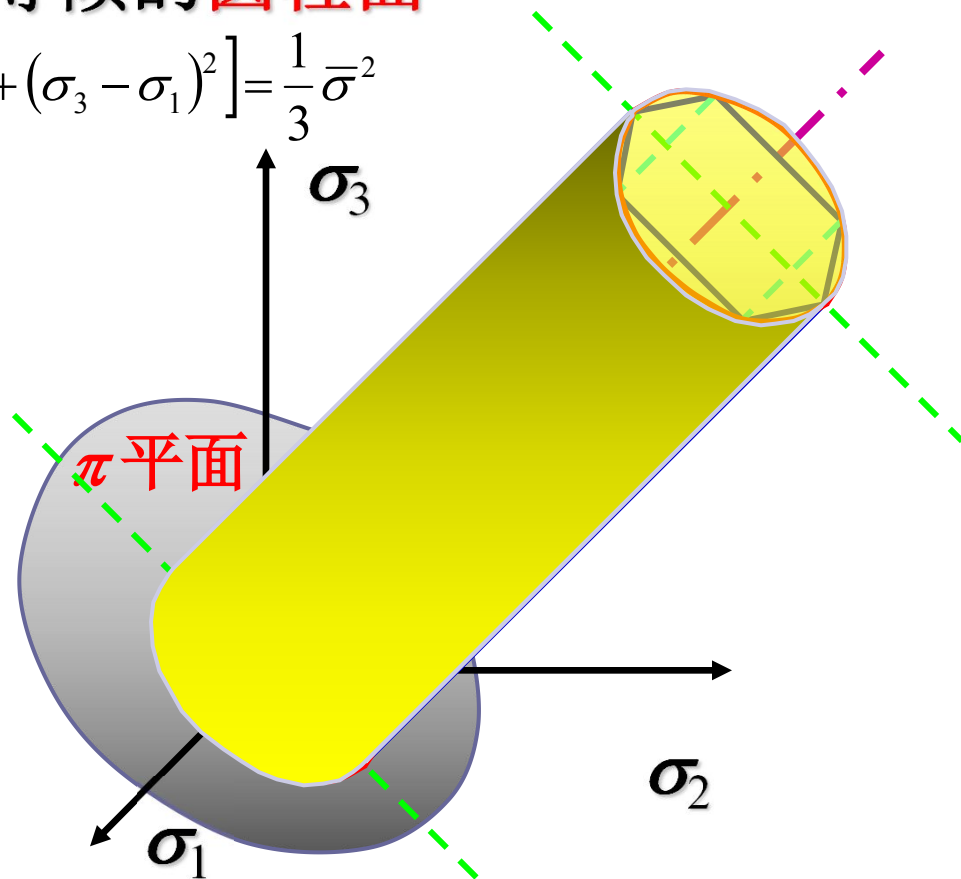


# Tresca与Mises屈服准则的比较

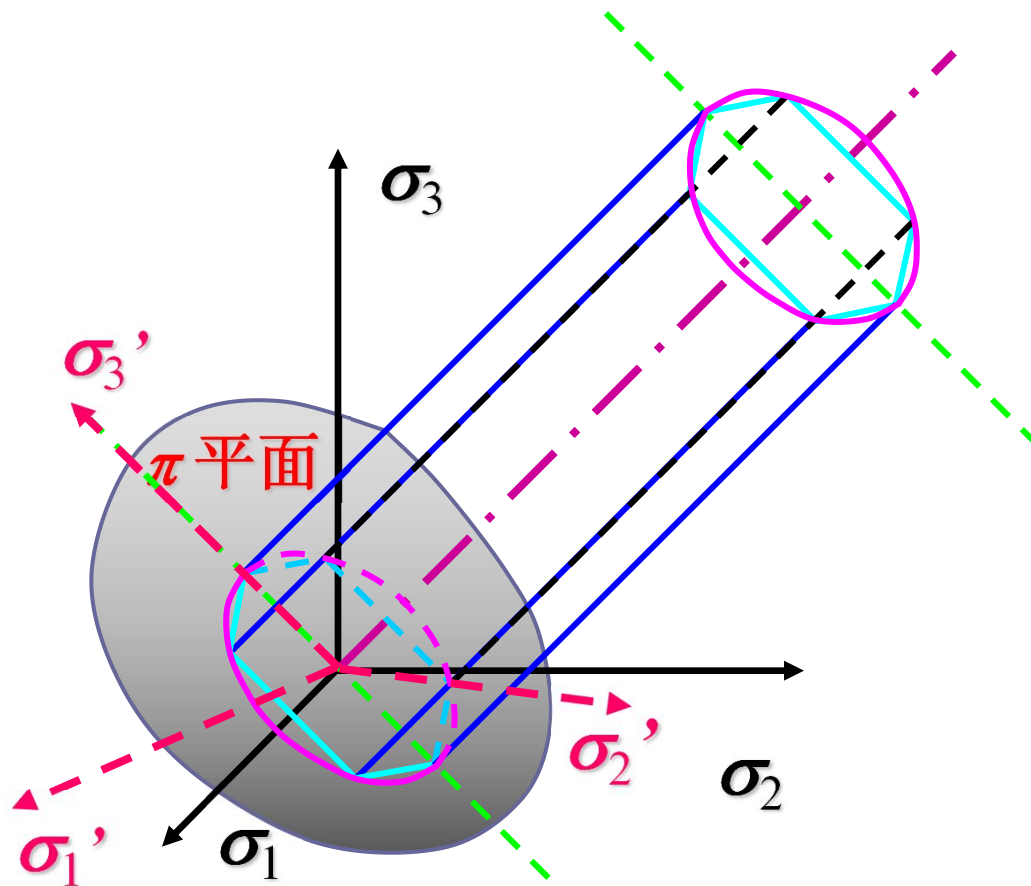
## ❖ 在主应力空间中屈服面几何形状

在主应力空间中，Mises屈服准则是一个与三个坐标轴等倾的**圆柱面**

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{3}\bar{\sigma}^2$$



# Tresca与Mises屈服准则的比较



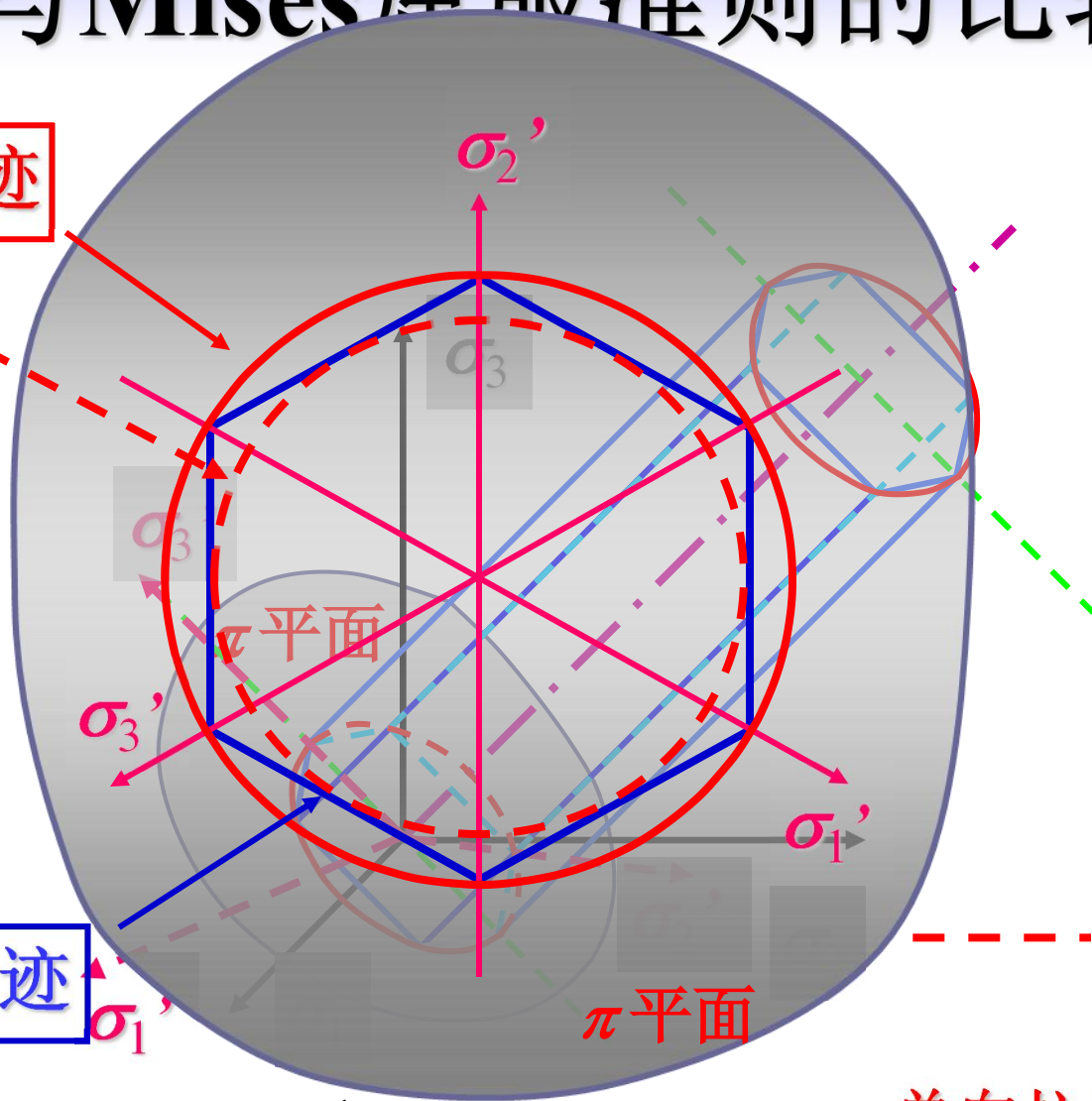
# Tresca与Mises屈服准则的比较

Mises屈服轨迹

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= \sigma_s \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= \sigma_s \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= \sigma_s \end{aligned} \right\} = 2\tau$$

Tresca屈服轨迹

$$\frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2 = \tau^2$$





纯剪实验确定常数C

单向拉伸实验确定常数C



# Tresca与Mises屈服准则的比较

## ■ 两个屈服准则的联系

- ◆ 由于假设材料是各向同性的，材料的拉伸屈服应力与压缩屈服应力相同，因此通过单拉（压缩）实验（或者纯剪切实验）可以确定主应力空间的六个点 ，也可以对应地在 $\pi$ 平面上得到六个点，**Tresca**屈服轨迹是将六个点依次用直线连接起来，**Mises**屈服轨迹是通过六个点的圆，这样就可以将两种屈服准则联系起来。
- ◆ 两种联系方法：①一种方法是假定两个屈服准则所预测的单拉屈服应力相同，②另一种是假定两个屈服准则所预测的剪切应力相同 

# Tresca与Mises屈服准则的比较

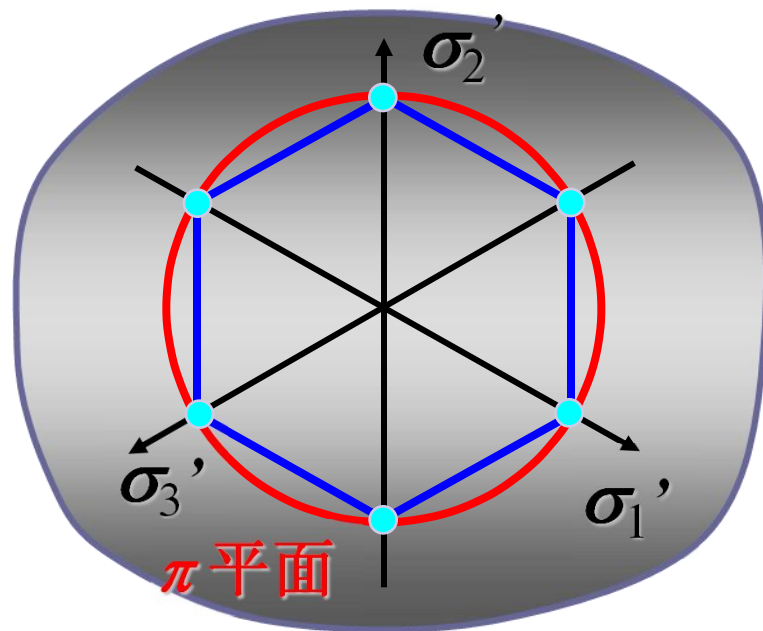
❖ 假定两个屈服准则所预测的单拉屈服应力相同

这种方法是采用单向拉伸实验确定两种屈服准则中的常数 $C$ 。

由此所确定的两种屈服准则在 $\pi$  平面内的屈服轨迹为Mises屈服轨迹为Tresca屈服轨迹的外接圆

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= \sigma_s \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= \sigma_s \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= \sigma_s \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2$$



# Tresca与Mises屈服准则的比较

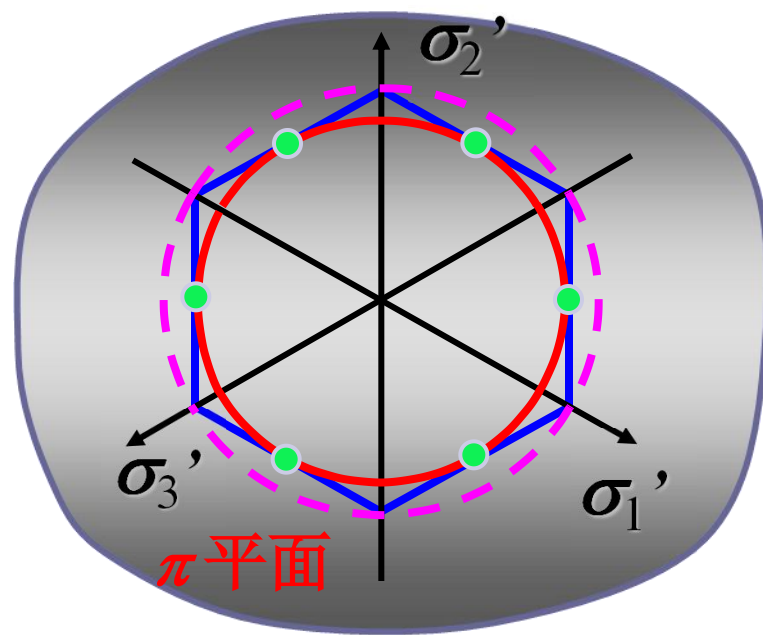
❖ 假定两个屈服准则所预测的剪切屈服应力相同

这种方法是采用纯剪切实验确定两种屈服准则中的常数 $C$ 。

由此所确定的两种屈服准则在 $\pi$  平面内的屈服轨迹为Mises屈服轨迹为Tresca屈服轨迹的内接圆

$$\left. \begin{aligned} |\sigma_1 - \sigma_2| &= 2\tau \\ |\sigma_2 - \sigma_3| &= 2\tau \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &= 2\tau \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{6}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \tau$$





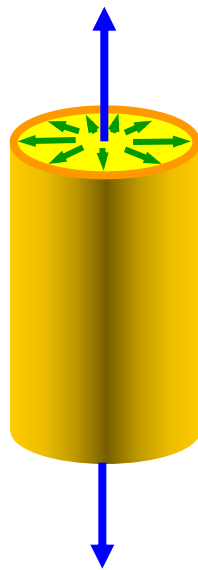
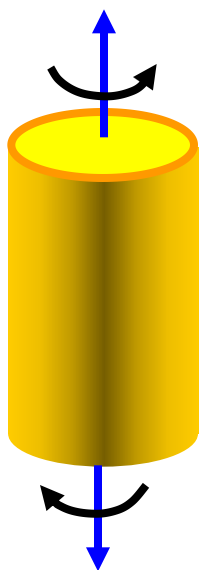
# Tresca与Mises屈服准则的比较

## ■ 与实验数据的比较

- ◆ 两个屈服准则是否正确，必须进行实验验证，实验结果的好坏才是标价其唯一标准。常用的实验方法有两种：

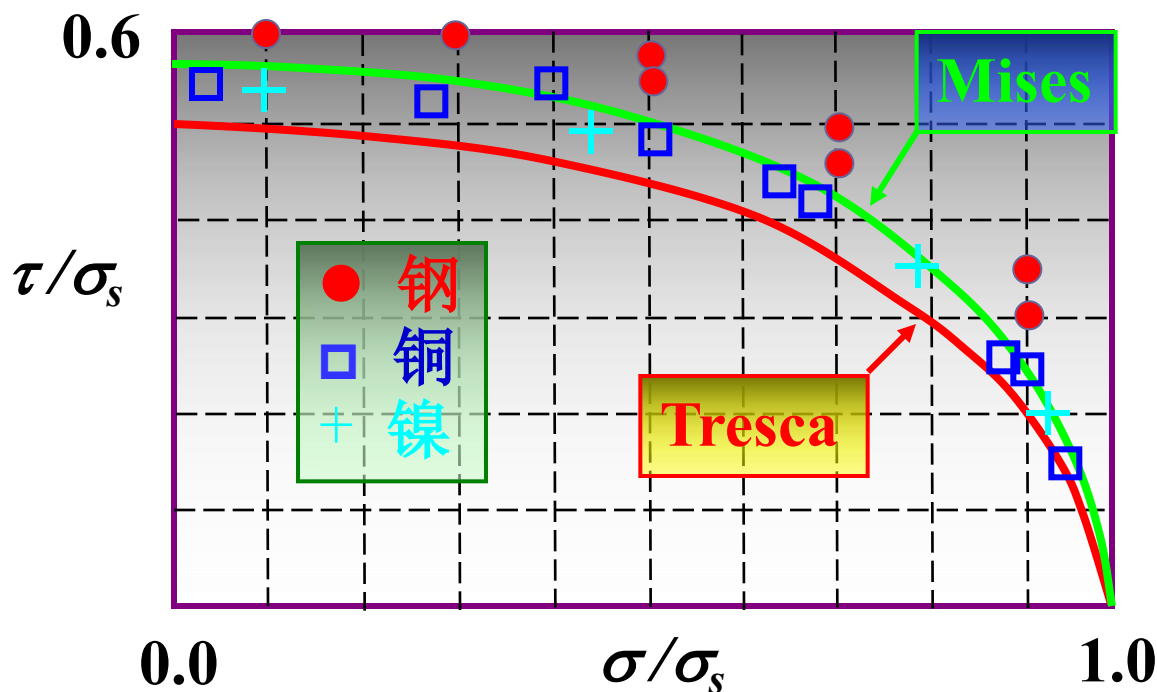
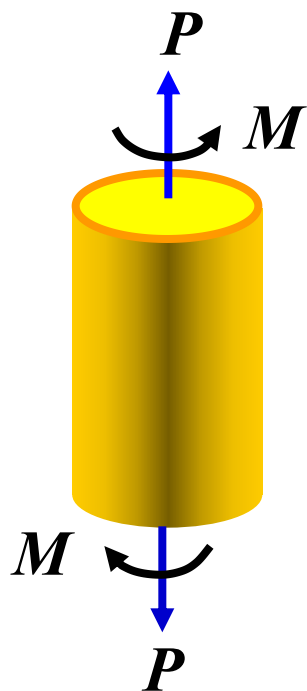
- ☞ 薄壁管承受轴向拉力和扭矩作用

- ☞ 薄壁管承受轴向拉力和内压力（液压）作用



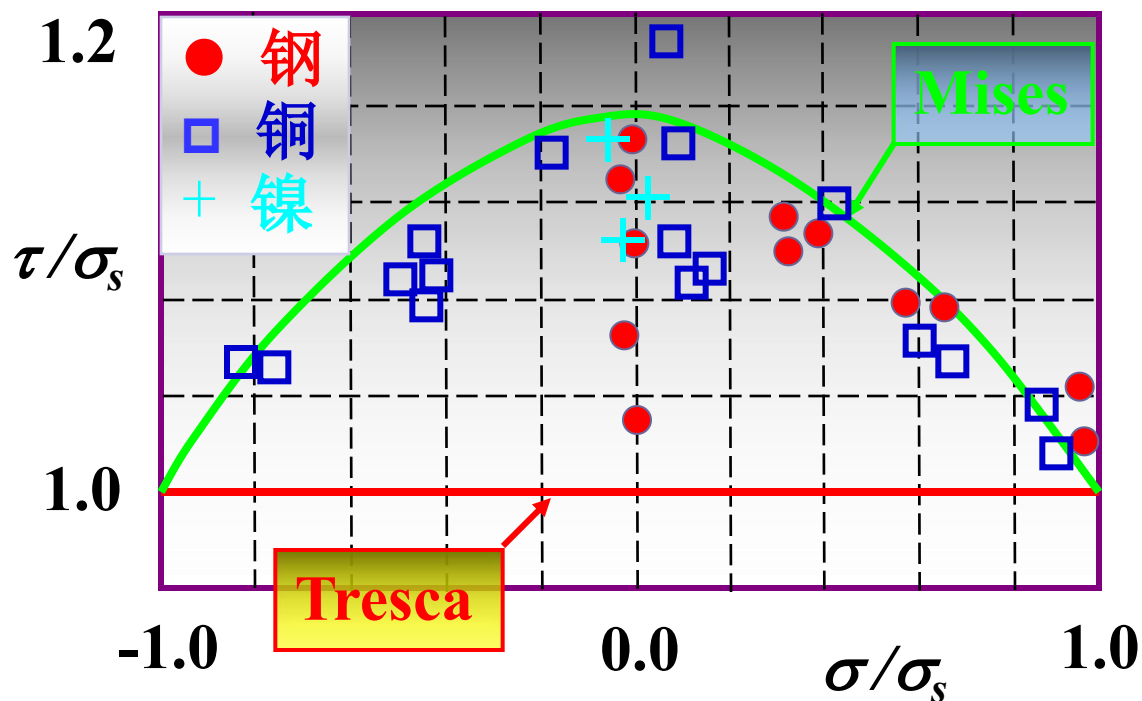
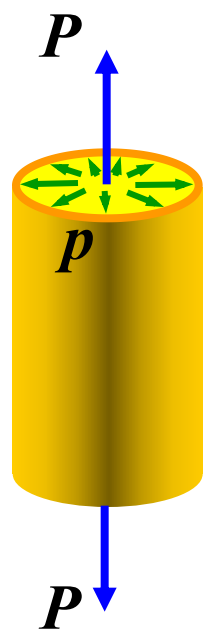
# Tresca与Mises屈服准则的比较

- ❖ 薄壁管承受轴向拉力 $P$ 和扭矩 $M$ 作用
- ◆ 1931年Taylor和Quinney对铜、铝、低碳钢薄壁管进行了轴向拉力 $P$ 和扭矩 $M$ 复合加载实验
- ◆ 实验结果表明实验数据更接近Mises屈服准则



# Tresca与Mises屈服准则的比较

- ❖ 薄壁管承受轴向拉力 $P$ 和内压力 $p$ 作用
- ◆ 1926年Lode对铜、铝、低碳钢薄壁管进行了轴向拉力 $P$ 和内压力 $p$ 复合加载实验
- ◆ 实验结果表明实验数据更接近Mises屈服准则




# Tresca与Mises屈服准则的比较

- 薄壁管承受轴向拉力 $P$ 和扭矩 $M$ 作用和薄壁管承受轴向拉力 $P$ 和内压力 $p$ 作用的实验结果表明：
- ◆ 两种屈服准则都与实验结果吻合的较好；
- ◆ 实验数据更接近Mises屈服准则；
- ◆ 在数学运算方面各有其方便之处，并且两者的最大差别仅为15.5%，因此两种屈服准则都被广泛应用；

**Tresca 屈服准则：**  $2k = 2\tau = \sigma_s$

**Mises 屈服准则：**  $3k^2 = 3\tau^2 = \sigma_s^2$    $2k = 1.155\sigma_s$

# 应变硬化材料的屈服准则

- 前面讨论的屈服准则只适用于各向同性的理想塑性材料，即塑性变形过程中，屈服表面或屈服轨迹保持不变；
- 对于应变硬化材料，初始屈服可以认为仍服从前面讨论的屈服准则，但当材料产生应变硬化后，屈服准则将发生变化，在变形过程中的某一瞬时，都存在后继瞬时屈服表面或屈服轨迹； 
- 假设材料应变硬化后，仍保持各向同性假设，其屈服轨迹的**中心位置和屈服轨迹的形状都保持不变**。即 $\pi$ 平面上的屈服轨迹仍保持为圆形或正六边形。



# 应变硬化材料的屈服准则

- 理想塑性材料假设的含义是材料塑性变形过程中，屈服表面或屈服轨迹保持不变

## ❖ 各向同性理想塑性材料

### ① Mises屈服准则

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2$$

### ② Tresca屈服准则

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

# 应变硬化材料的屈服准则

- 各向同性硬化假设的含义是屈服函数保持不变，只是用瞬时屈服应力 $\sigma_y$ 代替初始屈服应力 $\sigma_s$

## ❖ 各向同性硬化塑性材料

### ① Mises屈服准则

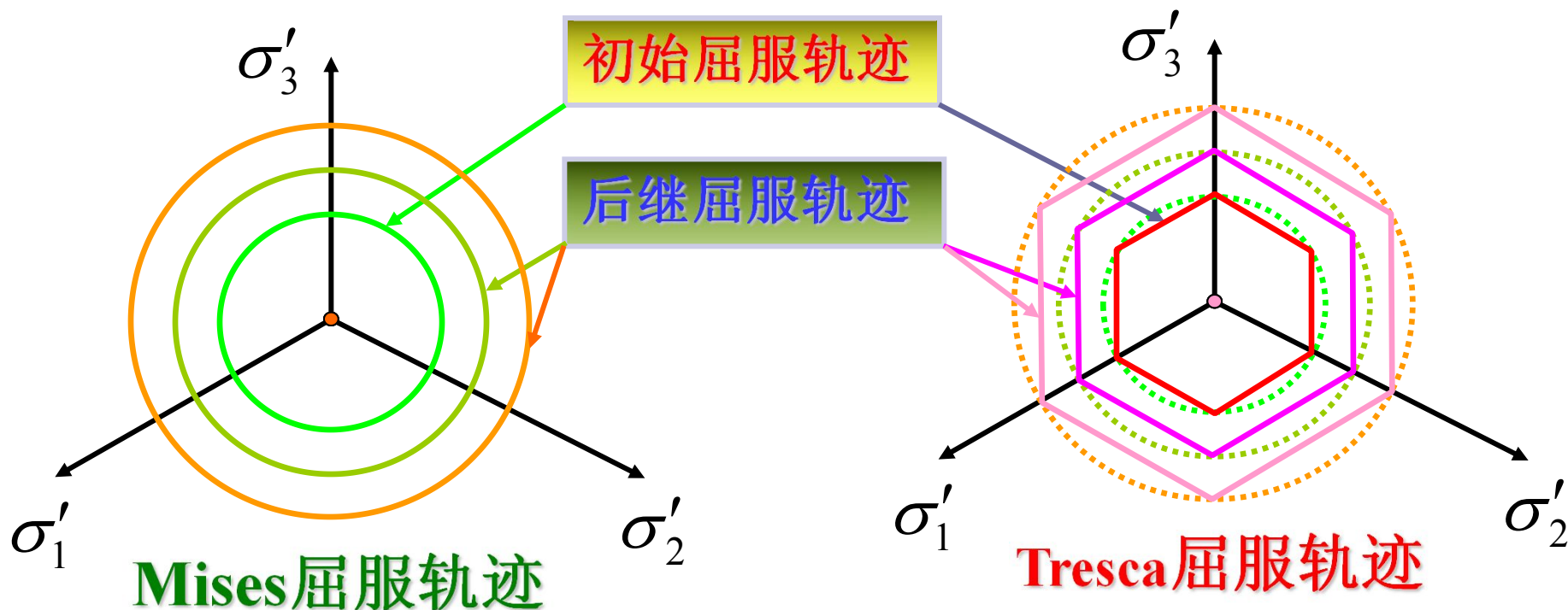
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \frac{2}{3} \sigma_y^2$$

### ② Tresca屈服准则

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y$$

# 应变硬化材料的屈服准则

- 应变硬化（加工硬化）材料的后继屈服轨迹在初始屈服轨迹的基础上均匀膨胀
- **Mises**屈服轨迹为一族同心圆， **Tresca**屈服轨迹为一族同心正六边形





# 材料塑性本构关系

- 材料塑性应力与应变关系称为材料塑性本构关系，其数学表达式称为本构方程，也称为物理方程
- 材料塑性变形时，应力不仅与应变有关，还与材料变形历史、组织结构等因素有关，应力与应变的关系是一个等效关系
- 材料塑性变形时的应力与应变关系，可以归结为等效应力与等效应变之间的关系

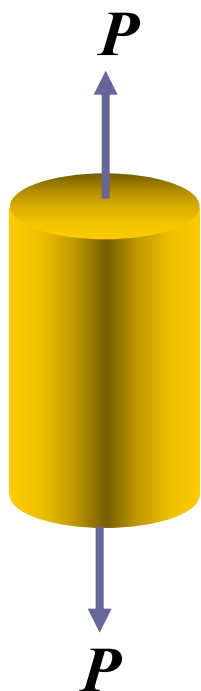
$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$$

# 材料塑性本构关系

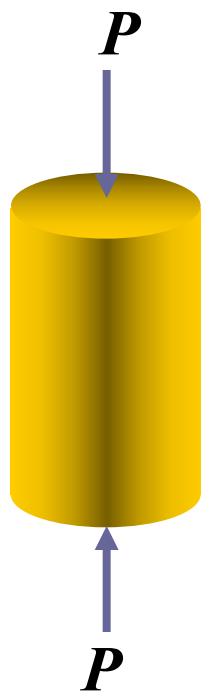
- 实验结果表明，按不同应力组合得到的等效应力——等效应变曲线基本相同
- 通常可以假设，对于同一种材料，在变形条件相同的条件下，等效应力与等效应变曲线是单一的，称为**单一曲线假设**
- 因此，可以采用最简单的实验方法来确定材料的等效应力——等效应变曲线

# 材料塑性本构关系

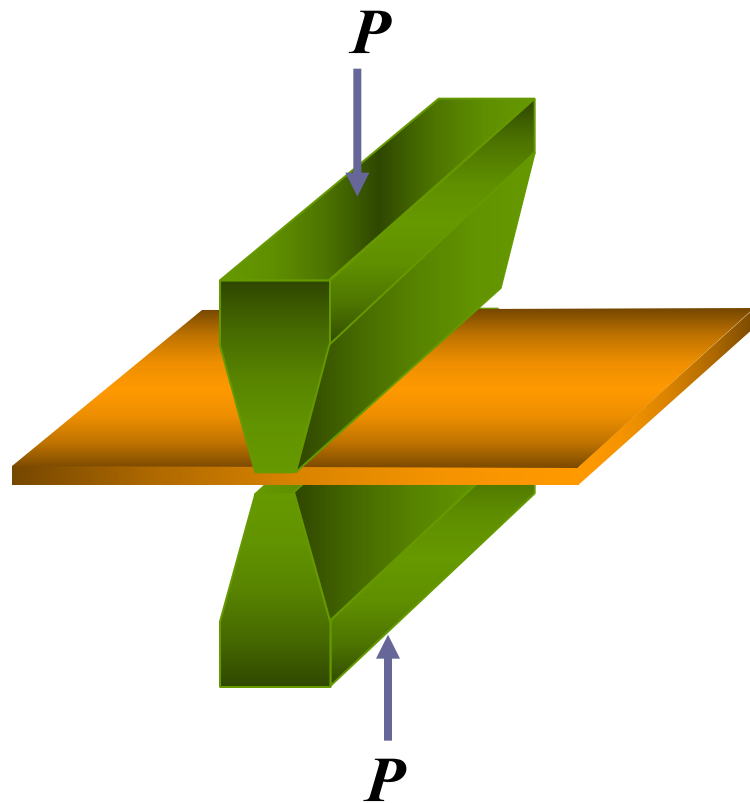
- 常用实验方法有三种



单向拉伸实验



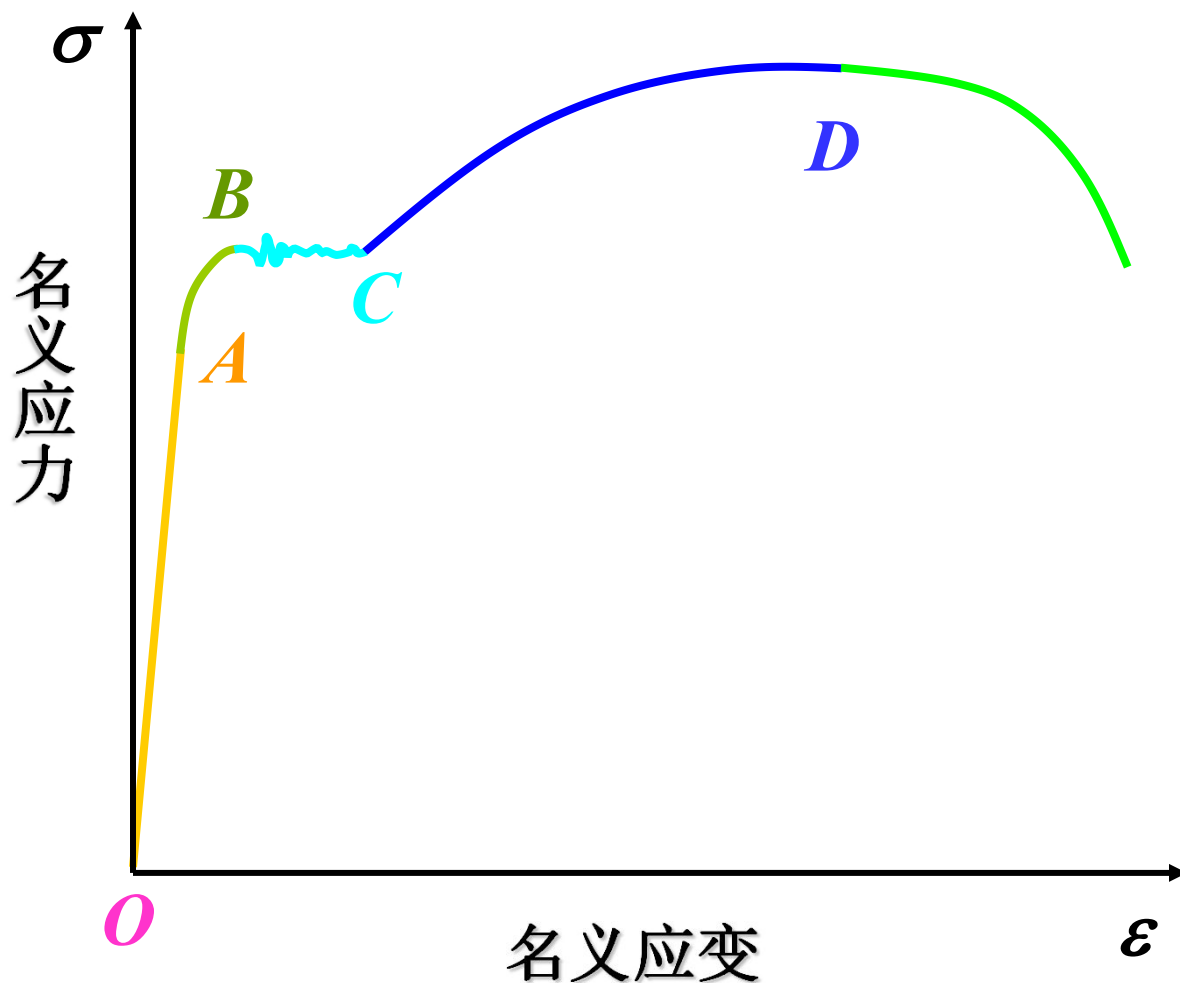
单向压缩实验



平面应变压缩实验

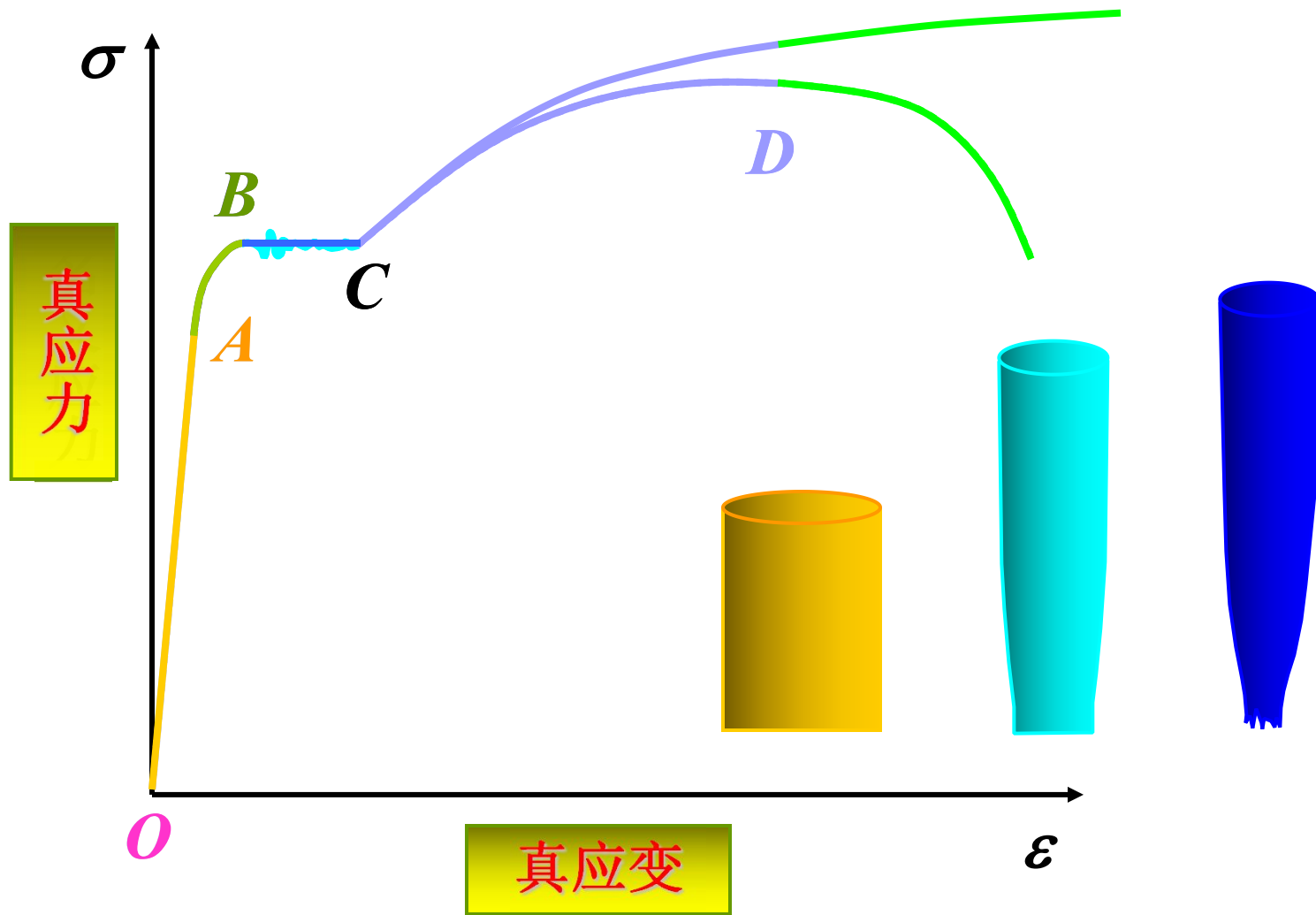
# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 简单拉伸的名义应力——名义应变曲线



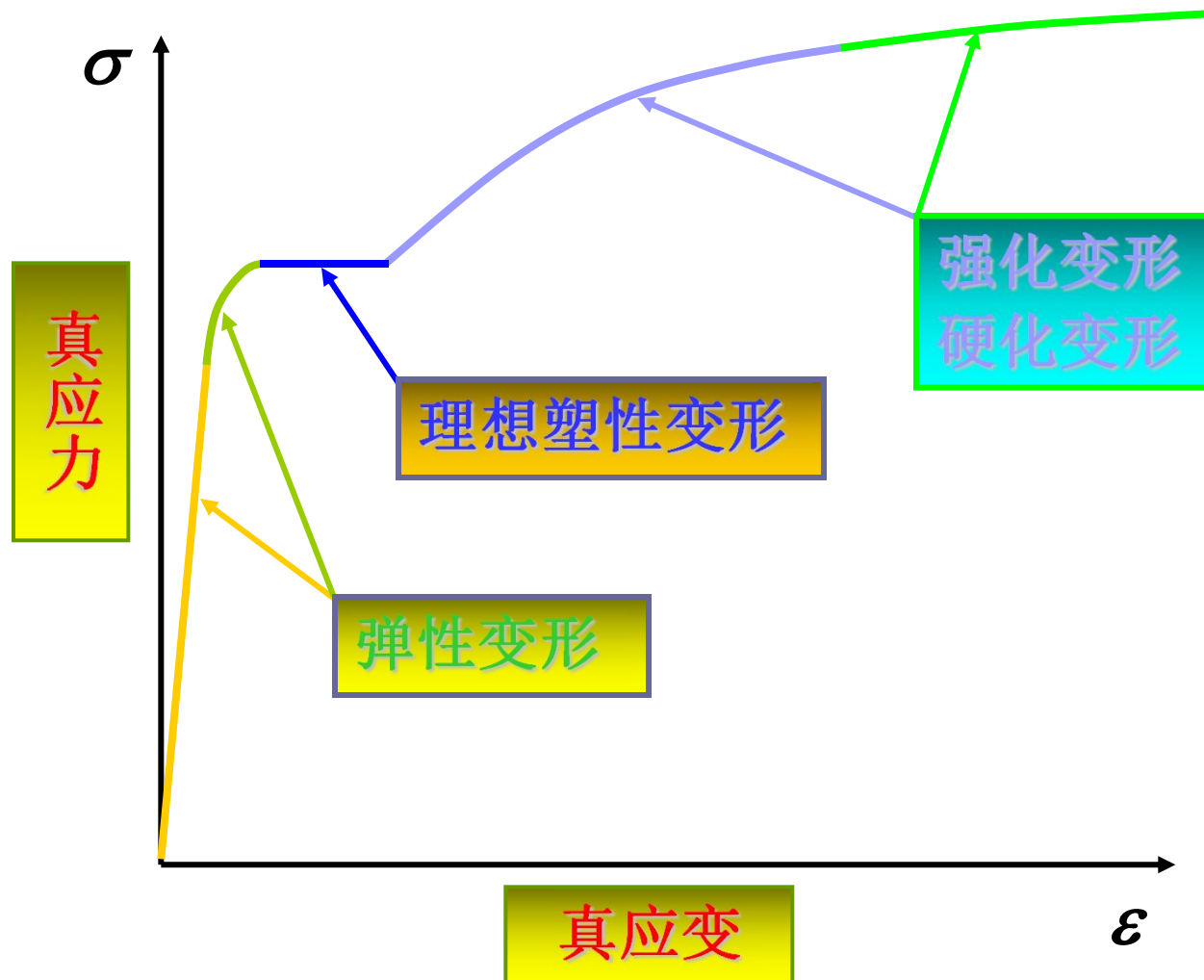
# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 简单拉伸的真应力——真应变曲线



# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 简单拉伸的真应力——真应变曲线



# 等效应力——等效应变简化模型

- 一般由实验得到的真应力——真应变曲线（等效应力——等效应变曲线）比较复杂，不能用简单的函数形式来描述，在应用方面也不方便。因此通常都将实验得到的曲线进行合理的简化处理成可以用某种函数表达的形式

## ■ 主要等效应力——等效应变简化模型

- ❖ 理想弹塑性材料模型
- ❖ 理想刚塑性材料模型
- ❖ 幂指数硬化（强化）材料模型
- ❖ 刚塑性非线性硬化材料模型
- ❖ 弹塑性线性硬化材料模型
- ❖ 刚塑性线性硬化材料模型

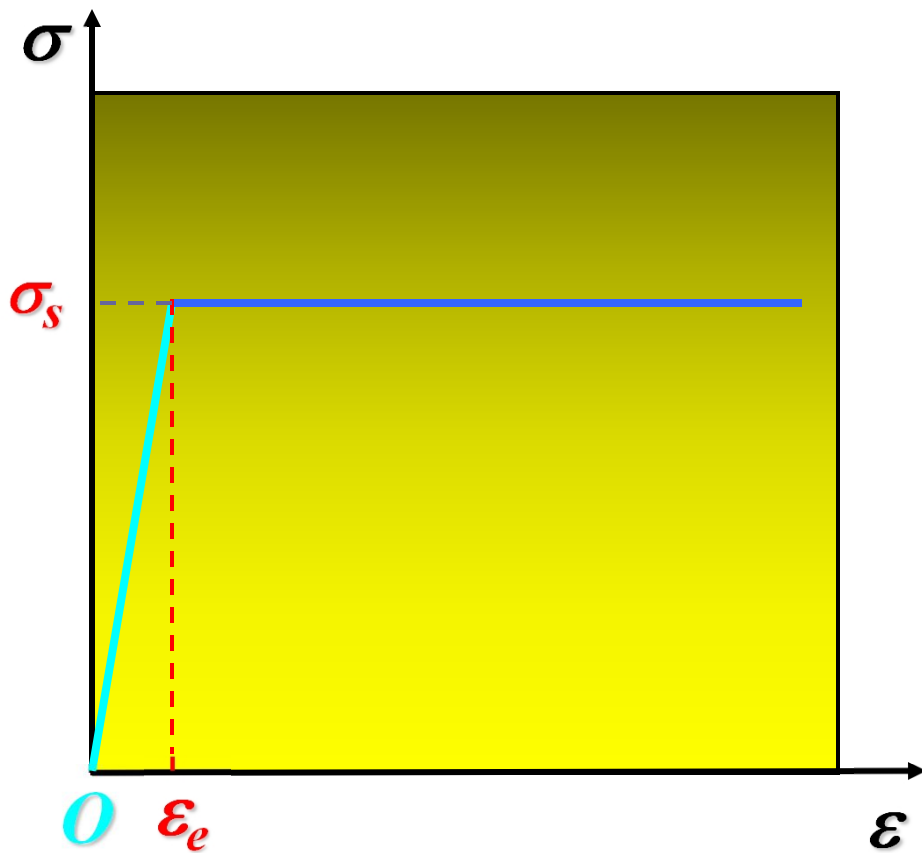
# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 理想弹塑性材料模型

理想弹塑性材料模型的特点是应力达到屈服应力前，应力与应变呈线性关系，应力达到屈服应力之后，保持为常数

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = E \bar{\varepsilon} & \text{当 } \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_e \\ \bar{\sigma} = \sigma_s = E \varepsilon_e & \text{当 } \bar{\varepsilon} \geq \varepsilon_e \end{cases}$$

➤ 适合于应变不太大，强化程度较小的材料





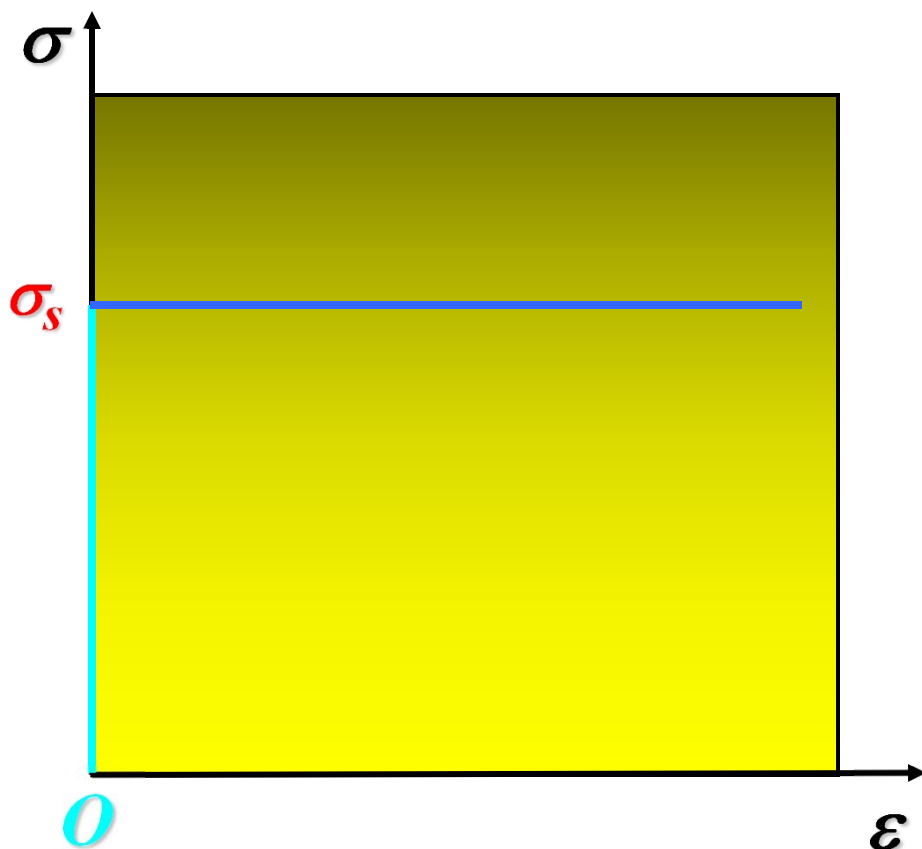
# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 理想刚塑性材料模型

理想刚塑性材料模型的特点是忽略材料的强化和弹性变形，数学表达式为

$$\bar{\sigma} = \sigma_s$$

➤ 适合于热加工和超塑性的金属材料



# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 幂指数硬化材料模型

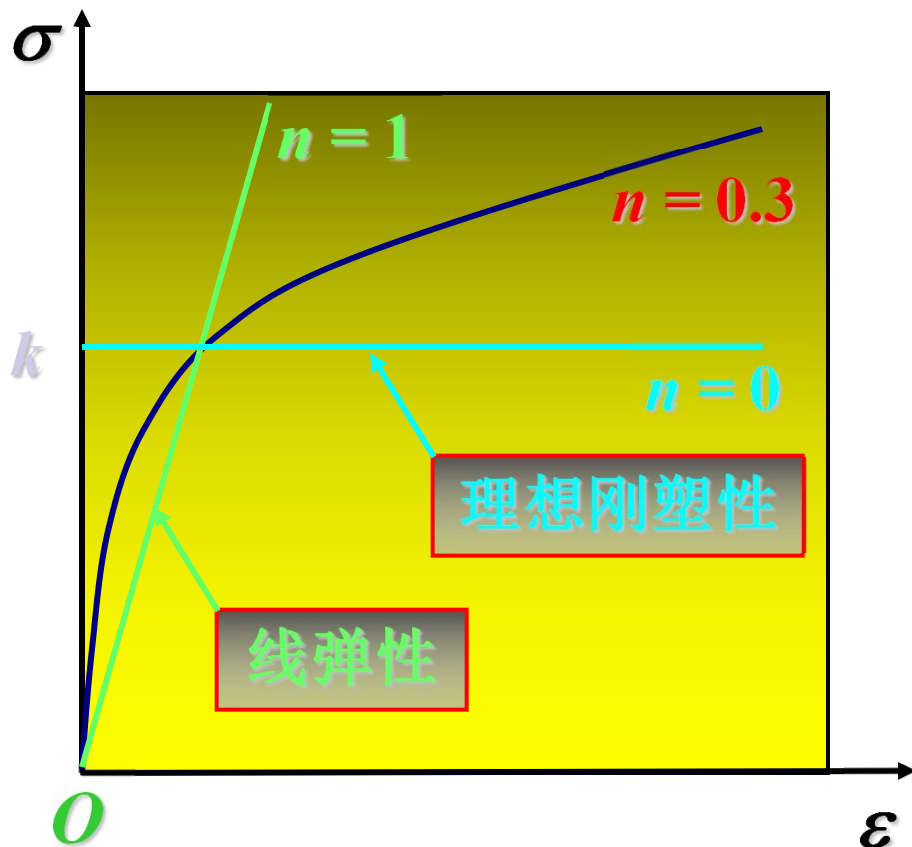
幂指数硬化材料模型的数学表达式为

$$\bar{\sigma} = k\bar{\varepsilon}^n$$

$k$ 为强度系数或者称为强化（硬化）系数

$n$ 为硬化指数， $0 < n < 1$

- 适合于大多数金属材料
- 可以简化为线弹性模型和理想刚塑性模型



# 等效应力——等效应变简化模型

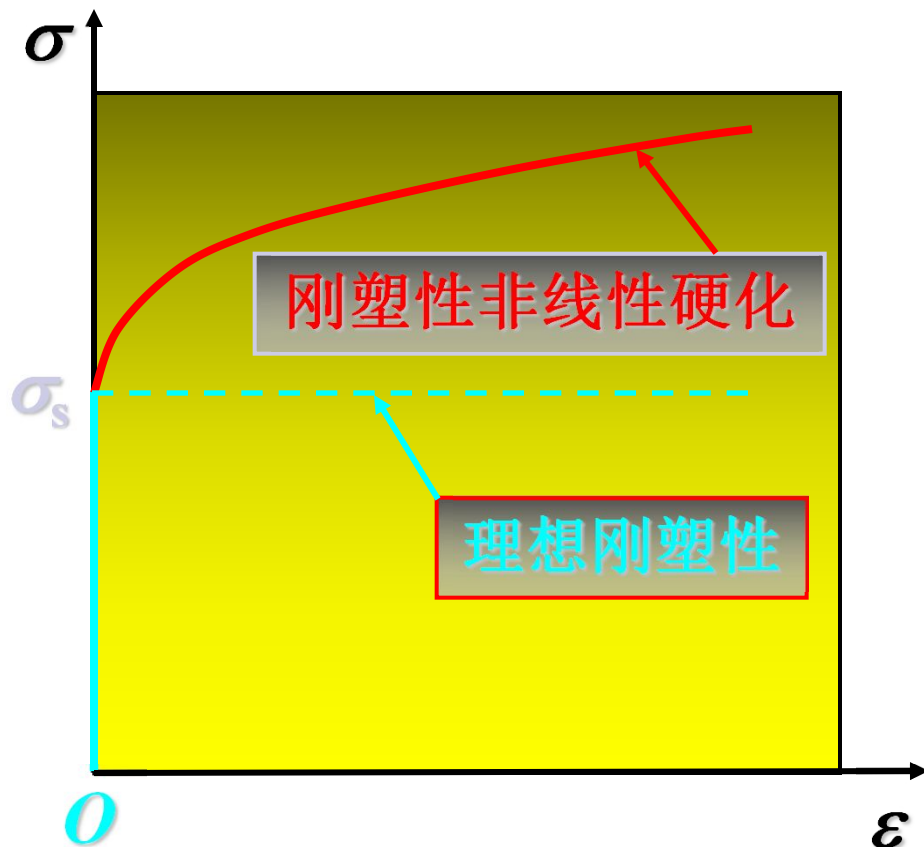
## ■ 刚塑性硬化材料模型

刚塑性非线性硬化材料模型的数学表达式为

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + k_1 \bar{\varepsilon}^m$$

$k_1$ 和 $m$ 与材料性能有关的参数

➤ 适合于预先经过冷加工的金属材料。材料在屈服前为刚性的，屈服后硬化曲线接近于抛物线



# 等效应力——等效应变简化模型

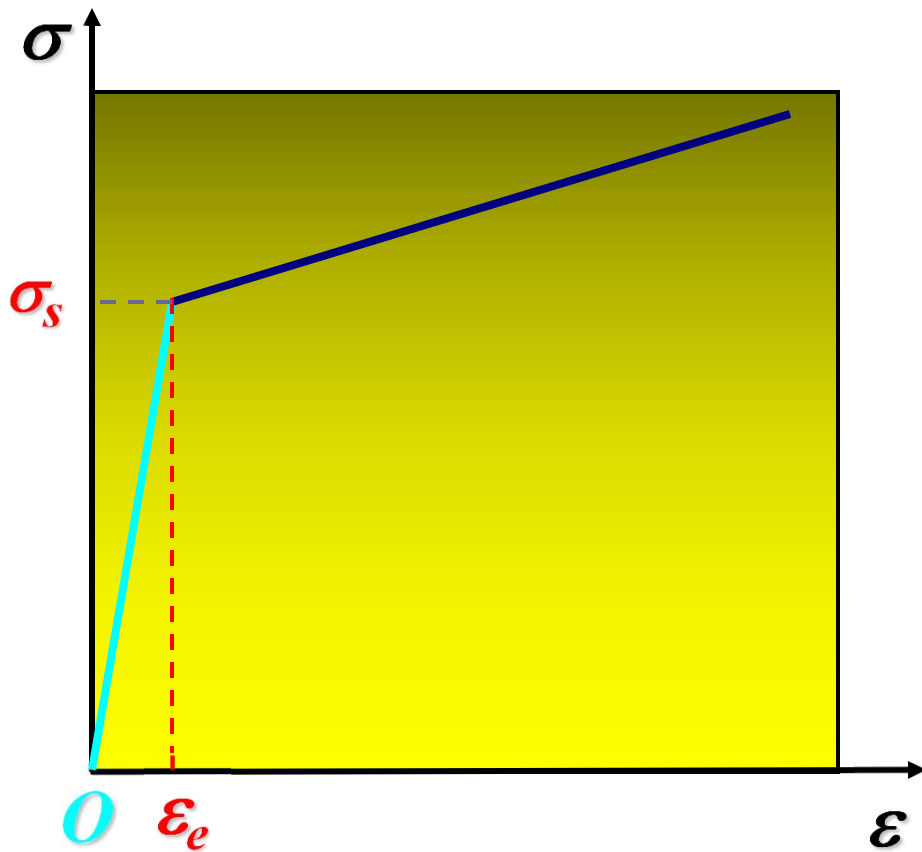
## ■ 弹塑性线性硬化材料模型

弹塑性线性硬化材料模型的数学表达式为

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = E\bar{\varepsilon} & \text{当 } \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_e \\ \bar{\sigma} = \sigma_s + E_1(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_e) & \text{当 } \bar{\varepsilon} \geq \varepsilon_e \end{cases}$$

$E_1$ 为塑性模量

➤ 适合于弹性变形不可忽略，且塑性变形的硬化率接近于不变的材料。  
例如合金钢、铝合金等



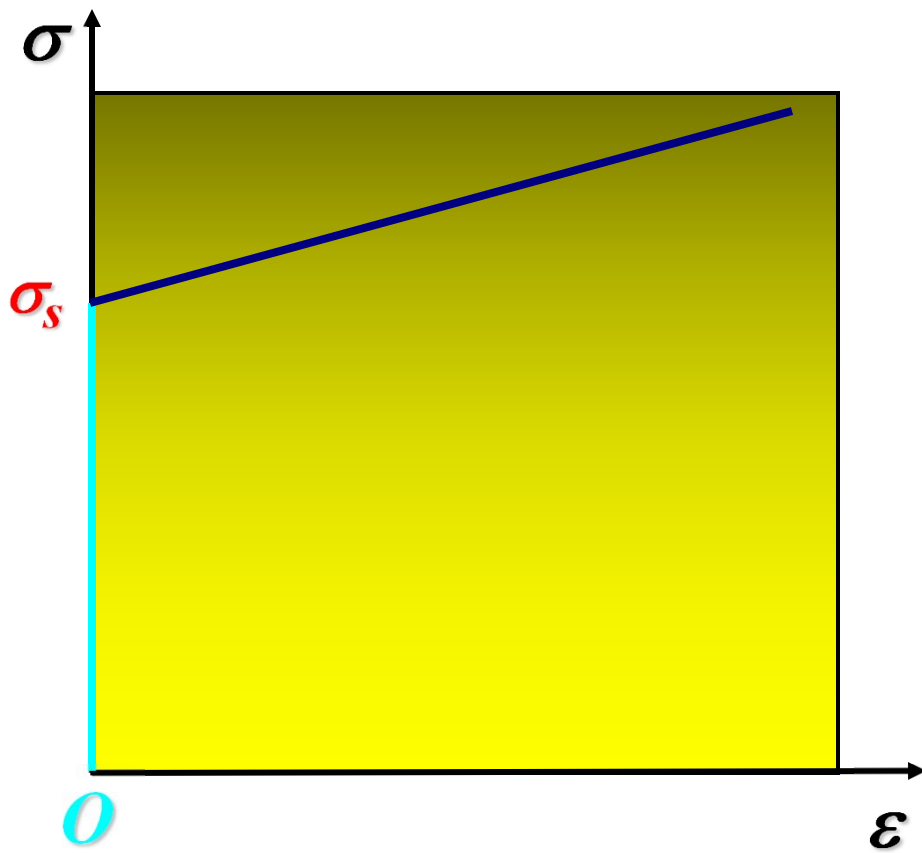
# 等效应力——等效应变简化模型

## ■ 刚塑性线性硬化材料模型

如果弹性变形可以忽略，材料的硬化认为是线性的。其数学表达式为

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + k_2 \bar{\varepsilon}$$

➤ 适合于经过较大的冷变形量之后，并且其加工硬化率几乎不变的金属材料



# 材料弹性本构关系

## ■ 广义虎克定律

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{2G} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \end{array} \right.$$

$E$ —弹性模量； $\mu$ —泊松比； $G$ —剪切模量

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

# 材料弹性本构关系

## ■ 广义虎克定律的张量表达式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} \sigma_m \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ 时} \\ 0 & i \neq j \text{ 时} \end{cases}$$

➤ 应力与应变之间是线性关系



# 材料增量塑性本构关系

- 在塑性变形范围内，材料应力与应变的关系是非线性的，与加载历史或应变路径有关。因此用**增量理论**近似地描述加载历史和复杂的应变路径
- 由于塑性变形比较复杂，历史上有许多学者提出了各种不同的本构理论
- 应用广泛的有**Levy-Mises**理论和**Prandtl-Reuss**理论
- 增量本构理论又称为**流动理论**



# 材料增量塑性本构关系

## ■ Levy—Mises理论

- ① 材料为理想刚塑性材料，即弹性应变增量为零，塑性应变增量就是总应变增量；
- ② 材料服从Mises屈服准则，即  $\bar{\sigma} = \sigma_s$  ；
- ③ 塑性变形时体积不变，即应变增量张量就是应变增量偏张量；

➤ 在以上假设基础上假设应变增量与应力偏张量成正比

$$d\varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} \cdot d\lambda$$

$d\lambda$ —正的瞬时比例系数，在加载的不同瞬时是变化的，在卸载时  $d\lambda=0$

# 材料增量塑性本构关系

## ■ Levy—Mises理论

$d\varepsilon_{ij} = \sigma'_{ij} \cdot d\lambda$  的展开式为

$$\left\{ \begin{array}{ll} d\varepsilon_x = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)]; & d\gamma_{xy} = d\lambda\tau_{xy} \\ d\varepsilon_y = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)]; & d\gamma_{yz} = d\lambda\tau_{yz} \\ d\varepsilon_z = \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)]; & d\gamma_{zx} = d\lambda\tau_{zx} \end{array} \right.$$

# 材料增量塑性本构关系

## ■ Levy—Mises理论

正应变增量两两相减，并将切应变的表达式一起写出

$$\begin{cases} d\varepsilon_x - d\varepsilon_y = d\lambda(\sigma_x - \sigma_y); & d\gamma_{xy} = \tau_{xy} d\lambda \\ d\varepsilon_y - d\varepsilon_z = d\lambda(\sigma_y - \sigma_z); & d\gamma_{yz} = \tau_{yz} d\lambda \\ d\varepsilon_z - d\varepsilon_x = d\lambda(\sigma_z - \sigma_x); & d\gamma_{zx} = \tau_{zx} d\lambda \end{cases}$$

代入等效应变增量  $d\bar{\varepsilon}$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)}$$

# 材料增量塑性本构关系

## ■ Levy—Mises理论

再利用等效应力公式

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]}$$

整理后可得瞬时比例系数 $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}}$$

# 材料增量塑性本构关系

## ■ Levy—Mises理论

可得Levy—Mises本构理论为

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_x = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right]; \\ d\varepsilon_y = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right]; \\ d\varepsilon_z = \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right]; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d\gamma_{xy} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{xy} \\ d\gamma_{yz} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{yz} \\ d\gamma_{zx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \tau_{zx} \end{array} \right.$$

张量表达式为

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}$$

# 材料增量塑性本构关系

- **Prandtl-Reuss理论**
- ◆ **Levy—Mises理论**没有考虑弹性变形的影响，仅适用于大塑性变形问题。对于塑性变形量较小，弹性变形不可忽略，以及求解弹性回复和残余应力问题时不宜采用**Levy—Mises理论**
- ◆ **Prandtl**于**1924**年提出了**平面应变**情况下**理想弹塑性材料**的本构关系
- ◆ **Reuss**在**1930**年也独立提出了该理论，并将其推广到一般情况
- ◆ 通常将它称为**Prandtl-Reuss理论**

# 材料增量塑性本构关系

## ■ Prandtl-Reuss理论

- ◆ Prandtl-Reuss理论考虑了弹性变形部分，将总的应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 分解为弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 和塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 之和

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^e$$

其中塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 由Levy—Mises理论给出

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \sigma'_{ij} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}$$

# 材料增量塑性本构关系

## ■ Prandtl-Reuss理论

其中弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$  由广义虎克定律的微分形式给出

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} d\sigma_m \delta_{ij}$$

可以得到Prandtl-Reuss本构方程为

$$d\varepsilon_{ij} = \left( \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \right) \sigma'_{ij} + \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} + \frac{1-2\mu}{E} d\sigma_m \delta_{ij}$$



# 材料全量塑性本构关系

- 材料增量本构理论虽然比较严谨，与实际情况比较接近。但是在实际应用时需要沿加载路径积分，从工程应用的角度讲是不方便的
- 许多学者（例如Hencky、Nadai、伊留申）相继提出了描述应力与全量应变之间的关系，称为全量理论，也称为形变理论
- 其中伊留申提出的全量理论较为实用
- 伊留申指出，在塑性变形时，只有满足简单加载（也称为比例加载）条件时，才可以建立材料全量本构理论

# 材料全量塑性本构关系

## ■ 简单加载

指在加载过程中，所有的外力从一开始就按同一比例增加

■ 为了建立全量理论，需要提出以下几点假设：

- ① 应力主方向与应变主方向是重合的；
- ② 塑性变形时体积保持不变；
- ③ 应力偏量分量与应变偏量分量成比例；
- ④ 等效应力是等效应变的函数，对于不同材料这个函数都可以通过实验来确定：

$$\bar{\sigma} = E' \bar{\varepsilon}$$

$E'$ 为塑性模量，与材料性能和塑性变形程度有关

# 材料全量塑性本构关系

- 根据以上假设，可以写出如下方程

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G'} \sigma'_{ij}$$

$G'$ 为塑性剪切模量，与材料性能和塑性变形程度有关

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{3G'} [\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} = \frac{1}{2G'} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{3G'} [\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} = \frac{1}{2G'} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{3G'} [\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} = \frac{1}{2G'} \tau_{zx} \end{cases}$$

# 材料全量塑性本构关系

- 将上式正应变两两相减，并将切应变的表达式一起写出

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{1}{2G'}(\sigma_x - \sigma_y); & \gamma_{xy} = \frac{1}{2G'}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y - \varepsilon_z = \frac{1}{2G'}(\sigma_y - \sigma_z); & \gamma_{yz} = \frac{1}{2G'}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z - \varepsilon_x = \frac{1}{2G'}(\sigma_z - \sigma_x); & \gamma_{zx} = \frac{1}{2G'}\tau_{zx} \end{array} \right.$$

# 材料全量塑性本构关系

## ■ 再利用等效应力和等效应变公式

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}$$

整理后可得

$$\bar{\sigma} = 3G'\bar{\varepsilon}$$

利用  $\bar{\sigma} = E'\bar{\varepsilon}$

$$E' = 3G'$$

# 材料全量塑性本构关系

- 全量形变理论可以表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} = \frac{1}{2G'} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \gamma_{yz} = \frac{1}{2G'} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E'} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} = \frac{1}{2G'} \tau_{zx} \end{cases}$$

➤ 上式与广义虎克定律非常相似，只要将广义虎克定律中的 $E$ 、 $G$ 、 $\mu$ 分别用 $E'$ 、 $G'$ 、 $0.5$ 替代即可。但是广义虎克定律中 $E$ 、 $G$ 都是常数，而全量理论中 $E'$ 、 $G'$ 是与材料性能和加载历史有关的变量

# 主要塑性解析方法

- 主应力法
- 滑移线法
- 上限法

## ◆ 特殊问题

平面应变，轴对称，平面应力等

## ◆ 简化模型

简化边界，简化物理模型，简化几何模型

## ◆ 近似解析

求解过程简化

# 主应力法

## ■ 主应力法

主应力法是求解塑性加工问题的一种比较常用的解析方法。又称为切块法，初等解析法，力平衡法等

- ❖ 假设材料均匀变形；
- ❖ 将偏微分应力平衡方程简化为常微分应力平衡方程；
- ❖ 将二次方程的**Mises**屈服准则简化为线性方程；
- 最后归结为求解一阶常微分应力平衡方程问题。优点是数学运算简单，可以确定材料参数、变形几何体尺寸、摩擦等对成形的影响



# 主应力法

- 主应力法的基本原理
  - ❖ 假设材料变形是均匀的，变形状态属于平面应变或轴对称问题；
- 在平面应变条件下，变形前为平截面变形后仍为平截面，且与原平截面平行
- 在轴对称条件下，变形前的圆柱面在变形后仍为圆柱面，且与原圆柱面同轴
- 对于形状复杂的变形体，可以根据变形体流动规律，将其分成若干部分，对每一部分都近似地按平面应变或轴对称问题处理，最后再拼合在一起，就可以得到整个问题的解

# 主应力法

- 主应力法的基本原理
  - ❖ 根据变形体的塑性流动规律切取单元体，单元体包含接触表面在内；
- 通常所切取的单元体高度等于变形区的高度，将切面上的正应力假设为均匀分布的主应力
- 正应力的分布只随单一坐标变化，就可以将偏微分应力平衡方程简化为常微分应力平衡方程

# 主应力法

- 主应力法的基本原理
- ❖ 在应用**Mises**屈服准则时，忽略切应力和摩擦切应力的影响，将**Mises**屈服准则简化为线性方程；
- 对于平面应变问题，习惯用剪切屈服强度 $k$ 表示

$$\sigma_x - \sigma_y = 2k \quad \text{或} \quad \sigma_x - \sigma_y = -2k$$

- 对于轴对称问题，习惯用屈服应力 $\sigma_s$ 表示

$$\sigma_r - \sigma_z = \beta\sigma_s \quad \text{或} \quad \sigma_x - \sigma_y = -\beta\sigma_s$$

# 主应力法

- 主应力法的基本原理
  - ❖ 接触表面上的摩擦切应力分布采用简单的模型
- 库仑摩擦模型

接触表面上任意点的摩擦切应力与正压应力成正比

$$\tau_f = \mu \sigma_n$$

$\mu$ 为摩擦系数

- 常摩擦力模型

$$\tau_f = mk$$

$m$ 为摩擦因子,  $0 < m < 1$ ,  $k$ 为剪切屈服强度