

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$ ，其中 $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$ ，则当 $x \rightarrow 0$ 时， $\alpha(x)$ 是 ()

- (A) 比 x 高阶的无穷小 (B) 比 x 低阶的无穷小
(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小 (D) 与 x 等价的无穷小

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\cos(xy) + \ln y - x = 1$ 确定，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right] = ()$

- (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

(3) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 2, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ ， $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则 ()

- (A) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点 (B) $x = \pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点
(C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处连续但不可导 (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 处可导

(4) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$ ，若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛，则 ()

- (A) $\alpha < -2$ (B) $\alpha > 2$ (C) $-2 < \alpha < 0$ (D) $0 < \alpha < 2$

(5) 设 $z = \frac{y}{x} f(xy)$ ，其中函数 f 可微，则 $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ()$

- (A) $2yf'(xy)$ (B) $-2yf'(xy)$ (C) $\frac{2}{x} f(xy)$ (D) $-\frac{2}{x} f(xy)$

(6) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 在第 k 象限的部分，记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy (k=1, 2, 3, 4)$ ，则 ()

- (A) $I_1 > 0$ (B) $I_2 > 0$ (C) $I_3 > 0$ (D) $I_4 > 0$

(7) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵，若 $AB = C$ ，则 B 可逆，则

- (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0, b=2$

(B) $a=0, b$ 为任意常数

(C) $a=2, b=0$

(D) $a=2, b$ 为任意常数

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2 - \frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}} =$ _____.

(10) 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$ ，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy}|_{y=0} =$ _____.

(11) 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta$ ($-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$)，则 L 所围成的平面图形的面积为 _____.

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 _____.

(13) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程满足条件 $y|_{x=0} = 0$ $y'|_{x=0} = 1$ 的解为 $y =$ _____.

(14) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵， $|A|$ 为 A 的行列式， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ ，则 $|A| =$ _____.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴, y 轴旋转一周所得旋转体的体积, 若 $V_y = 10V_x$, 求 a 的值。

(17) (本题满分 10 分)

设平面内区域 D 由直线 $x = 3y, y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成. 计算 $\iint_D x^2 dx dy$ 。

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$; (II) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ 。

(19) (本题满分 11 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离。

(20) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$,

(I) 求 $f(x)$ 的最小值

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_n} < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限。

(21) (本题满分 11 分)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \quad (1 \leq x \leq e)$,

(1) 求 L 的弧长;

(2) 设 D 是由曲线 L , 直线 $x = 1, x = e$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标。

(22) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C 。

(23) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

