2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）（D）

（2）（A）

（3）（B）

（4）(A)

（5）（B）

（6）（B）

（7）（A）

（8）

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）1

（10）$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

（11）$\sqrt{2}$

（12）$\ln 2$

（13）-1

（14）$1-e^{-1}$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】$-4\ln 2+8-2\pi$

（16）【答案】（I）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$， $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$， $S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$，

因为 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，因此 $S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$；

（II）方程 $S^n(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，

解得 $\lambda_1=-1,\lambda_1=1$，所以 $S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$，

又 $a_0=S(0)=3\Rightarrow c_1+c_2=3$， $a_1=S'(0)=1\Rightarrow c_1-c_2=1$，

解得 $c_1=2,c_2=1$，所以 $S(x)=2e^{-x}+e^{x}$ 。

（17）【答案】$-e^{-\frac{1}{3}}$

（18）【答案】（1）令 $F(x)=f(x)-x,F(0)=f(0)=0,F(1)=f(1)-1=0,$

则 $\exists\xi\in\left(0,1\right)$ 使得 $F'(\xi)=0,\text{即}f'(\xi)=1$

（2）令 $G(x)=e^{x}(f'(x)-1)$, 则 $G(\xi)=0,$

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0$，

则 $\exists\eta\in\left(-\xi,\xi\right)\subset\left(-1,1\right)$ 使 $G'(\xi)=0,$

即 $e^{\eta}[f'(\eta)-1]+e^{\eta}f''(\eta)=0$，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）【答案】（1）l 过 A,B 两点，所以其直线方程为：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1-z\\ y=z\end{cases}$

所以其绕着 z 轴旋转一周的曲面方程为：

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}-(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$$

（20）【答案】

$b=0,a=-1$

$$C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$$

（21）【答案】(1)

$$f=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+(4a_1a_2+2b_1$$
$$+(4a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3$$

$$\text{则}f\text{的矩阵为}\begin{pmatrix}2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3\\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3\\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3\\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3\\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3\\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2\end{pmatrix}$$

$=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（2）令A=$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$,则$A\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha,A\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta\beta^T\beta=\beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于 $r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩

阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$

（22）【答案】（1）$F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

由 Y 的概率分布知，当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $1\le y\le 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<X\le y\}$

$$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx$$

$$=\frac{1}{27}(y^3+18)$$

(2) $F_X(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{27}x^3 & 0\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$

所以 $F_X(y)=P\{X\le y\}=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{27}y^3 & 0\le y<3\\ 1 & y\ge 3\end{cases}$

（23）【答案】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\frac{\theta}{x})=\theta$，令 $EX=\overline{X}$，故 θ 矩估计量为 $\overline{X}$.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

当 $x_i>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$，

得$\theta=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$，所以得$\theta$极大似然估计量$\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$.