2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）真题及答案解析

2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）真题+答案+解析

一、选择题： 1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）下列曲线中有渐进线的是（　）

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

【答案】C.

【解析】A.由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x)=\infty$，所以 $y=x+\sin x$无水平渐近线，又可知 $y=x+\sin x$无垂直渐近线，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin x-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$极限不存在，所以 $y=x+\sin x$无斜渐近线，

B.由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+\sin x)=\infty$，所以 $y=x^2+\sin x$无水平渐近线，又可知 $y=x^2+\sin x$无垂直渐近线，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x}=\infty$，极限不存在，所以 $y=x^2+\sin x$无斜渐近线，

C.由于 $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin\frac{1}{x})=\infty$，所以 $y=x+\sin\frac{1}{x}$无水平渐近线，又可知 $y=x+\sin\frac{1}{x}$无垂直渐近线，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(x+\sin\frac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以 $y=x+\sin\frac{1}{x}$有斜渐近线 $y=x$，

D. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+\sin\frac{1}{x})=\infty$，所以 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 无水平渐近线，又可知 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 无垂直渐近线，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\infty$，极限不存在，所以 $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$ 无斜渐近线.

（2）设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（　　）

(A)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　　　(B)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C)当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　　　(D)当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】D

【解析】$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，实质为一条连接点 $[0,f(0)]$ 与 $[1,f(1)]$ 的直线，所以当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)$ 为凹的，由图形知，$f(x)\le g(x)$

（3） 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$（　　）

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,y)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta,y)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,y)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta,y)rdr$

【答案】D.

【解析】由积分区域的图形可知，X 型区域对应的累次积分为

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$$

极坐标下对应的累次积分应为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, y) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta, y) r dr$$

（4）若$\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则$a_1\cos x+b_1\sin x=$

（ ）

$(A)\ 2\sin x$　　$(B)\ 2\cos x$　　$(C)\ 2\pi\sin x$　　$(D)\ 2\pi\cos x$

【答案】A.

【解析】实质为 $y=x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅立叶展开，所以 $a_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos xdx=0$，

$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin xdx=2$，所以 $a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$

（5）四阶行列式$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$（ ）

$(A)(ad-bc)^2$　$(B)-(ad-bc)^2$　$(C)a^2d^2-b^2c^2$　$(D)b^2c^2-a^2d^2$

【答案】(B)

（6）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维向量，则任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关

是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关（ ）

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件 (C)充分必要条件 (D)既非充分又非必要条件

【答案】(A)

（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$（ ）

$(A)\ 0.1$ $(B)\ 0.2$ $(C)\ 0.3$ $(D)\ 0.4$

【答案】(B)

（8）设连续型随机变量 X_1 与 X_2 相互独立且均存在方差，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则

$(A)\ EY_1>EY_2, DY_1>DY_2$， $(B)\ EY_1=EY_2, DY_1=DY_2$

$(C)\ EY_1=EY_2, DY_1<DY_2$， $(D)\ EY_1=EY_2, DY_1>DY_2$

【答案】(D)

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分

（9）曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处切平面方程为________

【答案】$2x-y-z=1$.

【解析】

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=[2x(1-\sin y)-y^2\cos x]\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=2$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=[-x^2\cos y+2y(1-\sin x)]\Big|_{\substack{x=1\\y=0}}=-1$，

所以切平面方程为$2(x-1)-(y-0)-(z-1)=0$，即$2x-y-z=1$

（10）设$f(x)$是周期为 4 的可导奇函数，且$f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,1]$，则$f(7)=$________

【答案】1.

【解析】由于$f'(x)=2(x-1)$，所以$f(x)=(x-1)^2+C$，又因$f(x)$是可导奇函数，所以$f(0)=0$，可得$C=-1$，所以$f(x)=(x-1)^2-1$，$x\in[0,1]$，$f(x)$周期为4，所以$f(7)=f(-1)=-f(1)$，又因$f(1)=-1$，所以$f(7)=1$.

（11）微分方程$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$满足条件$y(1)=e^3$的解为$y=$________

【答案】$y=xe^{2x+1}$.

【解析】由$xy'+y(\ln x-\ln y)=0$得$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{y}{x}}-\ln\frac{y}{x}=0$，令$\frac{y}{x}=u$得$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入齐次方程

得$\frac{u+x\frac{du}{dx}}{u}-\ln u=0$，整理得$\frac{du}{u(\ln u-1)}=\frac{dx}{x}$，两侧积分得$\int\frac{du}{u(\ln u-1)}=\int\frac{dx}{x}$，所以

$\ln|\ln u-1|=\ln|x|+C$，即$\ln u=Cx+1$，所以$u=\frac{y}{x}=e^{Cx+1}$，所以$y=xe^{Cx+1}$，又$y(1)=e^3$，

得$C=2$，所以$y=xe^{2x+1}$

（12）设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L zdx+ydz=$________

【答案】π.

【解析】令$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，得$z=-\sin\theta$，代入$\oint_L zdx+ydz$得

$$\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)d\theta=\pi$$

（13）设$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为1，则$a$的取值范围为________.

【答案】$[-2,2]$

（14）设总体X的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2},\theta<x<2\theta,\\ \theta,\text{其他}\end{cases}$$

其中θ为未知参数，X_1,X_2,L,X_n为来自总体X的简单随机变量，若$c\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2$是$\theta^2$的无偏估计量，则 $c=$ ___

【答案】$\dfrac{3}{8n}$

三、解答题： 15-23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）**（本题满分 10 分）**

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^2(e^t-1)-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^+}\left[\frac{(e^t-1)-t}{t^2}\right]=\frac{1}{2}$$

（16）设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $y=f(x)$ 的极值

【答案】极小值 $y(1)=-2$.

【解析】对 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 两侧关于 x 求导得，$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$，得 $y'=-\dfrac{2xy+y^2}{3y^2+2xy+x^2}$，令 $y'=-\dfrac{2xy+y^2}{3y^2+2xy+x^2}=0$ 得，$y=0$ 或 $y=-2x$ 将，$y=0$ 代原方程矛盾，所以 $y=-2x$，代入 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 得 $x=1$，此时 $y=-2$，对 $3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$ 两侧关于 x 求导得，

$$6y(y')^2+3y^2y''+2yy'+2(xy)'y'+2xyy''+2y+4xy'+x^2y''=0$$

将 $x=1$，$y=-2$，$y'(1)=0$ 代入上式得，$y''(1)=\dfrac{4}{9}$，所以 $x=1$ 为 $y=f(x)$ 以极小值点，极小

值为 $y=-2$.

（17） 设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数， $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

【答案】$f(u)=\frac{1}{4}u(e^{2u}-1)$.

【解析】由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

得

$$f''(e^x\cos y)=4z+e^x\cos y=4f(e^x\cos y)+e^x\cos y$$

所以 $f''(u)=4f(u)+u$，对应的微分方程为 $y''-4y=x$，为二阶非齐次线性微分方程，其齐次通解为 $Y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}$，非齐次特解为 $Y^*(x)=ax+b$ 代入原微分方程得 $a=-\frac{1}{4},b=0$，所以

$Y^*(x)=-\frac{1}{4}x$，所以非齐次通解 $y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}-\frac{1}{4}x$，由 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，得

$C_1=0,C_2=\frac{1}{4}$，所以 $y(x)=\frac{1}{4}x(e^{2x}-1)$，即 $f(u)=\frac{1}{4}u(e^{2u}-1)$.

（18）设Σ为曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma (x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

【答案】-4π.

【解析】由高斯公式，补面：$z=1,x^2+y^2\le 1$取下侧，

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma (x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy\\&=-\iiint\limits_\Omega\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dv-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy\\&=-4\pi\end{aligned}$$

（19）设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；（2）证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛

【解析】（1）

因为 $0\le\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}\le\frac{1-\cos b_n}{b_n}$

又因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}b_n^{\ 2}}{b_n}=0$，

由夹逼准则，可得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

（2）由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\cos b_n}{b_n}}{b_n}=\frac{1}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n}$收敛

而$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\cos a_n-\cos b_n}{b_n}\le\frac{1-\cos b_n}{b_n}$，所以，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$收敛.

（20）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵

（Ⅰ）求$Ax=0$的一个基础解系；

（Ⅱ）求满足$AB=E$的所有的矩阵B.

【详解】（Ⅰ）$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}$

从而同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$$

所以方程组$Ax=0$的一个基础解系为$\alpha=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$

（II）令 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则

$$(A M \beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & M\,1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & M\,0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & M\,0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & M\,2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & M\,-1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & M\,-1 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

所以 $Ax=\beta_1$ 的一个特解为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$Ax=\beta_2$ 的一个特解为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}$

$Ax=\beta_3$ 的一个特解为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$

所以

$$B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix},(k_1,k_2,k_3\in R)$$

（21）证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 1 & L & 1 \\ M & M & & M \\ 1 & 1 & L & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & 0 & L & 1 \\ 0 & 0 & L & 2 \\ M & M & & M \\ 0 & 0 & L & n \end{pmatrix}$相似.

【证明】令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & L & 1 \\ 1 & 1 & L & 1 \\ M & M & & M \\ 1 & 1 & L & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & L & 1 \\ 0 & 0 & L & 2 \\ M & M & & M \\ 0 & 0 & L & n \end{pmatrix}$$

则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0, \lambda_n=n$$

因为 $A^T=A$，即 A 为实对称矩阵，

所以 A 可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix}==\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=n$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 时，$-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & L & -1 \\ 0 & 0 & L & -2 \\ M & M & & M \\ 0 & 0 & L & -n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & L & 1 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ M & M & & M \\ 0 & 0 & L & 0 \end{pmatrix}$

即 $r(-B)=1$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=0$ 对应 $n-1$ 个线性无关的特征向量

从而 B 可相似对角化，即 $B\sim\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{pmatrix} n-1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

所以 A 与 B 相似

（22） 设随机变量X的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量Y服从均匀分布 $u(0,i)(i=1,2)$，

（Ⅰ）求Y的分布函数 $F_Y(y)$；

（Ⅱ）求$E(Y)$.

【详解】（Ⅰ）

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y,X=1\}+P\{Y\le y,X=2\}$$
$$=P\{Y\le y/X=1\}P\{X=1\}+P\{Y\le y/X=1\}P\{X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}\left[P\{Y\le y/X=1\}+P\{Y\le y/X=2\}\right]$$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}\left(y+\frac{y}{2}\right)=\frac{3}{4}y$

当$1\le y<2$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right)$

当$y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$

所以$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}y, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{2}\right), & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$

（Ⅱ）由Y的分布函数$F_Y(y)$得到概率密度为

$$f(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, 0\le y<1\\ \frac{1}{4}, 1\le y<2\\ 0, 其他\end{cases}$$

则$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy=\int_0^1 y\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\frac{1}{4}dy=\frac{3}{4}$

（23）设总体X的分布函数

$$F(x,\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

其中θ为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体的简单随机样本

（Ⅰ）求EX与EX^2；

（Ⅱ）求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$；

（Ⅲ）是否存在实数a，使得对任何$\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-a\right|\geq\varepsilon\right)=0$？

【详解】（Ⅰ）由X的分布函数$F(x)$得到概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty} x^2\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\theta$$

（Ⅱ）最大似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\begin{cases}\left(\dfrac{2}{\theta}\right)^n\prod\limits_{i=1}^{n}x_ie^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

对于 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geq 0$ 时，

$$\ln L(\theta)=n(\ln 2-\ln\theta)+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

对 θ 求导得

$$\ln L'(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

令其等于 0，得到 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$，从而 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$

（III） $E\hat{\theta}=E\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=EX^2=\theta$

所以存在实数 $a=\theta$，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\hat{\theta}-a\right|\geq\varepsilon\right)=0$.