2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是(　　)

(A) $(1,0)$.　　(B) $(2,0)$.　　(C) $(3,0)$.　　(D) $(4,0)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\ (n=1,2,\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为(　　)

(A) $(-1,1]$.　　(B) $[-1,1)$.　　(C) $[0,2)$.　　(D) $(0,2]$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是(　　)

(A) $f(0)>1$，$f''(0)>0$.　　(B) $f(0)>1$，$f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$，$f''(0)>0$.　　(D) $f(0)<1$，$f''(0)<0$.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为(　　)

(A) α_1,α_3.　　(B) α_1,α_2.　　(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

(7) 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$ 则 $E(UV)=$(　　)

(A) $E(U)\cdot E(V)$.　　(B) $E(X)\cdot E(Y)$.

(C) $E(U)\cdot E(Y)$.　　(D) $E(X)\cdot E(V)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\int_0^x \tan t dt (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$________.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$________.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$________.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$.

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

(18)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$.

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本,其中 μ_0 已知,$\sigma^2>0$ 未知. $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.