

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = (\quad)$

- (A) 1. (B) e . (C) e^{a-b} . (D) e^{b-a} .

(2) 设函数 $z = z(x, y)$, 由方程 $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_2 \neq 0$, 则

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = (\quad)$

- (A) x . (B) z . (C) $-x$. (D) $-z$.

(3) 设 m, n 是正整数, 则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 的收敛性 ()

- (A) 仅与 m 的取值有关. (B) 仅与 n 的取值有关.
(C) 与 m, n 取值都有关. (D) 与 m, n 取值都无关.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = (\quad)$

- (A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$. (B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$.
(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$. (D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$.

(5) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵, 若 $AB = E$, 则 ()

- (A) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = m$. (B) 秩 $r(A) = m$, 秩 $r(B) = n$.
(C) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = m$. (D) 秩 $r(A) = n$, 秩 $r(B) = n$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(7) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases} \text{ 则 } P\{X=1\} = ()$$

- (A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}, (a > 0, b > 0) \text{ 为概率密度, 则 } a, b \text{ 应满足 } ()$$

- (A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$. (C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

$$(9) \text{ 设 } \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases} \text{ 求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x|$ $\{x \in [-1, 1]\}$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点是 $(1, 0)$, 则曲线积分

$$\int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(12) 设 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$, 则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T$, $\alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T$, 若由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间的维数是 2, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{C}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 则 $E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

(16) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n=1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n=1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直, 求点

P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $Ax = b$ 存在两个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第三列为

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(I) 求矩阵 A ;

(II) 证明 $A + E$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta \in (0,1)$ 未知, 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本 (样本容量为 n) 中等于 i 的个数

($i=1,2,3$). 试求常数 a_1, a_2, a_3 , 使 $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$ 为 θ 的无偏估计量, 并求 T 的方差.