2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】(C).

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-e^x(1-ax)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-e^x+axe^x\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x}+\frac{axe^x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{axe^x}{x}=-1+a=1$$

所以 $a=2$.

(2) 【答案】(A).

【解析】因 $\lambda y_1-\mu y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解，故 $(\lambda y_1-\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=0$，所以

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]-\mu\left[y_2'+p(x)y_2\right]=0,$$

而由已知 $y_1'+P(x)y_1=q(x), y_2'+P(x)y_2=q(x)$，所以

$$(\lambda-\mu)q(x)=0, \qquad ①$$

又由于一阶次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 是非齐的，由此可知 $q(x)\neq 0$，所以 $\lambda-\mu=0$.

由于 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是非齐次微分方程 $y'+P(x)y=q(x)$ 的解，所以

$$(\lambda y_1+\mu y_2)'+P(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=q(x),$$

整理得

$$\lambda\left[y_1'+P(x)y_1\right]+\mu\left[y_2'+P(x)y_2\right]=q(x),$$

即

$$(\lambda+\mu)q(x)=q(x),\text{ 由 } q(x)\neq 0 \text{ 可知 } \lambda+\mu=1, \qquad ②$$

由①②求解得 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$，故应选(A).

(3)【答案】(B).

【解析】$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$,

$$\{f[g(x)]\}''=\{f'[g(x)]\cdot g'(x)\}'=f''[g(x)]\cdot[g'(x)]^2+f'[g(x)]\cdot g''(x)$$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，所以 $g'(x_0)=0$. 所以

$$\{f[g(x_0)]\}''=f'[g(x_0)]\cdot g''(x_0)=f'(a)\cdot g''(x_0)$$

由于 $g''(x_0)<0$, 要使 $\left\{f\left[g(x)\right]\right\}''<0$, 必须有 $f'(a)>0$, 故答案为 B.

(4)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x}{10}}\dfrac{1}{10}=+\infty$, 所以, 当 x 充分大时, $h(x)>g(x)$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{10}x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}10\dfrac{\ln^9 x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=10\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^9 x}{x}$

$$=10\cdot 9\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8 x\cdot\dfrac{1}{x}}{1}=\cdots=10\cdot 9\cdots 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

所以当 x 充分大时, $f(x)<g(x)$, 故当 x 充分大, $f(x)<g(x)<h(x)$.

(5)【答案】(A).

【解析】由于向量组 I 能由向量组 II 线性表示, 所以 $r(\mathrm{I})\le r(\mathrm{II})$, 即

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$$

若向量组 I 线性无关, 则 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=r$, 所以 $r=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\le r(\beta_1,\cdots,\beta_s)\le s$, 即 $r\le s$, 选 (A).

(6)【答案】(D).

【解析】设 λ 为 A 的特征值, 由于 $A^2+A=O$, 所以 $\lambda^2+\lambda=0$, 即 $(\lambda+1)\lambda=0$, 这样 A 的特征值只能为-1 或 0. 由于 A 为实对称矩阵, 故 A 可相似对角化, 即 $A\sim\Lambda$, $r(A)=r(\Lambda)=3$, 因此, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$, 即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7)【答案】(C).

【解析】离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中 $F(x)$ 的形式, 得到随机变量 X 既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-e^{-1}$, 故本题选 (C).

(8)【答案】(A).

【解析】根据题意知，$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$（$-\infty<x<+\infty$），$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$

利用概率密度的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$$

所以整理得到$2a+3b=4$，故本题应选(A).

二、填空题

(9)【答案】-1.

【解析】$\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=x\int_0^x\sin t^2dt$，令$x=0$，得$y=0$，等式两端对$x$求导：

$$e^{-(x+y)^2}(1+\frac{dy}{dx})=\int_0^x\sin t^2dt+x\sin x^2.$$

将$x=0$，$y=0$代入上式，得$1+\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$. 所以$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=-1$.

(10)【答案】$\frac{\pi^2}{4}$.

【解析】根据绕x轴旋转公式，有

$$V=\int_e^{+\infty}\pi y^2dx=\int_e^{+\infty}\pi\frac{dx}{x\left(1+\ln^2x\right)}$$

$$=\pi\int_e^{+\infty}\frac{d\ln x}{1+\ln^2x}=\pi\cdot\left[\arctan(\ln x)\right]_e^{+\infty}=\pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}.$$

(11)【答案】$p\cdot e^{\frac{1}{3}\left(P^3-1\right)}$.

【解析】由弹性的定义，得$\frac{dR}{dp}\cdot\frac{p}{R}=1+p^3$，所以$\frac{dR}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)dp$，即$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^2+C$，又

$R(1)=1$，所以$C=-\frac{1}{3}$. 故$\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}$，因此$R=p\cdot e^{\frac{1}{3}\left(p^3-1\right)}$.

(12)【答案】$b=3$.

【解析】函数为$y=x^3+ax^2+bx+1$，它的一阶导数为$y'=3x^2+2ax+b$；二阶导数为$y''=6x+2a$，

又因为$(-1,0)$是拐点，所以$y''|_{x=-1}=0$，得$-\frac{a}{3}=-1$，所以$a=3$，又因为曲线过点$(-1,0)$，所以将

$x=-1,y=0$ 代入曲线方程，得 $b=3$.

(13) 【答案】3.

【解析】由于 $A(A^{-1}+B)B^{-1}=(E+AB)B^{-1}=B^{-1}+A$，所以

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A(A^{-1}+B)B^{-1}\right|=\left|A\right|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|$$

因为 $\left|B\right|=2$，所以 $\left|B^{-1}\right|=\left|B\right|^{-1}=\dfrac{1}{2}$，因此

$$\left|A+B^{-1}\right|=\left|A\right|\left|A^{-1}+B\right|\left|B^{-1}\right|=3\times 2\times\frac{1}{2}=3.$$

(14)【答案】$\sigma^2+\mu^2$.

【解析】$E\left(T\right)=E\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\dfrac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\dfrac{1}{n}nE\left(X^2\right)=E\left(X^2\right)=\sigma^2+\mu^2$.

三、解答题

(15)【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}}$

其中

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)^{-1}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}(\frac{1}{\ln x}-1)=-1.$$

故原式 $=e^{-1}$.

(16)【解析】积分区域 $D=D_1\cup D_2$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le 1,\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\middle|-1\le y\le 0,-\sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\right\}$

$\iint\limits_D\left(x+y\right)^3dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)dxdy$

因为区域 D 关于 x 轴对称，被积函数 $3x^2y+y^3$ 是 y 的奇函数，所以 $\iint\limits_D\left(3x^2y+y^3\right)dxdy=0$.

$$\iint\limits_D\left(x+y\right)^3dxdy=\iint\limits_D\left(x^3+3xy^2\right)dxdy=2\iint\limits_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)dxdy=2\left[\int_0^1dy\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)dx\right]$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}dy=2\int_0^1\left(-\frac{9}{4}y^4+2y^2+\frac{1}{4}\right)dy=\frac{14}{15}.$$

(17)【解析】令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$，用拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases}F_x'=y+2\lambda x=0,\\F_y'=x+2z+2\lambda y=0,\\F_z'=2y+2\lambda z=0,\\F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0,\end{cases}$$

求解得六个点：

$$A\left(1,\sqrt5,2\right),B\left(-1,-\sqrt5,-2\right),$$

$$C\left(1,-\sqrt5,2\right),D\left(-1,\sqrt5,-2\right),$$

$$E\left(2\sqrt2,0,-\sqrt2\right),F\left(-2\sqrt2,0,\sqrt2\right).$$

由于在点 A 与 B 点处，$u=5\sqrt5$；在点 C 与 D 处，$u=-5\sqrt5$；在点 E 与 F 处，$u=0$.

又因为该问题必存在最值，并且不可能在其它点处，所以 $u_{\max}=5\sqrt5$，$u_{\min}=-5\sqrt5$.

(18)【解析】(I)当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$，故 $[\ln(1+t)]^n<t^n$，所以

$$|\ln t|[\ln(1+t)]^n<|\ln t|t^n,$$

则

$$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt<\int_0^1|\ln t|t^n dt\ (n=1,2,\cdots).$$

(II) $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t d\left(t^{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$，故由

$$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(19)【解析】(I) 因为 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx$，又因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，所以由积分中值定理得，至少有一点 $\eta\in[0,2]$，使得

$$\int_0^2 f(x)dx=f(\eta)\cdot(2-0)$$

即 $2f(0)=2f(\eta)$，所以存在 $\eta\in[0,2]$，使得 $f(\eta)=f(0)$.

（II）因为 $f(2)+f(3)=2f(0)$，即 $\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$，又因为 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续，由介值定理知，至少存在一点 $\eta_1\in[2,3]$ 使得 $f(\eta_1)=f(0)$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $[0,2]$ 上可导，且 $f(0)=f(2)$，所以由罗尔中值定理知，C 存在 $\xi_1\in(0,2)$，有 $f'(\xi_1)=0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[2,\eta_1]$ 上连续，在 $(2,\eta_1)$ 上可导，且 $f(2)=f(0)=f(\eta_1)$，所以由罗尔中值定理知，存在 $\xi_2\in(2,\eta_1)$，有 $f(\xi_2)=0$.

又因为 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上二阶可导，且 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，所以由罗尔中值定理，至少有一点 $Ax=b\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解，所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3，进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数，有以下两种方法.

方法 1：（Ⅰ）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\bar{A})<3$，对增广矩阵进行初等行变换，得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当 $\lambda=1$ 时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，此时，$r(A)\neq r(\bar{A})$，故 $Ax=b$ 无解（舍去）.

当 $\lambda=-1$ 时，$\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&a+2\end{array}\right)$，由于 $r(A)=r(\bar{A})<3$，所以 $a=-2$，故 $\lambda=-1$，$a=-2$.

方法 2：已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\bar{A})<3$，因此 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知 $\lambda=1$ 或-1.

当 $\lambda=1$ 时, $r(A)=1\neq r(\overline{A})=2$, 此时, $Ax=b$ 无解, 因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\overline{A})$, 得 $a=-2$.

（II）对增广矩阵做初等行变换

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为 $\begin{cases}x_1-x_3=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21) 【解析】由于 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$, 存在正交矩阵 Q, 使得 Q^TAQ 为对角阵, 且 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$, 故 A 对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$.

根据特征值和特征向量的定义, 有 $A\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, 即

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 由此可得 $a=-1, \lambda_1 = 2$. 故 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

由 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -4 \\ 1 & \lambda-3 & 1 \\ -4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$,

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-4, \lambda_3=5$.

由 $(\lambda_2 E - A)x=0$, 即 $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -4 \\ 1 & -7 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$, 可解得对应于 $\lambda_2=-4$ 的线性无关的特征向量为 $\xi_2=(-1,0,1)^T$.

由 $(\lambda_3 E - A)x=0$, 即 $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$, 可解得对应于 $\lambda_3=5$ 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,1)^T$.

由于 A 为实对称矩阵, ξ_1,ξ_2,ξ_3 为对应于不同特征值的特征向量, 所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 相互正交, 只需单位化:

$$\eta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T, \eta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T, \eta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, 则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & -4 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$.

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度 $f(x,y)$ 后, 要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$, 可以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 来进行计算. 本题中还有待定参数, A 要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2-x^2}dy=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty.$$

根据概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi\text{，即 }A=\pi^{-1},$$

故 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，$-\infty<x<+\infty$.

当$-\infty<x<+\infty$时，有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

（23）【解析】（I）X 的所有可能取值为$0,1$，Y 的所有可能取值为$0,1,2$.

$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，其中 $X=0,Y=0$表示取到的两个球都是黑球；

$P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$，其中 $X=0,Y=1$表示取到的一个是白球，一个是黑球；

$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$，其中 $X=0,Y=2$表示取到的两个球都是白球；

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，其中 $X=1,Y=0$表示取到的一个是红球，一个是黑球；

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$，其中 $X=1,Y=1$表示取到的一个是红球，一个是白球；

$P\{X=1,Y=2\}=\frac{0}{C_6^2}=0$，

因此二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{1}{3}$

（II）$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$，

$E(XY)=1\times1\times\frac{2}{15}=\frac{2}{15}$，$E(X)=0\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

$$E\left(Y\right)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$$

$$Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}.$$