2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　)

(A) $k=1, c=4$.　　(B) $k=1, c=-4$.

(C) $k=3, c=4$.　　(D) $k=3, c=-4$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$(　　)

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I, J, K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 A 为 4×3 矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为(　　)

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，　$T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$ (　　)

(A) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.　　(B) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.

(C) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.　　(D) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ _____.

(10) 设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$______.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为_________ .

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)$=______ .

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f\left[x+y,f(x,y)\right]$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

(17)（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

(18)（本题满分 10 分）

证明 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 实根.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，$f(0)=1$，且 $\displaystyle\iint_{D_t}f'(x+y)dxdy=\iint_{D_t}f(t)dxdy$，$D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x,0\le x\le t\}(0<t\le 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(21)（本题满分 11 分）

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A.

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(II)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(III)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0,x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的区域.

(I)求边缘概率密度 $f_X(x)$;

(II)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.