2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试题

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

1、下列反常积分收敛的是（ ）

$(A)\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$　　$(B)\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　　$(C)\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　　$(D)\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

【答案】：D

【解析】：

$$(A):\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{N\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\Big|_2^N\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(2\sqrt{N}-2\sqrt{2}\right)=+\infty$$

$$(B):\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_2^N\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(\ln N)^2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2\right)=+\infty$$

$$(C):\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{N\to+\infty}\int_2^N\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{N\to+\infty}\left(\ln|\ln x|\Big|_2^N\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\ln|\ln N|-\ln|\ln 2|\right)=+\infty$$

$$(D):\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx=-\lim_{N\to+\infty}\int_2^N xde^{-x}=-\lim_{N\to+\infty}\left(xe^{-x}\Big|_2^N-\int_2^N e^{-x}dx\right)=-\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{N}{e^N}-\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^N}-\frac{1}{e^2}\right)=\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e^2}$$

2、函数 $f(x)=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（ ）

(A) 连续　　(B) 有可去间断点　　(C) 有跳跃间断点　　(D) 有无穷间断点

【答案】：B

【解析】：

$$f(x)=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x}{\sin t}\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^x$$

但是函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，而有上述可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限是存在的，所以是可去间断点，答案选 B

3、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta},x>0\\0,\quad x\le0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$，若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（ ）

$(A)\alpha-\beta>1$　　$(B)0<\alpha-\beta\le1$　　$(C)\alpha-\beta>2$　　$(D)0<\alpha-\beta\le2$

【答案】：A

【解析】：

$$x>0, f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+x^\alpha\left(-\sin\frac{1}{x^\beta}\right)\left(-\beta x^{-\beta-1}\right)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

$$x<0, f'(x)=0$$

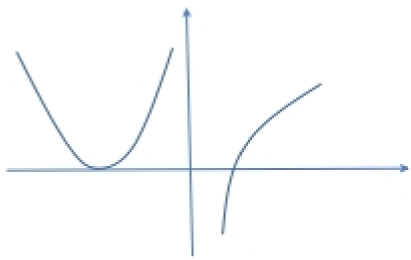
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=0.$$

由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以我们有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=f'_+(0)=f'_-(0)=0$

所以我们有 $\alpha-1>0, \alpha-\beta-1>0$. 又因为 $\alpha>0, \beta>0$. 所以我们有 $\alpha-\beta>1$. 答案为 A

4、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的



拐点个数为（ ）

$(A)0$ $(B)1$

$(C)2$ $(D)3$

【答案】：C

【解析】：

拐点是连续函数凹凸性的分界点，而由于函数二阶可导的（0 点除外），所以可知二阶导数大于 0，函数为凹函数，二阶导数小于 0，函数是凸函数，所以我们只需要从图像上找到在某点两端二阶导数异号就可以了。显然这样的点共有两个，有很多同学忽略了原点，这是不对的。所以答案为 C。

5、设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是（ ）

$(A)\frac{1}{2},0$ $(B)0,\frac{1}{2}$ $(C)-\frac{1}{2},0$ $(D)0,-\frac{1}{2}$

【答案】：D

【解析】：

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{1+v} \\ y = \dfrac{uv}{1+v} \end{cases}, f(u,v) = \left(\frac{u}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{uv}{1+v}\right)^2$$

$$f(u,1) = 0, \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}} = 0.$$

$$f(1,v) = \left(\frac{1}{1+v}\right)^2 - \left(\frac{v}{1+v}\right)^2 = \frac{1-v}{1+v}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}} = -\frac{1}{2}.$$

6、设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$（ ）

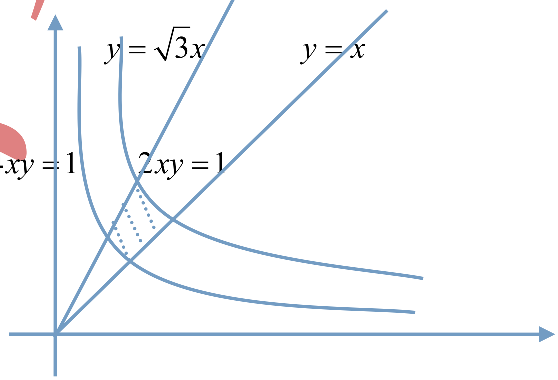
$(A)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$　　$(B)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

$(C)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$　　$(D)\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

【答案】：B

【解析】：

先做出积分图像



可知 θ 的取值范围为 $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$；$r$ 的取值范围为 $\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}} \le r \le \frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$；另外需要注意极坐标和直角坐标之间的变换公式 $dxdy = rd\theta dr$. 答案是 B。

7、设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，若集合 $\Omega = \{1,2\}$，则线性方程组 $\mathbf{A}x = b$ 有无穷多个解的充分必要条件为（ ）

$(A) a \notin \Omega, d \notin \Omega$ $(B) a \notin \Omega, d \in \Omega$ $(C) a \in \Omega, d \notin \Omega$ $(D) a \in \Omega, d \in \Omega$

【答案】：D

【解析】：

有无穷多解，只需要系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，并且都小于 3. 下对增广矩阵进行初等行变换。

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix},$$

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$。答案选（D）

8、设二次型 $f\left(x_1,x_3,x_3\right)$ 在正交变换 $x=\mathbf{P}y$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\mathbf{P}=\left(e_1,e_2,e_3\right)$，若 $\mathbf{Q}=\left(e_1,-e_3,e_2\right)$，则 $f\left(x_1,x_3,x_3\right)$ 在正交变换 $x=\mathbf{Q}y$ 下的标准形为（ ）

$(A) 2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ $(B) 2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ $(C) 2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ $(D) 2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】：A

【解析】：

由题设可知 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PB$$

$$Q^TAQ=B^T(P^TAP)B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$。答案选（A）

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9、设 $\begin{cases}x=\arctan t\\y=3t+t^3\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$______

【答案】：48

【解析】：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{3\left(1+t^2\right)}{\frac{1}{1+t^2}}=3\left(1+t^2\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{12t\left(1+t^2\right)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t\left(1+t^2\right)^2$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48$$

10、函数 $\frac{n(n-1)}{2}(\ln 2)^{n-2}$ $f(x)=x^2\bullet 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$______

【答案】：$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

【解析】：

$$f^{(n)}(x)=\left(x^2\cdot 2^x\right)^{(n)}=C_n^0\left(2^x\right)^{(n)}x^2+C_n^1\left(2^x\right)^{(n-1)}2x+C_n^2\left(2^x\right)^{(n-2)}2$$

$$f^{(n)}(0)=\left.\left(C_n^2\left(2^x\right)^{(n-2)}2\right)\right|_{x=0}=\left.\left(\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^{n-2}\cdot 2\right)\right|_{x=0}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$$

11、设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，

则 $f(1)=$________

【答案】：2

【解析】：

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$$

$$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt=x\int_0^{x^2}f(t)dt$$

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+xf\left(x^2\right)\cdot 2x$$

$$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+f(1)\cdot 2=5$$

$$f(1)=2$$

12、设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处

$y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$________

【答案】：$e^{-2x}+2e^x$

【解析】:

先求解特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 解得 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$. 所以原方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$

由题设可知 $y(0)=3, y'(0)=0.$

代入解得 $y=e^{-2x}+2e^x$

13、若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}=$_______

【答案】: $-\frac{1}{3}(dx+2dy)$

【解析】:

求全微分，我们先求出偏导数，这是隐函数，直接在方程两端对 x，y 求偏导数。

$$e^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{1}{3}.$$

$$e^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{2}{3}.$$

则 $dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}(dx+2dy)$

14、设3阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1, B=A^2-A+E$，其中 E 为3阶单位矩阵，则行列式 $|B|=$___

【答案】: 21.

【解析】:

由题设可知矩阵 A^2 的特征值为 $4,4,1$. 所以矩阵 B 的特征值为 $3,7,1$.

则 $|B|=3\cdot7\cdot1=21.$

三、解答题：15-23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 是等价无穷小，

求 a,b,k 值

【答案】: $a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

【解析】:

使用 Taylor 公式。

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$;

$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{kx^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{6}x^4+o(x^3)}{kx^3}$$

所以$1+a=0,b-\frac{a}{2}=0,\frac{a}{3k}=1$

$\therefore a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

16、设$A>0$，D是由曲线段$y=A\sin x(0\le x\le\frac{\pi}{2})$及直线$y=0,x=\frac{\pi}{2}$所围成的平面区域，$V_1,V_2$分别表示$D$绕$x$轴与绕$y$轴旋转所成旋转体的体积，若$V_1=V_2$,求$A$的值

【答案】：$A=\frac{8}{\pi}$.

【解析】：

$V_1=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(A\sin x)^2\,dx=\frac{\pi^2A^2}{4}$.

$V_2=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2A-\pi\int_0^A\left(\arcsin\frac{y}{A}\right)^2dy=2\pi A$.

$A=\frac{8}{\pi}$.

17、已知函数$f(x,y)$满足$f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x,f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，

$f(0,y)=y^2+2y$，求$f(x,y)$的极值

【答案】：极小值$f(0,-1)=-1$

【解析】：

先求出 $f\left(x,y\right)$.

对函数 $f''_{xy}(x,y)$ 两端对 y 求不定积分，可得 $f'_x(x,y)=\left(y^2+2y\right)e^x+\varphi_1\left(x\right)$.

由于 $f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，所以我们有 $\varphi_1\left(x\right)=(x+1)e^x, f'_x\left(x,y\right)=\left(y^2+2y\right)e^x+(x+1)e^x$

再对函数 $f'_x(x,y)$ 两端对 x 求不定积分，可得 $f(x,y)=\left(y^2+2y\right)e^x+xe^x+\varphi_2\left(y\right)$.

由于 $f(0,y)=y^2+2y.$，所以我们有 $\varphi_2\left(y\right)=0, f\left(x,y\right)=\left(y^2+2y\right)e^x+xe^x$

下求 $f(x,y)$ 的极值。

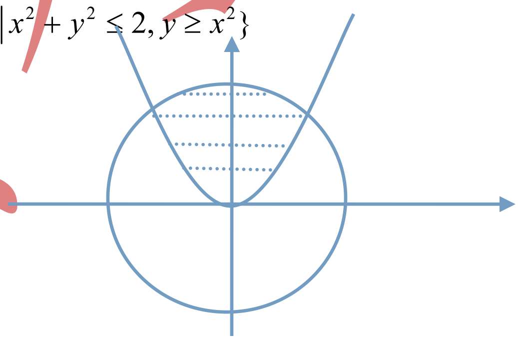
$$\begin{cases} f'_x\left(x,y\right)=\left(y^2+2y\right)e^x+(x+1)e^x=0 \\ f'_y\left(x,y\right)=2\left(y+1\right)e^x=0 \end{cases}$$

解得 $x=0, y=-1$，而

$$A=f''_{xx}\left(0,-1\right)=1, B=f''_{xy}\left(0,-1\right)=0, C=f''_{yy}\left(0,-1\right)=2.$$

由于 $AC-B^2>0, A>0,$ 所以取得极小值 $f\left(0,-1\right)=-1$

18、计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$



【答案】: $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{5}$

【解析】:

先做出积分区域（如右图）。

由于积分区域关于 y 轴对称，所以又对称性可知。

$$\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2dy=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

19、已知函数 $f\left(x\right)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$，求 $f(x)$ 零点的个数

【答案】: 2

【解析】:

先求函数的单调区间。

$$f'\left(x\right)=-\sqrt{1+x^2}+2x\sqrt{1+x^2}.$$

可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增。

下判断函数在 1/2 处的函数值以及在正无穷，负无穷处函数的趋势。

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1+t^2}dt+\int_{1}^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}dt$$

$$=-\int_{1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+t^2}dt+\int_{1}^{\frac{1}{2}}2t\sqrt{1+t^2}dt<0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt\right)>0.$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt-\int_1^{x}\sqrt{1+t^2}dt\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\int_1^{x}2t\sqrt{1+t^2}dt-\int_1^{x}\sqrt{1+t^2}dt\right)>0$$

由零点存在定理可知函数存在两个零点。

20、已知高温物体置于低温介质中，任一时刻物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为120℃的物体在20℃恒温介质中冷却，30min后该物体温度降至30℃，若要将物体的温度继续降至21℃，还需要冷却多长时间？

【答案】$30\min$

【解析】解：设t时刻，物体的温度为$f(t)$，比例系数为k，由题设可知$f'(t)=k\left[f(t)-20\right]$，

解得$f(t)=20+ce^{kt}$，由题设可知初始条件为$f(0)=120,f(30)=30$，代入可得

$c=100,k=-\dfrac{\ln 10}{30}$，则$f(t)=20+100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}$，故$21=20+100e^{-\frac{\ln 10}{30}t}$，解得$t=60$，故还需

$30\min$。

21、已知函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上具有2阶导数，$f(a)=0,f'(x)>0,f''(x)>0$，设$b>a$，

曲线$y^*=f(x)$在点$(b,f(b))$处的切线与x轴的交点是$(x_0,0)$，证明：$a<x_0<b$

【答案】:

【解析】：证明：切线方程为$y=f'(b)(x-b)+f(b)$

与x轴的交点为$\left|b-\dfrac{f(b)}{f'(b)},0\right|$，则有$x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$

由于$f'(x)>0$，可知$f(b)>f(a)=0$，故$b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$。

下面证明 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}>a$，由于 $f'(b)>0$，故不等式可化为 $bf'(b)-f(b)>af'(b)$，则令 $f(x)=xf'(x)-f(x)-af'(x)$，$f(a)=0$。$f'(x)=(x-a)f''(x)>0$，可知当 $x>a$ 时，$f(x)>0$。故 $xf'(x)-f(x)-af'(x)>0$，即 $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}>a$ 证毕。

22、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3=0$

（I）　求 a 的值

（II）　若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X

【答案】（Ⅰ）$a=0$；　（Ⅱ）$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

【解析】解：（Ⅰ）由题设可知 A 的特征根为 0，则 $tr(A)=3a=0$，故 $a=0$。

（Ⅱ）由题设可知，$X(E-A^2)-AX(E-A^2)=E,(X-AX)(E-A^2)=E$，则 $X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$,即 $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

23、设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 为对角矩阵.

【答案】（Ⅰ）$a=4,b=5$；（Ⅱ）$P=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

【解析】解：（Ⅰ）由 $A\sim B$ 有 $tr(A)=tr(B)$，故 $a-b=1$，又由 $|A|=|B|$ 有 $2a-b=3$，解得

$a=4,b=5$。

（Ⅱ）先求 A 的特征根，$|\lambda E-A|=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$，

再求 A 的特征向量，当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$(E-A)X=0$ 解得 $x_1=(2,1,0)^T,x_2=(-3,0,1)^T$，当 $\lambda_3=5$ 时，$(5E-A)X=0$ 解得，$x_3=(-1,-1,1)^T$，令 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$