2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】:（C）

【解析】: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平渐近线，没有斜渐近线，总共两条渐近线，选（C）。

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f^{'}(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^{n}n!$

【答案】:（C）

【解析】: $f^{'}(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)\left[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)\right]^{'}$

所以 $f^{'}(0)=(-1)^{n-1}n!$，故选（C）。

（3）设 $a_n>0,(n=1,2,...)$，$s_n=a_1+...+a_n$，则数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

(A)充分必要条件.　　(B)充分非必要条件.

（C）必要非充分条件.　　（D）即非充分地非必要条件.

【答案】: (B)

【解析】: 由于 $a_n>0$，$\{s_n\}$ 是单调递增的，可知当数列 $\{s_n\}$ 有界时，$\{s_n\}$ 收敛，也即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 是存在的，此时有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}s_n-\lim\limits_{n\to\infty}s_{n-1}=0$，也即 $\{a_n\}$ 收敛。

反之，$\{a_n\}$ 收敛，$\{s_n\}$ 却不一定有界，例如令 $a_n=1$，显然有 $\{a_n\}$ 收敛，但 $s_n=n$ 是无界的。故数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分非必要条件，选(B)。

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x dx$ $(k$=1,2,3),则有 D

（A） $I_1 < I_2 < I_3$　　(B) $I_3 < I_2 < I_1$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$　　(D) $I_2 < I_1 < I_3$

【答案】: (D)

【解析】: 由于当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0$，可知 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx<0$，也即 $I_2-I_1<0$，可知 $I_1>I_2$。

又由于 $\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx$，对 $\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx$ 做变量代换 $t=x-\pi$ 得

$\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi} e^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)dt=-\int_{\pi}^{2\pi} e^{(t+\pi)^2}\sin tdt=-\int_{\pi}^{2\pi} e^{(x+\pi)^2}\sin xdx$，

故 $\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi}\left(e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}\right)\sin xdx$ 由于当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0, e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}<0$，可知

$\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx>0$，也即 $I_3-I_1>0$，可知 $I_3>I_1$。

综上所述有 $I_2<I_1<I_3$，故选(D).

（5）设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则使得

$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$成立的一个充分条件是

(A) $x_1>x_2, y_1<y_2$　　(B) $x_1>x_2, y_1>y_2$

(C) $x_1<x_2, y_1<y_2$　　(D) $x_1<x_2, y_1>y_2$

【答案】: (D)

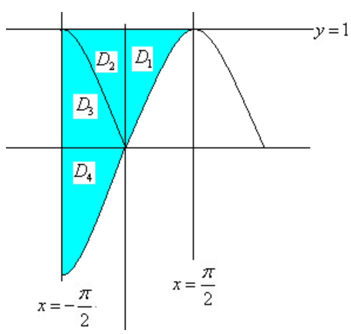
【解析】: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 表示函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 是单调递增的，关于变量 y 是单调递减的。因此，当 $x_1<x_2, y_1>y_2$ 时，必有 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$，故选 D

（6）设区域 D 由曲线 $y=\sin x, x=\pm\frac{\pi}{2}, y=1,$ 围成，则 $\iint\left(x^5y-1\right)dxdy=(\quad)$

$(A)\pi\quad (B)2\quad (C)-2\quad (D)-\pi$

【答案】:（D）

【解析】: **区域** D 如图中阴影部分所示，为了便于讨论，再引入曲线 $y=-\sin x$ 将区域分为 D_1,D_2,D_3,D_4 四部分。由于 D_1,D_2 关于 y 轴对



称，可知在 $D_1\cup D_2$ 上关于 x 的奇函数积分为零，故 $\iint\limits_{D_1\cup D_2} x^5ydxdy=0$；又由于 D_3,D_4 关于 x 轴对称，可知在 $D_3\cup D_4$ 上关于 y 的奇函数为零，故 $\iint\limits_{D_3\cup D_4} x^5ydxdy=0$。

因此 $\iint\limits_{D}\left(x^5y-1\right)dxdy=-\iint\limits_{D}dxdy=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx\int_{\sin x}^{1}dy=-\pi$，故选（D）。

（7）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】：（C）

【解析】：由于 $\left|\left(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。故选（C）。

（8）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$ ________。

【答案】： 1

【解析】： 将 $x=0$ 代入原方程可得 $y=0$

方程 $x^2-y+1=e^y$ 两端对 x 求导，有 $2x-\dfrac{dy}{dx}=e^y\dfrac{dy}{dx}$ ，将 $x=0$、$y=0$ 代入可得，所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$

再次求导得 $2-\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+e^y\dfrac{d^2y}{dx^2}$，再将 $x=0$、$y=0$、$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=0$ 代入可得 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=1$。

（10）计算 $\lim\limits_{x\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$________。

【答案】： $\dfrac{\pi}{4}$

【解析】： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}.$

（11）设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________。

【答案】： 0.

【解析】： 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot\dfrac{1}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'\cdot\left(-\dfrac{1}{y^2}\right)$，所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.$

（12）微分方程 $ydx+(x-3y^2)dy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的解为________。

【答案】： $x=y^2$

【解析】： $ydx+(x-3y^2)dy=0\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}=3y-\dfrac{1}{y}x\Rightarrow\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{1}{y}x=3y$ 为一阶线性微分方程，所以

$$x = e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left[\int 3y \cdot e^{\int \frac{1}{y}dy}dy + C\right] = \frac{1}{y}\left[\int 3y^2 dy + C\right] = (y^3 + C)\frac{1}{y}$$

又因为 $y=1$ 时 $x=1$，解得 $C=0$，故 $x=y^2$.

（13）曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是________。

【答案】: $(-1,0)$

【解析】: 将 $y'=2x+1, y''=2$ 代入曲率计算公式，有

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{2}{\left[1+(2x+1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

整理有 $(2x+1)^2=1$，解得 $x=0$ 或 -1，又 $x<0$，所以 $x=-1$，这时 $y=0$，

故该点坐标为 $(-1,0)$

（14）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则 $|BA^*|=$________。

【答案】: -27

【解析】: $|BA^*|=|B||A^*|$，其中 $|B|=-|A|=-3, |A^*|=|A|^{3-1}=9$，可知 $|BA^*|=-27$。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x},$ 记 $a=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

（1）求 a 的值

（2）若当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 是 x^k 的同阶无穷小，求 k

【解析】:（1）$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}+\frac{x}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$，即 $a=1$

（2）,当 $x\to 0$ 时，由 $f(x)-a=f(x)-1=\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$

又因为，当 $x \to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 $\frac{1}{6}x^3$ 等价，故 $f(x)-a \sim \frac{1}{6}x$，即 $k=1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

【解析】： $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

先求函数的驻点：令

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'(x,y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases},$$

解得驻点为 $(1,0),(-1,0)$.又

$$f_{xx}''=x\left(x^2-3\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{xy}''=-y\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{yy}''=-x\left(1-y^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

对点 $(1,0)$，有 $A_1=f_{xx}''(1,0)=-2e^{-\frac{1}{2}},B_1=f_{xy}''(1,0)=0,C_1=f_{yy}''(1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$

所以，$A_1C_1-B_1^2>0,A_1<0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极大值 $f(1,0)=e^{\frac{1}{2}}$.

对点 $(-1,0)$，有 $A_2=f_{xx}''(-1,0)=2e^{-\frac{1}{2}},B_2=f_{xy}''(-1,0)=0,C_2=f_{yy}''(-1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$

所以，$A_2C_2-B_2^2>0,A_2>0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极小值 $f(-1,0)=-e^{\frac{1}{2}}$.

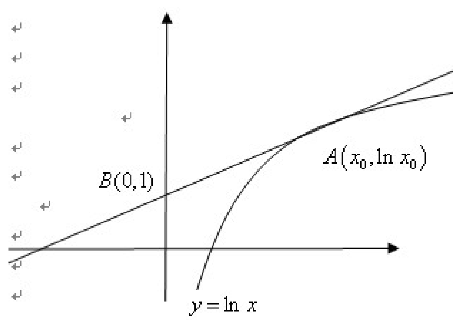
（17）（本题满分 11 分）

过点（0，1）点作曲线 $L:y=\ln x$ 的切线，切点为 A，又 L 与 x 轴交于 B 点，区域 D 由 L 与直线 AB 及 x 轴围成，求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

【解析】：

如图设切点坐标为 $A\left(x_0,\ln x_0\right)$，斜率为 $\frac{1}{x_0}$，所以设切线方程为

$y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}\left(x-x_0\right)$，又因为该切线过 $B(0,1)$，所以 $x_0=e^2$，



故切线方程为：$y=\frac{1}{e^2}x+1$

切线与 x 轴交点为 $B\left(-e^2,0\right)$

（1）$A=\int_0^2\left[e^y-e^2(y-1)\right]dy=\left[e^y-e^2(\frac{1}{2}y^2-y)\right]_0^2=e^2-1$

（2）

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot\left[e^2-\left(-e^2\right)\right]-\pi\int_1^{e^2}\ln^2 xdx\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[\left(x\ln^2 x\right)_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\ln xdx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-\pi\left[4e^2-\left(2x\ln x\right)_1^{e^2}+\int_1^{e^2}2dx\right]\\
&=\frac{8}{3}\pi e^2-2\pi\left(e^2-1\right)=\frac{2}{3}\pi e^2+2\pi
\end{aligned}
$$

（18）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成。

【解析】：

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xyd\sigma&=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta\cdot rdr\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\theta\\
&=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot(1+\cos\theta)^4d\cos\theta
\end{aligned}
$$

令 $u=\cos\theta$ 得，原式 $=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}u(1+u)^4du=\frac{16}{15}$。

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$

1）求表达式 $f(x)$

2）求曲线的拐点 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$

【解析】：

1）特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$．再由 $f'(x)+f(x)$ ^{x} 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$， $y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时，$2x>0, 2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，可知 $y''>0$；当 $x<0$ 时，$2x<0, 2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知 $(0,0)$ 点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

（20）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}, -1<x<1$

【解析】：令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x\\
&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x
\end{aligned}
$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\ge 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\ge 0$，故 $f'(x)\ge 0$。而 $f(0)=0$，

即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$，也即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\le 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\le 0$，故 $f'(x)\ge 0$。而 $f(0)=0$，

即得，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$ 也即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\frac{x^2}{2}+1$。

当 $x=0$ 时，显然有 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x=1+\dfrac{x^2}{2}$ 。

可知，$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},-1<x<1$

（21）（本题满分 11 分）

（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1(n>1\text{的整数})$，在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

【解析】：(1) 由题意得：令 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，则 $f(1)>$，再由 $f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}-1=-(\frac{1}{2})^n<0$，由零点定理 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 得在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 至少存在一个零点，也即方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内至少有一个实根。

又由于 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 上是单调的，可知 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ 在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内最多只有一个零点。故方程 $x^n+x^{n-1}+\ldots+x=1$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根。

（2）由于 $f(x_n)=0$，可知 ${x_n}^n+{x_n}^{n-1}+\cdots+x_n-1=0$（ i ），

进而有 ${x_{n+1}}^{n+1}+{x_{n+1}}^n+\cdots+x_{n+1}-1=0$，可知 ${x_{n+1}}^n+{x_{n+1}}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}-1<0$（ ii ），

比较（ i ）式与（ ii ）式可知 $x_{n+1}<x_n$，故 $\{x_n\}$ 单调。

又由于 $\dfrac{1}{2}<x_n<1$，也即 $\{x_n\}$ 是有界的。则由单调有界收敛定理可知 $\{x_n\}$ 收敛，假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $a<x_2<x_1=1$。

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n(1-{x_n}^n)}{1-x_n}-1=\dfrac{a}{1-a}-1=0$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$。

（22）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=\beta$ 的通解。

【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ a & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & a & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为 $\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$，故其通解为 $k\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，有 $|A|=0$.

即： $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得 $\lambda=1$ 或 -1.

当 $\lambda=1$ 时，$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，显然不符，故 $\lambda=-1$.

（23）（本题满分 11 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$， A^T 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，

且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：1） $A^TA=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1-a\\ 0 & 1+a^2 & 1-a\\ 1-a & 1-a & 3+a^2\end{pmatrix}$ 由 $r(A^TA)=2$ 可得，

$\begin{vmatrix}2 & 0 & 1-a\\ 0 & 1+a^2 & 1-a\\ 1-a & 1-a & 3+a^2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(a+1)^2(a^2+3)=0$，可知 $a=-1$。

2） $f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

令矩阵 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为： $\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0$,解 $(\lambda_1 E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$,解 $(\lambda_2 E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6$,解 $(\lambda_3 E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

令 $x=Qy$ 可将原二次型化为 $2y_2^2+6y_3^2$。