

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是 ()

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

(2) 函数 $f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ()

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

(3) 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记

$$I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy \quad (k=1, 2, 3, 4), \text{ 则 ()}$$

(A) $I_1 > 0$

(B) $I_2 > 0$

(C) $I_3 > 0$

(D) $I_4 > 0$

(4) 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是 ()

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则 $a_n > a_{n+1}$

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则存在常数 $P > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在

(D) 若存在常数 $P > 1$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^P a_n$ 存在, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(5) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 则 B 可逆, 则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a = 0, b = 2$

(B) $a = 0, b$ 为任意常数

(C) $a = 2, b = 0$

(D) $a = 2, b$ 为任意常数

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1), X_2 \sim N(0, 2^2), X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\} (j = 1, 2, 3)$, 则 ()

(A) $P_1 > P_2 > P_3$

(B) $P_2 > P_1 > P_3$

(C) $P_3 > P_1 > P_2$

(D) $P_1 > P_3 > P_2$

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 则 X 和 Y 的概率分布分别为,

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\} = (\quad)$

- (A) $\frac{1}{12}$
(B) $\frac{1}{8}$
(C) $\frac{1}{6}$
(D) $\frac{1}{2}$

二、填空题：9—14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设曲线 $y = f(x)$ 和 $y = x^2 - x$ 在点 $(0,1)$ 处有公共的切线，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(10) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $(z+y)^x = xy$ 确定，则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(11) 求 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$ $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12) 微分方程 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$ 通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵， $|A|$ 为 A 的行列式， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ ，则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(14) 设随机变量 X 服从标准正态分布 $X \sim N(0,1)$ ，则 $E(Xe^{2X}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时， $1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

(16) (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = x^{\frac{1}{3}}$ ，直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所围成的平面图形， V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴， y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y = 10V_x$ ，求 a 的值。

(17) (本题满分 10 分)

设平面内区域 D 由直线 $x = 3y$ ， $y = 3x$ 及 $x + y = 8$ 围成。计算 $\iint_D x^2 dx dy$ 。

(18) (本题满分 10 分)

设生产某产品的固定成本为 6000 元, 可变成本为 20 元/件, 价格函数为 $P = 60 - \frac{Q}{1000}$, (P 是单价,

单位: 元, Q 是销量, 单位: 件), 已知产销平衡, 求:

- (1) 该商品的边际利润。
- (2) 当 $P=50$ 时的边际利润, 并解释其经济意义。
- (3) 使得利润最大的定价 P 。
- (19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0)=0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, 证明

- (1) 存在 $a > 0$, 使得 $f(a)=1$
- (2) 对 (1) 中的 a , 存在 $\xi \in (0, a)$, 使得 $f'(\xi) = \frac{1}{a}$.
- (20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C 。

- (21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

- (I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$;
- (II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$ 。
- (22) (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 是二维随机变量, X 的边缘概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$, 在给定

$X = x (0 < x < 1)$ 的条件下, Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{3y^2}{x^3}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

- (1) 求 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$;
- (1) Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$ 。
- (23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_N 为来

自总体 X 的简单随机样本.

- (1) 求 θ 的矩估计量;
- (2) 求 θ 的最大似然估计量.