

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 则 a 等于 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 设 y_1, y_2 是一阶非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解, $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 ()

- (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$. (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$.
(C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$. (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$.

【答案解析】见真题理论验证强化指导部分数二试题一(2).

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数, 且 $g''(x) < 0$, 若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 ()

- (A) $f'(a) < 0$. (B) $f'(a) > 0$. (C) $f''(a) < 0$. (D) $f''(a) > 0$.

(4) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ()

- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$. (B) $h(x) < g(x) < f(x)$.
(C) $f(x) < g(x) < h(x)$. (D) $g(x) < f(x) < h(x)$.

(5) 设向量组 $I: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 $II: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 下列命题正确的是 ()

- (A) 若向量组 I 线性无关, 则 $r \leq s$.
(B) 若向量组 I 线性相关, 则 $r > s$.
(C) 若向量组 II 线性无关, 则 $r \leq s$.
(D) 若向量组 II 线性相关, 则 $r > s$.

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵, 且 $A^2 + A = O$, 若 A 的秩为 3, 则 A 相似于 ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P\{X=1\} =$ ()

(A) 0. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$. (D) $1 - e^{-1}$.

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leq 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0)$$

为概率密度, 则 a, b 应满足 ()

(A) $2a + 3b = 4$. (B) $3a + 2b = 4$.
(C) $a + b = 1$. (D) $a + b = 2$.

二、填空题 (9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

(10) 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域为 G , 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是 _____.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

(12) 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

(13) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, 统计量 $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则

$E(T) =$ _____.

三、解答题 (15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程

或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{\frac{1}{x}} - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$

围成.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值.

(18) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n=1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由.

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n=1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且 $2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3)$,

(I) 证明存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$;

(II) 证明存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f''(\xi) = 0$.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解.

(I) 求 λ, a ;

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$, 求

a, Q .

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = A e^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

(23) (本题满分 11 分)

箱中装有 6 个球, 其中红、白、黑球的个数分别为 1, 2, 3 个, 现从箱中随机取出 2 个球, 记 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Cov(X, Y)$.