

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题(1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

- (1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则()
- (A) $k=1, c=4$. (B) $k=1, c=-4$. (C) $k=3, c=4$. (D) $k=3, c=-4$.
- (2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$ ()
- (A) $-2f'(0)$. (B) $-f'(0)$. (C) $f'(0)$. (D) 0.
- (3) 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为()
- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.
- (4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为()
- (A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$. (B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.
- (C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$. (D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.
- (5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数, 满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$, 且 $f'(0) = g'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是()
- (A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$. (B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$.
- (C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$. (D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$.
- (6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是()
- (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$. (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.
- (7) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()
- (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.

(8) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ()

- (A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \lambda > 0$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设平面区域 D 由直线 $y = x$, 圆 $x^2 + y^2 = 2y$ 及 y 轴围成, 则二重积分 $\iint_D xy d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为.

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^a}$, 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 a 的取值范围.

(16) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3}, \end{cases}$ 确定, 求 $y = y(x)$ 的极值和曲线 $y = y(x)$ 的凹凸

区间及拐点.

(17) (本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得

极值 $g(1)=1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}.$

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y = y(x)$ 与直线 $y = x$ 相切于原点, 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 处切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

(I) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20) (本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2 + y^2 = 2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成的.

(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功? (长度单位: m , 重力加速度为 gm/s^2 , 水的密度为 $10^3 kg/m^3$).

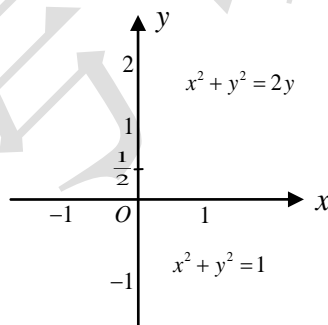


图 1

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y) = 0$, $f(x, 1) = 0$, $\iint_D f(x, y) dx dy = a$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分 $I = \iint_D xy f''_{xy}(x, y) dx dy$.

(22) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$, 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23) (本题满分 11 分)

A 为三阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 即 $r(A)=2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .