2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）真题及答案解析

一、选择题 1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则当 n 充分大时，下列正确的有（　　）

（A）$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$　　（B）$|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$　　（C）$a_n > a - \dfrac{1}{n}$　　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

【详解】因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，所以 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$，即 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$，

$|a| - \varepsilon < |a_n| \leq |a| + \varepsilon$，取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$，则知 $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$，所以选择（A）

2．下列曲线有渐近线的是

（A）$y = x + \sin x$　　（B）$y = x^2 + \sin x$

（C）$y = x + \sin\dfrac{1}{x}$　　（D）$y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

【分析】只需要判断哪个曲线有斜渐近线就可以．

【详解】对于 $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x} = 1$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(y - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x} = 0$，所以有斜渐近

应该选（C）

3．设 $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，则当 $x\to 0$ 时，若 $P(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（　　）

（A）$a=0$　　　（B）$b=1$　　　（C）$c=0$　　　（D）$d=\frac{1}{6}$

【详解】只要熟练记忆当 $x\to 0$ 时 $\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，显然 $a=0,b=1,c=0,d=\frac{1}{3}$，应该选（D）

4．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上（　）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（B）当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　（D）当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【分析】此题考查的曲线的凹凸性的定义及判断方法．

【详解 1】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义比较熟悉的话，可以直接做出判断．如果对[

1

点 x_1,x_2 及常数 $0\le\lambda\le 1$，恒有 $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\ge(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$，则曲线是凸的．

显然此题中 $x_1=0,x_2=1,\lambda=x$，则 $(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)=f(0)(1-x)+f(1)x=g(x)$，而

$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)=f(x)$，

故当 $f''(x)\ge 0$ 时，曲线是凹的，即 $f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\le(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)$，也就是 $f(x)\le g(x)$，应该选（D）

【详解 2】如果对曲线在区间 $[a,b]$ 上凹凸的定义不熟悉的话，可令

$F(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，则 $F(0)=F(1)=0$，且 $F''(x)=f''(x)$，故当

$f''(x)\ge 0$ 时，曲线是凹的，从而 $F(x)\le F(0)=F(1)=0$，即 $F(x)=f(x)-g(x)\le 0$，也就是

$f(x)\le g(x)$，应该选（D）

5．行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$ 等于

（A）$(ad-bc)^2$　　　（B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$　　　（D）$-a^2d^2+b^2c^2$

【详解】

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc)+bc(ad-bc) = -(ad-bc)^2$$

应该选（B）．

6．设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三维向量，则对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的

（A）必要而非充分条件　　　（B）充分而非必要条件

（C）充分必要条件　　　（D）非充分非必要条件

【详解】若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则

（$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$）$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)K$，对任意的常数 k,l，矩阵 K 的秩都等于 2，所以向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 一定线性无关．

而当 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时，对任意的常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；故选择（A）．

7．设事件 A，B 想到独立，$P(B)=0.5,P(A-B)=0.3$ 则 $P(B-A)=$（　　）

（A）0.1　　（B）0.2　　（C）0.3　　（D）0.4

【详解】$P(A-B)=0.3=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)$．

所以 $P(A)=0.6$，$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.5P(A)=0.2$．故选择（B）．

8．设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从

（A）$F(1,1)$　　（B）$F(2,1)$　　（C）　$t(1)$　　（D）$t(2)$

【详解】$S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sqrt{X_3^2}}$，显然 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，且 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$ 与

$\dfrac{X_3^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$ 相互独立，从而 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sqrt{X_3^2}}=\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{X_3^2}{\sigma^2}}}\sim t(1)$

故应该选择（C）.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9．设某商品的需求函数为 $Q=40-2p$（p 为商品的价格），则该商品的边际收益为________．

【详解】$R(p)=pQ=40p-2p^2$，边际收益 $R'(p)=40-4p$．

10．设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $x+y=0$ 及 $y=2$ 所围成的有界区域，则 D 的面积为________．

【详解】$S=\int_0^1 dy\int_{-y}^0 dx+\int_1^2 dy\int_{-\frac{1}{y}}^0 dx=\dfrac{1}{2}+\ln 2$

11．设 $\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}$，则 $a=$________．

【详解】$\int_0^a xe^{2x}dx=\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^{2x}}{4}(2x-1)|_0^a=\dfrac{e^{2a}}{4}(2a-1)+\dfrac{1}{4}$．所以 $a=\dfrac{1}{2}$．

12．二次积分 $\int_0^1 dy\int_y^1\left(\dfrac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx=$________．

【详解】

$$\begin{aligned}\int_0^1 dy\int_y^1\left(\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2}\right)dx&=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx\\&=\int_0^1 dx\int_0^x\frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 e^{y^2}(1-y)dy\\&=\int_0^1 e^{x^2dx}-\int_0^1 e^{y^2}dy+\int_0^1 ye^{y^2}dy=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}(e-1)\end{aligned}$$

13．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围是________．

【详解】由配方法可知

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3\\&=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2\end{aligned}$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4-a^2\ge 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$。

14．设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta \\ 0,\quad 其它\end{cases}$，其中 θ 是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的简单样本，若 $C\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则常数 $C=$____________.

【详解】$E(X^2)=\int_\theta^{2\theta}x^2\dfrac{2x}{3\theta^2}dx=\dfrac{5}{2}\theta^2$，所以 $E\left(C\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\right)=Cn\dfrac{5}{2}\theta^2$，由于 $C\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，

故 $Cn\dfrac{5}{2}=1$，$C=\dfrac{2}{5n}$．

三、解答题

15．（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$．

【分析】．先用等价无穷小代换简化分母，然后利用洛必达法则求未定型极限．

【详解】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x(t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t)dt}{x}=\lim_{x\to\infty}(x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))-x\right)=\frac{1}{2}$$

16．（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$．计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

【详解】由对称性可得

$$\iint_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\iint_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxd=\frac{1}{2}\iint_D\frac{(x+y)\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{1}dxd=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 r\sin\pi r dr=-\frac{3}{4}$$

17．（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$．若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式．

【详解】

设 $u=e^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(e^x\cos y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^{x\cos y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=f''(e^x\cos y)e^{2x}$$

由条件 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，

可知

$$f''(u)=4f(u)+u$$

这是一个二阶常用系数线性非齐次方程．

对应齐次方程的通解为：

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$$ 其中 C_1,C_2 为任意常数．

对应非齐次方程特解可求得为 $y^*=-\frac{1}{4}u$．

故非齐次方程通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{1}{4}u$．

将初始条件 $f(0)=0,f'(0)=0$ 代入，可得 $C_1=\frac{1}{16},C_2=-\frac{1}{16}$．

所以 $f(u)$ 的表达式为 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$．

18．（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域、和函数．

【详解】

由于 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以得到收敛半径 $R=1$．

当 $x=\pm1$ 时，级数的一般项不趋于零，是发散的，所以收敛域为 $(-1,1)$．

首页 > 考研数学 > 数学真题 >

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）真题及答案解析

辅导课程：魔鬼集训营　在线咨询　来源：中公考研　发布时间：2014-04-23 13:32:52

[摘要]为方便广大考研学子更好的复习 2015 考研数学，中公考研特整理 2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）真题及答案解析，祝广大考生在 2015 考研备考中复习顺利！

令和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+4n+3)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}\right)''+\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''+\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$$

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a.b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（1）　$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$；

（2）　$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$．

【详解】

（1）证明：因为 $0\le g(x)\le 1$，所以 $\int_a^x 0dx\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt\quad x\in[a,b]$．

即 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$．

（2）令 $F(x)=\int_a^x f(u)g(u)du-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$，

则可知 $F(a)=0$，且 $F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)$，

因为 $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,$ 且 $f(x)$ 单调增加，

所以 $f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\le f(a+x-a)=f(x)$．从而

$$F'(x)=f(x)g(x)-g(x)f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\ge f(x)g(x)-g(x)f(x)=0,\qquad x\in[a,b]$$

也是 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 单调增加，则 $F(b)\ge F(a)=0$，即得到

$$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，E 为三阶单位矩阵．

（1）　求方程组 $AX=0$ 的一个基础解系；

（2）　求满足 $AB=E$ 的所有矩阵．

【详解】（1）对系数矩阵 A 进行初等行变换如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix},$$

得到方程组 $AX=0$ 同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=2x_4\\x_3=3x_4\end{cases}$$

得到 $AX=0$ 的一个基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$.

（2）显然 B 矩阵是一个 4×3 矩阵，设 $B=\begin{pmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\\x_4&y_4&z_4\end{pmatrix}$

对矩阵 (AE) 进行进行初等行变换如下：

$$(AE)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

由方程组可得矩阵 B 对应的三列分别为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_1\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-4\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\2\\3\\1\end{pmatrix},$$

即满足 $AB=E$ 的所有矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}2-c_1&6-c_2&-1-c_3\\-1+2c_1&-3+2c_2&1+2c_3\\-1+3c_1&-4+3c_2&1+3c_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$$

其中 c_1,c_2,c_3 为任意常数．

21.（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似．

【详解】 证明：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$．

分别求两个矩阵的特征值和特征向量如下：

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

所以 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

而且 A 是实对称矩阵，所以一定可以对角化．且 $A\sim\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$；

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-n \end{vmatrix}=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$$

所以 B 的 n 个特征值也为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots\lambda_n=0$；

对于 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$，由于矩阵 $(0E-B)=-B$ 的秩显然为 1，所以矩阵 B 对应 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 的特征向量应该有 $n-1$ 个线性无关，进一步矩阵 B 存在 n 个线性无关的特征向量，即矩阵 B 一定可以对角化，且 $B\sim\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & 0 & & \\ & & \cdots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

从而可知 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似．

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的分布为 $P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服

$U(0,i), i=1,2$.

（1） 求 Y 的分布函数；

（2） 求期望 $E(Y)$.

【详解】（1）分布函数

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \le y) = P(Y \le y, X=1) + P(Y \le y, X=2) \\ &= P(Y \le y / X=1)P(X=1) + P(Y \le y / X=2)P(X=2) \\ &= \frac{1}{2}\left(P(Y \le y / X=1) + P(Y \le y / X=2)\right) \end{aligned}$$

当 $y<0$ 时，$F(y)=0$；

当 $0 \le y < 1$ 时，$F(y)=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\frac{y}{2}=\frac{3}{4}y$；

当 $1 \le y < 2$ 时，$F(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{y}{2}=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}$；

当 $y \ge 2$ 时，$F(y)=1$.

所以分布函数为

$$F(y)=\begin{cases} 0 & ,y<0 \\ \frac{3}{4}y & ,0 \le y<1 \\ \frac{1}{2}+\frac{y}{4} & ,1 \le y<2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases}$$

（2）概率密度函数为 $f(y)=F'(y)=\begin{cases} \frac{3}{4},0<y<1 \\ \frac{1}{4},1<y<2 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$，

$E(Y)=\int_0^1 \frac{3}{4} y dy+\int_1^2 \frac{y}{4} dy=\frac{3}{4}$.

23.（本题满分 11 分）

设随机变量 X，Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P(X=0)=\frac{1}{3}, P(X=1)=\frac{2}{3}$，且 X，Y 的相关系数

$\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

（1） 求二维随机变量(X,Y)的联合概率分布；

（2） 求概率$P(X+Y\leq 1)$．

[详解]由于 X，Y 的概率分布相同，故$P(X=0)=\frac{1}{3},P(X=1)=\frac{2}{3}$，$P(Y=0)=\frac{1}{3},P(Y=1)=\frac{2}{3}$，

显然$EX=EY=\frac{2}{3}$，$DX=DY=\frac{2}{9}$

相关系数$\rho_{XY}=\frac{1}{2}=\frac{COV(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{E(XY)-\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}$，

所以$E(XY)=\frac{5}{9}$．

而$E(XY)=1\times 1\times P(X=1,Y=1)$，所以$P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}$，从而得到$(X,Y)$的联合概

$P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}$，$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{9}$，$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{9}$，$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{9}$

（2）$P(X+Y\leq 1)=1-P(X+Y>1)=1-P(X=1,Y=1)=\frac{4}{9}$.