

2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

【答案】: (C)

【解析】: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \infty$ ，所以 $x = 1$ 为垂直渐近线

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} = 1$ ，所以 $y = 1$ 为水平渐近线，没有斜渐近线，总共两条渐近线，选 (C)。

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$
(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

【答案】: (C)

【解析】: $f'(x) = e^x(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n) + (e^x - 1)[(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)]'$

所以 $f'(0) = (-1)^{n-1}n!$ ，故选 (C)。

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr = ()$

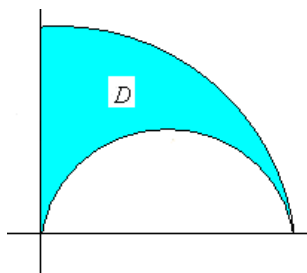
- (A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
(B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$
(C) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
(D) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$

【答案】: (B)

【解析】: 将积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr$ 转化为直角坐标下的积分得

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2)rdr = \iint_D f(x^2 + y^2) dx dy$ ，其中 D 为平面区域 $2\cos\theta \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，其中

$2\cos\theta \leq r \leq 2$ 也可以写成 $2r\cos\theta \leq r^2 \leq 4$ 也即 $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ，可知区域 D 为如图所示的区域



将该积分化为直角坐标下的累次积分有 $\iint_D f(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$ ，故选

(B)。

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 范围为 ()

(A) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

(C) $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

(D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

【答案】：(D)

【解析】：考察的知识点是绝对收敛和条件收敛的定义及常见的 p 级数的收敛性结论。

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛可知 $\alpha > \frac{3}{2}$ ； $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛可知 $\alpha < 2$ ，故答案为 (D)

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

【答案】：(C)

【解析】：由于 $|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ，可知 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关。故选 (C)。

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

- (A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
- (C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

【答案】: (B)

【解析】: $Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$,

$$\text{故 } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

故选 (B)。

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ ()

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

【答案】: (D)

【解析】: 由题意得, $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

$P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 D 表示单位圆在第一象限的部分, 被积函数是 1, 故根据

二重积分的几何意义, 知 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\} = \frac{\pi}{4}$, 故选 (D)。

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分

布 ()

- (A) $N(0, 1)$ (B) $t(1)$

(C) $\chi^2(1)$

(D) $F(1,1)$

【答案】: (B)

【解析】: 从形式上, 该统计量只能服从 t 分布。故选 B。

具体证明如下: $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$, 由正态分布的性质可知, $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与

$\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均服从标准正态分布且相互独立, 可知 $\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}} \sim t(1)$ 。

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$ _____。

【答案】: $e^{-\sqrt{2}}$

【解析】: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(\tan x - 1) \frac{1}{\cos x - \sin x} \right]}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(\tan x - 1) \frac{1}{\cos x - \sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{-\sin x - \cos x} = -\sqrt{2}$$

所以 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[(\tan x - 1) \frac{1}{\cos x - \sin x} \right]} = e^{-\sqrt{2}}$

(10) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ _____。

【答案】: 4

【解析】: $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = f'(f(x)) f'(x) \Big|_{x=0} = f'(f(0)) f'(0) = f'(-1) f'(0)$

由 $f(x)$ 的表达式可知 $f'(0) = f'(-1) = 2$, 可知 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 4$

(11) 连续函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz \Big|_{(0,1)} =$ _____。

【答案】: $2dx - dy$

【解析】: 由于 $f(x, y)$ 连续, 可知 $f(0, 1) = 1$ 。

由题意可知分子应为分母的高阶无穷小, 即 $f(x, y) = 2x - y + 2 + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2})$,

也即 $f(x, y) - 1 = 2x - (y-1) + o(\sqrt{x^2 + (y-1)^2})$, 可知 $f(x, y)$ 在 $(0, 1)$ 点是可微的, 并且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,1)} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,1)} = -1, \quad \text{故 } dz\bigg|_{(0,1)} = 2dx - dy$$

(12) 由曲线 $y = \frac{\pi}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中所围图形的面积为_____。

【答案】: $\pi \ln 2$

【解析】: 被积函数为 1 的二重积分来求, 所以

$$S = \int_0^{\sqrt{\pi}} dy \int_{\frac{y}{4}}^y dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{2\sqrt{\pi}} dy \int_{\frac{y}{4}}^{\frac{\pi}{y}} dx = \pi \ln 2$$

(13) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: -27

【解析】: $|BA^*| = |B||A^*|$, 其中 $|B| = -|A| = -3$, $|A^*| = |A|^{3-1} = 9$, 可知 $|BA^*| = -27$ 。

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\bar{C}) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】: $\frac{3}{4}$

【解析】: 由条件概率的定义, $P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})}$,

$$\text{其中 } P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$P(AB\bar{C}) = P(AB) - P(ABC) = \frac{1}{2} - P(ABC)$, 由于 A, C 互不相容, 即 $AC = \emptyset$, $P(AC) = 0$, 又

$$ABC \subset AC, \text{ 得 } P(ABC) = 0, \text{ 代入得 } P(AB\bar{C}) = \frac{1}{2}, \text{ 故 } P(AB|\bar{C}) = \frac{3}{4}.$$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【解析】: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{2-2\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2-2+2\cos x} - 1}{x^4}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^2)\right)}{x^4} \quad (\text{泰勒公式})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^2)}{x^4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

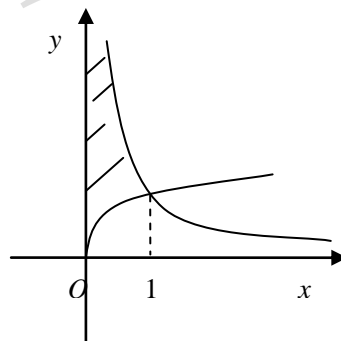
(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 为由曲线 $y = \sqrt{x}$ 、 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 和 x 轴所围区域。

【解析】: 由题意知, 区域

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 < x \leq 1, \sqrt{x} < y < \frac{1}{\sqrt{x}} \right\}, \text{ 如图所示所以}$$

$$\iint_D e^x xy dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} e^x xy dy$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 e^x x \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \bigg|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx \\
 &= \int_0^1 e^x x \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^x dx - \int_0^1 e^x x^2 dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(e - 1 - e^x x^2 \bigg|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x x dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \int_0^1 x de^x \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-1 + 2 \left(e^x x \bigg|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-1 + 2(e - (e - 1)) \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(17) (本题满分 10 分) 某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000 (万元)，设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件)，且固定两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件)。

- 1) 求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元)
- 2) 当总产量为 50 件时，甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小？求最小的成本。
- 3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义。

【解析】：1) 设成本函数为 $C(x, y)$ ，由题意有： $C'_x(x, y) = 20 + \frac{x}{2}$ ，

对 x 积分得， $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + D(y)$ ，

再对 y 求导有， $C'_y(x, y) = D'(y) = 6 + y$ ，

再对 y 积分有， $D(y) = 6y + \frac{1}{2}y^2 + c$

所以， $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{1}{2}y^2 + c$

又 $C(0, 0) = 10000$ ，故 $c = 10000$ ，所以 $C(x, y) = 20x + \frac{x^2}{4} + 6y + \frac{1}{2}y^2 + 10000$

2) 若 $x + y = 50$ ，则 $y = 50 - x (0 \leq x \leq 50)$ ，代入到成本函数中，有

$$\begin{aligned} C(x) &= 20x + \frac{x^2}{4} + 6(50-x) + \frac{1}{2}(50-x)^2 + 10000 \\ &= \frac{3}{4}x^2 - 36x + 11550 \end{aligned}$$

所以, 令 $C'(x) = \frac{3}{2}x - 36 = 0$, 得 $x = 24, y = 26$, 这时总成本最小 $C(24, 26) = 11118$

3) 总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本为 $C'_x(24, 26) = 32$, 表示在要求总产量为 50 件时, 甲的产量每增加一件, 成本会发生 32 万元的改变。

(18) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

【解析】: 令 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, 可得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln \frac{1+x}{1-x} + x \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x \\ &= \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1+x^2}{1-x^2} x - \sin x \end{aligned}$$

当 $0 < x < 1$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \geq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2} x - \sin x \geq 0$, 故 $f'(x) \geq 0$ 。而 $f(0) = 0$,

即得 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$, 也即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ 。

当 $-1 < x < 0$ 时, 有 $\ln \frac{1+x}{1-x} \leq 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} > 1$, 所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2} x - \sin x \leq 0$, 故 $f'(x) \geq 0$ 。而 $f(0) = 0$,

即得, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x - 1 - \frac{x^2}{2} \geq 0$ 也即 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq \frac{x^2}{2} + 1$ 。

当 $x = 0$ 时, 显然有 $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x = 1 + \frac{x^2}{2}$ 。

可知, $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$

1) 求表达式 $f(x)$

2) 求曲线的拐点 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$

【解析】:

1) 特征方程为 $r^2 + r - 2 = 0$, 特征根为 $r_1 = 1, r_2 = -2$, 齐次微分方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$

的通解为 $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 再由 $f'(x) + f(x) = 2e^x$ 得 $2C_1 e^x - C_2 e^{-2x} = 2e^x$, 可知 $C_1 = 1, C_2 = 0$.

故 $f(x) = e^x$

2) 曲线方程为 $y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, 则 $y' = 1 + 2xe^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $y'' = 2x + 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$. 为了说明 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解, 我们来讨论 y'' 在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时的符号.

当 $x > 0$ 时, $2x > 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$, 可知 $y'' > 0$; 当 $x < 0$ 时, $2x < 0, 2(1 + 2x^2)e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt < 0$, 可知 $y'' < 0$. 可知 $x = 0$ 是 $y'' = 0$ 唯一的解.

同时, 由上述讨论可知曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 在 $x = 0$ 左右两边的凹凸性相反, 可知 $(0, 0)$ 点是

曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 唯一的拐点.

(20) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = \beta$ 的通解.

$$\text{【解析】: (I) } \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + a \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 - a^4$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^3 & 1 & -a-a^2 \end{pmatrix} \\
 (II) & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$ ，可知 $a=-1$ 。

此时，原线性方程组增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，进一步化为行最简形得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可知导出组的基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，非齐次方程的特解为 $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，故其通解为 $k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解，有 $|A|=0$ 。

$$\text{即: } |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0, \text{ 得 } \lambda=1 \text{ 或 } -1.$$

当 $\lambda=1$ 时， $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，显然不符，故 $\lambda=-1$ 。

$$(21) \text{ (本题满分 10 分) 三阶矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}, A^T \text{ 为矩阵 } A \text{ 的转置, 已知 } r(A^T A) = 2,$$

且二次型 $f = x^T A^T A x$ 。

1) 求 a

2) 求二次型对应的二次型矩阵, 并将二次型化为标准型, 写出正交变换过程。

【解析】: 1) $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{pmatrix}$ 由 $r(A^T A) = 2$ 可得,

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 1+a^2 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 3+a^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a+1)^2(a^2+3) = 0, \text{ 可知 } a = -1.$$

2) $f = x^T A^T A x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
 $= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

令矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$$

解得 B 矩阵的特征值为: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 = 2; \lambda_3 = 6$

对于 $\lambda_1 = 0$, 解 $(\lambda_1 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2 = 2$, 解 $(\lambda_2 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3 = 6$, 解 $(\lambda_3 E - B)X = 0$ 得对应的特征向量为: $\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

将 η_1, η_2, η_3 单位化可得:

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

令 $x = Qy$ 可将原二次型化为 $2y_2^2 + 6y_3^2$ 。

(22) (本题满分 11 分)

已知随机变量 X, Y 以及 XY 的分布律如下表所示,

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求: (1) $P(X = 2Y)$;

(2) $\text{cov}(X - Y, Y)$ 与 ρ_{XY} 。

【解析】:

(1) 先求出 (X, Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/12	0	1/12
1	0	1/3	0
2	1/4	0	1/12

$$P(X = 2Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

$$(2) \operatorname{cov}(X-Y, Y) = \operatorname{cov}(X, Y) - \operatorname{cov}(Y, Y)$$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = EXY - EXEY, \quad \text{其} \quad \text{中}$$

$$EX = \frac{2}{3}, EX^2 = 1, EY = 1, EY^2 = \frac{5}{3}, DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}, EXY = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以, } \operatorname{cov}(X, Y) = 0, \operatorname{cov}(Y, Y) = DY = \frac{2}{3}, \operatorname{cov}(X - Y, Y) = -\frac{2}{3}, \rho_{XY} = 0.$$

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布, $V = \min(X, Y), U = \max(X, Y)$.

求 (1) 随机变量 V 的概率密度;

$$(2) E(U + V).$$

【解析】:

$$(1) X \text{ 概率密度为 } f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \text{ 分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} X \text{ 和 } Y \text{ 同分布.}$$

$$\text{由 } V = \min(X, Y), F_V(v) = P\{V \leq v\} = P\{\min(X, Y) \leq v\} = 1 - P\{X > v, Y > v\},$$

$$\text{而 } X, Y \text{ 独立, 故上式等于 } 1 - P\{X > v\}P\{Y > v\} = 1 - [1 - F(v)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{故 } f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 2e^{-2v}, & v > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 易知 } U + V = X + Y, \text{ 故 } E(U + V) = E(X + Y) = EX + EY = 2.$$