2015 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

1.设$\{x_n\}$是数列，下列命题中不正确的是（ ）

(A)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

(D)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

【答案】(D)

【解析】这个题目考查的是收敛的数列与其子数列间的关系，如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a。

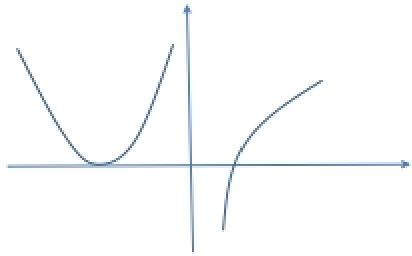
对于(A)选项，$\lim\limits_{n}x_n=a$，也是数列$\{x_n\}$收敛于a，那么对于$\{x_{2n}\},\{x_{2n+1}\}$都是$\{x_n\}$子列，所以有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，选项$(A)$是对的。对于选项$(C)$与选项$(A)$是一样的道理。所以选项$(C)$也是正确的。

对于(B)选项，$\{x_{2n}\},\{x_{2n+1}\}$的极限都是等于a，那么对于$\{x_{2n}\},\{x_{2n+1}\}$分为下标为偶数和奇数项，也就是$\lim\limits_{n}x_n=a$。所以选项(B)是对的

对于(D)选项，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，$\{x_{3n}\},\{x_{3n+1}\}$都是$\{x_n\}$子列，所以不能推出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

所以(D)选项错。

2.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线$y=f(x)$的拐



点个数为（ ）

$(A)0$　　$(B)1$　　$(C)2$　　$(D)3$

【答案】(C)

【解析】这道题目考查的是对拐点的判断，题目给出的是 $f\ \ (x)$ 的图形，根据判断拐点的第一充分条件， 如果在一点处左右两遍的二阶导数异号，则这点就是拐点。所以我们只要从图形上找到某点左右两边异号，显然有两个。所以选 (C)

3.设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x, x^2+y^2\le 2y\right\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（）

$(A)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

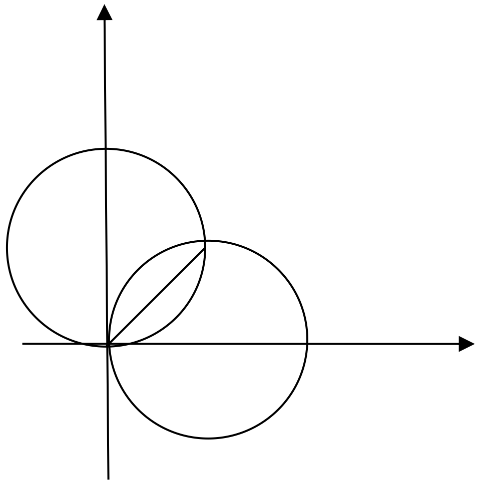
$(B)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

$(C)2\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$

$(D)2\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)dy$

【答案】(B)

【解析】这道题目主要考查的是二重积分的极坐标和直角坐标上下限的确定。



对于二重积分首先是画出积分区域，题中给出的积分区域是是两个圆相交的区域，如下图，画完图之后，我们发现，这个积分区域要若是用极坐标，则需要分为两部分积分，下半部分，θ 的取值范围为 $\frac{\pi}{4}\quad\theta\quad 0$，$r$ 的取值范围为 $0\quad r\quad 2\sin\theta$，上半部分，$\theta$ 的取值范围为 $\frac{\pi}{4}\quad\theta\quad\frac{\pi}{2}$，$r$ 的取值范围为 $0\quad r\quad 2\cos\theta$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)rdr$$

选择 (B)。在看直角坐标来分析，先对 y 积分，$\ {}_0^1\ dx\ {}_{\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}}\ f\left(x,y\right)dxdy$。所以 (C),(D) 都是错的。

4.下列级数中发散的是（ ）

$(A)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　$(B)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$　　$(C)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　$(D)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

【答案】 (C)

【解析】 这道题目主要考查的是级数敛散性判断，根据级数的判别法主要有根值判别法和比值判别法。对于交错级数的判别法主要是莱布尼茨判别法。

对于 (A) 选项，用根值判别法 $\lim_{n}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}<1$，所以 (A) 是收敛的

对于 (D) 选项，用比值判别法 $\lim_{n}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n}\left|\frac{n}{1+n}\right|^n=\frac{1}{e}<1$，所以 (D) 是收敛的。

对于 (B) 选项，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，$\ln\left|1+\frac{1}{n}\right|\sim\frac{1}{n}$，所以 $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left|1+\frac{1}{n}\right|\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}$，根据 p 级数的

判别法，所以(B)收敛。

对于(C)选项，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\ln n}+\frac{1}{\ln n}\right)$，对于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$是交错级数，根据交错级数莱布尼茨判别法，对于$\frac{1}{\ln n}$是单调递减，并且$\lim_{n}\frac{1}{\ln n}=0$，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$是收敛的。对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$，我们知道$\ln n<n$，所以$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$。$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散的，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$是发散的。

所以选择(C)

5、设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$\mathbf{A}x=b$有无穷多个解的充分必要条件为（ ）

$(A)a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　$(B)a\notin\Omega,d\in\Omega$　　$(C)a\in\Omega,d\notin\Omega$　　$(D)a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】：D

【解析】：

有无穷多解，只需要系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，并且都小于 3. 下对增广矩阵进行初等行变换。

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&-(a-1)(a-2)&-(d-1)(d-2)\end{pmatrix},$$

由$r(A)=r(A,b)<3$，故$a=1$或$a=2$，同时$d=1$或$d=2$。答案选（D）

6、设二次型$f(x_1,x_3,x_3)$在正交变换$x=\mathbf{P}y$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$\mathbf{P}=(e_1,e_2,e_3)$，若$\mathbf{Q}=(e_1,-e_3,e_2)$，则$f(x_1,x_3,x_3)$在正交变换$x=\mathbf{Q}y$下的标准形为（ ）

$(A)2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　$(B)2y_1^2+y_2^2-y_3^2$　　$(C)2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　$(D)2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】：A

【解析】：

由题设可知$f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.且

$$P^T AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PB$$

$$Q^T AQ=B^T(P^T AP)B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $f=x^T Ax=y^T(Q^T AQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$。答案选（A）

7、A,B 为任意两个事件，则

$(A)\ P(AB)\le P(A)P(B)$ $(B)\ P(AB)\ge P(A)P(B)$

$(C)\ P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ $(D)\ P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】 $P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(AB)\ge 2P(AB)$，故选(C)．

8、$X\sim B(m,\theta)$，$X_1,\dots X_n$ 为样本，则 $E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=$

$(A)\ (m-1)n\theta(1-\theta)$ $(B)\ m(n-1)\theta(1-\theta)$

$(C)\ (m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$ $(D)\ mn\theta(1-\theta)$

【答案】(B)

【解析】

$$E\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=E\left[(n-1)\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]$$
$$=(n-1)E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right]=(n-1)D(X)=(n-1)m\theta(1-\theta)$$
，故选(B)．

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________

【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】这道题目主要考查的是极限计算。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\cos x-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}。$$

10.设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，

则 $f(1)=$________

【答案】2

【解析】对于这道题目主要是考查变上限积分求导数。

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$$

$$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt=x\int_0^{x^2}f(t)dt$$

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+xf\left(x^2\right)\cdot 2x$$

$$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+f\left(1\right)\cdot 2=5$$

$$f\left(1\right)=2$$

11.若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz\big|_{(0,0)}=$________

【答案】$-\frac{1}{3}\left(dx+2dy\right)$

【解析】这道题目主要考查的是隐函数求偏导数。对于这道题目求全微分，分别求出 $\frac{z}{x},\frac{z}{y}$

$$e^{x+2y+3z}\left(1+3\frac{\partial z}{\partial x}\right)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0,\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{1}{3}.$$

$$e^{x+2y+3z}\left(2+3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=-\frac{2}{3}.$$

则 $dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\left(dx+2dy\right)$

12.设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值3，则 $y(x)=$___

【答案】$e^{-2x}+2e^{x}$

【解析】对于这道题主要考查的是了二阶常系数齐次微分方程，以及极值的必要条件。

先求解特征方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$，解得 $\lambda_1=-2,\lambda_2=1$. 所以原方程的通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$，由题设可知 $y(0)=3,y'(0)=0$. 代入解得 $y=e^{-2x}+2e^x$

13.设3阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$，$B=A^2+A+E$，其中 E 为3阶单位矩阵，则行列式 $|B|=$____

【答案】：21.

【解析】：

由题设可知矩阵 A^2 的特征值为 $4,4,1$. 所以矩阵 B 的特征值为 $3,7,1$.

则 $|B|=3\cdot7\cdot1=21$.

14. $(X,Y)\sim N(1,0;1,1,0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】由题设知，$X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$，相关系数 $\rho=0$，则 X、Y 相互独立，故

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15-23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x,g(x)=kx^2$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 值

【答案】 $a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=\dfrac{1}{3}$

【解析】这道题目主要考查的是用泰勒公式。

根据题意可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{kx^3}=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{6}x^4+o\left(x^3\right)}{kx^3}=1$$

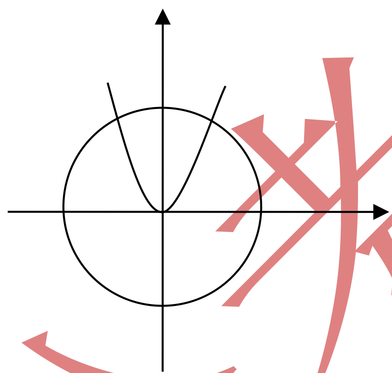
即 $1+a=0,b-\frac{a}{2}=0,\frac{a}{3k}=1$

$\therefore a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

16、计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2,y\ge x^2\}$

【答案】 $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$

【解析】这道题目主要考查的是二重积分的计算。



首先还是先画出积分区域，

发现积分区域是关于 y 轴对称 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy+\iint\limits_D xydxdy$ ，观察被积函数的对称性，发现 $\iint\limits_D xydxdy$ 是关于 x 的奇函数，所以这部分的 $\iint\limits_D xydxdy=0$。主要就算 $\iint\limits_D x^2dxdy$，对于计算部分用直角坐标，$\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy=\int_{-1}^{1}x^2\left(\sqrt{2-x^2}-x^2\right)dx=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5}$，下面就是主要计算 $2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\sin^2 t\cos^2 tdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{\pi}{4}$

所以最终的答案为 $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$

17、为了实现利润最大化，厂商需要对某产品确定其定价模型，设 Q 为产品的需求量，p 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性 $(\eta>0)$

（1）证明 $p=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$

（2）若该商品的成本函数为$C(Q)=1600+Q^2$,需求函数$Q=40-p$，是由（1）中的商品模型确定此商品的价格。

【答案】（2） $P=20$

【解析】这道题目要想证明（1），要找到等式。对于（2）问，就是应用（1）中的结论就可以。

（1）利润 $L=QP-C$。弹性的定义可知$\eta=-\dfrac{P}{Q}\dfrac{dQ}{dP}$， $-\dfrac{Q}{P}\eta=\dfrac{dQ}{dP}$。

$$\frac{dL}{dP}=Q+P\frac{dQ}{dP}-\frac{dC}{dP}=Q+P\frac{dQ}{dP}-\frac{dC}{dQ}\frac{dQ}{dP}=Q-Q\eta+\frac{Q}{P}\eta MC$$

当利润最大时，必有$\dfrac{dL}{dP}=0$。解得 $p=\dfrac{Q\eta MC}{Q\eta-Q}=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$

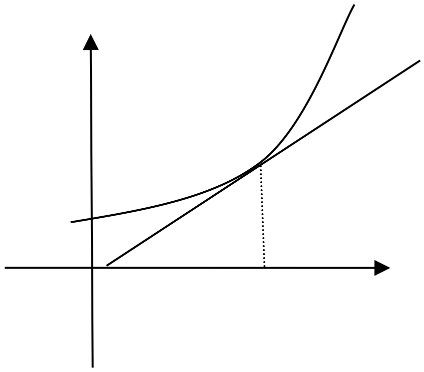
（2）把 $C(Q)=1600+Q^2$，$MC=2Q$，又因为 $Q=40-p$，$\eta=\dfrac{p}{40-p}$，

$p=\dfrac{2Q}{1+\dfrac{40-P}{P}}=\dfrac{2(40-P)}{1+\dfrac{40-P}{P}}$，就可计算 $P=20$。

18、设函数 $f(x)$在定义域I上的导数大于0，若对任意的$x_0\in I$，曲线$y=f(x)$在$(x_0,f(x_0))$处切线与$x=x_0$，x轴围城的面积恒为4，$f(0)=2$，求$f(x)$

【答案】$f(x)=\dfrac{8}{4-x}$

【解析】这道题目切线与求简单的几何图形的面积相结合的题目。



先写出切线方程：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$，令 $y=0$，则可以得到 $x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，切线与 $x=x_0$，x 轴围城的面积的为三角形，三角形的面积为底乘以高，则可以得到 x_0 到切点横坐标的的距离为 $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，纵坐标为 $f(x_0)$，则可以到 $\dfrac{1}{2}\dfrac{f^2(x_0)}{f'(x_0)}=4$，将等式化解，可以得到微分方程 $f^2(x_0)=8f'(x_0)$，对于解这个微分方程是 $\dfrac{1}{8}x_0+c=-\dfrac{1}{f(x_0)}$，又因为 $f(0)=2$ 可以计算出 $c=-\dfrac{1}{2}$，这样就可以解出 $f(x)=\dfrac{8}{4-x}$。

19.证明（1）$u(x),v(x)$ 可导，用导数定义证明 $\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（2）$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$ 写出 $f(x)$ 的导数公式

【答案】

（2）

$$u_1(x)u_2(x)\ldots,u_n(x)'=u_1(x)u_2(x)\ldots,u_n(x)+u_1(x)u_2(x)\ldots,u_n(x)+\ldots+u_1(x)u_2(x)\ldots,u_n(x)$$

【解析】

$$u(x)v(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x+\Delta x)v(x)+u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$ 由于

$$=\lim_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$u(x),v(x)$可导，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=v'(x)$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}=u'(x)$

由于可导函数必连续，可知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}u(x+\Delta x)=u(x)$，综上所述

$$u(x)v(x)'=u\ (x)v(x)+u(x)v\ (x)$$

（2）

$$u_1(x)u_2(x)\ldots,u_n(x)'=u_1\ (x)u_2(x)\ldots,u_n(x)+u_1(x)u_2\ (x)\ldots,u_n(x)+\ldots+u_1(x)u_2(x)\ldots,u_n\ (x)$$

20、设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$，且 $A^3=0$

（I）　求 a 的值

（II）　若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X

【答案】（Ⅰ）$a=0$；　（Ⅱ）$X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

【解析】解：（Ⅰ）由题设可知 A 的特征根为 0，则 $tr(A)=3a=0$，故 $a=0$。

（Ⅱ）由题设可知，$X(E-A^2)-AX(E-A^2)=E,(X-AX)(E-A^2)=E$，则

$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$,即 $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

21、设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 为对角矩阵.

【答案】（Ⅰ）$a=4,b=5$；（Ⅱ）　$P=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

【解析】解：（Ⅰ）由 $A \sim B$ 有 $tr(A)=tr(B)$，故 $a-b=1$，又由 $|A|=|B|$ 有 $2a-b=3$，解得 $a=4,b=5$。

（Ⅱ）先求 A 的特征根，$|\lambda E-A|=0$，得 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$，

再求 A 的特征向量，当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，$(E-A)X=0$ 解得 $x_1=(2,1,0)^T,x_2=(-3,0,1)^T$，当 $\lambda_3=5$ 时，$(5E-A)X=0$ 解得，$x_3=(-1,-1,1)^T$，令 $P=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}.$$

22、$X \sim f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，对 X 进行观测，当第二次出现大于 3 的观测值是停止，Y 为观测数。

(1) Y 的概率分布 (2) $E(Y)$

【答案】(I) $P\{Y=k\}=C_{k-1}^{1}p(1-p)^{k-2}p=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2},k=2,3,\ldots$；

(II) $E(Y)=16$

【解析】(I) $P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$，从而 Y 的概率分布为：

$$P\{Y=k\}=C_{k-1}^{1}p(1-p)^{k-2}p=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2},k=2,3,\ldots$$

(II) $E(Y)=\sum_{k=2}^{\infty}kP\{Y=k\}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}=\sum_{n=2}^{\infty}k(k-1)[(\frac{7}{8})^{k-2}-2(\frac{7}{8})^{k-1}+(\frac{7}{8})^{k}]$

记 $h(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2},-1<x<1$，则 $h(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=(\sum_{n=2}^{\infty}kx^{k-1})'=(\sum_{k=2}^{\infty}x^k)''=\frac{2}{(1-x)^3}$，

$$g(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{n-1}=x\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{n-2}=xh(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$f(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{n}=x^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=x^2h(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

故，$h(x)-2f(x)+g(x)=\dfrac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\dfrac{2}{1-x}$，

从而 $E(Y)=h(\frac{7}{8})-2f(\frac{7}{8})+g(\frac{7}{8})=16$.

23、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta},\theta \quad x \quad 1 \\ \quad 0,\text{其它}\end{cases}$

(1)矩估计；(2)最大似然估计

【答案】(I) $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$， $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；(II) $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1}x\cdot\dfrac{1}{1-\theta}dx=\dfrac{1+\theta}{2}$，$\theta=2E(X)-1$，

令 $E(X)=\overline{X}$，得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$， $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量；

(II) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=(\dfrac{1}{1-\theta})^n$，则 $\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$，故 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{1-\theta}$，

$n>0,\theta\le 1$，故 L 是关于 θ 的单调递增的函数，因此 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.