

2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题参考答案

一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解析】 本题属于未定式求极限, 极限为 1^∞ 型, 故可以用 “ e 的抬起法” 求解.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

其中又因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[1 + \frac{x^2 - (x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[x^2 - (x-a)(x+b) \right]}{(x-a)(x+b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + abx}{(x-a)(x+b)} \\ &= a - b \end{aligned}$$

故原式极限为 e^{a-b} , 所以应该选择 (C).

(2) 【答案】 (B).

$$\text{【解析】 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_1 \left(-\frac{y}{x^2} \right) + F'_2 \left(-\frac{z}{x^2} \right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{F'_1 \cdot \frac{y}{x} + F'_2 \cdot \frac{z}{x}}{F'_2} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2},$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{F'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = \frac{F'_2 \cdot z}{F'_2} = z.$$

(3) 【答案】 (D).

【解析】 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点, 应分成

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[n]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$, 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}}} = 1$.

显然, 当 $0 < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < 1$, 则该反常积分收敛.

当 $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论 m, n 是什么正整数, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 总收敛. 对于 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$, 取 $0 < \delta < 1$,

不论 m, n 是什么正整数,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{(1-x)^{\delta}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}} (1-x)^{\delta} = 0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ 收敛, 故选 (D).

(4) 【答案】 (D).

【解析】 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \right) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2+j^2} \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \right)$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} \right)$$

$$= \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

(5) 【答案】 (A).

【解析】 由于 $AB = E$, 故 $r(AB) = r(E) = m$. 又由于 $r(AB) \leq r(A), r(AB) \leq r(B)$, 故

$$m \leq r(A), m \leq r(B) \quad ①$$

由于 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, 故

$$r(A) \leq m, r(B) \leq m \quad ②$$

由①、②可得 $r(A) = m, r(B) = m$, 故选 A.

(6) 【答案】 (D).

【解析】 设 λ 为 A 的特征值, 由于 $A^2 + A = O$, 所以 $\lambda^2 + \lambda = 0$, 即 $(\lambda + 1)\lambda = 0$, 这样 A 的特征值只能为 -1 或 0 . 由于 A 为实对称矩阵, 故 A 可相似对角化, 即 $A \sim \Lambda$, $r(A) = r(\Lambda) = 3$, 因

$$\text{此, } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) 【答案】 (C).

【解析】 离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中 $F(x)$ 的形式, 得到随机变量 X 既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$$P\{X=1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}, \text{ 故本题选 (C).}$$

(8) 【答案】 (A).

$$\text{【解析】 根据题意知, } f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

利用概率密度的性质: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b = 1$$

所以整理得到 $2a + 3b = 4$, 故本题应选 (A).

二、填空题

(9) 【答案】 0.

【解析】 因为 $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -\ln(1+t^2)e^t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(-\ln(1+t^2)e^t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[-\frac{2t}{1+t^2} \cdot e^t - \ln(1+t^2)e^t \right] \cdot (-e^t), \text{ 所以 } \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=0} = 0.$$

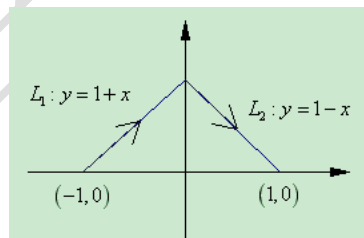
(10) 【答案】 -4π .

【解析】 令 $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$, 利用分部积分法,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^\pi t \cos t \cdot 2tdt = \int_0^\pi 2t^2 \cos t dt = 2 \int_0^\pi t^2 d \sin t \\ &= 2 \left[t^2 \sin t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2t \sin t dt \right] = 4 \int_0^\pi t d \cos t \\ &= 4 \left[t \cos t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos t dt \right] = 4\pi \cos \pi - 4 \sin t \Big|_0^\pi = -4\pi. \end{aligned}$$

(11) 【答案】 0.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \int_L xy dx + x^2 dy &= \int_{L_1} xy dx + x^2 dy + \int_{L_2} xy dx + x^2 dy \\ &= \int_{-1}^0 x(1+x) dx + x^2 dx + \int_0^1 x(1-x) dx + x^2(-dx) \\ &= \int_{-1}^0 (2x^2 + x) dx + \int_0^1 (x - 2x^2) dx \\ &= \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = 0 \end{aligned}$$



(12) 【答案】 $\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} &= \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 z dz}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \cdot \left(\frac{z^2}{2} \Big|_{r^2}^1 \right)}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \left(\frac{1}{2} - \frac{r^4}{2} \right) dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^1} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{6} d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$

(13) 【答案】 $a = 6$.

【解析】因为由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 生成的向量空间维数为 2, 所以 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$. 对 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 进行初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $a = 6$.

(14) 【答案】 2.

【解析】利用离散型随机变量概率分布的性质, 知

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} = Ce, \text{ 整理得到 } C = e^{-1}, \text{ 即}$$

$$P\{X = k\} = \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{1^k}{k!} e^{-1}.$$

故 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $E(X) = 1, D(X) = 1$, 根据方差的计算公式有

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

三、解答题

(15) 【解析】对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, 解得特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 所以对应齐次方程的通解为 $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

设原方程的一个特解为 $y^* = x(ax + b)e^x$, 则

$$(y^*)' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x,$$

$$(y^*)'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x,$$

代入原方程, 解得 $a = -1, b = -2$, 故特解为 $y^* = x(-x - 2)e^x$.

故方程的通解为 $y = y_c + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x + 2)e^x$.

(16) 【解析】因为 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$,

所以 $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 0, x = \pm 1$.

又 $f''(x) = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^4}$, 则 $f''(0) = 2 \int_1^0 e^{-t^2} dt < 0$, 所以

$$f(0) = \int_1^0 (0-t)e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm 1) = 4e^{-1} > 0$, 所以 $f(\pm 1) = 0$ 为极小值.

又因为当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) > 0$; $0 \leq x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; $-1 \leq x < 0$ 时, $f'(x) > 0$; $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

(17) 【解析】(I) 当 $0 < x < 1$ 时 $0 < \ln(1+x) < x$, 故 $[\ln(1+t)]^n < t^n$, 所以

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n < |\ln t| t^n,$$

则

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

$$(II) \int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ 故由}$$

$$0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

(18) 【解析】

$$(I) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{(n+1)-1} \cdot x^{2(n+1)}}{2(n+1)-1} \cdot \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{2n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1} \cdot \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n-1)x^2}{2n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{2n+1} \right| \cdot x^2 = x^2,$$

所以, 当 $x^2 < 1$, 即 $-1 < x < 1$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x^2 > 1$ 时, 原级数发散, 因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, 由莱布尼兹判别法知, 此级数收敛, 故原级数的收敛

域为 $[-1, 1]$.

(II) 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n} = x \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n-1} \right)$, 其中令

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n-1} \quad x \in (-1, 1),$$

所以有

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} \quad x \in (-1, 1),$$

从而有

$$S_1'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2} \quad x \in (-1, 1),$$

故

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt + S_1(0) = \arctan x, \quad x \in (-1, 1).$$

$S_1(x)$ 在 $x = -1, 1$ 上是连续的, 所以 $S(x)$ 在收敛域 $[-1, 1]$ 上是连续的. 所以

$$S(x) = x \cdot \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

(19) 【解析】 (I) 令 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1$, 故动点 $P(x, y, z)$ 的切平面的法向量为

$(2x, 2y - z, 2z - y)$, 由切平面垂直 xOy , 故所求曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1 \\ 2z - y = 0 \end{cases}$.

(II) 由 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1 \\ 2z - y = 0, \end{cases}$ 消去 z , 可得曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线所围成的

xOy 上的区域 $D: \{(x, y) | x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1\}$, 由 $(x^2 + y^2 + z^2 - yz)'_x = (1)'_x$, 由

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} dxdy,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS = \iint_D (x + \sqrt{3}) dxdy = \iint_D x dxdy + \iint_D \sqrt{3} dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{3} dxdy = \sqrt{3}\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi. \end{aligned}$$

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1: (I) 已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 对增广矩阵进行初等行变换, 得

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

当 $\lambda=1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$, 此时, $r(A) \neq r(\bar{A})$, 故 $Ax=b$ 无解(舍去).

当 $\lambda=-1$ 时, $\bar{A} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right)$, 由于 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 所以 $a=-2$, 故 $\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2: 已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解, 故 $r(A)=r(\bar{A})<3$, 因此 $|A|=0$, 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0,$$

知 $\lambda=1$ 或 -1 .

当 $\lambda=1$ 时, $r(A)=1 \neq r(\bar{A})=2$, 此时, $Ax=b$ 无解, 因此 $\lambda=-1$. 由 $r(A)=r(\bar{A})$, 得 $a=-2$.

(II) 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

可知原方程组等价于 $\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$, 写成向量的形式, 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 k 为任意常数.

(21) 【解析】 (I) 由于二次型在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2 + y_2^2$, 所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.

由于 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 所以 A 对应于 $\lambda_3 = 0$ 的特征向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, 记为 α_3 .

由于 A 是实对称矩阵, 所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的, 设属于 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量为 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则 $\alpha^T \alpha_3 = 0$, 即 $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_3 = 0$. 求得该方程组的基础解系为

$\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T$, 因此 α_1, α_2 为属于特征值 $\lambda = 1$ 的两个线性无关的特征向量.

由于 α_1, α_2 是相互正交的, 所以只需单位化:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = (0, 1, 0)^T, \beta_2 = \frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T.$$

取 $Q = (\beta_1, \beta_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, 则 $Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, 且 $Q^{-1} = Q^T$,

$$\text{故 } A = Q \Lambda Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(II) $A+E$ 也是实对称矩阵, A 的特征值为 1, 1, 0, 所以 $A+E$ 的特征值为 2, 2, 1, 由于 $A+E$ 的特征值全大于零, 故 $A+E$ 是正定矩阵.

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的概率密度 $f(x, y)$ 后, 要求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$, 可

以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$ 来进行计算. 本题中还有待定参数, A 要根据概率密度的

性质求解, 具体方法如下.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2-x^2} dy = A e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A \sqrt{\pi} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

根据概率密度性质有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \pi, \text{ 即 } A = \pi^{-1},$$

$$\text{故 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$$

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{A e^{-2x^2+2xy-y^2}}{A \sqrt{\pi} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(23) 【解析】 $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$, $N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2)$, $N_3 \sim B(n, \theta^2)$

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\sum_{i=1}^3 a_i N_i\right) = a_1 E(N_1) + a_2 E(N_2) + a_3 E(N_3) \\ &= a_1 n(1-\theta) + a_2 n(\theta-\theta^2) + a_3 n\theta^2 = na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2. \end{aligned}$$

因为 T 是 θ 的无偏估计量, 所以 $E(T) = \theta$, 即得
$$\begin{cases} na_1 = 0 \\ n(a_2 - a_1) = 1, \text{ 整理得到 } a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{n}, \\ n(a_3 - a_2) = 0 \end{cases}$$

$a_3 = \frac{1}{n}$. 所以统计量

$$T = 0 \times N_1 + \frac{1}{n} \times N_2 + \frac{1}{n} \times N_3 = \frac{1}{n} \times (N_2 + N_3) = \frac{1}{n} \times (n - N_1).$$

注意到 $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$, 故

$$D(T) = D\left[\frac{1}{n} \times (n - N_1)\right] = \frac{1}{n^2} \times D(N_1) = \frac{1}{n} \theta(1-\theta).$$