2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】：（C）

【解析】：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平渐近线，没有斜渐近线，总共两条渐近线，选（C）。

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

【答案】：（C）

【解析】：$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)\left[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)\right]'$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}n!$，故选（C）。

（3）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

【答案】：（B）

【解析】：由于 $f(x,y$ 在 $(0,0)$ 处连续，可知如果 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则必有

$f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$

这样，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 就可以写成 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$，也即极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 存在，可知 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$，也即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)$。由可微的定义可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。故选（B）

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin xdx$ $(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$

(C) $I_2<I_3<I_1$　　(D) $I_2<I_1<I_3$

【答案】: (D)

【解析】: 由于当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0$，可知 $\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx<0$，也即 $I_2-I_1<0$，可知 $I_1>I_2$。

又由于 $\int_\pi^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_\pi^{2\pi}e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$，对 $\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx$ 做变量代换 $t=x-\pi$ 得

$\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_\pi^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin(t+\pi)dt=-\int_\pi^{2\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin tdt=-\int_\pi^{2\pi}e^{(x+\pi)^2}\sin xdx$，

故 $\int_\pi^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx=\int_\pi^{2\pi}\left(e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}\right)\sin xdx$ 由于当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $\sin x<0,e^{x^2}-e^{(x+\pi)^2}<0$，可知

$\int_\pi^{3\pi}e^{x^2}\sin xdx>0$，也即 $I_3-I_1>0$，可知 $I_3>I_1$。

综上所述有 $I_2<I_1<I_3$，故选(D).

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】:(C)

【解析】:由于 $\left|\left(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$,可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。故选(C)。

(6)设 A 为 3 阶矩阵,P 为 3 阶可逆矩阵,且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$,$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$,$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 则 $Q^{-1}AQ=$( )

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】:(B)

【解析】:$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$,

故 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选(B)。

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布,则 $p\left\{X<Y\right\}=$()

$(A)\dfrac{1}{5}$ $(B)\dfrac{1}{3}$ $(C)\dfrac{2}{5}$ $(D)\dfrac{4}{5}$

【答案】:(A)

【解析】:$\left(X,Y\right)$ 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-x-4y},x>0,y>0\\0,\ \text{其它}\end{cases}$

则 $P\left\{X<Y\right\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y e^{-x-4y}dx=\int_0^{+\infty}e^{-5y}dy=\dfrac{1}{5}$,故选(A)

(8)将长度为 1m 的木棒随机地截成两段,则两段长度的相关系数为()

$(A)\ \ 1$ $\qquad(B)\ \ \dfrac{1}{2}$ $\qquad(C)\ \ -\dfrac{1}{2}$ $\qquad(D)\ \ -1$

【答案】：(D)

【解析】：设两段长度分别为 X,Y，显然 $X+Y=1,$ 即 $Y=-X+1$，故两者是线性关系，且是负相关，所以相关系数为 -1，故选 (D)。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^{x}$，则 $f(x)=$________。

【答案】：e^{x}

【解析】：特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$. 再由 $f'(x)+f(x)=2e^{x}$ 得 $2C_1e^{x}-C_2e^{-2x}=2e^{x}$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^{x}$。

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$ ________。

【答案】：$\dfrac{\pi}{2}$

【解析】：令 $t=x-1$ 得 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx=\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}dt=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}dt=\dfrac{\pi}{2}$。

（11）$\operatorname{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ ________。

【答案】：$\{1,1,1\}$

【解析】：$\operatorname{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\left\{y,x-\dfrac{z}{y^2},\dfrac{1}{y}\right\}\Big|_{(2,1,1)}=\{1,1,1\}$

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\ge0,y\ge0,z\ge0\},$ 则 $\iint\limits_{\Sigma}y^2dS=$________。

【答案】：$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

【解析】：由曲面积分的计算公式可知 $\iint\limits_{\Sigma} y^2dS=\iint\limits_{D} y^2\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{3}\iint\limits_{D} y^2dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0,y\ge 0,x+y\le 1\}$。故原式 $=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} y^2dx=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{12}$

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为________。

【答案】：2

【解析】：矩阵 xx^T 的特征值为 $0,0,1$，故 $E-xx^T$ 的特征值为 $1,1,0$。又由于 $E-xx^T$ 为实对称矩阵，是可相似对角化的，故它的秩等于它非零特征值的个数，也即 $r\left(E-xx^T\right)=2$。

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(AB\,|\,\bar{C})=$________。

【答案】：$\frac{3}{4}$

【解析】：由条件概率的定义，$P\left(AB\middle|\bar{C}\right)=\frac{P\left(AB\bar{C}\right)}{P\left(\bar{C}\right)}$，

其中 $P\left(\bar{C}\right)=1-P\left(C\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

$P\left(AB\bar{C}\right)=P\left(AB\right)-P\left(ABC\right)=\frac{1}{2}-P\left(ABC\right)$，由于 A,C 互不相容，即 $AC=\phi$，$P\left(AC\right)=0$，又

$ABC\subset AC$，得 $P\left(ABC\right)=0$，代入得 $P\left(AB\bar{C}\right)=\frac{1}{2}$，故 $P\left(AB\middle|\bar{C}\right)=\frac{3}{4}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f^{'}(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\ge 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\ge 0$，故 $f^{'}(x)\ge 0$。而 $f(0)=0$，

即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$，也即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\le 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x\le 0$，故 $f^{'}(x)\ge 0$。而 $f(0)=0$，

即得，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$ 也即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge\frac{x^2}{2}+1$。

当 $x=0$ 时，显然有 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x=1+\frac{x^2}{2}$。

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

【解析】：$f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，

先求函数的驻点：令

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \\ f_y'(x,y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0 \end{cases},$$

解得驻点为 $(1,0),(-1,0)$.又

$$f_{xx}''=x\left(x^2-3\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{xy}''=-y\left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f_{yy}''=-x\left(1-y^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

对点$(1,0)$，有 $A_1=f_{xx}''(1,0)=-2e^{-\frac{1}{2}},B_1=f_{xy}''(1,0)=0,C_1=f_{yy}''(1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$

所以，$A_1C_1-B_1^2>0,A_1<0$，故 $f(x,y)$在点$(1,0)$处取得极大值 $f(1,0)=e^{\frac{1}{2}}$.

对点$(-1,0)$，有 $A_2=f_{xx}''(-1,0)=2e^{-\frac{1}{2}},B_2=f_{xy}''(-1,0)=0,C_2=f_{yy}''(-1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$

所以，$A_2C_2-B_2^2>0,A_2>0$，故 $f(x,y)$在点$(1,0)$处取得极小值 $f(-1,0)=-e^{\frac{1}{2}}$.

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数

【解析】：

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}}{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot\frac{2(n+1)+1}{4(n+1)^2+4(n+1)+3}\right|=1$$

易知当$x=1$及$x=-1$时, 级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 发散，可知$x\in(-1,1)$为幂级数的收敛域。

下面在计算幂级数的和函数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{2n+1}$$

其中$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left\{\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)t^{2n}\right]dt\right\}'$

$$=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int_0^x t^{2n}dt\right\}'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}$$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n}}{2n+1}$ 则 $xS_1(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 。根据逐项求导定理可知

$\left[xS_1(x)\right]'=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\dfrac{2}{1-x^2}$，故 $xS_1(x)=\int_0^x\dfrac{dt}{1-t^2}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$，故当 $x\neq 0$ 时，有

$S_1(x)=\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$，而当 $x=0$ 时，有 $S_1(0)=2$。

$$故\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right),-1<x<1或0<x<1\\ 3 \qquad\qquad ,x=0\end{cases}$$

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\le t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，

$f(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

【解析】：（1）曲线 L 在任一处 (x,y) 的切线斜率为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}$，过该点 (x,y) 处的切线为

$Y-\cos t=\dfrac{-\sin t}{f'(t)}\left(X-f(t)\right)$，令 $Y=0$ 得 $X=f'(t)\cos t+f(t)$.由于曲线 L 与 x 轴和 y 轴的交点到切点的距离恒为1.

故有 $\left[f'(t)\cot t+f(t)-f(t)\right]^2+\cos^2 t=1$，又因为 $f'(t)>0(0<t<\dfrac{\pi}{2})$

所以 $f'(t)=\dfrac{\sin t}{\cot t}=\cos t$，两边同时取不定积分可得 $f(t)=\sin t+C$，又由于 $f(0)=0$，所以 $C=0$.故函数 $f(t)=\sin t$.

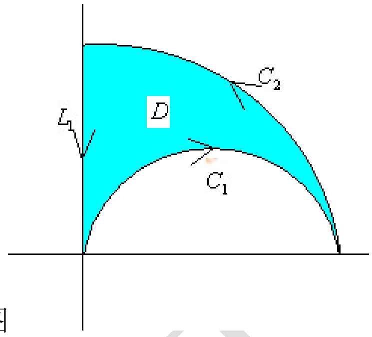
（2）此曲线 L 与 x 轴和 y 轴的所围成的无边界的区域的面积为：

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}.$$

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2ydx+\left(x^3+x-2y\right)dy$。

【解析】：设圆 $x^2+y^2=2x$ 为圆 C_1，圆 $x^2+y^2=4$ 为圆 C_2，补线利用格林公式即可，设所补直线 L_1



为 $x=0(0\le y\le 2)$，并设 L 及 L_1 所围的平面区域为 D，如图

下面用格林格林公式计算得：

原式 $=\int\limits_{L+L_1} 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy-\int\limits_{L_1} 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$

$=\iint\limits_D (3x^2+1-3x^2)dxdy-\int_2^0 -2ydy$

$=S_D-4=\dfrac{\pi}{2}-4$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=\beta$ 的通解。

【解析】：（Ⅰ）$\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）$\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有$1-a^4=0$及$-a-a^2=0$，可知$a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，进一步化为行最简形得

$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1-&\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

线性方程组$Ax=b$存在 2 个不同的解，有$|A|=0$.

即：$|A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$，得$\lambda=1$或$-1$.

当$\lambda=1$时，$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\1\end{pmatrix}$，显然不符，故$\lambda=-1$.

（21）（本题满分 11 分）三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，$A^T$为矩阵$A$的转置，已知$r(A^TA)=2$，

且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

【解析】：1）$A^TA=\begin{pmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{pmatrix}$ 由 $r(A^TA)=2$ 可得，

$$\begin{vmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(a+1)^2(a^2+3)=0\text{，可知 } a=-1\text{。}$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}+4x_1x_2+4x_2x_3$

令矩阵 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于 $\lambda_1=0$,解 $(\lambda_1E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$,解 $(\lambda_2E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6$,解 $(\lambda_3E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

令 $x=Qy$ 可将原二次型化为 $2y_2^2+6y_3^2$。

（22）（本题满分 11 分）

已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：（1）$P(X=2Y)$；

（2）$\operatorname{cov}(X-Y,Y)$ 与 ρ_{XY}.

【解析】:

（1）先求出 (X,Y) 的联合分布律

$Y \backslash X$	0	1	2
0	$1/12$	0	$1/12$
1	0	$1/3$	0
2	$1/4$	0	$1/12$

$$P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

（2）$\operatorname{cov}(X-Y,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$，其中

$EX=\frac{2}{3},EX^2=1,EY=1,EY^2=\frac{5}{3},DX=EX^2-(EX)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3},EXY=\frac{2}{3}$

所以，$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，$\operatorname{cov}(Y,Y)=DY=\frac{2}{3}$，$\operatorname{cov}(X-Y,Y)=-\frac{2}{3},\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$,设 $Z=X-Y$,

(1) 求 z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$；

(2) 设 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$；

(3) 证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

【解析】:(1)因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$，且 X 与 Y 相互独立，故 $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$，

所以，Z 的概率密度为 $f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{10\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},(-\infty<z<+\infty)$

（2）似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i,\sigma^2)=\frac{1}{(10\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}=(10\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(10\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$$

$$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$$

解得最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，

最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$

（3）$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\frac{1}{5n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\right)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(EZ_i\right)^2+DZ_i\right]=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}3\sigma^2=\sigma^2$

故$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量。