2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

数三选择题答案

（1）、D
（2）、C
（3）、B
（4）、D
（5）、B
（6）、B
（7）、C
（8）、C

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）、-2
（10）、$2-\ln 2$
（11）、$\ln 2$
（12）、$e^{\frac{1}{2}x}(C_1x+C_2)$
（13）、-1
（14）、$2e^2$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=1$

又因为：

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$$
$$=1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\cos 2x-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$$
$$=1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+\cos x(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{ax^n}+\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{ax^n}+\frac{\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^2)}{ax^n}+\frac{\frac{1}{2}(3x)^2+o(x^2)}{ax^n}\right)$$

所以 $n=2$ 且 $\frac{1}{2a}+\frac{4}{2a}+\frac{9}{2a}=1\Rightarrow a=7$

（16）【答案】由题意可得：

$$V_x=\pi\int_0^a (x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

因为：$V_y=10V_x$ 所以 $\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$

（17）【答案】$\iint\limits_D x^2dxdy=\iint\limits_{D_1}x^2dxdy+\iint\limits_{D_2}x^2dxdy$

$$=\int_0^2 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}dy+\int_2^6 x^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}dy$$

$$=\frac{416}{3}$$

（18）【答案】（I）设利润为 l，则 $l=PQ-(20Q+6000)=40Q-\frac{Q^2}{1000}-6000$

边际利润 $l'=40-\frac{Q}{500}$

（II）当 $P=50$ 时，边际利润为 20，

经济意义为：当 $P=50$ 时，销量每增加一个，利润增加 20

(III)令 $l'=0$，得 $Q=20000$，此时 $P=60-\frac{Q}{1000}=40$

（19）【答案】（I）证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2,\therefore\exists X$，当 $x>X$ 时，有 $f(x)>\frac{3}{2}$，

$f(x)$ 在 $[0,X]$ 上连续，根据连续函数介值定理，存在 $a\in[0,X]$，使得 $f(a)=1$

（II）$f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且可导，根据拉格朗日中值定理，

$f(a)-f(0)=f'(\xi)a=1,\xi\in(0,a)$，

故 $\exists\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$

$b=0,a=-1$

（20）【答案】$C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$

（21）【答案】(1)

$$f=(2a_1^2+b_1^2)x_1^2+(2a_2^2+b_2^2)x_2^2+(2a_3^2+b_3^2)x_3^2+(4a_1a_2+2b_1$$
$$+(4a_1a_3+b_1b_3)x_1x_3+(4a_2a_3+2b_2b_3)x_2x_3$$

则f的矩阵为$\begin{pmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$

$=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

（2）令A=$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，则$A\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha, A\beta=2\alpha\alpha^T\beta+\beta\beta^T\beta=\beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$

（22）【答案】（1） $f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{9y^2}{x}, & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（2） $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} -9y^2\ln y, & 0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

（23）【答案】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^{+\infty} x\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\dfrac{\theta}{x})=\theta$，令 $EX=\overline{X}$，故θ矩估计量为$\overline{X}$.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\begin{cases} \prod_{i=1}^{n}\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}=\begin{cases} \theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0 \\ 0 & 其他 \end{cases}$

当$x_i>0$时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=0$，

得$\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$，所以得$\theta$极大似然估计量$\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$.