二、六（三a、十）

西北工业大学
2009年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等代数（B卷）　　　　试题编号：864

说　　明：所有答题一律写在答题纸上　　　　第 1 页 共 2 页

（第二章）（易）一、（本题满分 10 分）

计算 n 阶行列式
$$D_n=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0&1\\ n-1&2&0&\cdots&0&0\\ 0&n-2&3&\ddots&\vdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\ 0&\cdots&0&2&n-1&0\\ 1&0&\cdots&0&1&n\end{vmatrix}$$

（第四章）分块矩阵　二、（本题满分 15 分）

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，E_m 是 m 阶单位矩阵．证明：
$$|E_m+AB|=|E_n+BA|$$

$\begin{pmatrix}E_m&-B\\A&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B\\0&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\A&AB+E\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}E_m&-B\\A&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&0\\-A&E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}BA+E&-B\\0&E\end{pmatrix}$

构造矩阵 $\begin{pmatrix}B&E\\-E&A\end{pmatrix}$ 方法

（第六章）特征值 相似　三、（本题满分 15 分）

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,-3$ 的特征向量，向量 α_3 满足

$A\alpha_3=\alpha_2-3\alpha_3$.

1. 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关;　$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$　左右同时 $\times A$
2. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.　$=\Lambda$

第九章（易）四、（本题满分 15 分）

设向量空间 $\mathbf{R}^2$ 按照某种内积（不一定是通常的）构成欧氏空间，它的两组基为
$$\alpha_1=(1,1),\ \alpha_2=(1,-1)\ \text{和}\ \beta_1=(0,2),\ \beta_2=(6,12)$$

且 α_i 与 β_j 的内积为
$$[\alpha_1,\beta_1]=1,\ [\alpha_1,\beta_2]=15,\ [\alpha_2,\beta_1]=-1,\ [\alpha_2,\beta_2]=3$$

求基 β_1,β_2 的度量矩阵.　$\begin{pmatrix}2&12\\12&126\end{pmatrix}$

第三章（易）五、（本题满分 20 分）

讨论线性方程组 $Ax=b$ 的可解性，其中
$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&3&c&5\\1&-3&-2&a\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

在有无穷多解时求通解（要求用向量形式表示）.

$r(A)=r(\bar{A})<4$　　$c=4$ 且 $a\neq-1$　　$c\neq4$ 且 $a=-1$　　$c=4$ 且 $a=-1$

$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{1n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$　$r(A^*)=1$　$r(A)=n-1$　$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\0&0&&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$　$A^*b=0$　$A_{11}b_1+\cdots+A_{n1}b_n=0$

西北工业大学
2009年硕士研究生入学考试试题

$\because A_{11}\neq0$　$|A^*|=0$　$\therefore$ 解 $\Leftarrow Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})<n$

试题名称：高等代数（B卷）　　　　试题编号：864

说　　明：所有答题一律写在答题纸上　　　　第 2 页 共 2 页

有 $|A|=0$　$A^*Ax=A^*b=0$　$\Rightarrow A^*b=0,\ b\neq0$　$\therefore |A^*|=0$ 即 $r(A^*)<n$　有 $|A|=0$

（第三章 线性方程组）六、（本题满分 10 分）

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，且 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}\neq0$．证明：非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件是 $A^*b=0$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.　$A^*=A^{-1}|A|$

第六章（易）七、（本题满分 20 分）

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.　$\lambda=0,\ 3=\lambda$

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1. 求 A 的特征值与特征向量;
2. 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$;
3. 求 A 及 $\left(A-\dfrac{3}{2}E\right)^6$.

第八章（易）八、（本题满分 15 分）

已知 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\b&-1&c\\a&0&2\end{pmatrix}$.　$a=0$　$a\neq0$

1. 写出 A 的所有可能的 Jordan 标准形（不考虑 Jordan 块的排列次序）;
2. 导出 A 相似于对角矩阵的充要条件；在 A 相似于对角矩阵时，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.　$a=0$

第九章（易）九、（本题满分 20 分）

设 3 维欧氏空间 V 中元素 α_0 在 V 的标准正交基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 下的坐标为 $(1,-1,0)^T$．定义 V 的变换如下
$$T(\alpha)=\alpha+[\alpha,\alpha_0]\alpha_0\qquad(\forall\alpha\in V)$$

其中 $[\alpha,\alpha_0]$ 表示 α 与 α_0 的内积.

1. 证明 T 是线性变换;　$T(\alpha+\beta)=T(\alpha)+T(\beta)$　$T(k\alpha)=kT(\alpha)$
2. 证明 T 是对称变换;　$(T\alpha,\beta)=(\alpha,T\beta)$
3. 求 V 的一组标准正交基 η_1,η_2,η_3，使 T 在该基下的矩阵为对角矩阵.　$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\alpha$

第七章　十、（本题满分 10 分）　$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)X$

设线性空间 V 的线性变换 T 和 S 满足 $TS=ST$，证明：S 的值域 $R(S)$ 与核 $N(S)$ 都是 T 的不变子空间.　$\alpha\in W,\ T\alpha\in W$

$=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　$X^{-1}[\ ]X=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}$

$T\alpha\in V$　$S\alpha\in R(S)$　$ST(\alpha)=T(S\alpha)\in R(S)$　$S\alpha=0$　$\Downarrow$　$ST\alpha=0$　$\alpha\in N(S)$　$T\alpha\in N(S)$