

一、(本题满分 10 分)
计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ x & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}$$

二、(本题满分 10 分)

设 A 为 n 阶方阵，正整数 $n \geq 3$ ，且 $(A+3E)^{n-1} = O$ 但 $(A+3E)^{n-2} \neq O$ ，其中 E 是 n 阶单位矩阵。求 A 的不变因子与 Jordan 标准形。

三、(本题满分 10 分)

设 n 阶方阵 $A = (a_{ij})^{n \times n}$ ，且 a_{11} 的代数余子式 $A_{11} = 0$ 。证明：齐次线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件是 $A^*b = 0$ ，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

四、(本题满分 20 分)

已知两个线性方程组

$$(I) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -5 \\ x_1 + bx_2 + x_4 = 6 \\ x_3 - 2x_4 = 2c + 1 \end{cases}$$

1) 求方程组 (I) 的通解；

2) 确定方程组 (II) 中的参数 a, b, c ，使方程组 (II) 与方程组 (I) 同解。

五、(本题满分 15 分)

设 $\alpha = (1, a_2, \dots, a_n)^T$ ， $\beta = (1, b_2, \dots, b_n)^T$ ，且 $k = \beta^T \alpha = 0$ 。记 $A = \alpha \beta^T$ 。

1) 求 A 的特征值与特征向量；

2) 矩阵 A 是否相似于对角阵？若可以，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵。

六、(本题满分 15 分)

$$\text{已知 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

1) 求 A 的不变因子、初等因子和最小多项式；

2) 写出 A 的 Jordan 标准形。

(本题满分 20 分)

设 A 是 n 阶正定矩阵， B 是秩为 r 的 $n \times r$ 矩阵，其中 $r < n$ 。

1) 证明矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & O \end{pmatrix}$ 可逆，并求出它的逆矩阵；

2) 证明矩阵 M 有 n 个正特征值和 r 个负特征值。

八、(本题满分 20 分)
已知 R 的线性变换 T 在基

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \lambda_1^{-1} A + \lambda_2^{-1} B \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^{-1} A = A^{-1} - \lambda_2^{-1} B$$

$$E_1$$

$$B^T$$

$$E_2$$

$$B^T$$

$$E_3$$

$$B^T$$

$$E_4$$

$$B^T$$

$$E_5$$

$$B^T$$

$$E_6$$

$$B^T$$

$$E_7$$

$$B^T$$

$$E_8$$

$$B^T$$

$$E_9$$

$$B^T$$

$$E_{10}$$

$$B^T$$