1) 椭圆曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$　　椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　　双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

3) 单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$　　椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 双曲柱面

4) 双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

西北工业大学

2008年硕士研究生入学考试试题

试题名称：高等代数（A卷）　　试题编号：864

说　明：所有答题一律写在答题纸上　　第 2 页 共 2 页

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$　　$\alpha_1=(-1,0,1)$，$\alpha_2=(0,1,1)$，$\alpha_3=(1,-1,-1)$

下的象为　　$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$T(\alpha_1)=\beta_1=(1,0,0)$，$T(\alpha_2)=\beta_2=(0,-1,0)$，$T(\alpha_3)=\beta_3=(-1,1,2)$

令 $\beta=(\alpha_1\cdots\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_3\end{pmatrix}$

$T(\alpha_1\cdots\alpha_3)=(\beta_1\cdots\beta_3)Y$

$T(\beta)=T(\alpha_1\cdots\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_3)X\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_3)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

1）求 T 在基 α_1，α_2，α_3 下的矩阵；　$X=A^{-1}B$

2）若 $\alpha=(1,1,1)$，求 $T(\alpha)$；

3）若 $T(\beta)$ 在基 α_1，α_2，α_3 下的坐标为 $(-1,2,1)^T$，求 β；

4）求 T 在 $\mathbf{R}^3$ 的基 $\gamma_1=\alpha_1$，$\gamma_2=\alpha_1+\alpha_2$，$\gamma_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 下的矩阵。

九、（本题满分 15 分）

设 α_0 是 n 维欧氏空间 V 中的非零向量，定义变换如下

$$T(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0 \quad (\forall\alpha\in V)$$

1）证明 T 是线性变换；　$T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta$　$T(k\alpha)=kT\alpha$

2）设 α_0 在 V 的一组标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，求 T 在这组基下的矩阵；

3）证明 T 是对称变换；

4）证明 T 是正交变换的充分必要条件是 $k=-\dfrac{2}{(\alpha_0,\alpha_0)}$。

十、（本题满分 8 分）

证明：任一 n 阶实可逆矩阵 A 可分解成一个正交矩阵 Q 与一个正定矩阵 S 之积，即 $A=QS$。

A可逆　AA' 正定　$AA'=T^2$　$A=(A')^{-1}T^2=(A'^{-1}T)T$

十一、（本题满分 7 分）

设 A 是 n 阶方阵，证明存在 n 阶可逆矩阵 B 和满足 $C^2=C$ 的 n 阶幂等矩阵 C，使 $A=BC$。

十二、（本题满分 20 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=-bx_1^2-2x_2^2-bx_3^2+2(b-2)x_1x_3$ 经过正交变换 $x=Qy$ 化为标准形 $f=-2y_1^2-2y_3^2$.

1．求参数 b 的值及所用的正交变换；

2．问 $f(x_1,x_2,x_3)=-1$ 表示哪一类二次曲面？

$2y_1^2+2y_3^2=1$　圆柱面

$\beta_1=\alpha_1$

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2,\eta_1)\eta_1$

$\beta_3=\alpha_3-(\alpha_3,\eta_1)\eta_1-(\alpha_3,\eta_2)\eta_2$

$\beta_n=\alpha_n-(\alpha_n,\eta_1)\eta_1-\cdots-(\alpha_n,\eta_{n-1})\eta_{n-1}$

$\alpha_1=|\beta_1|\eta_1$

$\alpha_2=(\alpha_2,\eta_1)\eta_1+|\beta_2|\eta_2$

$r(A)=r$，∃可逆 P Q.

$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & \\ & \end{pmatrix}=B$　B是幂等 $B^2=B$.

$A=P^{-1}BQ^{-1}=(P^{-1}Q^{-1})(QBQ^{-1})$

$T=P^{-1}Q^{-1}$ 可逆　$S=QBQ^{-1}$

$S^2=S$.

3