(易) 3. 讨论线性方程组 $Ax=b$ 的可解性，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&1&3&-3\\3&2&c&-2\\4&3&5&a\end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$ 在有无穷多解时求通解

解: $Ax=b$ $\begin{cases} r(A)=r(\bar{A}) \begin{cases} =4 & 唯一解 \\ <4 & 无穷解 \end{cases} \\ r(A)\neq r(\bar{A}) \quad 无解 \end{cases}$

$$\bar{A}=(A:b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\2&1&3&-3&-1\\3&2&c&-2&0\\4&3&5&a&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&-2\\&1&-1&5&3\\&&c-4&&0\\&&&a+1&0\end{pmatrix}$$

当 $c=4$ 且 $a=-1$ 时 $Ax=b$ 有唯一解.

当 $c\neq4$ 或 $a\neq-1$ 时 $Ax=b$ 有无穷解.

① $c=4$ 且 $a\neq-1$ 时 通解为 $\xi_1=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$ $k\in R$

② $c\neq4$ 且 $a=-1$ 时 通解为 $\xi_2=k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$ $k_2\in R$

③ $c\neq4$ 且 $a\neq-1$ 时. 通解 $\xi_3=k_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\end{pmatrix}$

$k_3, k_4\in R$

…

设4阶方阵 A 的各行元素之和为1，各列元素之和为2，且非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有3个线性无关的解向量. 证明 A 相似于对角阵.

证: $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 有 $\lambda_1=1$； $(1\ 1\ 1\ 1)A=(2,2,2,2)$ 即 $A^T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ A 与 A' 有相同的特征值 $\lambda_2=2$

注 A, A', A^{-1}, A^* 的特征值与特征向量之间的关系

又∵ $Ax=b$ 有3个线性无关的解向量

∴ $r(A)=r(\bar{A})=1$ 且令解向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

注 利用 $Ax=b$ 与 $Ax=0$ 的解之间的关系

则 $Ax=0$ 有解 $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ 且线性无关

即 $\lambda_3=\lambda_4=0$ 对应的特征向量线性无关.

∴ A 可对角化 $A\sim\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&2\end{bmatrix}$

(易) 3. 设4元二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2$ $\bar{x}=\frac{1}{4}(x_1+\cdots+x_4)$

1) 写出二次型矩阵 A

2) 求正交变换 $x=Qy$ 化二次型 f 为标准形.

1) 解: $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+(x_4-\bar{x})^2$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2\bar{x}(x_1+x_2+x_3+x_4)+4(\bar{x})^2$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)^2$

$=\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}^{4}(x_ix_j)$

$=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{bmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

故二次型矩阵 $A=$

2) 略