②. B 在 $E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$B=(G_1\ G_2\ G_3\ G_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ $\quad \because (G_1\ G_2\ G_3\ G_4) = (E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})G$

$= (E_{11}\ E_{12}\ E_{21}\ E_{22})\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad (G\,\vdots\,E) \to (E\,\vdots\,G^{-1})$

$= (G_1\ G_2\ G_3\ G_4)\, G^{-1}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore$ B 在 $G_1\ G_2\ G_3\ G_4$ 下的坐标

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = G^{-1}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&&&1\\&1&1&-1\\&1&-1&\\1&-1&&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}$$

(例). 设多项式空间 $P[t]_3=\{f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3 \mid a_i\in R\}$ 中线性变换为 $T(f(t))=(a_0-a_2)+(a_1-a_3)t+(a_2-a_0)t^2+(a_3-a_1)t^3$ 求 $P[t]_3$ 的一个基，使 T 在该基下的矩阵为对角阵 ← (必考)

解. T 在 $1,t,t^2,t^3$ 基下，有 $T(1,t,t^2,t^3)=(1,t,t^2,t^3)T$

$$T=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

根据 $|\lambda E-T|=0$ 得 $\lambda_1=\lambda_2=0\quad \lambda_3=\lambda_4=2$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应的解向量为 $\xi_1=(1,0,1,0)'\ \ \xi_2=(0,1,0,1)'$

$\lambda_3=\lambda_4=2$ 对应的解向量为 $\xi_3=(1,0,-1,0)'\ \ \xi_4=(0,1,0,-1)'$

$$\therefore (f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t))=(1,t,t^2,t^3)\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

得 $f_1(t)=1+t^2$
$f_2(t)=t+t^3$
$f_3(t)=1-t^2$
$f_4(t)=t-t^3$

(例) 8. 设 A 是 6 阶矩阵，A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

A 的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$

① 求 A 的所有不变因子

② 写出 A 的 $\boxed{J 标准形}$ ← 必考点

解. ① $\because f(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

$\therefore D_6(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3)$

又 $\because m(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$ 有 $d_6(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$

$\because d_k(\lambda)=\dfrac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}\quad (k=2,3,4,5,6)$ 且 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$

$d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)\mid\cdots\mid d_6(\lambda)$

$\therefore$ 不变因子有 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=1$

$d_5(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)\qquad d_6(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$

②. 初等因子为 $(\lambda+1),\ (\lambda-2),\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda-2),\ (\lambda+3)$

$$\therefore A\sim J=\begin{bmatrix}-1&&&&&\\&-1&&&&\\&1&-1&&&\\&&&2&&\\&&&&2&\\&&&&&-3\end{bmatrix}$$

√ 9. 设 A, C 分别是 m 阶 n 阶实对称矩阵，且 $M=\begin{pmatrix}A_{m\times m}&B_{m\times n}\\B'&C_{n\times n}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵

1) 计算 $P'MP$，其中 $P=\begin{bmatrix}E_m&0\\-C^{-1}B'&E_n\end{bmatrix}$

2) 证 $A-BC^{-1}B'$ 为正定矩阵 对称 + $\forall x\neq 0\ \ x'Ax>0$

① 解：$\because$ A, C 均为实对称阵 $\therefore A'=A\quad C'=C$

$\therefore P'=\begin{pmatrix}E_m&0\\-C^{-1}B'&E_n\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}E_m&-BC^{-1}\\0&E_n\end{pmatrix}$

$P'MP=\begin{pmatrix}E_m&-BC^{-1}_{m\times n}\\0&E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_m&B_{mn}\\B'_{nm}&C_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_m&0\\-C^{-1}B'&E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_m-BC^{-1}B'&0\\0&C\end{pmatrix}$

② 证：$(A-BC^{-1}B')'=A'-B(C^{-1})'B'=A-BC^{-1}B'$ $\quad$ ∴ 对称 $\quad \forall x\neq 0\quad x'Mx>0$ 令 $x=P y$