对 $\forall$ m维非零向量 x，有

$$x'(A-BC^{-1}B')x = \underline{(x',0')}\begin{pmatrix} A-BC^{-1}B' & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (x',0')P'MP\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{令} Y=P\binom{x}{0}} Y'MY$$

$\because$ P 可逆阵 $\therefore Y \neq 0$ 有 $\forall Y \neq 0$，$Y'MY > 0$

即 $\forall x \neq 0$ $x'(A-BC^{-1}B')x > 0$ 故正定矩阵

16. 设线性空间 V 的线性变换 T 和 S 满足 $TS=ST$，又设 λ_0 是 T 的特征值. 证：T 的特征子空间 $V_{\lambda_0} = \{\alpha \mid T\alpha = \lambda_0\alpha, \alpha \in V\}$ 是 S 的 $\boxed{\text{不变子空间}}$. $\alpha \in W$, $T\alpha \in W$

解：$\because TS=ST$ $TS\alpha = ST\alpha = S(\lambda_0\alpha) = \lambda_0(S\alpha)$.

$\forall \alpha \in V_{\lambda_0}$ 有 $T\alpha = \lambda_0\alpha$.

$\therefore S\alpha \in V_{\lambda_0}$ $\therefore V_{\lambda_0}$ 是 S 的不变子空间

11. 设 T 和 S 是 n 维欧氏空间（内积）的线性变换，且满足 $[T\alpha, \beta] = [\alpha, S\beta]$ $\forall \alpha, \beta \in V$

1) 若 T 和 S 在 V 的标准正交基下的矩阵分别是 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}$ 证明 $B=A'$

2) 证：$R(S) \perp N(T)$，其中 $R(S)$ 为 S 的值域，$N(T)$ 为 T 的核

解：1) 设标准正交基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $T(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)A$

$S(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n)B$

$[T\varepsilon_i, \varepsilon_j] = (\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_{ki}, \varepsilon_j) = a_{ji}$ $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$[\varepsilon_i, S\varepsilon_j] = (\varepsilon_i, \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k b_{kj}) = b_{ij} = a_{ji}$

$\therefore B=A'$

2) 令 $B = (\beta_1 \cdots \beta_n)$，$\beta_i$ 为 n 维列向量. $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\alpha_i = \beta_i'$ 为 n 维行向量.

法1) 有 $R(S) = L(\beta_1, \cdots, \beta_n)$

T 的核：即 $Tx=0$ 即 $Ax=0$ $x \in N(T)$

有 $\alpha_i x = 0$ 即 $\beta_i' x = 0$ $\beta_i \perp x$ 得证

~~即 $R(S) = L(\beta_1, \cdots, \beta_n)$~~

补充：P60 (参考题2)

设 $A \in R^{m\times n}$ 证：$R^{\perp}(A) = N(A')$

证：将 A 按列分块为 $A = (\alpha_1, \cdots \alpha_n)$

则 $x \in R^{\perp}(A) \Leftrightarrow x \perp R(A) = L(\alpha_1, \cdots \alpha_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \perp \alpha_i$ $(i=1,\cdots,n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_i' x = 0 \Leftrightarrow A'x = 0 \Leftrightarrow x \in N(A')$

法2) $\forall \beta \in R(S)$，$\exists r$，使 $Sr = \beta$，$\forall \alpha \in N(T)$，使 $T\alpha = 0$

$(T\alpha, \beta) = (\alpha, S\beta) = (\alpha, r)$

$= (0, \beta) = 0$ 即 $R(S) \perp N(T)$