2004 真题 (部分) 王*

1. 设 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&2&0\\1&1&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ B^* 表示 B 的伴随矩阵，求矩阵 X，

使满足 $X+B^*XA=XA+B^*X+E$

解：$\because X+B^*XA=XA+B^*X+E$ $\quad BB^*=|B|E$

$\Rightarrow$ $\cancel{BX+|B|XA=BXA+|B|X+BE}$ 计算(错)

$(E-B^*)X(E-A)=E$ $\quad (B^*-E)X(A-E)=E$ $\quad \Rightarrow (|B|E-B)X(A-E)=B$

$\Rightarrow$ $X=(B-|B|E)^{-1}B(E-A)^{-1}$ $\quad \Rightarrow X=(|B|E-B)^{-1}B(A-E)^{-1}$

$|B|=2$ $\quad |B|E-B=\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&1\\&1&\\-1&&1\end{pmatrix}$

$(|B|E-B\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&1&1&&\\&1&&&1&\\-1&&1&&&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&1&1&&\\&1&&&1&\\&&2&1&&1\end{array}\right)$

$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&\frac{1}{2}&&-\frac{1}{2}\\&1&&&1&\\&&1&\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}\end{array}\right)=(E\,\vdots\,(|B|E-B)^{-1})$

$(A-E\,\vdots\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&1&&\\1&1&&&1&\\1&1&1&&&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&&&1&&\\&1&&-1&1&\\&&1&&-1&1\end{array}\right)=(E\,\vdots\,(A-E)^{-1})$

$\therefore X=(|B|E-B)^{-1}B(A-E)^{-1}$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&&-\frac{1}{2}\\&1&\\\frac{1}{2}&&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&-1\\&1&\\1&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\-1&1&\\&-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

2. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\1\\a\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\a\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}b\\1\\b\\1\end{pmatrix}$ $\quad Ax=b$ 的解

1) 当 a 与 b 为何值时，β 不能由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 线性表示，

2) 当 a 与 b 取何值时，β 能由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 线性表示，当表示式不唯一时，β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的表达式。

解：令 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$

有 $\begin{cases}k_1+k_3+k_4=b\\k_1+k_2+ak_3+2k_4=1\\k_2+k_3+k_4=b\\k_1+k_2+ak_3+ak_4=1\end{cases}$ 将问题转化为 有关未知 k_1,k_2,k_3,k_4 的 线性方程组的问题

1) β 不能由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3,\ \alpha_4$ 线性表示，

即 $r(A)\neq r(\overline{A})$ $\qquad$ 解得 $a=2$ 且 $b\neq\frac{1}{2}$

2) β 能由 $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ 线性表示

即 $r(A)=r(\overline{A})\begin{cases}=4 & \text{唯一解}\\<4 & \text{无穷解}\end{cases}$

即 当 $a=2$ 且 $b=\frac{1}{2}$ 时，有无穷解

当 $a\neq2$ 时，有唯一解。

当表示式不唯一时，即 $a=2$ 且 $b=\frac{1}{2}$ 时，得 通解

$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ $\quad (t_1,t_2\in R)$

即 $\beta=(-t_1-t_2+\frac{1}{2})\alpha_1+(-t_1-t_2+\frac{1}{2})\alpha_2+t_2\alpha_3+t_1\alpha_4$

$(t_1,t_2\in R)$