3. 设 λ_0 是 n 阶矩阵 A 的 m 重特征值，正整数 k 满足 $1 \le k < m$.

证明：$(\lambda-\lambda_0)^m$ 是 A 的 k 个初等因子的乘积 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\lambda_0 E - A) = n-k$.

其中 E 表示 n 阶单位矩阵。　k 个 J 块

初等因子：即 把 A 的每个次数大于 0 的不变因子分解成互不相同的首项为 1 的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式方幂称为 A 的初等因子.

证：$\Rightarrow$ 若 $(\lambda-\lambda_0)^m$ 是 A 的 k 个初等因子的乘积

则属于 λ_0 的若尔当块有 k 个，即属于 λ_0 的特征向量只有 k 个，即 $(\lambda_0 E - A)x = 0$ 基础解系有 k 个线性无关的特征向量

即 $r(\lambda_0 E - A) = n-k$.

$\Leftarrow$ $\operatorname{rank}(\lambda_0 E - A) = n-k$，则 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系

有 $n-(n-k) = k$ 个线性无关的特征向量.

即有 k 个若尔当块，即知有 k 个初等因子

故 $(\lambda-\lambda_0)^m$ 是 A 的 k 个初等因子的乘积

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + bx_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 - 2x_2x_3$（b 为实数）的秩为 2

1) 求实数 b.

2) 用正交变换将 f 化为标准形，并写出使用的正交变换

3) 问 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面?

解：1) $f(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 + bx_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2bx_1x_3 - 2x_2x_3$

$= (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} -1 & -1 & b \\ -1 & b & -1 \\ b & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$　令 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & b \\ -1 & b & -1 \\ b & -1 & -1 \end{pmatrix}$

由已知得 $r(A) = 2$ $\therefore |A| = b^3 + 3b + 2 = 0$　解得实数 $b = 2$ 符合题

2) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　由 $|\lambda E - A| = 0$　解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$

所对应的特征向量分别为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ α_3

$\therefore$ 不同的特征值所对应的特征向量两两正交

单位化　$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$　令 $y = PX$

有 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (y_1,y_2,y_3)$

~~$|\lambda E - A| = 0$　解得 $\lambda_1 = 1$　$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$　$= y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$~~

根据 $|\lambda E - A| = 0$　解得 $\lambda_1 = -3$　$\lambda_2 = 3$　$\lambda_3 = 0$

所对应的特征向量分别为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix}$

不同的特征值所对应的特征向量两两正交

单位化　$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\beta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 正交矩阵 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

令 $y = PX$

有 $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (y_1,y_2,y_3)P^{-1}AP\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$= -3y_1^2 + 3y_2^2$

注意检验.　3) $f = -3y_1^2 + 3y_2^2 = 1$　即 f 表示双曲面.