5. 设矩阵空间 $R^{2\times2}$ 中的线性变换为 $T(X)=XB+X^T$，$\forall X\in R^{2\times2}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

线性空间 $V=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}x_1-x_4=0\\x_2-x_3=0\end{matrix}\right\}$

1. 验证V是T的不变子空间

2. 将T看作是V中线性变换，求V的一个基，使T在该基下的矩阵为对角阵.

的向

解：1. $\forall X_1=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\in V$

$T(X_1)=X_1B+X_1^T=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}b&a\\a&b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&a+b\\a+b&a+b\end{pmatrix}\in V$

∴ V是T的不变子空间.

2. 解：取V的一组基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\cancel{E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}$ $\cancel{E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$

∵ $T(X_1)=X_1B+X_1^T=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+b&a+b\\a+b&a+b\end{pmatrix}$

∴ $T(E_{11},E_{12},\cancel{E_{21},E_{22}})=(E_{11},E_{12},\cancel{E_{21},E_{22}})A$　　$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

根据 $|\lambda E-A|=0$　得 $\lambda_1=0$　$\lambda_2=2$

求得对应的特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$　有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&\\&2\end{bmatrix}$

且 $(Y_1,Y_2)=(E_{11},E_{12})P$　则 $Y_1=-E_{11}+E_{12}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

$Y_2=E_{11}+E_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

使T在 Y_1, Y_2 基下的矩阵为对角阵.