18

9. 已知 $R^{2\times2}$ 的线性变换 $T(X)=BX-XB\ (\forall X\in R^{2\times2})$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

及子空间 $W=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\middle|\ x_2+x_3=0,\ x_i\in R\right\}$

1) 求W的一组基

2) 证 W是T的不变子空间

3) 求W的基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵.

解: 1) $W=\left\{X=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\middle|\ x_2+x_3=0,\ x_i\in R\right\}$

基 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

2) $\forall\ X=k_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\-k_2&k_3\end{pmatrix}\in W.$

$T(X)=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1&k_2\\-k_2&k_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k_1&k_2\\-k_2&k_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2k_2&-k_1+k_3\\k_1-k_3&2k_2\end{pmatrix}\in W$ $\therefore$ W是T的不变子空间

3) $\because T(A_1,A_2,A_3)=(A_1,A_2,A_3)A$ $A=\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&0&1\\0&2&0\end{pmatrix}$

根据 $|\lambda E-A|=0$ 得 $\lambda_1=0$ 对应的特征向量 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\cancel{P_2}$

$\lambda_2=2$ $\therefore$ $P_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_3=-2$ $P_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

有 $P=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $P^{-1}AP=B=\begin{pmatrix}0&&\\&2&\\&&-2\end{pmatrix}$

且有 $(B_1,B_2,B_3)=(A_1\ A_2\ A_3)P$

得 $B_1=A_1+A_3=\begin{pmatrix}1&\\&1\end{pmatrix}$

$B_2=-A_1+A_2+A_3=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$B_3=-A_1-A_2+A_3=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ $\therefore$ T在 B_1,B_2,B_3 下的矩阵为对角矩阵.

10. 设n阶方阵A,B,C,D两两可交换，且满足AC+BD=E，记ABX=0的解空间为V，BX=0的解空间 V_1，AX=0的解空间为 V_2

证: 1) $V=V_1+V_2$ 2) V_1+V_2 是直和

解: 1) 令 BX=0 的~~解~~ ∀ $X_1\in V_1$ 有 $ABX_1=0$ 即 $X_1\in V_1\subset V$

AX=0 的∀解 $X_2\in V_2$ 有 $ABX_2=BAX_2=0$ 即 $X_2\in V_2\subset V$

$\therefore$ 有 $V_1+V_2\subset V$

$\forall X\in V$ 有 $ABX=BAX=0$, 又有 $AC+BD=E$

$\Rightarrow A^2C+ABD=A \Rightarrow CA^2X+DABX=CA^2X+0=AX$

$\Rightarrow (CA-E)AX=0$? $V\subset V_1+V_2$ $\therefore V=V_1+V_2$

解: 1) $\forall X\in V$ 有 $ABX=0$

又 $X=EX=(AC+BD)X=ACX+BDX=X_1+X_2$ 其中 $ACX=X_1$ $BDX=X_2$

$BX_1=BACX=CABX=0, X_1\in V_1$; $AX_2=ABDX=DABX=0$, $X_2\in V_2$

$\therefore V=V_1+V_2$

2) $\forall X\in V_1$, $X\in V_2$ 有 $BX=0$, $AX=0$, 故 $X=EX=(AC+BD)X=0$

$\therefore V_1\cap V_2=\{0\}$ $\therefore V_1\oplus V_2=V$