2001年真题 　 v.3 　 10

一、计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1-2 \\ a_2-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_3-2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n-2 & 1 \end{vmatrix} \quad (a_i\neq 3,\ i=1,\dots n)$$

解：$D_n=$ 升级（加边）

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & a_1-2 \\ 0 & a_2-2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a_3-2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & a_n-2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1-3 \\ -1 & a_2-3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a_3-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n-3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1-3}+\cdots+\frac{1}{a_n-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1-3 \\ 0 & a_2-3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n-3 & 0 \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$=\left(1+\frac{1}{a_1-3}+\cdots+\frac{1}{a_n-3}\right)\cdot(-1)^{n+1}\cdot(a_1-3)\cdot\ldots\cdot(a_n-3)$$

二、设A是n阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是n维列向量，且$\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=k\alpha_1$，$A\alpha_2=t\alpha_1+k\alpha_2$，$A\alpha_3=t\alpha_2+k\alpha_3$ $(t\neq 0)$，问$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性相关还是线性无关，为什么？

令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ ① 　 $\because \alpha_1\neq 0$，$A\alpha_1=k\alpha_1$ 　 $A\alpha_2=t\alpha_1+k\alpha_2$ 　 $A\alpha_3=t\alpha_2+k\alpha_3$

即 $(A-kE)\alpha_1=0$ 　 $(A-kE)\alpha_2=t\alpha_1$ 　 $(A-kE)\alpha_3=t\alpha_2$

①左右同时乘以$(A-kE)$

得 $k_1(A-kE)\alpha_1+k_2(A-kE)\alpha_2+k_3(A-kE)\alpha_3=(A-kE)\cdot 0=0$ 　 $(t\neq 0)$

即 $k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0$ 　 ②

②左右同时乘以$(A-kE)$ 　 得 $k_2(A-kE)\alpha_1+k_3(A-kE)\alpha_2=(A-kE)0=0$

$(t\neq 0)$ 即 $k_3\alpha_1=0$ 　 (3)

$\because \alpha_1\neq 0$ 　 $\therefore k_3=0$ 　 即(2) $k_2\alpha_1=0$ 　 $\therefore k_2=0$.

即(1) $k_1\alpha_1=0$ 　 $\therefore k_1=0$. 　 即 $k_1=k_2=k_3=0$ 　 ∴线性无关

三、设 $A=\begin{bmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ 　 $b=\begin{pmatrix} a \\ c \\ a \\ c \end{pmatrix}$ 　 求解 $AX=b$.

计算$|A|$ 　 当$|A|\neq 0$的惟一解 　 当$|A|=0$时 …

解：$(A\vdots b)=\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 0 & a \\ c & 1 & 0 & 0 & c \\ 2 & 2 & 2 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & c & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & a-2c & a-2c \\ 0 & 1-c & -c & -c^2 & c-c^2 \\ 0 & 2-a & -a & -ac & a-ac \end{pmatrix}$

① $a-2c\neq 0$ 时 　 $r(A)=r(A|b)=n$ ∴有惟一解 　 $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

② $a-2c=0$ 时 　 $(A\vdots b)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1-c & -c & -c^2 & c-c^2 \\ 0 & 2-2c & -2c & -2c^2 & 2c-2c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1-c & -c & -c^2 & c-c^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) $1-c=0$（即$c=1$）时 　 $(A\vdots b)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有无穷解 　 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $1-c\neq 0$ 时 　 $(A\vdots b)\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & \frac{c}{c-1} & \frac{c}{c-1} & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{c-1} & -\frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{c-1} & \frac{c}{c-1} & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有无穷解：$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ c-1 \\ 0 \end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ 0 \\ c-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$