20

四. 已知实对称矩阵 $SR^{2\times2}=\{A \mid A^T=A, A\in R^{2\times2}\}$ 的两个基分别

为：(I) $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ $A_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(II) $B_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$ $B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$ $B_3=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$

1) 求由基(I)到(II)的过渡矩阵 C

2) 设 $X\in SR^{2\times2}$ 在基(I)与基(II)的坐标分别为 α, β, 判断是否存在 $X\neq0$, 使基坐标满足 $\alpha=2\beta$？若存在，求基.

解：1) 因为 $B_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}=2A_1+A_3$ $B_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}=2A_2+A_3$

$B_3=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}=A_1+A_2+3A_3$

$\therefore (B_1,B_2,B_3)=(A_1,A_2,A_3)\,C$ $C=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}$

2). 令X在基(I)(II)下的坐标分别 $\alpha=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $\beta=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

有 $\alpha=C\beta$ 即 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

又有 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

解得 $\alpha=2t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\beta=t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $t\in R$

$\therefore$ 有 $X=(A_1,A_2,A_3)\,\alpha=2t(A_1-A_2)$

$=(B_1,B_2,B_3)\,\beta=t(B_1-B_2)$

$\therefore$ A_1, A_2 或 B_1, B_2 为一组基，存在 $X\neq0$, 使 $\alpha=2\beta$.

五. 已知实数域上的多项式空间 $P[t]_3$ 的一个基为 $f_1(t)=1-t$, $f_2(t)=1+t^2$, $f_3(t)=t+2t^2$, 线性变换 T 满足 $T(f_1(t))=2+t^2$, $T(f_2(t))=t$, $T(f_3(t))=1+t+t^2$

1). 求T在已知基下的矩阵

2) 设 $f(t)=1+2t+3t^2$, 求 $T(f(t))$.

解：1). $(f_1(t),f_2(t),f_3(t))=(1,t,t^2)\,A$ $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}$

$T(f_1(t),f_2(t),f_3(t))=(1,t,t^2)\,B$ $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

有 $T(f_1(t)\ f_2(t)\ f_3(t))=(f_1(t)\ f_2(t)\ f_3(t))\,C$ $C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\3&2&3\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

2) $f(t)=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\cancel{=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}$

$\therefore$ $\cancel{T(f(t))=T(f_1(t)\ f_2(t)\ f_3(t))A^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}$

$\cancel{=(f_1(t)\ f_2(t)\ f_3(t))A^{-1}BA^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}$

令 $T(1,t,t^2)=(1,t,t^2)\,D$ $D=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-3&-5&3\\1&1&0\\-2&-3&2\end{pmatrix}$

$T(f(t))=T(1,t,t^2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=(1,t,t^2)\,BA^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$=(1,t,t^2)\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$

$=-4+3t-2t^2$