六. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 求A的Jordan标准形

解. $\lambda E-A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & & & & \\ 2 & \lambda-1 & -1 & & & \\ & & \lambda-1 & 2 & & \\ & & 2 & \lambda-1 & -1 & \\ & & & & \lambda-1 & 2 \\ & & & & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & (\lambda-3)(\lambda+1) & & \\ & & 0 & \lambda-1 & (\lambda-3)(\lambda+1) & \\ & & \lambda-1 & 0 & 0 & 2 \\ & & 2 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & (\lambda-3)^3(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 初等因子为 $(\lambda-3)^3$, $(\lambda+1)^3$.

$\therefore J=\begin{pmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & & & \\ & 1 & 3 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$

此法较复杂, 易出错, 用求各级行列式容易做.

$D_6(\lambda)=|\lambda E-A|=[(\lambda-1)^2-4]^3=(\lambda-3)^3(\lambda+1)^3$

存在 $\begin{vmatrix} 2 & & & & \\ \lambda-1 & -1 & & & \\ & \lambda-1 & 2 & & \\ & 2 & \lambda-1 & -1 & \\ & & & \ddots & \end{vmatrix}=8$ $\therefore D_5(\lambda)=1$

$\therefore D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_5(\lambda)=1$  $D_6(\lambda)=(\lambda-3)^3(\lambda+1)^3$

得不变因子 $d_1(\lambda)=\cdots=d_5(\lambda)=1$  $d_6(\lambda)=(\lambda-3)^3(\lambda+1)^3$

初等因子: $(\lambda-3)^3$, $(\lambda+1)^3$

$J=\begin{pmatrix} 3 & & & & & \\ 1 & 3 & & & & \\ & 1 & 3 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$

七. 已知实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \\ 18 & 18 & 0 \end{pmatrix}$ 求实对称矩阵X. 使得 $A=X^3$

解. 根据 $|\lambda E-A|=0$ 解得: $\lambda_1=0$ $\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2=27$ $\xi_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_3=-27$ $\xi_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\because \lambda$ 各异 $\therefore$ 特征向量相互正交

单位化得 $P_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 27 & \\ & & -27 \end{pmatrix}$  $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

即 $A=P\Lambda P^{-1}=P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}^3 P^{-1}$

$=\underbrace{P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}P^{-1}}_{=X^3}$

$\therefore X=P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}P^{-1}=P\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & -3 \end{pmatrix}P'=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$