八. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+cx_2^2+9cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 且 f 的秩为2.
1) 求参数 c
2) 用正交变换化 f 为标准形
3) $f=-1$ 表示何种二次曲面.

22

解: 1) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $\quad A=\begin{pmatrix}c&-1&3\\-1&c&-3\\3&-3&9c\end{pmatrix}$

∵ $r(A)=2$ ∴ 有 $|A|=0$ $\quad c=1$ 或 $c=-2$

检验后得 $c=-2$

2). $A=\begin{pmatrix}-2&-1&3\\-1&-2&-3\\3&-3&-18\end{pmatrix}$ 根据 $|\lambda E-A|=0$

得 $\lambda_1=0$, $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_2=-3$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $\lambda_3=-19$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\6\end{pmatrix}$

∵ 特征值各异 ∴ 对应的特征向量相互正交

单位化 $r_1=\frac{1}{\sqrt{19}}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$ $\quad r_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad r_3=\frac{1}{\sqrt{38}}\begin{pmatrix}-1\\1\\6\end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{19}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{38}}\\-\frac{3}{\sqrt{19}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{38}}\\\frac{1}{\sqrt{19}}&0&6\end{pmatrix}$ $\quad$ 有 $P^TAP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-3&\\&&-19\end{pmatrix}$

∴ $x=Cy$ $\quad f=-3y_2^2-19y_3^2$

3). $f=-3y_2^2-19y_3^2=1$ 为 椭圆柱面.

九. 已知欧氏空间 V^n 的一个标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 且 $\alpha_0=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$

定义变换 $T(\alpha)=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0$.

1) 验证 T 是线性变换
2) 求 T 在标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵
3) 证明 T 为正交变换的充要条件为 $k=-\frac{2}{1^2+\cdots+n^2}$

解: 1) $\forall\alpha,\beta\in V$, $k_1\in R$

$T(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)+k(\alpha+\beta,\alpha_0)\alpha_0$

$=\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0+\beta+k(\beta,\alpha_0)\alpha_0=T\alpha+T\beta$

$T(k_1\alpha)=k_1\alpha+k(k_1\alpha,\alpha_0)\alpha_0=k_1(\alpha+k(\alpha,\alpha_0)\alpha_0)=k_1T\alpha$.

∴ T 是线性变换.

2) $T(\alpha_1)=\alpha_1+k(\alpha_1,\alpha_0)\alpha_0=\alpha_1+k\alpha_0=(k+1)\alpha_1+2k\alpha_2+\cdots+nk\alpha_n$

$T(\alpha_2)=\alpha_2+k(\alpha_2,\alpha_0)\alpha_0=\alpha_2+2k\alpha_0=2k\alpha_1+(4k+1)\alpha_2+\cdots+2nk\alpha_n$

$\cdots$

$T(\alpha_n)=\alpha_n+k(\alpha_n,\alpha_0)\alpha_0=\alpha_n+nk\alpha_0=nk\alpha_1+2nk\alpha_2+\cdots+(n^2k+1)\alpha_n$

令 $T(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)A$ $\quad A=\begin{pmatrix}k+1&2k&3k&\cdots&nk\\2k&4k+1&6k&\cdots&2nk\\3k&6k&9k+1&\cdots&3nk\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\nk&2nk&3nk&\cdots&n^2k+1\end{pmatrix}$

3) T 为正交变换, 则有标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

即 A 为正交矩阵 $\quad A\cdot A'=E$ $\quad$ 解得 $k=-\frac{2}{1^2+\cdots+n^2}$

同理 当 $k=-\frac{2}{1^2+\cdots+n^2}$ 有 $A\cdot A'=E$

$A=\left(E+k\begin{pmatrix}1\\\vdots\\n\end{pmatrix}(1\cdots n)\right)$ ∴ A 为正交矩阵 $\quad T$ 为正交变换

令 $\beta=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\n\end{pmatrix}$ $\quad A^TA=E\Leftrightarrow(E+k\beta\beta')^2=E$ 即 $2k\beta\beta'=-k^2(1^2+\cdots+n^2)\beta\beta'$ ($\beta\beta'\neq0$)

$E+2k\beta\beta'+k^2\beta\beta'\beta\beta'=E$ $\quad k=-\frac{2}{1^2+\cdots+n^2}$