十、设 n 阶方阵 A 和 B 满足 $AB=A-B$，证明：

1) $\lambda=1$ 不是 B 的特征值 ← 即 $E-B$ 为可逆矩阵

2) 若 B 相似于对角矩阵，则 ∃ 可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵。 $\exists P^{-1}BP=\Lambda$ ， $P^{-1}AP=P(\cdots)P$

解：1) ∵ $AB=A-B$

有 $AB-A+B-E=-E \Leftrightarrow (A+E)(B-E)=-E$

∴ $B-E$ 是可逆矩阵。 ∴ $\lambda=1$ 不是 B 的特征值。

只有实对称矩阵A才能找到正交矩阵 $P^{-1}AP=\Lambda$ → ~~存在~~ 正交矩阵 P 有 $P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

∴ $B-E = P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}-E = P\begin{bmatrix}\lambda_1-1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n-1\end{bmatrix}P^{-1}$ 可逆。

即 $\lambda_i-1\neq 0$ 即 $\lambda_i\neq 1$

得证：$\lambda=1$ 不是 B 的特征值。

2) ∵ $B-E$ 是可逆矩阵

由 $AB=A-B$ 有 $A=B(E-B)^{-1}$

∵ $B\sim\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$ ∴ ∃ 可逆矩阵 P，$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=P^{-1}B(E-B)^{-1}P=(P^{-1}BP)\cdot(P^{-1}(E-B)^{-1}P)$$

$$=(P^{-1}BP)(P^{-1}(E-B)P)^{-1}$$

$$=(P^{-1}BP)(E-P^{-1}BP)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{1-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{1-\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\end{pmatrix}$$

即 ∃ 可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 都是对角矩阵。