24

2000 真题　1.2.3.7.8.9.

(1) 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$

解：递推 $D_n=(-1)^{n+1}(n-1)!+nD_{n-1}$

$D_{n-1}=(-1)^{n}(n-2)!+(n-1)D_{n-2}$

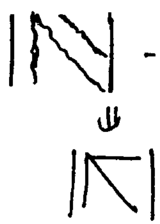
……

$D_3=5$，$D_2=1$，$D_1=1$

得 $D_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\cdot n!\cdot\frac{1}{k}$

法2）

$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 2 & & & \\ 1 & & 3 & 3 & & \\ 1 & & & 4 & 4 & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & n \end{vmatrix}$



—斜行化为0

化为一列或一行为0

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^n \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n} & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ 0 & 2 & & & 0 \\ 0 & & 3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & & n \end{vmatrix}$

$=n!\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]$

三、设 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & a & 0 \\ a & 1 & 0 & c \\ a & 0 & 1 & c \\ 0 & c & c & 1 \end{bmatrix}$　$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　讨论 a 与 c 取何值时，线性方程组 $Ax=b$ 有唯一解，无解，无穷解。在有无穷多解时，求通解。

解：$r(A)=r(A\,|\,b)=n$　有唯一解

$r(A)=r(A\,|\,b)<n$　有无穷解

$r(A)\neq r(A\,|\,b)$　无解

$\boxed{|A|=1-2(a^2+c^2)}$

当 $a^2+c^2\neq\frac{1}{2}$ 时　有唯一解.

当 $a^2+c^2=\frac{1}{2}$ 时.

$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix} 1 & a & a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & c & c & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & a & a & 0 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -a^2 & c & -a \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & c & c & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2a^2 & c & -a \\ 0 & 0 & 2c & 1 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c^2 & c & -a \\ 0 & 0 & 2c & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+c \\ 0 & 0 & 2c & 1 & 1 \end{pmatrix}$

当 $a+c=0$ 时 即 $a=-c=\pm\frac{1}{2}$　有无穷解

当 $a+c\neq0$ 时　无解.

$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases}$　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$k_1\in R$.

$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$k_2\in R$