25

3. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&1&1\\-4&0&1\end{pmatrix}$ 求 A^{2000}

解: $|\lambda E-A|=0$ 解得 $\lambda_2=\lambda_3=1$ $\lambda_1=-1$

又有 $(A-E)(A+E)\neq 0$ $(A-E)^2(A+E)=0$

即 $m(A)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$A\sim J=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&0\\&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}=B+C$

$\lambda_1=-1$ $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\underline{A\xi_1=-\xi_1}$

$\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的 $\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ 有 $\underline{A\xi_2=\lambda_2\xi_2}$

$\because$ $\underline{A\xi_3=\xi_2+\xi_3}$ 解得 $\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore$ 令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

有 $A=PJP^{-1}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&&\\0&1&0\\-2&&1\end{pmatrix}$

$\therefore A^{2000}=(PJP^{-1})^{2000}=PJ^{2000}P^{-1}$

$=P(B^{2000}+2000B^{1999}\cdot C+\cdots+C^{2000})P^{-1}$

$=P\left[E+2000\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}+0+\cdots+0\right]P^{-1}$

$=E+2000\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\0&1&0\\-2&&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&&\\-4000&1&2000\\&&1\end{pmatrix}$

四. 已知线性空间 R^3 的<u>线性变换</u> $T(a,b,c)=(-2b-2c,-2a+3b-c,-2a-b+3c)$ $(\forall(a,b,c)\in R^3)$ 求 R^3 的一组基,使T在这组基下的矩阵为<u>对角矩阵</u>

解: 设线性变换 T 在 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵为A

$T(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)A$ $A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\-2&3&-1\\-2&-1&3\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-A|=0$ 得: $\lambda_1=-2$ $\xi_1=(2,1,1)'$

$\lambda_2=\lambda_3=4$ $\xi_2=(1,-2,0)'$

$\xi_3=(0,1,-1)'$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$

有 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-2&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$

$\therefore$ 有 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(e_1,e_2,e_3)P$

$\eta_1=(2,1,1)'$ $\eta_2=(1,-2,0)'$, $\eta_3=(0,1,-1)'$

在此组基下的矩阵为对角矩阵.

五. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$ 1) 当 a 取何值时, $f=X'AX$ $\boxed{正定}$

$\begin{cases}\forall x\neq0 & x'Ax>0\\ \Delta_k>0\\ \lambda均>0\end{cases}$

2) 当 $a\neq0$ 时 用正交变换化二次型为标准二次型.

解: 1) $f=X^TAX$ 正定 即 A 为正定矩阵.

即有 $\Delta_k>0$ 解得 $-\frac{\sqrt2}{2}<a<\frac{\sqrt2}{2}$

2) $a\neq0$ 时 根据 $|\lambda E-A|=0$ 解得 $\lambda_1=1$

$\lambda_2=1+\sqrt2 a$

$\lambda_3=1-\sqrt2 a$

对应的特征向量 $\xi_1=(1,-1,0)'$

$\xi_2=(1,1,\sqrt2)'$

$\xi_3=(-1,-1,\sqrt2)'$

$\because a\neq0$ $\therefore \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ 即 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关且正交

单位化后得 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1,0)'$ $\beta_2=\frac12(1,1,\sqrt2)'$ $\beta_3=\frac12(-1,-1,\sqrt2)'$

$\therefore$ 令 $X=CY$

$C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac12&-\frac12\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac12&-\frac12\\0&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$

有 $f=y_1^2+(1+\sqrt2a)y_2^2+(1-\sqrt2a)y_3^2$