六、设有 R^4 的两个子空间 $W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+2x_2-x_4=0\}$

$W_2=L(\alpha_1,\alpha_2)$ 其中 $\alpha_1=(1,-1,0,1)$ $\alpha_2=(1,0,2,3)$

试求 W_1+W_2 与 $W_1\cap W_2$ 的基和维数.

解：1) $\because W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1-2x_2-x_4=0\}$

$\therefore$ W_1 有一组基 $\beta_1=(2,1,0,0)$ $\beta_2=(1,0,0,1)$
$\beta_3=(0,0,1,0)$

$W_1+W_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$(\alpha_1',\alpha_2',\beta_1',\beta_2',\beta_3')=\begin{pmatrix}1&1&2&1&0\\-1&0&1&0&0\\0&2&0&0&1\\1&3&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&0\\0&1&3&1&0\\0&2&0&0&1\\0&3&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&2&1&0\\0&1&3&1&0\\0&0&2&0&1\\0&0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$\therefore$ W_1+W_2 的基为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$
$\dim(W_1+W_2)=4$

2) $\dim(W_1\cap W_2)=\underset{\dim W_1+\dim W_2}{\cancel{\text{4}}}-\dim(W_1+W_2)=1$

令 $\forall\alpha\in W_2$ $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(k_1+k_2,-k_1,2k_2,k_1+3k_2)$

将 α 代入 $W_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid x_1+2x_2-x_4=0\}$

解得 $k_1+k_2=0$.

$\therefore$ $\forall\gamma\in W_1\cap W_2$ 有 $\gamma=t\alpha_1-t\alpha_2=t(0,-1,-2,-2)$
$t\in R$.

即 $(0,1,2,2)$ 是 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

七. 设 n 维欧氏空间 V 中的向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 满足

$(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)C$, $C=(c_{ij})\in R^{n\times n}$

证：若 1) $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 是 V 的标准正交基 2) $\beta_1\cdots\beta_n$ 是 V 的标准正交基
3) C 是正交矩阵 中的任两个成立，则另一个成立.

(1)(2)⇒(3) $\because$ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 V 的标准正交基

$\therefore$ $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$ $\therefore$ $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1\cdots\alpha_n)=E$

同理 $\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}(\beta_1\cdots\beta_n)=E$

$\therefore$ $\begin{pmatrix}\beta_1\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}(\beta_1\cdots\beta_n)=\big((\alpha_1\cdots\alpha_n)C\big)'\big((\alpha_1\cdots\alpha_n)C\big)=C'EC=C'C=E$

$\therefore$ C 为正交矩阵.

(1)(3)⇒(2) $\because$ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为 V 的标准正交基.

$\therefore$ $P=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 为正交矩阵

$\therefore$ $Q=(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)C=PC$ 为正交矩阵

$\therefore$ $\beta_1\cdots\beta_n$ 为标准正交基.

(2)(3)⇒(1) 同理 ……

补充：1) $\because$ $(\beta_1\cdots\beta_n)=(\alpha_1\cdots\alpha_n)C$ $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为一组标准正交基

$\therefore$ $\beta_i=\alpha_1c_{1i}+\cdots+\alpha_nc_{ni}$

$(\beta_i,\beta_j)=(\alpha_1c_{1i}+\cdots+\alpha_nc_{ni},\ \alpha_1c_{1j}+\cdots+\alpha_nc_{nj})$

$=c_{1i}c_{1j}+\cdots+c_{ni}c_{nj}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

即 $C'C=E$

2) $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 的度量矩阵 A 为 E

令 $\beta_1\cdots\beta_n$ 的度量矩阵 $B=(b_{ij})=(\beta_i,\beta_j)=\left(\sum_{k=1}^{n}c_{ki}\alpha_k,\sum_{s=1}^{n}c_{sj}\alpha_s\right)$