27

8. 设A是n阶非零矩阵，且∀一n维非零列向量都是A的特征向量，证明：$A=kE$.（$k\neq0$）

法(1) 假设 A 有不同的特征值 λ_1, λ_2 分别对应的特征向量为 ξ_1, ξ_2

有 $A\xi_1=\lambda_1\xi_2$　$A\xi_2=\lambda_2\xi_2$　不同特征值的特征向量线性无关
所以 $\xi_1\ \xi_2$ 线性无关.

证 $\xi_1+\xi_2$ 不是A的特征向量.

假设 $\xi_1+\xi_2$ 是 A 的特征向量　$A(\xi_1+\xi_2)=\mu(\xi_1+\xi_2)$

得 $A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2=\mu(\xi_1+\xi_2)$

所 $(\lambda_1-\mu)\xi_1+(\lambda_2-\mu)\xi_2=0$　$\because \xi_1, \xi_2$ 线性无关

$\therefore \lambda_1=\mu=\lambda_2$ 矛盾

∴ 有 $\xi_1+\xi_2$ 不是 A 的特征向量.

与已知"∀一n维非零列向量都是A的特征向量"矛盾.

∴ 必有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$.

$\therefore A=kE$.

法(2) 解：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，由已知可知 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 均为A的特征向量

$A\varepsilon_i=\lambda_i\varepsilon_i$　$\begin{pmatrix}a_{1i}\\ \vdots\\ a_{ni}\end{pmatrix}=\lambda_i\varepsilon_i$　$(i=1,\cdots,n)$

故 $a_{ij}=0$　$(i\neq j)$

所 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&&\\&\ddots&\\&&a_{nn}\end{pmatrix}$

又 $A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$　$\therefore a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=k\neq0$.

故 $A=kE$

9. 设A为n阶实对称矩阵，求证当A可逆时，存在n阶方阵P，使得 $AP+P'A$ 为$\boxed{正定矩阵}$.

解：由已知得 $|A|\neq0$　$A'=A$

$(AP+P'A)'=P'A+AP$　即 $AP+P'A$ 为对称矩阵.

A为实对称　∃正交矩阵Q　$Q^{-1}AQ=Q'AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

令 $x=Qy$　$\forall x\neq0$　$x'(AP+P'A)x=y'Q'(AP+P'A)Qy$

对于 $Q'(AP+P'A)Q=(Q'AQ)Q'PQ+Q'P'QQ'AQ$

$=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Q'PQ+(Q'PQ)'\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

取 $P=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Q'=A$

则 $\forall x\neq0$　$x'(AP+P'A)x=y'\begin{pmatrix}2\lambda_1^2&&\\&\ddots&\\&&2\lambda_n^2\end{pmatrix}y>0$

∴ $AP+P'A$ 正定.

10. 证n阶方阵 $A=aE$ 的充要条件是 A的 D_{n-1} 是 n-1次多项式

"⇒" $D_{n-1}(\lambda)$ 是 n-1 次多项式

又∵ $D_n(\lambda)$ 是 n次多项式　且 $d_k=\frac{D_k(\lambda)}{D_{k-1}(\lambda)}$ $(k>1)$　$d_1=D_1$

且 $d_1\mid d_2\mid\cdots\mid d_n$

∴ $d_1=\cdots=d_n=\lambda-a$　A的初等因子：$\lambda-a,\cdots,\lambda-a$

∴ $A=aE$

"⇐" $A=aE$　即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=a$

∴ A的 $D_{n-1}=(\lambda-a)^{n-1}$ 为 n-1次多项式.