1999 真题

一、已知 $\alpha=(1,\cdots,1)^T$，$\beta=(1,\cdots,n)^T$　求 $A=\alpha\beta^T$ 的全部特征值

解：$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}(1\cdots n)=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&\cdots&-n\\-1&\lambda-2&\cdots&-n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&\cdots&\lambda-n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&n\\0&\lambda-1&-2&\cdots&-n\\0&-1&\lambda-2&\cdots&-n\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&-1&-2&\cdots&-n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&2&\cdots&n\\1&\lambda&0&\cdots&0\\1&0&\lambda&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\frac{(n+1)n}{2\lambda}&1&2&\cdots&n\\0&\lambda&0&\cdots&0\\0&0&\lambda&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}$$

$=(\lambda^n)\cdot(1-\frac{(n+1)n}{2\lambda})$

$=\lambda^{n-1}[\lambda-\frac{n(n+1)}{2}]$

$\therefore$ $A=\alpha\beta^T$ 的全部特征值为：$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$　$\lambda_n=\frac{n(n+1)}{2}$

二、设 A 是三阶实对称矩阵，$A^2=E$，且 $rank(A-E)=1$，求 $det(A-2E)$，其中 rankA 和 det A 分别表示矩阵 A 的秩和行列式。

解：$\because$ $A^2=E$　即 $(A-E)(A+E)=0$

$\therefore$ 有 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$

又 $\because$ $rank(A-E)=1$　即 $\lambda=1$（二重）$\lambda=-1$（一重）

即有 $A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$　$\exists$ 正交矩阵 P　$P^{-1}AP=\Lambda$

$|A-2E|=|P^{-1}||A-2E||P|=|\Lambda-2E|=\begin{vmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-3\end{vmatrix}=-3$

三、设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\a&1\\a+1&a\end{pmatrix}$　$B=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\\a&a\end{pmatrix}$　且 $a\neq b$，讨论 a 与 b 为何值时，矩阵 $AX=B$ 有解？在有解时，求其解。

解：$(A|B)=\begin{pmatrix}1&1&0&b\\a&1&b&a\\a+1&a&a&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&b\\0&1-a&b&-ab\\0&a-2&a-b&a-b\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&0&b\\0&1-a&b&-ab\\0&1&-a&-(a-b-ab)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&a&a-ab\\0&1&-a&b+ab-a\\0&0&a^2-a+b&a^2b-a^2-ab+a-b\end{pmatrix}$

当 $a^2-a+b=0$ 且 $a^2b-a^2-ab+a-b=0$ 时　有解

即 $a=1,b=0$　或　$a=-1,b=2$

解分别为 $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$

四、已知 $A=\begin{bmatrix}1&&&\\a&1&&\\2&3&2&\\2&3&c&2\end{bmatrix}$　1) 讨论 a 与 c 为何值时，A 可对角化

2) 当 $a=1$，$c=0$ 时，求 A 的 J 标准形及相似变换矩阵 P 使 $P^{-1}AP=J$

解：1) 由已知得 $\lambda_1=\lambda_2=1$　$\lambda_3=\lambda_4=2$

若 A 可对角化　则有 $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)$　即 $(A-E)(A-2E)=0$

解得　$a=0$ 且 $c=0$。

2) 当 $a=1$，$c=0$ 时　$A=\begin{pmatrix}1&&&\\1&1&&\\2&3&2&\\2&3&0&2\end{pmatrix}\sim J=\begin{pmatrix}1&1&&\\0&1&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$

$\lambda_1=\lambda_2=1$ 时　$\xi_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$　$A\xi_1=\lambda\xi_1$　由 $A\xi_2=\xi_1+\xi_2$　$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$

$\lambda_3=\lambda_4=2$ 时　$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$　$\xi_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$　令 $P=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-1&1&0&0\\3&2&1&0\\3&2&0&1\end{pmatrix}$

即 $P^{-1}AP=J$