五、设 A 是 $m\times n$ 实矩阵，b 是任意实 m 维列向量。即 $r(A^TA)=r(A^TA\vdots A^Tb)$

证：1) $\operatorname{rank}(A^TA)=\operatorname{rank}(A)$ 2) 线性方程组 $A^TAx=A^Tb$ 总有解 类似 $Ax=b$ 的解.

证 1) 令 x 为 n 维列向量 $\forall x\neq0$ $Ax=0$ 则有 $A^TAx=0$.

同时 $\forall x\neq0$ 若 $A^TAx=0$ 则 $x^TA^TAx=0$ 则有 $Ax=0$.

$\therefore$ $A^TAx=0$ 与 $Ax=0$ 同解 则 $n-r(A^TA)=n-r(A)$

$\therefore$ $r(A^TA)=r(A)$

2) 法1) $r(A)=r(A^TA)\leq r(A^TA\vdots A^Tb)=r(A^T(A\vdots b))\leq r(A^T)=r(A)$

故 $r(A^TA\vdots A^Tb)=r(A^TA)$ $\therefore$ $A^TAx=A^Tb$ 总有解.

法2) $r(A^TA)=r(A)=r(A^T)$

令 $A=(\beta_1\cdots\beta_n)$ 那么有 $A^TA=(A^T\beta_1,\cdots,A^T\beta_n)$

其中 $A^T\beta_1\cdots A^T\beta_n$ 都为 A^T 列向量的线性组合

令 U 为 A^T 的列向量所成的空间，$V=<A^T\beta_1,\cdots,A^T\beta_n>$

有 $V\subseteq U$

$\because$ $r(A^T)=r(A^TA)$ 即 $\dim(V)=\dim(U)$ $\therefore$ $V=U$

又 A^Tb 也是 A^T 的列向量的一个线性组合，必有 $A^Tb\in U=V$

即 A^Tb 必可由 A^TA 的列向量线性表出，即 $A^TAx=A^Tb$ 必有解

六、设3维线性空间 V 的线性变换 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

1) 求 T 在基 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_3$ $\beta_2=-\alpha_3$ $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2$ 下的矩阵.

2) 求 T 的核及其维数.

解：1) $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$ $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)X$ $X=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

令 T 在 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 B：那有 $T(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)B$ 有 $B=X^{-1}AX$

得 $B=\begin{pmatrix}4&-3&-1\\1&-4&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$

2) T 的核，即求 $Ax=0$. 得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

即核为 $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$ $\dim(T^{-1}(0))=1$

七、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+2ax_2x_3$ $(a>0)$

用正交变换化标准形 $f=2y_1^2+by_2^2+2y_3^2$，求参数 a,b 及所用的正交

解：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\ x_2\ x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&a\\2&a&-2\end{pmatrix}$

$=(y_1\ y_2\ y_3)\Lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&2\end{pmatrix}$

由 $1-2-2=2+b+2$ 得 $b=-7$

又 $|A|=|\Lambda|=-28$ 得 $a=-12$(舍去)，$a=4$

令 $|\lambda E-A|=0$ $\lambda_1=\lambda_3=2$ $\lambda_2=-7$

$\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_3=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$

令 $p_1=\xi_1=(-2,1,0)'$ $\eta_1=\frac{1}{\sqrt5}(-2,1,0)'$

$p_3=\xi_3-\frac{(p_1,\xi_3)}{(p_1,p_1)}p_1=(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)'$ $\eta_3=\frac{\sqrt5}{3}(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1)$

对称矩阵不同的特征值所对应的特征向量必正交.

$\eta_2=\frac{1}{3}(-1,-2,2)'$

$\therefore$ $C=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)'=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{3}&\frac{4}{3\sqrt5}\\0&\frac{2}{3}&\frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix}$

令 $y=Cx$ 则有 $f=2y_1^2-7y_2^2+2y_3^2$