30

八、给定6维线性空间V的基$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6$及线性变换.

$T(\alpha_i)=\alpha_i+2\alpha_{n-i}\quad i=1,\cdots,6$

1) 求T的特征值与特征向量.(利用已知向量表示) (利用已知基表示)

2) 判断是否存在另一组基,使T在该基下的矩阵为对角阵?把它构造出来

解:1) 令 $T(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_6)=(\alpha_1\cdots\alpha_6)A$

由 $T(\alpha_i)=\alpha_i+2\alpha_{n-i}$ 可知 $A=\begin{pmatrix}1&&&&&2\\&1&&&2&\\&&1&2&&\\&&2&1&&\\&2&&&1&\\2&&&&&1\end{pmatrix}$

据 $|\lambda E-A|=0$ 求得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3\quad \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=-1$

对应的特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\ \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\ \xi_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \xi_4=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\ \xi_5=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\ \xi_6=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

即 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_6\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_5\quad \beta_3=\alpha_3+\alpha_4$

$\beta_4=\alpha_1-\alpha_6\quad \beta_5=\alpha_2-\alpha_5\quad \beta_6=\alpha_3-\alpha_4$

2). 所得 $\beta_1\cdots\beta_6$ 即满足T在该基下的矩阵为对角阵.

由 $T(\beta_1\cdots\beta_6)=(\beta_1\cdots\beta_6)B\qquad B=\begin{pmatrix}3&&&&&\\&3&&&&\\&&3&&&\\&&&-1&&\\&&&&-1&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$

九. 给定n维实线性空间V的基$\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 设$\alpha,\beta\in V$在该基下的坐标分别为$(x_1\cdots x_n)^T$,$(y_1\cdots y_n)^T$. 定义实数$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

证明:1) 实数(α,β)构成V的$\boxed{\text{内积}}$ 4性

2) 在该内积意义下$\alpha_1\cdots\alpha_n$是V的标准正交基.

设$\forall\gamma\in V$,在$\alpha_1,\cdots\alpha_n$下的坐标$(z_1\cdots z_n)^T$.

解:$\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in V\qquad k\in R$

$(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n=(\beta,\alpha)$

$(k\alpha,\beta)=kx_1y_1+\cdots+kx_ny_n=k(\alpha,\beta)$

$(\alpha+\gamma,\beta)=(x_1+z_1)y_1+\cdots+(x_n+z_n)y_n=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$

$(\alpha,\alpha)=x_1^2+\cdots+x_n^2\geq 0$ 当且仅当$\alpha=(0,\cdots0)$时成立 $\therefore(\alpha,\beta)$为内积V

2) $\because (\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$

$\therefore \alpha_1\cdots\alpha_n$是$V$的标准正交基.