2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设$\{x_n\}$是数列下列命题中不正确的是（　）

（A）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

（B）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

（C）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$

（D）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n-1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

【答案】（D）

（2）设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线的$y=f(x)$的拐点个数为

（A）0

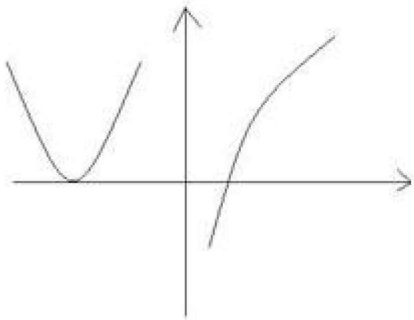
（B）1

（C）2

（D）3

【答案】（C）

【解析】如图所示



（3）设$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x,x^2+y^2\le 2y\right\}$，函数$f(x,y)$在 D 上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（　　）

（A）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

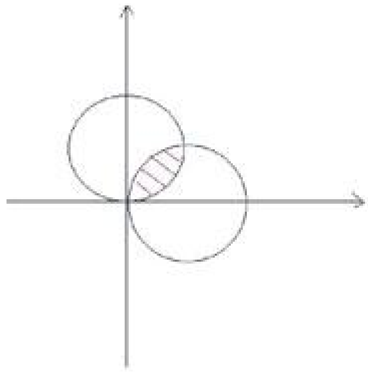
（B）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（C）$2\int_0^1dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)dy$

（D） $2\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$

【答案】（B）

【解析】如图所示



（4）下列级数发散的是（　　）

（A） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8^n}$

（B） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$

（C） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$

（D） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

【答案】C

【解析】（A） $S_n=u_1+u_2+...+u_n=\frac{1}{8}+\frac{2}{8^2}+...+\frac{n}{8^n}$，

$\frac{1}{8}S_n=(\frac{1}{8})^2+\frac{2}{8^3}+...+\frac{n}{8^{n+1}}\Rightarrow\frac{7}{8}S_n=\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+...+\frac{1}{8^n}-\frac{n}{8^{n+1}}\Rightarrow S_n=\frac{8}{49}(1-(\frac{1}{8})^n)-\frac{7n}{8^n}$， $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{8}{49}$ 存在，则收敛。

(B) $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以（B）收敛。

（C） $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$，因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n},\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 分别是收敛和发散，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 发散，故选（C）。

（D) $u_n=\frac{n!}{n^n},\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$，所以收敛。

（5）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\end{bmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为（　）

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega$

（B）$a\notin\Omega,d\in\Omega$

（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega$

（D）$a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】D

【解析】$Ax=b$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow |A|=0$，即 $(a-2)(a-1)=0$，从而 $a=2$或$a=1$

（6）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，$f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为（　）

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

（B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

（C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】A

【解析】由已知得 $f(x_1,x_2,x_3)=Y^TP^TAPY=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，$Q=PE_{23}E_2(-1)$，

从而

$f(x_1,x_2,x_3)=Y^TQ^TAQY=Y^TE_2^T(-1)E_{23}{}^TP^TAPE_{23}E_2(-1)Y$

$=Y^TE_2(-1)E_{23}P^TAPE_{23}E_2(-1)Y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，其中 $E_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，$E_2(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 均为初等矩阵，所以选 A。

（7）若 A,B 为任意两个随机事件，则

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$

（B）$P(AB)\ge P(A)P(B)$

（C）$P(AB)\le\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

（D）$P(AB)\ge\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】（C）

【解析】排除法。若 $AB=\Phi$，则 $P(AB)=0$，而 $P(A),P(B)$ 未必为 0，故

$P(A)P(B)\geq P(AB),\dfrac{P(A)+P(B)}{2}\geq P(AB)$，故 B,D 错。

若 $A\subset B$，则 $P(AB)=P(A)\geq P(A)P(B)$，故 A 错。

（8）设总体 $X\sim B(m,\theta),X_1,X_2,X_3$ 为来自该总的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$

（B）$m(n-1)\theta(1-\theta)$

（C）$(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

（D）$mn\theta(1-\theta)$

【答案】（B）

【解析】

$$E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=ES^2=DX=m\theta(1-\theta)$$

$$\Rightarrow E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=m(n-1)\theta(1-\theta)$$

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上)．

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$______.

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=-\dfrac{1}{2}$

（10）设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$______.

【答案】$f(1)=2$

【解析】因为 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^2f(x^2)$，$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$．$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=5$，所以 $f(1)=2$

（11）若函数 $z=z(x,y)$，有方程 $e^{x+2y+3z}+2xyz=1$ 确定，则 $dz\big|_{(0,0)}=$______.

【答案】$dz\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}dx-\dfrac{2}{3}dy$

【解析】对方程 $e^{x+2y+3z}+2xyz=1$ 两边分别关于 x,y 求导，得

$e^{x+2y+3z}(2+3\dfrac{\partial z}{\partial x})+2y(z+x\dfrac{\partial z}{\partial x})=0$，$e^{x+2y+3z}(2+3\dfrac{\partial z}{\partial y})+2x(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y})=0$，再将 $(0,0)$ 代入得，

$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=-\dfrac{2}{3}$，则 $dz\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}dx-\dfrac{2}{3}dy$。

（12）设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3. 则 $y(x)=$______.

【答案】 $y(x)=e^{-2x}+2e^{x}$

【解析】特征方程为 $r^2+r-2=0$，$r_1=-2,r_2=1$，微分方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$，由已知条件得 $y'(0)=0,y(0)=3$，则 $C_1=1,C_2=2$，则 $y(x)=e^{-2x}+2e^{x}$。

(13)设3阶矩阵A的特征值为2,-2,1,

$B=A^2-A+E$,其中E为3阶单位矩阵，则行列式$|\mathrm{B}|=$

【答案】21

【解析】易得B特征值为3,7,1，故$|\mathrm{B}|=3\times7\times1=21$

（14）设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$, 则 $P\{XY-Y<0\}=$____.

【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】由 $\rho_{XY}=0$, 故 X,Y 独立。

$$\begin{aligned}&P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}\\&=P\{(X-1)<0,Y>0\}+P\{(X-1)>0,Y<0\}\\&=P\{(X-1)<0\}P\{Y>0\}+P\{(X-1)>0\}P\{Y<0\}.\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^2$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时为等价无穷小，求 a,b,k 的值。

【解析】由题意，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{x+a(x-x^2/2+x^3/3+o(x^3))+bx(x-x^3/6+o(x^3))}{x^3}=k$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{(a+1)x+(b-a/2)x^2+ax^3/3-bx^4/6+o(x^3)+o(x^4)}{x^3}=k$$

$$\Rightarrow a=-1,b=-1/2,k=-1/3$$

（16）计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le2,y\ge x^2\}$。

【解析】 $I=\iint\limits_{D}x(x+y)dxdy=\iint\limits_{D}x^2dxdy+\iint\limits_{D}xydxdy=2\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2,y\ge x^2,x\ge 0\right\}$，

则 $I=\iint\limits_{D}x(x+y)dxdy=2\iint\limits_{D_1}x^2dxdy=2\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$。

（17）为实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格 MC 的边际成本，η 为需求弹性（$\eta>0$）。

（1）证明定价模型 $\mathrm{P}=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

（2）若该商品的成本函数 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由（1）中的定价模型确定此商品的价格。

【解析】（1）由题意，MR=MC，利润最大，又收益 R=PQ，$MR=\frac{dR}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}=P(1+\frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ})=P(1-\frac{1}{\eta})$，

其中 $\eta=-\dfrac{\dfrac{\Delta Q}{Q}}{\dfrac{\Delta P}{P}}=-\dfrac{P}{Q}\dfrac{dQ}{dP}$，而 $P(1-\frac{1}{\eta})=\mathrm{MC}\Rightarrow \mathrm{P}=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$。

（2）由题意知，$MC=2Q$，$\eta=-\frac{P}{40-P}\cdot(-1)=\frac{P}{40-P}$，

则 $P=\dfrac{2(40-P)}{1-\dfrac{40-P}{P}}\Rightarrow P=30$。

（18）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于 0，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式。

【解析】 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\int_{x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}^{x_0}[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]dx=4$

解得：$3y^2=\frac{dy}{dx}$

分离变量可得：$-\frac{1}{y}=3x+c$

因为 $y(0)=2$

所以 $c=-\frac{1}{2}$

综上 $f(x)=\frac{2}{1-6x}$

（19）（Ⅰ）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$。

（Ⅱ）设函数 $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式。

【解析】(1) 证明：令 $F(x)=u(x)v(x)$，则

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}u(x)$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

(2)

$$f'(x)=u_1'(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]+u_1(x)[u_2(x)\cdots u_n(x)]'$$
$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x)$$
$$+u_1(x)u_2(x)[u_3(x)\cdots u_n(x)]'$$
$$=\cdots=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)u_3(x)\cdots u_n(x)+\cdots$$
$$u_1(x)u_2(x)u_3(x)\cdots u_n'(x)$$

（20）设矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，且 $A^3=0$，

(1) 求 a 的值。

(2) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X。

【解析】(1) $A^2=\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2+1 & 2a & -1 \\ 2a & a^2 & -2a \\ 1 & 2a & a^2-1 \end{bmatrix}$，

$$A^3=\begin{bmatrix} a^2+1 & 2a & -1 \\ 2a & a^2 & -2a \\ 1 & 2a & a^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^3+3a & 3a^2 & -3a \\ 3a^2 & a^2 & -3a^2 \\ 3a & 3a^2 & a^3-3a \end{bmatrix}=0$$

$\Leftrightarrow a=0$。

(2) 由 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$ 得，

$$X(E-A^2)-AX(E-A^2)=E\Rightarrow(E-A)X(E-A^2)=E\Rightarrow X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$$

当$a=0$时，$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$，则$A^2=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$E-A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$,$E-A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$，

进而$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{bmatrix}$,$(E-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \mathrm{X}=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$

（21）设矩阵$A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{bmatrix}$相似于矩阵$B=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{bmatrix}$。

（1）求a,b的值。

（2）求可逆矩阵P，使$P^{-1}AP$为对角矩阵。

【解析】（1）

$$|B-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\0&b-\lambda&0\\0&3&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(b-\lambda)=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=b$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-3\\-1&3-\lambda&-3\\1&-2&a-\lambda\end{vmatrix}$$

由$=(1-\lambda)[\lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3]$

$\because A\sim B\therefore A,B$特征值相同

$\therefore \lambda^2-(a+2)\lambda+2a-3=(\lambda-1)[\lambda-(2a-3)]$,

得$a=4,\lambda_3=5$,故$b=5$

（2）由（1）得$A=\begin{bmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&4\end{bmatrix}$，其中特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=5$，

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，解$(A-E)x=0$方程的基础解系为$\alpha_1=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$,$\alpha_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix}$；

当$\lambda_3=5$时，解$(A-5E)x=0$方程的基础解系为$\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$，

从而 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, 5\alpha_3) \Rightarrow A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$，

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以令 $P = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可逆，即 $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，使得 $P^{-1}Ap = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$。

（22）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2 & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$，对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现为止，记 Y 的观测次数。

（1）求 Y 的概率分布。

（2）求 EY。

【解析】

（1）$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$，

$Y = p\{x = n\}, p = p\{x > 3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2 dx = C_{n-1}^1 \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}\frac{1}{8} = (n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}, n = 2,3\cdots$

（2）$EY = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2} = \frac{1}{64}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{7}{8}\right)$

令

$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$，$S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}$，$S_2(x) = \int_0^x S_1(t)dt = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x}$

$S_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}$，$S(x) = S_1'(x) = \frac{2(1-x)^2 + 2x(2-x)}{(1-x)^3}$

$EY = \frac{1}{64}S\left(\frac{7}{8}\right) = 16$

（23）设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, ..., X_n$ 为随机样本。

（1）求 θ 的矩阵估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量。

【解析】（1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1 x\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1+\theta}{2}\Rightarrow\theta=2EX-1\Rightarrow\hat{\theta}=2\overline{X}-1$。

（2）设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为观测值，则 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=\frac{1}{(1-\theta)^n} & \theta<x_i<1,i=1,2,\dots,n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta),\theta<x_i<1,\mathrm{i}=1,2,\dots,n$，$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-n\frac{-1}{1-\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0$，取 $\hat{\theta}=\min\{x_i\}$。