

大学基础物理学(第2版) 教师用书(习题详解)

张三慧 编著
Zhang Sanhui

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是《大学基础物理学(第2版)》(张三慧编著,清华大学出版社2007年出版)的教学参考用书。本书按原教材(上、下册)5篇25章的结构安排,书中各章均设置了4个板块,其中“内容提要”为该章基本概念、原理和公式的扼要总结,“解题思路”介绍了解答该章习题的一般思路和应注意之处,“思考题选答”是典型思考题的参考答案,“习题解答”为章末全部习题的详细解答。

本书可供讲授《大学基础物理学(第2版)》的教师参考使用。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

责任编辑:朱红莲 石磊

责任校对:焦丽丽

出版发行:清华大学出版社

<http://www.tup.com.cn>

c-service@tup.tsinghua.edu.cn

社总机:010-62770175

投稿咨询:010-62772015

版次:2007年11月第2版

地址:北京清华大学学研大厦A座

邮编:100084

邮购热线:010-62786544

客户服务:010-62776969

目 录

CONTENTS

第 1 篇 力 学

第 1 章	质点运动学	3
第 2 章	牛顿运动定律	16
第 3 章	动量与角动量	33
第 4 章	功和能	42
第 5 章	刚体的定轴转动	58
第 6 章	相对论	70

第 2 篇 热 学

第 7 章	温度和气体动理论	83
第 8 章	热力学第一定律	96
第 9 章	热力学第二定律	107

第 3 篇 电 磁 学

第 10 章	静电场	117
第 11 章	电势	129
第 12 章	电容器和介电质	139

第13章	电流和磁场	148
第14章	磁力	157
第15章	物质的磁性	167
第16章	电磁感应和电磁波	172

第4篇 波动与光学

第17章	振动	187
第18章	波动	201
第19章	光的干涉	215
第20章	光的衍射	225
第21章	光的偏振	233

第5篇 量子物理基础

第22章	量子物理的基本概念	239
第23章	原子中的电子	248
第24章	固体中的电子	258
第25章	核物理	264

第

1

篇

力

学

www.khdaW.CC
课后答案网

质点运动学

1.1 内容提要

1. **参考系**：描述物体运动时用作参考的其他物体和安排在各处的一套同步的钟。固定于参考物建立一坐标系(如直角坐标系)就可定量地描述质点的空间位置,它到达各位置的时刻则由各位置处的同步的钟指出。

2. **运动函数**：表示运动中的质点的位置随时间变化的函数。质点的位置用位矢(从坐标原点到质点所在点的矢量线段) \mathbf{r} 表示,运动函数为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

用直角坐标表示则有

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

其中 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为沿 x, y 和 z 轴的单位矢量。上式也表示质点的运动是沿3个坐标方向的运动的合成。

质点在时间间隔 t 到 $t + \Delta t$ 的位移矢量为

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

$\Delta \mathbf{r}$ 是位矢大小(即位矢长度)的差 $[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$ 。在曲线运动中,

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq \Delta r$$

Δs 指质点沿轨道经过的路程,

$$|\Delta \mathbf{r}| \approx \Delta s, \quad |\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s$$

3. 速度和加速度定义

速度为

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

速率为

$$v = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

在直角坐标系中的分量的合成的表示式

$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}$$

4. 匀加速直线运动: 质点运动所沿的直线选作 x 轴。设质点的初位置为 $x_0=0$, 初速度为 v_0 , 则由于加速度恒定, 就有

$$v = v_0 + at, \quad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad v^2 - v_0^2 = 2ax$$

式中, v, a 为正时, 表示它们的方向沿 x 轴正向; v, a 为负时, 表示它们的方向沿 x 轴负向。二者同号时, 质点的速率增大; 二者反号时, 质点的速率减小。

5. 抛体运动: 质点以初速 v_0 抛出, 仰角为 θ 。以抛出点为原点, 取水平方向为 x 轴方向, 竖直向上为 y 轴方向, 则被抛出质点的加速度 $a_x=0, a_y=-g$ 。在抛出后任意时刻,

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = v_0 \sin \theta - gt, \quad x = v_0 \cos \theta \cdot t, \quad y = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

质点的轨道方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2 \theta}$$

6. 圆周运动: 以 R 表示质点运动所沿的圆周的半径, 则它的线速度(即速率)为 v , 而角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$$

角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

加速度为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t$$

其中, \boldsymbol{a}_n 为法向加速度, 其大小为 $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, 方向指向圆心; \boldsymbol{a}_t 为切向加速度, 其数值为

$a_t = \frac{dv}{dt} = R\alpha$, 方向沿切线方向。注意, $\frac{dv}{dt}$ 是速率的变化率。总加速度的大小为 $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$ 。

7. 伽利略速度变换: 设 S' 参考系在 S 参考系中以速度 u 匀速运动, 在 S' 系中质点的速度为 v' , 则在同一时刻它在 S 系中的速度为

$$v = v' + u$$

1.2 解题思路

1. 解题的一般原则是先仔细审题, 了解题意, 构思出题述的物理图像, 明确已知和要求; 然后根据题目给出的条件选择合适的数学公式求解。解题时如涉及数字运算, 要注意有效位数, 一般取三位有效数字即可。还要注意公式中各量的单位。本教材的公式与计算都用国际单位制的单位。对计算的数字结果要判断其是否合乎实际。对不合乎实际的结果, 要仔细审查解题的过程以纠正其错误。

2. 本章题目只涉及质点的运动, 题目中所指的物体都当质点看待。对直线运动或其合成, 一般要画出坐标系以帮助表达和思考。本章习题所涉及的直线运动(或直线分运动)都是匀加速的, 即加速度保持不变。代公式时要注意这一条件。

3. 对圆周运动除会计算法向(向心)加速度外, 还要会计算切向加速度。注意切向加速度 dv/dt 是速率的变化率, 即速率对时间的导数, 而速率又是时间的函数。

4. 在速度变换的计算中, 要十分明确各个速度是“谁对谁”的速度, 要会用速度变换的“串联”法则(即伽利略变换):

$$v_{SE} = v_{SV} + v_{VE}$$

5. 在本章和以后的力学题目的分析与计算中要特别注意矢量与标量的区别, 并能用适当的文字标志来表示它们: 矢量在书中用黑斜体表示, 手写体请在相应字符的正上方标以箭头。

6. 解题要能正确表达思路, 写出各步骤的根据, 不能只写公式和数字。这样做可以训练自己正确的文字表达能力, 也能帮助自己真正理解物理概念和定律。

1.3 思考题选答

1.7 根据开普勒第一定律, 行星轨道为椭圆(图 1.1)。已知任一时刻行星的加速度方向都指向椭圆的一个焦点(太阳所在处)。分析行星在通过图中 M, N 两位置时, 它的速率分别应正在增大还是正在减小?

答 行星越过 M 点时, 其切向加速度 a_t 沿轨道的切线方向而和其速度方向相反, $dv/dt < 0$, 所以速率在减小。行星越过 N 点时, a_t 的方向与速度的方向相同, $dv/dt > 0$, 速率在增大。

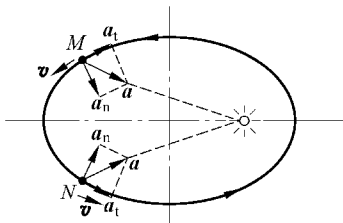


图 1.1 思考题 1.7 答用图

1.8 一斜抛物体的水平初速度是 v_{0x} , 它的轨道的最高点处的曲率圆的半径是多大?

答 斜抛物体的轨道最高点处的斜率是水平的, 该处的曲率圆的半径沿竖直方向, 该处物体的速度方向为水平方向。由于物体在水平方向没有加速度, 所以在此处物体的切向加速度为零。物体的总加速度即法向加速度沿竖直方向向下, 此加速度就是重力加速度 g 。由法向加速度公式 $a_n = \frac{v^2}{R}$ 可得所求曲率圆的半径为

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

1.4 习题解答

1.1 木星的一个卫星——木卫1——上面的珞玕火山喷发出的岩块上升高度可达 200 km, 这些石块的喷出速度是多大? 已知木卫1上的重力加速度为 1.80 m/s^2 , 而且在木卫1上没有空气。

解
$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 1.80 \times 200 \times 10^3} = 849 \text{ m/s}$$

1.2 一种喷气推进的实验车, 从静止开始可在 1.80 s 内加速到 1600 km/h 的速率。按匀加速运动计算, 它的加速度是否超过了人可以忍受的加速度 $25g$? 这 1.80 s 内该车跑了多大距离?

解 实验车的加速度为

$$a = \frac{v}{t} = \frac{1600 \times 10^3}{3600 \times 1.80} = 2.47 \times 10^2 \text{ m/s}^2 \approx 25g$$

基本上未超过 $25g$ 。

1.80 s 内实验车跑的距离为

$$s = \frac{v}{2}t = \frac{1600 \times 10^3}{2 \times 3600} \times 1.80 = 400 \text{ m}$$

1.3 一辆卡车为了超车, 以 90 km/h 的速度驶入左侧逆行道时, 猛然发现前方 80 m 处一辆汽车正迎面驶来。假定该汽车以 65 km/h 的速度行驶, 同时也发现了卡车超车。设两司机的反应时间都是 0.70 s (即司机发现险情到实际刹车所经过的时间), 他们刹车后的减速度都是 7.5 m/s^2 , 试问两车是否会相撞? 如果会相撞, 相撞时卡车的速度多大?

解
$$\begin{aligned} v_{10} &= 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}, & v_{20} &= 65 \text{ km/h} = 18 \text{ m/s}, \\ s_0 &= 80 \text{ m}, & \Delta t &= 0.70 \text{ s}, & a &= 7.5 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

两车开始刹车时, 它们之间的距离为

$$s'_0 = s_0 - (v_{10} + v_{20})\Delta t = 80 - (25 + 18) \times 0.70 = 50 \text{ m}$$

卡车到停止需继续开行的距离

$$s_1 = \frac{v_{10}^2}{2a} = \frac{25^2}{2 \times 7.5} = 41.7 \text{ m}$$

汽车到停止需继续开行的距离

$$s_2 = \frac{v_{20}^2}{2a} = \frac{18^2}{2 \times 7.5} = 21.7 \text{ m}$$

因为 $s_1 + s_2 > s_0'$, 所以两车会相撞。

以 t 表示两车刹车后到相撞所用的时间, 则有

$$s_0' = v_{10}t - \frac{1}{2}at^2 + v_{20}t - \frac{1}{2}at^2 = (v_{10} + v_{20})t - at^2$$

代入已知数, 为

$$50 = (25 + 18)t - 7.5t^2$$

解此方程可得

$$t = 1.62 \text{ s}, \quad t = 4.11 \text{ s (舍去)}$$

由此得碰撞时卡车的速度为

$$v_1 = v_{10} - at = 25 - 7.5 \times 1.62 = 12.9 \text{ m/s} = 46 \text{ km/h}$$

1.4 跳伞运动员从 1200 m 高空下跳, 起初不打开降落伞做加速运动。由于空气阻力的作用, 会加速到一“终极速率”200 km/h 而开始匀速下降。下降到离地面 50 m 处时打开降落伞, 很快速率会变为 18 km/h 而匀速下降着地。若起初加速运动阶段的平均加速度按 $g/2$ 计, 此跳伞运动员在空中一共经历了多长时间?

解

$$h_0 = 1200 \text{ m}, \quad v_1 = 200 \text{ km/h} = 55.6 \text{ m/s},$$

$$v_2 = 18 \text{ km/h} = 5 \text{ m/s}, \quad h_2 = 50 \text{ m}.$$

运动员加速下落的时间

$$t_1 = \frac{v_1}{g/2} = \frac{2 \times 55.6}{9.8} = 11.3 \text{ s}$$

加速下落的距离

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g/2} = \frac{v_1^2}{g} = \frac{55.6^2}{9.8} = 315 \text{ m}$$

以速率 v_1 匀速下落的时间

$$t_1' = \frac{h_0 - h_1 - h_2}{v_1} = \frac{1200 - 315 - 50}{55.6} = 15.0 \text{ s}$$

以速率 v_2 匀速下落的时间

$$t_2 = \frac{h_2}{v_2} = \frac{50}{5} = 10 \text{ s}$$

运动员在空中总共经历的时间为

$$t = t_1 + t_1' + t_2 = 11.3 + 15.0 + 10 = 36.3 \text{ s}$$

1.5 由消防水龙带的喷嘴喷出的水的流量是 $q=280 \text{ L/min}$, 水的流速 $v_0=26 \text{ m/s}$ 。若这喷嘴竖直向上喷射, 水流上升的高度是多少? 在任一瞬间空中有多少升水?

解 水流上升的高度

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{26^2}{2 \times 9.8} = 34.5 \text{ m}$$

同一滴水在空中运动的时间

$$t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \times 26}{9.8} = 5.31 \text{ s}$$

在时间 t 内喷嘴喷出的水即在任一瞬间空中所有的水。这些水的总体积是

$$V = qt = 280 \times 5.31/60 = 24.7 \text{ L}$$

1.6 一质点在 xy 平面上运动, 运动函数为 $x=2t, y=4t^2-8$ (采用国际单位制)。

(1) 求质点运动的轨道方程并画出轨道曲线;

(2) 求 $t_1=1 \text{ s}$ 和 $t_2=2 \text{ s}$ 时, 质点的位置、速度和加速度。

解 (1) 在运动函数中消去 t , 可得轨道方程为

$$y = x^2 - 8$$

轨道曲线为一抛物线, 如图 1.2 所示。

(2) 由 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + (4t^2 - 8)\mathbf{j}$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + 8t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 8\mathbf{j}$$

可得在 $t=1 \text{ s}$ 时

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_1 = 8\mathbf{j}$$

在 $t=2 \text{ s}$ 时

$$\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + 16\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_2 = 8\mathbf{j}$$

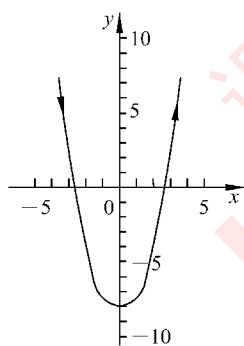


图 1.2 习题 1.6 解用图

1.7 女子排球的球网高度为 2.24 m , 球网两侧的场地大小都是 $9.0 \text{ m} \times 9.0 \text{ m}$ 。一运动员采用跳发球, 其击球点高度为 2.8 m , 离网的水平距离是 8.5 m 。球以 28.0 m/s 的水平速度被击出。(1) 此球能否过网? (2) 此球是否落在了对方场地界内 (忽略空气阻力)?

解 (1) 排球离手后到达网顶所用时间为

$$\Delta t_1 = \frac{8.5}{28.0} = 0.304 \text{ s}$$

在此时间内球落下距离为

$$\Delta h_1 = \frac{1}{2}g(\Delta t_1)^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.304)^2 = 0.452 \text{ m}$$

击球点到网上沿的高度差为 $\Delta H = 2.8 - 2.24 = 0.56 \text{ m}$ 。由于 $\Delta H > \Delta h_1$ ，所以球可以过网。

(2) 球离手后到达对方底边线所用时间为

$$\Delta t_2 = \frac{8.5 + 9.0}{28.0} = 0.625 \text{ s}$$

在此时间内球落下的距离为

$$\Delta h_2 = \frac{1}{2} g (\Delta t_2)^2 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.625)^2 = 1.91 \text{ m}$$

由于 Δh_2 小于击球点高度 2.8 m ，所以球将继续飞行一段时间并落在对方界外。

1.8 滑雪运动员离开水平滑雪道飞入空中时的速率 $v_0 = 110 \text{ km/h}$ ，着陆的斜坡与水平面夹角 $\theta = 45^\circ$ (见图 1.3)。

(1) 计算滑雪运动员着陆时沿斜坡的位移 L 是多大? (忽略起飞点到斜面的距离)

(2) 在实际的跳跃中，滑雪运动员所达到的距离 $L = 165 \text{ m}$ ，这个结果为什么与计算结果不符?

解 (1) 如图 1.3 所示，运动员着陆点的坐标为

$$x = L \cos 45^\circ = v_0 t, \quad y = L \sin 45^\circ = \frac{1}{2} g t^2$$

解此二方程，得

$$t = \frac{2v_0}{g}$$

而运动员沿斜坡的位移为

$$L = \frac{v_0 t}{\cos 45^\circ} = \frac{2v_0^2}{g \cos 45^\circ} = \frac{2 \times 2}{9.8 \times \sqrt{2}} \left(\frac{110 \times 10^3}{3600} \right)^2 = 269 \text{ m}$$

(2) 实际 L 的数值小于上述计算值，是由于空气阻力对运动员的影响。

1.9 一个人扔石头的最大出手速率 $v = 25 \text{ m/s}$ ，他能把石头扔过与他的水平距离 $L = 50 \text{ m}$ ，高 $h = 13 \text{ m}$ 的一堵墙吗？在这个距离内他能把石头扔过墙的最高高度是多少？

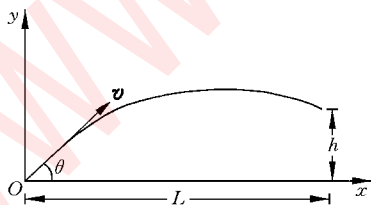


图 1.4 习题 1.9 解用图

解 如图 1.4 所示，石头的轨道方程为

$$y = x \tan \theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v^2 \cos^2 \theta}$$

以 $\cos^2 \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-1}$ 代入可得

$$\frac{g x^2}{2 v^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \left(\frac{g x^2}{2 v^2} + y \right) = 0$$

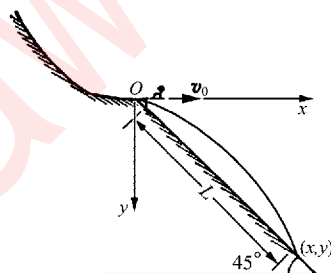


图 1.3 习题 1.8 解用图

能扔过墙的 θ 角需满足上式,即条件为

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gL} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v^2} \right)} \right]$$

将已知数据代入后,得上式根号中的值,即有

$$1 - \frac{2g}{v^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v^2} \right) = -0.022 < 0$$

由此可知 θ 无实数解,所以轨道不可能越过墙,即石头不可能被扔过墙。

只有当

$$1 - \frac{2g}{v^2} \left(h + \frac{gL^2}{2v^2} \right) \geq 0$$

时, θ 才有解,由此得

$$h \leq \frac{v^2}{2g} - \frac{gL^2}{2v^2} = \frac{25^2}{2 \times 9.8} - \frac{9.8 \times 50^2}{2 \times 25^2} = 12.3 \text{ m}$$

所以在 $L=50 \text{ m}$ 这个距离上,他能石头扔过墙的最高高度为 12.3 m 。附带算出相应的

$$\theta = \arctan \frac{v^2}{gL} = \arctan \frac{25^2}{9.8 \times 50} = 51.9^\circ$$

1.10 为迎接香港回归,柯受良 1997 年 6 月 1 日驾车飞越黄河壶口(见原书图 1.25)。东岸跑道长 265 m ,柯驾车从跑道东端启动,到达跑道终端时速度为 150 km/h ,他随即以仰角 5° 冲出,飞越跨度为 57 m ,安全落到西岸木桥上。

- (1) 按匀加速运动计算,柯在东岸驱车的加速度和时间各是多少?
- (2) 柯跨越黄河用了多长时间?
- (3) 若起飞点高出河面 10.0 m ,柯驾车飞行的最高点离河面几米?
- (4) 西岸木桥桥面和起飞点的高度差是多少?

解 在图 1.5 中,

$$s = 265 \text{ m}, \quad v_0 = 150 \text{ km/h}, \quad \theta = 5^\circ, \quad L = 57 \text{ m}, \quad h_1 = 10 \text{ m}.$$

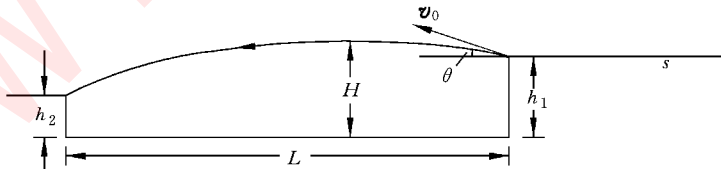


图 1.5 习题 1.10 解用图

(1) 柯在东岸的加速度

$$a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{1}{2 \times 265} \left(\frac{150 \times 10^3}{3600} \right)^2 = 3.28 \text{ m/s}^2$$

加速的时间

$$t_1 = \frac{2s}{v_0} = \frac{2 \times 265 \times 3600}{150 \times 10^3} = 12.7 \text{ s}$$

(2) 柯跨越黄河用的时间

$$t_2 = \frac{L}{v_0 \cos \theta} = \frac{57 \times 3600}{150 \times 10^3 \times \cos 5^\circ} = 1.37 \text{ s}$$

(3) 柯飞行最高点离河面距离

$$H = h_1 + \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = 10 + \frac{(150 \times 10^3)^2 \sin^2 5^\circ}{3600^2 \times 2 \times 9.8} = 10.67 \text{ m}$$

(4) 西岸木桥桥面和起飞点的高度差为

$$\begin{aligned} h_2 - h_1 &= v_0 \sin \theta t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \\ &= \frac{150 \times 10^3}{3600} \times \sin 5^\circ \times 1.37 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 1.37^2 \\ &= -4.22 \text{ m} \end{aligned}$$

即西岸木桥桥面比起飞点低 4.22 m。

1.11 山上和山下两炮各瞄准对方并同时以相同初速各发射一枚炮弹(图 1.6)。这两枚炮弹会不会在空中相碰(忽略空气阻力)? 为什么? 如果山高 $h = 50 \text{ m}$, 两炮相隔的水平距离为 $s = 200 \text{ m}$, 要使这两枚炮弹相碰, 它们的速率至少应等于多少?

解 两炮弹有相同的水平初速率 v_{0x} 与竖直初速率 v_{0y} , 如果能相碰, 则相碰点必在两炮水平距离的中点。从炮弹出口算起, 相碰时刻为

$$t_c = \frac{s}{2v_{0x}} = \frac{s}{2v_0 \cos \theta}$$

此时两炮弹的竖直坐标分别为

$$y_1 = h - \left(v_{0y} t_c + \frac{1}{2} g t_c^2 \right)$$

$$y_2 = v_{0y} t_c - \frac{1}{2} g t_c^2$$

由于 $v_{0y} t_c = \frac{v_{0y} s}{2v_{0x}} = \frac{s \sin \theta}{2 \cos \theta} = \frac{s \tan \theta}{2} = \frac{h}{2}$, 所以有 $y_1 = y_2$ 。这样, 在时刻 t_c , 两炮弹的水平

和竖直坐标均相同, 就说明二者能在空中相碰。但要在空中相碰要求 $y_2 > 0$, 即 $v_{0y} > \frac{1}{2} g t_c^2$,

由此可得

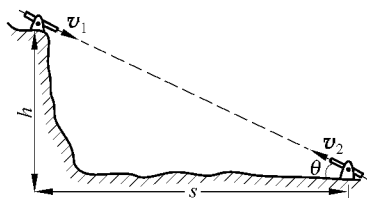


图 1.6 习题 1.11 解用图

$$v > \sqrt{\frac{gs}{4\cos\theta\sin\theta}} = \sqrt{\frac{g(h^2+s^2)}{4h}} = \sqrt{\frac{9.8 \times (50^2 + 200^2)}{4 \times 50}} = 45.6 \text{ m/s}$$

又：由于两炮弹出口后同时自由下落，所以可设想一随两炮弹自由下落的参考系，在此系内观测，两炮弹将沿同一直线相向运动，因而必然能相碰（仍需满足 $y_2 > 0$ 的条件）。

1.12 在生物物理实验中用来分离不同种类的分子的超级离心机的转速是 6×10^4 r/min。在这种离心机的转子内，离轴 10 cm 远的一个大分子的向心加速度是重力加速度的几倍？

解 所求倍数为

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 r}{g} = \frac{4\pi^2 (6 \times 10^4)^2 \times 0.1}{60^2 \times 9.8} = 4 \times 10^5$$

1.13 北京天安门所处纬度为 39.9° 。求它随地球自转的速度和加速度。

解 所求速度为

$$v = \frac{2\pi R_E}{T} \cos \lambda = \frac{2\pi \times 6378 \times 10^3}{86400} \cos 39.9^\circ = 356 \text{ m/s}$$

所求加速度为

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_E \cos \lambda = \left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \times 6378 \times 10^3 \times \cos 39.9^\circ \\ &= 2.59 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

1.14 按玻尔模型，氢原子处于基态时，它的电子围绕原子核做圆周运动。电子的速率为 2.2×10^6 m/s，离核的距离为 0.53×10^{-10} m。求电子绕核运动的频率和向心加速度。

解 所求频率为

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.2 \times 10^6}{2\pi \times 0.53 \times 10^{-10}} = 6.6 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

所求加速度为

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(2.2 \times 10^6)^2}{0.53 \times 10^{-10}} = 9.1 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$$

1.15 北京正负电子对撞机的储存环的周长为 240 m，电子要沿环以非常接近光速的速率运行。这些电子运动的向心加速度是重力加速度的几倍？

解 所求倍数为

$$\frac{v^2}{Rg} = \frac{(3 \times 10^8)^2 \times 2\pi}{240 \times 9.8} = 2.4 \times 10^{14}$$

1.16 汽车在半径 $R = 400$ m 的圆弧弯道上减速行驶。设在某一时刻，汽车的速率为

$v = 10 \text{ m/s}$, 切向加速度的大小为 $a_t = 0.2 \text{ m/s}^2$ 。求汽车的法向加速度和总加速度的大小和方向。

解 如图 1.7 所示, 汽车的法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{10^2}{400} = 0.25 \text{ m/s}^2$$

总加速度为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{0.25^2 + 0.2^2} = 0.32 \text{ m/s}^2$$

总加速度与速度之间的夹角为

$$\begin{aligned} 180^\circ - \beta &= 180^\circ - \arctan \frac{a_n}{a_t} \\ &= 180^\circ - \arctan \frac{0.25}{0.20} = 128^\circ 40' \end{aligned}$$

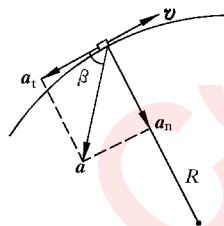


图 1.7 习题 1.16 解用图

* 1.17 一张致密光盘 (CD) 音轨区域的内半径 $R_1 = 2.2 \text{ cm}$, 外半径为 $R_2 = 5.6 \text{ cm}$ (图 1.8), 径向音轨密度 $N = 650 \text{ 条/mm}$ 。在 CD 唱机内, 光盘每转一圈, 激光头沿径向向外移动一条音轨, 激光束相对光盘是以 $v = 1.3 \text{ m/s}$ 的恒定线速度运动的。

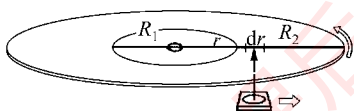


图 1.8 习题 1.17 解用图

(1) 这张光盘的全部放音时间是多少?

(2) 激光束到达离盘心 $r = 5.0 \text{ cm}$ 处时, 光盘转动的角速度和角加速度各是多少?

解 (1) 以 r 表示激光束打到音轨上的点与光盘中心的距离, 则在 dr 宽度内的音轨长度为 $2\pi r N dr$ 。激光束划过这样长的音轨所用的时间为 $dt = 2\pi r N dr / v$ 。由此得光盘的全部放音时间为

$$\begin{aligned} T &= \int dt = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi r N dr}{v} = \frac{\pi N}{v} (R_2^2 - R_1^2) \\ &= \frac{\pi \times 650 \times 10^3 \times (0.056^2 - 0.022^2)}{1.3} \\ &= 4.16 \times 10^3 \text{ s} = 69.4 \text{ min} \end{aligned}$$

(2) 所求角速度为

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1.3}{0.05} = 26 \text{ rad/s}$$

所求角加速度为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = -\frac{v}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{v}{r^2} \frac{v}{2\pi r N} = -\frac{v^2}{2\pi N r^3} \\ &= -\frac{1.3^2}{2\pi \times 650 \times 10^3 \times 0.05^3} = -3.31 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

1.18 当速率为 30 m/s 的西风正吹时,相对于地面,向东、向西和向北传播的声音的速率各是多大? 已知声音在空气中传播的速率为 344 m/s 。

解

$$v_1 = 30 \text{ m/s}, \quad v_2 = 344 \text{ m/s}.$$

向东传播的声音的速率

$$v_E = v_1 + v_2 = 30 + 344 = 374 \text{ m/s}$$

向西传播的声音的速率

$$v_W = v_2 - v_1 = 344 - 30 = 314 \text{ m/s}$$

向北传播的声音的速率

$$v_N = \sqrt{v_2^2 - v_1^2} = \sqrt{344^2 - 30^2} = 343 \text{ m/s}$$

1.19 一个人骑车以 18 km/h 的速率自东向西行进时,看见雨点垂直下落,当他的速率增至 36 km/h 时,看见雨点与他前进的方向成 120° 角下落,求雨点对地的速度。

解

$$v_{m1} = 18 \text{ km/h}, \quad v_{m2} = 36 \text{ km/h}, \quad \alpha = 90^\circ, \quad \beta = 120^\circ.$$

以 v_{m1} 和 v_{m2} 分别表示前后两次人看到的雨点的速度,以 v_r 表示雨点对地的速度。由题设可得各速度之间的关系如图 1.9 所示。

由于

$$v_{rm1} + v_{m1} = v_r = v_{rm2} + v_{m2}$$

所以就有

$$v_r = v_{m2} = 36 \text{ km/h}$$

而

$$\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

即雨点的速度方向为向下偏西 30° 。

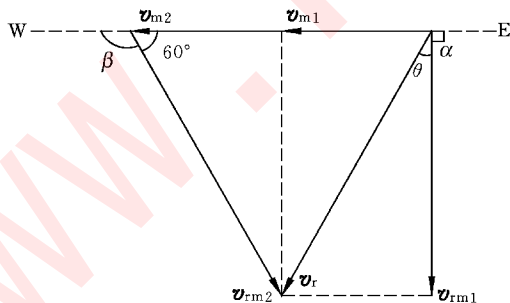


图 1.9 习题 1.19 解用图

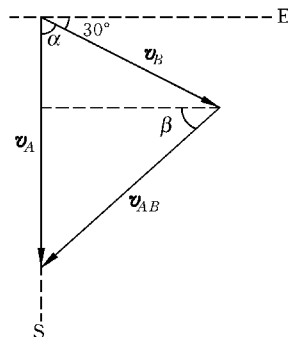


图 1.10 习题 1.20 解用图

1.20 飞机 A 以 $v_A = 1000 \text{ km/h}$ 的速率(相对地面)向南飞行,同时另一架飞机 B 以 $v_B = 800 \text{ km/h}$ 的速率(相对地面)向东偏南 30° 方向飞行。求 A 机相对于 B 机的速度与

B 机相对于 A 机的速度。

解 两飞机的速度关系如图 1.10 所示, $\alpha = 60^\circ$ 。

A 机相对于 B 机的速度为

$$\begin{aligned} v_{AB} &= \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos \alpha} \\ &= \sqrt{1000^2 + 800^2 - 2 \times 1000 \times 800 \times \cos 60^\circ} \\ &= 917 \text{ m/s} \end{aligned}$$

方向由角 β 表示, 而

$$\beta = \arccos \frac{v_B \cos 30^\circ}{v_{AB}} = \arccos \frac{800 \times 0.866}{917} = 40^\circ 56'$$

即西偏南 $40^\circ 56'$ 。

因为 B 机相对于 A 机的速度 $v_{BA} = -v_{AB}$, 所以

$$v_{BA} = 917 \text{ m/s}$$

而方向则为东偏北 $40^\circ 56'$ 。

1.21 利用本书的数值表提供的有关数据计算图 1.11 中地球表面的大楼日夜相对太阳参考系的速率之差。

解 如图 1.11 所示, 相对太阳参考系, 大楼白天正午的速率为

$$v_d = V - \omega_E R_E$$

大楼晚间子夜的速率为

$$v_n = V + \omega_E R_E$$

式中, V 为地球的公转速率, ω_E, R_E 分别为地球的自转角速度和半径。由上二式可得二速率之差为

$$v_n - v_d = 2\omega_E R_E = 2 \times \frac{2\pi}{86400} \times 6400 \times 10^3 = 931 \text{ m/s}$$

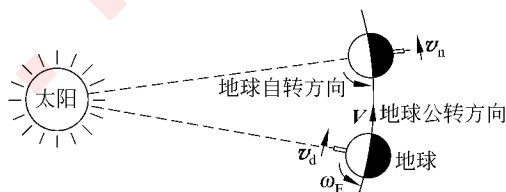


图 1.11 习题 1.21 解用图

牛顿运动定律

2.1 内容提要

1. 牛顿三定律

第一定律 任何物体都保持静止的或沿一条直线做匀速运动的状态,除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。

和此定律相联系的概念是惯性、力和惯性参考系。在其中不受力的物体保持运动状态不变的参考系叫惯性参考系或简称惯性系。

第二定律 物体的动量对时间的变化率与它受的外力成正比,而且发生在此外力的方向上。以 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 表示物体的动量, \boldsymbol{F} 表示它受的外力(或外力的矢量和),则第二定律可表示以数学形式

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

如果物体的质量 m 为常量,与其速度无关,则上式给出

$$\boldsymbol{F} = m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}$$

这是在经典力学中常用的牛顿第二定律公式,此式为一矢量公式。在直角坐标系中,其分量式为

$$F_x = ma_x = m \frac{dv_x}{dt}, \quad F_y = ma_y = m \frac{dv_y}{dt}, \quad F_z = ma_z = m \frac{dv_z}{dt}$$

在圆周运动中,有

法向力: $F_n = ma_n = mv^2/R = m\omega^2 R$, 方向向心。

切向力: $F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$, 方向沿切线。

* 急动度:

$$j = \frac{da}{dt}, \quad \frac{dF}{dt} = mj$$

第三定律 两个物体之间的作用是相互的,作用力和反作用力总是同时存在,分别作用,方向相反(沿一直线),大小相等。写成公式,为

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$$

2. 常见的几种力:重力($W=mg$),垂直于接触面的压力,沿绳长方向的拉力(张力),弹簧的弹力($f=-kx$),沿接触面的摩擦力(滑动 $f_k = \mu_k N$; 静 $f_s \leq \mu_s N$),流体曳力($f_d = kv$ 或 $f_d = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2$),表面张力($F=rl$)等。

重力是物体受地球的(万有)引力的表现,而其他几种力都是构成物体的分子或原子间的电磁力的宏观表现。

3. 惯性力:上面的牛顿定律公式只适用于惯性系。牛顿定律不适用的参考系叫非惯性系。在非惯性系中,可引入与参考系本身的加速运动相联系的力从形式上满足牛顿第二定律公式。这样引入的力叫惯性力。

在平动加速参考系中,物体 m 受的惯性力为

$$\mathbf{F}_i = -m\mathbf{a}_0$$

式中 \mathbf{a}_0 为该参考系相对于惯性参考系的加速度。

在转动参考系中,物体 m 受到惯性离心力

$$\mathbf{F}_i = m\omega^2 \mathbf{r}$$

式中, ω 为参考系相对于惯性系的角速度, \mathbf{r} 为物体与转动轴的距离。惯性离心力只有在转动参考系内才能观察到,方向指离转轴。

2.2 解题思路

本章习题都要应用牛顿三定律。分析方法和步骤一般可总结为下述“三字经”:

1. 认物体 认清题目内容后要选定一个物体(当成质点)作为分析的对象。如果问题涉及几个物体,则要依次选一个物体逐个进行分析。对每个物体要标出其质量。

2. 看运动 对认定的物体要分析出题目给出的(或预示的)运动状况,包括其运动轨道、速度和加速度。问题涉及几个物体时,要逐个分析它们的运动状态,并且还要找出它们的速度和加速度之间的关系。

要注意明确速度和加速度是相对于什么参考系说的。一般情况下都是对惯性系(地面、地心或太阳参考系都看成是惯性系)说的。

3. 查受力 要找出被认定的物体所受的力,一般遇到的力就是那“几种常见的力”。

物体对其他物体的反作用力与该物体的加速度无关。

为做到清楚无误的分析,要画出清晰的示力图,画出物体运动的轨道,标出其速度和加速度的方向,并用箭头标出它可能受的力。力箭头的箭尾一般都画在受力的物体上。

还要注意参考系,如果是在惯性系中,那“常见的几种力”分析出来就够了。如果要用非惯性系解题,要事先明确所选的有加速度的参考物,然后在每一个分析对象上还要加上一个惯性力的作用。

4. 列方程 把上面分析出的物体的质量、加速度和它受的力(的矢量和)用牛顿第二定律联系起来,列出方程式。问题涉及几个物体时,还要应用牛顿第三定律把它们受的力联系起来。为计算方便,常列牛顿第二定律的分量式。在应用直角坐标系时,要在示力图中画出坐标轴的方向。列式要图和式相配合。在方程式足够的情况下,就可以求解未知量了。

不要小看画示力图,它对分析题目有很大的帮助,而且也是训练思维能力和表达能力的一种重要方法。

2.3 思考题选答

2.4 当歼击机由爬升转为俯冲时(图 2.1(a)),飞行员会由于脑充血而“红视”(视场变红);当飞行员由俯冲拉起时(图 2.1(b)),飞行员会由于脑失血而“黑晕”(眼睛失明)。这是为什么?若飞行员穿上一种 G 套服(把身躯和四肢肌肉缠得紧紧的一种衣服),当飞行员由俯冲拉起时,他能经得住 $5g$ 的加速度而避免黑晕;但飞行开始俯冲时,他最大能经得住 $-2g$ 而仍免不了红视。这又是为什么?

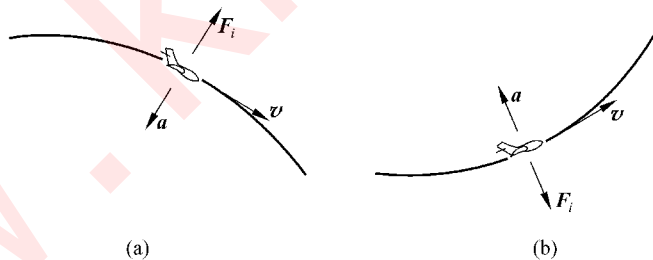


图 2.1 思考题 2.4 答用示意图

答 在由俯冲拉起时(图 2.1(b)),飞行员对地面的法向加速度指向其飞行轨道内侧,其身体各部分受到指向轨道外侧的惯性离心力。这时飞行员头部指向轨道内侧,其中血液将受惯性离心力的作用向躯干汇流,而致脑部失血发生“黑晕”。穿上 G 套服后,由于躯干被缠紧,阻止了血液向躯干汇流,因而飞行员可以经得住更大的惯性离心力,也就是容许更大的法向加速度。在俯冲情况下,血液受的惯性离心力也指向飞行轨道外侧,但

这时人头部指向轨道外侧(图 2.1(a)),所以血液将从躯干向脑部汇流而致脑充血发生“红视”。G 套服不能阻止这一过程,反而有助于它,飞行员就自然不能经受大的法向加速度了。

*** 2.6** 在门窗都关好的开行的汽车内,漂浮着一个氢气球,当汽车向左转弯时,氢气球在车内将向左运动还是向右运动?

答 在空气中释放一氢气球,它将受浮力的作用上升(图 2.2(a))。此浮力的根源是大气在重力场中的压强上小下大,因而对氢气球上下表面的压力不同,上小下大,而使浮力和重力的方向相反。

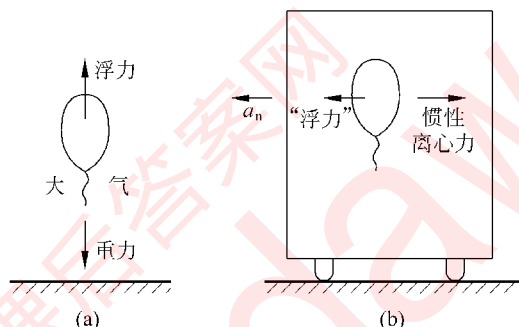


图 2.2 思考题 2.6 答用图

(a) 地面上; (b) 车厢内

在题述汽车向左转弯时,它具有指向车厢左侧的法向加速度(图 2.2(b))。因而汽车是一非惯性系。在汽车内观察,即以汽车为参考系,其中空气将受到指向右侧的惯性离心力。汽车内的空气就好像处在一水平向右的“重力场”中一样。此“重力场”根据 $F_i = m\omega^2 r$ 而左弱右强。和在地球表面空气中氢气球要受浮力向上运动类似,在汽车内空气中的氢气球将受水平向左的(与水平“重力”方向相反)的“浮力”的作用而向左运动(忽略由于氢气球质量很小而引起的在车内看到的很小的向右的运动)。

*** 2.7** 设想在地球北极装置一个单摆(图 2.3)。令其摆动后,则会发现其摆动平面,即摆线所扫过的平面,按顺时针方向旋转。摆球受到垂直于此平面的作用力了吗? 为什么这个平面会旋转? 试用惯性系和非惯性系概念解释这个现象。

答 相对于太阳参考系(惯性系),单摆的支柱的指向不变,单摆摆动平面的方向也不改变,因为单摆并没有受到与摆动平面垂直的力的作用。地球相对于太阳参考系是绕地轴自转的,即相对于摆动平面是沿逆时针方向转动的。这样,在地球上观察,即以地球作参考系,摆动平面就显示出沿顺时针方向转动了。在地球这一转动的非惯性系内观察到摆面的转动,也可以通过引进摆球受的惯性力加以说明。这一说明较复杂,此处略去。

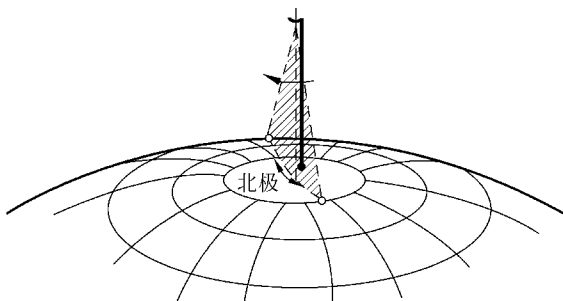


图 2.3 思考题 2.7 用图

2.4 习题解答

2.1 用力 F 推水平地面上—质量为 M 的木箱(见图 2.4)。设力 F 与水平面的夹角为 θ , 木箱与地面间的滑动摩擦系数和静摩擦系数分别为 μ_k 和 μ_s 。

(1) 要推动木箱, F 至少应多大? 此后维持木箱匀速前进, F 应需多大?

(2) 证明当 θ 角大于某一值时, 无论用多大的力 F 也不能推动木箱。此 θ 角是多大?

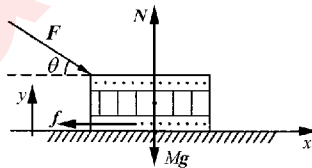


图 2.4 习题 2.1 解用图

解 (1) 对木箱, 由牛顿第二定律, 在木箱将要被推动的情况下, x 向:

$$F_{\min} \cos \theta - f_{\max} = 0$$

y 向:

$$N - F_{\min} \sin \theta - Mg = 0$$

还有

$$f_{\max} = \mu_s N$$

解以上三式可得要推动木箱所需力 F 的最小值为

$$F_{\min} = \frac{\mu_s Mg}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}$$

在木箱做匀速运动情况下, 如上类似分析可得所需力 F 的大小为

$$F = \frac{\mu_k Mg}{\cos \theta - \mu_k \sin \theta}$$

(2) 在上面 F_{\min} 的表示式中, 如果 $\cos \theta - \mu_s \sin \theta \rightarrow 0$, 则 $F_{\min} \rightarrow \infty$, 这意味着用任何有限大小的力都不可能推动木箱, 不能推动木箱的条件是

$$\cos \theta - \mu_s \sin \theta \leq 0$$

由此得 θ 的最小值为

$$\theta = \arctan \frac{1}{\mu_s}$$

2.2 设质量 $m=0.50 \text{ kg}$ 的小球挂在倾角 $\theta=30^\circ$ 的光滑斜面上(见图 2.5)。

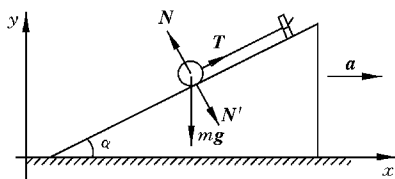


图 2.5 习题 2.2 解用图

(1) 当斜面以加速度 $a=2.0 \text{ m/s}^2$ 沿如图所示的方向运动时,绳中的张力及小球对斜面的正压力各是多大?

(2) 当斜面的加速度至少为多大时,小球将脱离斜面?

解 (1) 对小球,由牛顿第二定律,
x 向:

$$T \cos \theta - N \sin \theta = ma$$

y 向:

$$T \sin \theta + N \cos \theta - mg = 0$$

联立解此二式,可得

$$\begin{aligned} T &= m(a \cos \alpha + g \sin \alpha) \\ &= 0.5 \times (2 \times \cos 30^\circ + 9.8 \sin 30^\circ) = 3.32 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= m(g \cos \alpha - a \sin \alpha) \\ &= 0.5 \times (9.8 \times \cos 30^\circ - 2 \sin 30^\circ) = 3.75 \text{ N} \end{aligned}$$

由牛顿第三定律,小球对斜面的压力

$$N' = N = 3.75 \text{ N}$$

(2) 小球刚要脱离斜面时 $N=0$,则上面牛顿第二定律方程为

$$T \cos \theta = ma, \quad T \sin \theta = mg$$

由此二式可解得

$$a = g / \tan \theta = 9.8 / \tan 30^\circ = 17.0 \text{ m/s}^2$$

2.3 一架质量为 5000 kg 的直升机吊起一辆 1500 kg 的汽车以 0.60 m/s^2 的加速度向上升起。

(1) 空气作用在螺旋桨上的上举力多大?

(2) 吊汽车的缆绳中张力多大?

解 (1) 如图 2.6 所示。对直升机-汽车整体,由牛顿第二定律

$$F - (M+m)g = (M+m)a$$

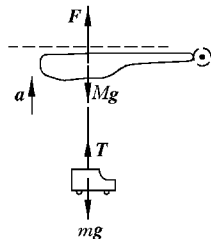


图 2.6 习题 2.3 解用图

故

$$\begin{aligned} F &= (M+m)(g+a) \\ &= (5000+1500) \times (9.8+0.6) \\ &= 6.76 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

(2) 对汽车,由牛顿第二定律

$$\begin{aligned} T-mg &= ma \\ T &= m(g+a) = 1500 \times (9.8+0.6) \\ &= 1.56 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

2.4 如图 2.7 所示,一个擦窗工人利用滑轮-吊桶装置上升。

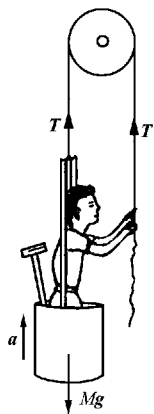


图 2.7 习题 2.4 解用图

(1) 要自己慢慢匀速上升,他需要用多大力拉绳?

(2) 如果他的拉力增大 10%,他的加速度将多大? 设人和吊桶的总质量为 75 kg。

解 对人-吊桶整体,由牛顿第二定律

$$2T-Mg=Ma$$

故

$$T=M(g+a)/2$$

(1) 人匀速上升, $a=0$, 人需要用的力

$$T=Mg/2=75 \times 9.8/2=368 \text{ N}$$

(2) $T'=1.1T=1.1Mg/2$, 则

$$a=\frac{2T'-Mg}{M}=\frac{(1.1-1)Mg}{M}=0.1g=0.98 \text{ m/s}^2$$

2.5 在一水平的直路上,一辆车速 $v=90 \text{ km/h}$ 的汽车

的刹车距离 $s=35 \text{ m}$ 。如果路面相同,只是有 $1:10$ 的下降斜度,这辆汽车的刹车距离将变为多少?

解 $v=90 \text{ km/h}=25 \text{ m/s}$, 在水平直路上刹车,阻力 $f'=\mu mg$, $s=v^2/2a=v^2/2\mu g$ 。

在斜坡上,如图 2.8 所示,对汽车,由牛顿第二定律

x 向

$$\mu mg \cos \theta - mg \sin \theta = ma'$$

由此得

$$a' = \mu g \cos \theta - g \sin \theta = \frac{v^2}{2s} \cos \theta - g \sin \theta$$

刹车距离为

$$s' = \frac{v^2}{2a'} = \frac{v^2}{\frac{v^2}{s} \cos \theta - 2g \sin \theta} = \frac{25^2}{\frac{25^2}{35} \times 1 - 2 \times 9.8 \times \frac{1}{10}} = 39.3 \text{ m}$$

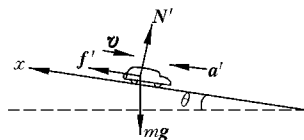


图 2.8 习题 2.5 解用图

2.6 桌上有一质量 $M=1.50\text{ kg}$ 的板,板上放一质量 $m=2.45\text{ kg}$ 的另一物体,设物体与板、板与桌面之间的摩擦系数均为 $\mu=0.25$ 。要将板从物体下面抽出,至少需要多大的水平力?

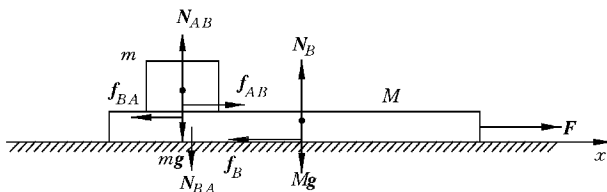


图 2.9 习题 2.6 解用图

解 如图 2.9 所示,摩擦力 $f_{AB}=f_{BA}=\mu mg$, $f_B=\mu(M+m)g$ 。对 m ,由牛顿第二定律,沿 x 方向

$$\mu mg = ma_m$$

由此得

$$a_m = \mu g$$

对 M ,由牛顿第二定律,沿 x 方向

$$F - \mu(M+m)g - \mu mg = Ma_M$$

$$F = Ma_M + \mu(M+2m)g$$

要将板抽出,需要 $a_M \geq a_m$ 。因此

$$F \geq Ma_m + \mu(M+2m)g = 2\mu(M+m)g$$

F 的最小值为

$$F_{\min} = 2\mu(M+m)g = 2 \times 0.25 \times (1.50 + 2.45) \times 9.8 = 19.4\text{ N}$$

2.7 如图 2.10 所示,在一质量为 M 的小车上放一质量为 m_1 的物块。它用细绳通过固定在小车上的滑轮与质量为 m_2 的物块相连,物块 m_2 靠在小车的前壁上而使悬线垂直,忽略所有摩擦及滑轮的质量。

(1) 当用水平力 F 推小车使之沿水平桌面加速前进时,小车的加速度多大?

(2) 如果要保持 m_2 的高度不变,力 F 应多大?

解 如图 2.10 所示为小车和两物块的受力图。各力之间的关系有 $T_1=T'_1=T_2=T'_2$, $N=N'$, 而且有 $a_1=a_2$ 。

(1) 对 m_1 ,沿 x (水平)方向,有

$$T_1 = m_1 a_1$$

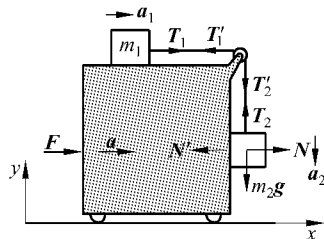


图 2.10 习题 2.7 解用图

对 m_2 , 沿 y (竖直) 方向, 有

$$T_2 - m_2 g = m_2 (-a_2)$$

由上二式可得

$$a_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

对 m_2 , 沿 x 方向, 有

$$N = m_2 a$$

对小车, 沿 x 方向, 有

$$F - N' - T' = Ma$$

由此二式可得

$$a = \frac{1}{M + m_2} \left(F - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \right)$$

(2) 如果 m_2 的高度不变, 则 M, m_1, m_2 相对位置保持不变。三者可视为一体, 受有水平外力 F , 因而有

$$F = (M + m_1 + m_2) a.$$

对 m_2 , 沿 y 方向

$$T_2 - m_2 g = 0,$$

对 m_1 , 沿 x 方向, 加速度也是 a 。于是有

$$T_1 = m_1 a$$

由上二式可得 $a = m_2 g / m_1$, 从而有

$$F = (M + m_1 + m_2) m_2 g / m_1$$

2.8 如图 2.11 所示, 质量 $m = 1200 \text{ kg}$ 的汽车, 在一弯道上行驶, 速率 $v = 25 \text{ m/s}$ 。

弯道的水平半径 $R = 400 \text{ m}$, 路面外高内低, 倾角 $\theta = 6^\circ$ 。

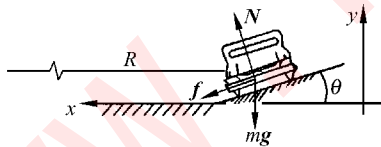


图 2.11 习题 2.8 解用图

(1) 求作用于汽车上的水平法向力与摩擦力。

(2) 如果汽车轮与轨道之间的静摩擦系数 $\mu_s = 0.9$, 要保证汽车无侧向滑动, 汽车在此弯道上行驶的最大允许速率应是多大?

解 (1) 如图 2.11 所示, 对汽车, 由牛顿第二定律, x 向:

$$N \sin \theta + f \cos \theta = m \frac{v^2}{R}$$

y 向:

$$N \cos \theta - f \sin \theta - mg = 0$$

解此二式可得摩擦力为

$$\begin{aligned}
 f &= m \frac{v^2}{R} \cos \theta - mg \sin \theta \\
 &= 1200 \times \frac{25^2}{400} \times \cos 6^\circ - 1200 \times 9.8 \times \sin 6^\circ = 635 \text{ N}
 \end{aligned}$$

作用于汽车上的水平法向力为

$$f_n = m \frac{v^2}{R} = 1200 \times \frac{25^2}{400} = 1.88 \times 10^3 \text{ N}$$

(2) 以 v_m 表示最大允许速率, 和此相对应的 $f_{\max} = \mu_s N$ 。将 v_m 和 f_{\max} 代替上面牛顿定律方程中的 v 和 f , 可以解得

$$\begin{aligned}
 v_m &= \sqrt{\frac{Rg(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}} \\
 &= \sqrt{\frac{400 \times 9.8 \times (\sin 6^\circ + 0.9 \times \cos 6^\circ)}{\cos 6^\circ - 0.9 \times \sin 6^\circ}} \\
 &= 66.0 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

2.9 铁路经过我家后岭时有一圆弧弯道, 在弯道起始处有一块路碑, 上面写着“缓和长 40, 半径 300, 超高 40, 加宽 15”, 其中“半径”是指圆弧半径 $R(\text{m})$; “超高”是指铁道内、外轨高度差 $h(\text{mm})$; “加宽”是指外、内轨顶部中线间距 $l(\text{mm})$ 比标准轨距(1435 mm)加宽的距离; “缓和长”是指铁道从直线到弧线间的过渡距离 $s(\text{m})$ 。

(1) 为了安全行车和避免乘客不适, 要求车厢在圆弧段行驶时, 其中乘客所受惯性离心力 f (在车厢中观察的) 和他所受重力沿水平面的分力之差不能超过其重力的 4% (图 2.12(a))。根据这一要求和路碑上所示数据, 求火车驶过弯道时的最大允许速率 (km/h)。

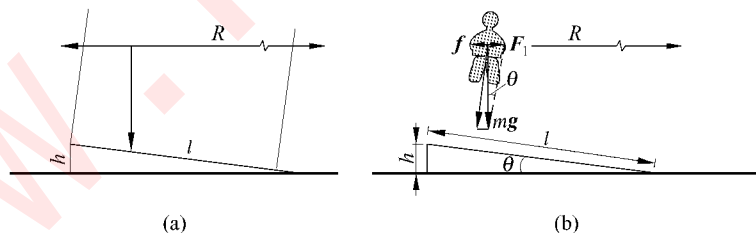


图 2.12 火车厢在圆弧轨道上开行

(a) 车厢与铁轨截面简图; (b) 乘客受力图(在车厢内观察)

* (2) 轨道如果由直线直接进入圆弧, 则车厢(和乘客)的法向加速度将由零突然增大到与圆弧相应的值。这将产生相当大的急动度而使乘客感到不适。因此, 在轨道由直线进入圆弧之间要加一段缓和曲线, 使车厢沿缓和曲线行进时法向加速度逐渐增大(实际上

与路径成正比)到圆弧处的要求。试求按上一问的速率开行时,车厢在缓和路段的急动度(最大允许值为 0.5 m/s^3)。

解 (1) 如图 2.12(b)所示,将乘客受的重力分解为水平方向和垂直于轨道面方向的两个分力。根据惯性离心力 f 和重力的水平分力 F_1 之差不能超过重力的 4% 的要求可得

$$f - F_1 \leq 0.04 mg$$

由于 $F_1 = mg \tan \theta \approx m g \sin \theta = m g h / l$, $f = m v^2 / R$, 代入上式取等号可得最大允许速率为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\left(0.04 + \frac{h}{l}\right) g R} = \sqrt{\left(0.04 + \frac{40}{1450}\right) \times 9.8 \times 300} \\ &= 14.1 (\text{m/s}) = 50.7 (\text{km/h}) \end{aligned}$$

(2) 由于在缓和路段法向加速度和路径 s 成正比,所以可写

$$a = ks$$

由于 $s = 40 \text{ m}$ 时, $a = v^2 / R$, 所以 $k = v^2 / R s = 14.1^2 / (300 \times 40) = 0.0166 (1/\text{s}^2)$ 在缓和路段的急动度为

$$j = \frac{da}{dt} = k \frac{ds}{dt} = kv = 0.0166 \times 14.1 = 0.23 (\text{m/s}^3)$$

2.10 现已知木星有 16 个卫星,其中 4 个较大的是伽利略用他自制的望远镜在 1610 年发现的(原书图 2.28)。这 4 个“伽利略卫星”中最大的是木卫三,它到木星平均距离是 $1.07 \times 10^6 \text{ km}$,绕木星运行的周期是 7.16 d。试由此求出木星的质量。

解 以 M 和 m 分别表示木星和木卫三的质量,则由万有引力定律和牛顿第二定律,可得

$$\begin{aligned} G \frac{Mm}{R^2} &= m \frac{4\pi^2}{T^2} R \\ M &= \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times (1.07 \times 10^9)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (7.16 \times 86400)^2} = 1.89 \times 10^{27} \text{ kg} \end{aligned}$$

2.11 星体自转的最大转速发生在其赤道上的物质所受向心力正好全部由引力提供之时。

(1) 证明星体可能的最小自转周期为 $T_{\min} = \sqrt{3\pi/(G\rho)}$, 其中 ρ 为星体的密度。

(2) 行星密度一般约为 $3.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 求其可能最小自转周期。

(3) 有的中子星自转周期为 1.6 ms, 若它的半径为 10 km, 则该中子星的质量至少多大(以太阳质量为单位)?

解 (1) 以 M 和 Δm 分别表示星体的总质量和星体赤道上一小块物体的质量, 由引力定律和牛顿第二定律, 可得

$$G \frac{M\Delta m}{R^2} = \Delta m \left(\frac{2\pi}{T_{\min}} \right)^2 R$$

又由于

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

代入上式消去 Δm 和 R 可得

$$T_{\min} = \sqrt{3\pi/(G\rho)}$$

(2) 以 $\rho = 3.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 代入 T_{\min} 公式, 得

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{6.67 \times 10^{-11} \times 3.0 \times 10^3}} = 6.9 \times 10^3 \text{ s}$$

(3) 由上述 T_{\min} 公式可得

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

而中子星的质量为

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2} \\ &= \frac{4\pi^2 \times (10^4)^3}{6.67 \times 10^{-11} \times (1.6 \times 10^{-3})^2} \\ &= 2.31 \times 10^{29} \text{ kg} = 0.12 \text{ 太阳质量} \end{aligned}$$

2.12 设想一个三星系统: 三个质量都是 M 的星球沿同一圆形轨道运动, 轨道半径为 R , 求此系统的运行周期。

解 如图 2.13 所示, 每个星球受其他二星球的引力的合力指向轨道中心, 大小为

$$\begin{aligned} F &= 2 \frac{GM^2}{(\sqrt{3}R)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{GM^2}{\sqrt{3}R^2} \end{aligned}$$

由牛顿第二定律

$$\frac{GM^2}{\sqrt{3}R^2} = M \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R$$

由此式可解得星球运行周期为

$$T = \sqrt[4]{48\pi R^3 / \sqrt{GM}}$$

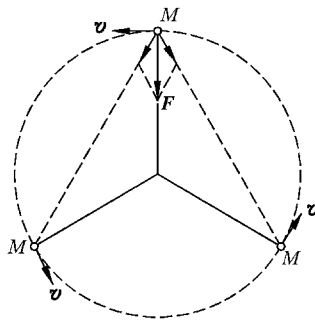


图 2.13 习题 2.12 解用图

2.13 光滑的水平桌面上放置一固定的圆环带, 半径为 R 。一物体贴着环带内侧运动(见图 2.14), 物体与环带间的滑动摩擦系数为 μ_k 。设物体在某一时刻经 A 点时速率为 v_0 , 求此后 t 时刻物体的速率以及从 A 点开始所经过的路程。

解 如图 2.14 所示, 对物体在法向上有

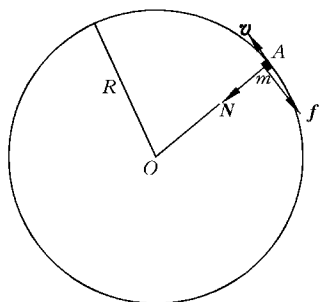


图 2.14 习题 2.13 解用图

而

在切向上有

由此三式可得

$$N = m \frac{v^2}{R}$$

$$f = \mu_k N$$

$$-f = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\mu_k \frac{v^2}{R}$$

由此得

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = - \int_0^t \frac{\mu_k}{R} dt$$

$$v = \frac{v_0 R}{R + v_0 \mu_k t}$$

而在时间 t 内物体经过的路程为

$$s = \int_0^t v dt = v_0 R \int_0^t \frac{dt}{R + v_0 \mu_k t}$$

$$= \frac{R}{\mu_k} \ln \left(1 + \frac{v_0 \mu_k t}{R} \right)$$

2.14 一台超级离心机的转速为 5×10^4 r/min, 其试管口离转轴 2.00 cm, 试管底离转轴 10.0 cm (见图 2.15)。

(1) 求管口和管底的向心加速度各是 g 的几倍。

(2) 如果试管装满 12.0 g 的液体样品, 管底所承受的压力多大? 相当于几吨物体所受重力?

(3) 在管底一个质量为质子质量 10^5 倍的大分子受的惯性离心力多大?

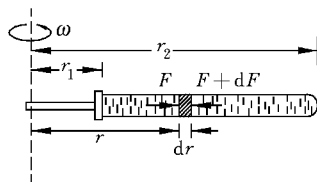


图 2.15 习题 2.14 解用图

解 (1) 在管口处

$$\frac{a_{n1}}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 r_1}{g} = 4\pi^2 \left(\frac{5 \times 10^4}{60} \right)^2 \times 0.02 / 9.8 = 0.56 \times 10^5$$

在管底处

$$\frac{a_{n2}}{g} = \frac{4\pi^2 n^2 r_2}{g} = 4\pi^2 \left(\frac{5 \times 10^4}{60} \right)^2 \times 0.10 / 9.8 = 2.80 \times 10^5$$

(2) 如图 2.15 所示, 管内离转轴 r 处的一质元质量为

$$dm = \rho S dr$$

其中 ρ 为液体密度, S 为管的截面积。此质元受的法向(即沿半径指向转轴)的力为

$$F + dF - F = dF$$

由牛顿第二定律

$$dF = dm a_n = \rho S \omega^2 r dr$$

对全管长度积分可得管底对液体的压力为

$$\begin{aligned} F_b &= \int_0^{r_b} dF = \int_{r_1}^{r_2} \rho S \omega^2 r dr = \frac{\rho S \omega^2}{2} (r_2^2 - r_1^2) \\ &= \frac{\rho S (r_2 - r_1)}{2} \omega^2 (r_2 + r_1) \\ &= \frac{m \omega^2}{2} (r_2 + r_1) \\ &= \frac{12 \times 10^{-3}}{2} \left(\frac{5 \times 10^4}{60} \right)^2 4\pi^2 \times (0.02 + 0.10) \\ &= 1.97 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

由牛顿第三定律, 管底承受液体的压力等于 $1.97 \times 10^4 \text{ N}$, 相当于 2.01 t 物体受的重力。

又: F_b 也可以用 3.5 节介绍的质心运动定律更方便地求出。

(3) 大分子受的惯性离心力为

$$\begin{aligned} F_i &= m \omega^2 r = 1.67 \times 10^{-27} \times 10^5 \times 4\pi^2 \left(\frac{5 \times 10^4}{60} \right)^2 \times 0.10 \\ &= 4.6 \times 10^{-16} \text{ N} \end{aligned}$$

2.15 直九型直升机的每片旋翼长 5.97 m 。若按宽度一定、厚度均匀的薄片计算, 求旋翼以 400 r/min 的转速旋转时, 其根部受的拉力为其受重力的几倍?

解 如图 2.16 所示, 旋翼上离转轴 r 处的一质元的质量为

$$dm = \rho S dr$$

其中 ρ 为旋翼材料密度, S 为旋翼截面积。此质元受的法向(即沿半径指向转轴)的力为

$$F - (F + dF) = -dF$$

由牛顿第二定律

$$-dF = dm a_n = \rho S \omega^2 r dr$$

对全长 L 积分可得旋翼根部受的拉力为

$$F_0 = \int_0^{F_0} dF = - \int_0^L \rho S \omega^2 r dr = - \frac{1}{2} \rho S \omega^2 L^2 = - \frac{1}{2} m \omega^2 L$$

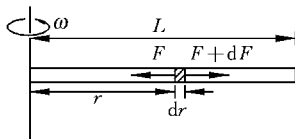


图 2.16 习题 2.15 解用图

此结果的负号表示拉力方向与 r 的正向相反,即指向转轴,亦即旋翼根部受的是拉力。此拉力大小是旋翼所受重力的倍数为

$$\frac{|F_0|}{mg} = \frac{\omega^2 L}{2g} = \frac{4\pi^2 400 \times 5.97}{2 \times 9.8 \times 60^2} = 534$$

又: F_0 也可以用 3.5 节介绍的质心运动定律更方便地求出。

2.16 如图 2.17 所示,一个质量为 m_1 的物体拴在长为 L_1 的轻绳上,绳的另一端固定在一个水平光滑桌面的钉子上。另一物体质量为 m_2 ,用长为 L_2 的绳与 m_1 连接。二者均在桌面上做匀速圆周运动,假设 m_1, m_2 的角速度为 ω ,求各段绳子上的张力。

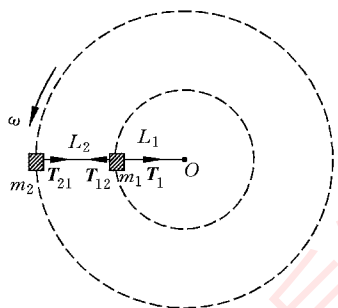


图 2.17 习题 2.16 解用图

解 如图 2.17 所示,对 m_2 ,由牛顿第二定律

$$T_{21} = m_2 \omega^2 (L_1 + L_2)$$

对 m_1 ,由牛顿第二定律

$$T_1 - T_{12} = m_1 \omega^2 L_1$$

再利用牛顿第三定律 $T_{12} = T_{21}$,联立解以上二方程,可得

$$T_1 = \omega^2 [m_1 L_1 + m_2 (L_1 + L_2)]$$

$$T_{21} = T_{12} = \omega^2 m_2 (L_1 + L_2)$$

2.17 在刹车时卡车有一恒定的减速度 $a = 7.0 \text{ m/s}^2$ 。刹车一开始,原来停在一个箱子上就开始滑动,它在卡车车厢上滑动了 $l = 2 \text{ m}$ 后撞上了卡车的前帮。问此箱子撞上前帮时相对卡车的速率为多大? 设箱子与车厢底板之间的滑动摩擦系数 $\mu_k = 0.50$ 。请试用车厢参考系列式求解。

解 如图 2.18 所示,以车厢为参考系,箱子在水平方向受有摩擦力 $f = \mu_k mg$ 和惯性力 $F_0 = ma$,由牛顿第二定律,对箱子,应有

$$F_0 - f = ma'$$

由此得箱子对车厢的加速度为

$$a' = \frac{F_0 - f}{m} = a - \mu_k g$$

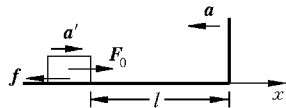


图 2.18 习题 2.17 解用图

箱子滑动距离 l 后碰上前帮时相对卡车的速度为

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{2a'l} = \sqrt{2(a - \mu_k g)l} \\ &= \sqrt{2 \times (7 - 0.5 \times 9.8) \times 2} \\ &= 2.9 \text{ m/s} \end{aligned}$$

*** 2.18 平流层信息平台**是目前正在研制的一种多用途通信装置。它是在 $20 \sim 40 \text{ km}$ 高空的平流层内放置的充氦飞艇,其上装有信息转发器可进行各种信息传递。由于平流层内有比较稳定的东向或西向气流,所以要固定这种飞艇的位置需要在其上装推

进器以平衡气流对飞艇的推力。一种飞艇的设计直径为 50 m, 预定放置处的空气密度为 0.062 kg/m^3 , 风速取 40 m/s , 空气阻力系数取 0.016, 求固定该飞艇所需要的推进器的推力。如果该推进器的推力效率为 10 mN/W , 则该推进器所需的功率多大? (能源可以是太阳能)

解 推进器的推力和气流对飞艇的流体阻力相平衡, 所以推力等于

$$\begin{aligned} F = f &= \frac{1}{2} C_D A v^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.016 \times 0.062 \times \pi \times 25^2 \times 40^2 \\ &= 1560 \text{ N} \end{aligned}$$

所需功率为 $1.56 \times 10^3 / 10 \times 10^{-3} = 1.56 \times 10^5 \text{ W} = 156 \text{ kW}$ 。

2.19 一种简单的测量水的表面张力系数的方法如下。在一弹簧秤下端吊一只细圆环, 先放下圆环使之浸没于水中, 然后慢慢提升弹簧秤, 待圆环被拉出水面一定高度时, 可见接在圆环下面形成了一段环形水膜。这时弹簧秤显示出一定的向上的拉力(图 2.19)。以 r 表示细圆环的半径, 以 m 表示其质量, 以 F 表示弹簧秤显示的拉力的大小。试证明水的表面张力系数可利用下式求出

$$\gamma = \frac{F - mg}{4\pi r}$$

证 当细圆环被拉出水面, 裹在细环上的环形水膜因其表面张力而向下拉细环。由于膜有两个表面, 它们拉圆环向下的边界长为 $2\pi r$, 所以向下拉圆环的表面张力合力为 $\gamma \times 2 \times 2\pi r$ 。再考虑到细圆环所受的重力 mg 。可得细圆环受力平衡条件为

$$F = \gamma \times 4\pi r + mg$$

由此可得

$$\gamma = \frac{F - mg}{4\pi r}$$

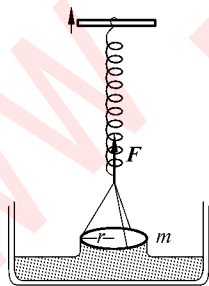


图 2.19 习题 2.19 用图

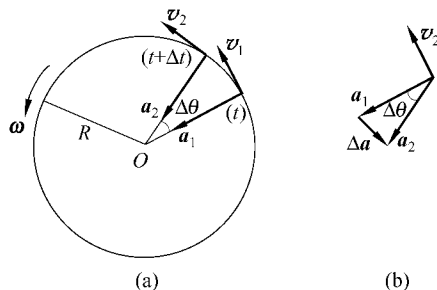


图 2.20 习题 2.20 证用图

* 2.20 证明：以恒定速率 v 沿半径 R 的圆周运动的急动度的大小为 v^3/R^2 ，方向与速度 \boldsymbol{v} 的方向相反(图 2.20)。

证 由定义知，急动度为

$$\boldsymbol{j} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{a}}{\Delta t}$$

\boldsymbol{j} 的大小为(参照图 2.20(b))

$$j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \boldsymbol{a}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a \Delta \theta}{\Delta t} = a \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = a\omega = \frac{v^2}{R} \frac{v}{R} = \frac{v^3}{R^2}$$

\boldsymbol{j} 的方向即 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $\Delta \boldsymbol{a}$ 的方向。由图 2.20(b)可看出， $\Delta t \rightarrow 0$ 时， $\Delta \boldsymbol{a}$ 的方向趋于和质点的速度 \boldsymbol{v} 的方向相反，所以任意时刻质点的 \boldsymbol{j} 的方向也就总与 \boldsymbol{v} 的方向相反。

动量与角动量

3.1 内容提要

1. **动量定理**：质点所受的合外力的冲量等于质点的动量(或质点系的总动量)的增量。写成公式,为

$$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

2. **动量守恒定律**：系统所受合外力为零时,其总动量不随时间改变,即对系统,如 $\mathbf{F} = 0$, 则

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{常矢量}$$

此式为一矢量关系,其分量式也成立。例如,如果系统所受外力的分量 $F_x = 0$, 则应有

$$\sum m_i v_{ix} = \text{常量}$$

3. **质心**：一个质点系(如一个大的物体)的质心为由质点系内的质量分布状况决定的一个点,其位矢定义为

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{m} \quad \text{或} \quad \mathbf{r}_c = \int \frac{\mathbf{r} dm}{m}$$

质心概念的重要意义之一表现为质心运动定理：系统所受的合外力等于其总质量与其质心的加速度的乘积。写成公式,为

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_c$$

把大物体当成质点看待而处理其平动问题,就是应用了这个质心运动定理。

质心在其中静止的参考系叫质心参考系,在这一参考系中,系统的总动量恒为零。

4. **质点的角动量定理**：相对于惯性系中某一定点,力 \mathbf{F} 的力矩定义为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

其中 \boldsymbol{r} 为从定点到力的作用点的径矢。

一运动质点的角动量定义为

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

对于质点的角动量定理为：质点所受的力矩(的矢量和)等于它的角动量的变化率。
写成公式为

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

5. 角动量守恒定律：对惯性系中某一定点，如果一个质点所受的力矩(的矢量和)为零，则该质点相对于此定点的角动量(包括方向和大小)保持不变。

此定理以同样的形式适用于质点系。

3.2 解题思路

1. 用动量定理解题的分析步骤仍是解题“三字经”，不过有时直接用矢量表示式根据矢量图的几何关系求解更为方便和直观，如原书例 3.1 的解法(2)就是这样。

2. 用动量守恒定律时，也用“三字经”，不过这里要注意首先要认定相互作用的几个物体作为分析的对象，对它们的运动要分清初始与终了两个状态。在分析力时要特别分析系统所受的合外力(即系统内各物体受系统外物体的外力的矢量和)是否为零，也就是要分析系统从初始到终了这一过程中各物体受力的情况。只有当合外力为零时，才能有总动量守恒的结果(有时外力可以忽略，也可应用动量守恒公式)。很多的情况是系统所受的合外力在某一方向上为零，则总动量沿这一方向的分量也就守恒。

3. 应用角动量定理时，首先要明确力矩和角动量定义中的矢量积的数学意义。例如，力矩并不简单地是力和位矢的代数积，角动量也不简单地是质量、位矢和速率的乘积，要明确它们都是用两个矢量定义的一个新矢量。

应用角动量守恒定律于质点的运动时，首先要明确计算力矩和角动量时所采用的定点的位置。对于力矩，不但当 $F=0$ 或 $r=0$ (即力的作用线通过定点)时，该力的力矩为零，而且力和质点的位矢平行或反平行时，力矩也为零。对质点的角动量也应注意：质点的速度和位矢平行或反平行时，质点对定点的角动量为零。只有当质点的速度与位矢的方向垂直时，质点的角动量的大小才等于位矢和速度大小的乘积。

3.3 思考题选答

3.3 如图 3.1 所示，一重球的上下两面系同样的两根线，今用其中一根线将球吊起，

而用手向下拉另一根线,如果向下猛一拖,则下面的线断而球未动。如果用力慢慢拉线,则上面的线断开。为什么?

答 手拉线向下猛拖一下,由于线对重球的作用时间很短,因而重球受到下面的线的力的冲量就很小,这样重球的动量改变就很小。由于重球原来静止(即动量为零),所以经这一拖,它基本未动,上面的线就不会受到影响,下面的线就被拖断了。

如果慢慢向下拉线,则经过稍长一些时间,下面的拉力对重球的冲量就比较大,重球就会由于动量改变引起的向下的速度而稍稍下移。这时上面的线受到的拉力就等于下面的线的拉力和重球所受重力之和,比下面的线受的力大得多,所以上面的线就要断了。

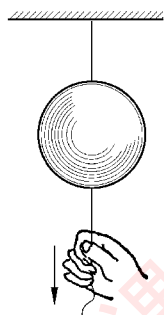


图 3.1 思考题 3.3 用图

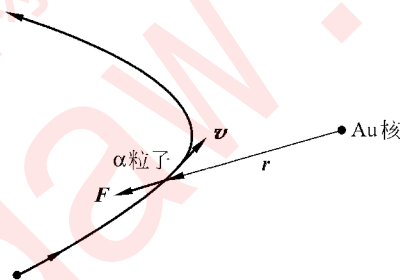


图 3.2 思考题 3.9 用图

3.9 一个 α 粒子飞过一金原子核而被散射,金核基本上未动(图 3.2)。在这一过程中,对金核中心来说, α 粒子的角动量是否守恒?为什么? α 粒子的动量是否守恒?

答 在实验室参考系(视为惯性系)中,金核中心视为定点。在 α 粒子运动的过程中,它受到金核的静电斥力始终沿着二者的连线,即与 α 粒子相对于金核中心的位矢方向相同。因而此斥力对金核中心的力矩总是零。这样, α 粒子对金核中心的角动量就守恒。

由于 α 粒子总受到金核的斥力作用,所以它的动量是不守恒的。

3.4 习题解答

3.1 一小球在弹簧的作用下做振动(见图 3.3),弹力 $F = -kx$,而位移 $x = A \cos \omega t$,其中 k, A, ω 都是常量。求在 $t = 0$ 到 $t = \pi/(2\omega)$ 的时间间隔内弹力施于小球的冲量。

解 所求冲量为

$$I = \int_0^{\pi/(2\omega)} F dt = -k \int_0^{\pi/(2\omega)} A \cos \omega t dt = -\frac{kA}{\omega}$$

负号表示此冲量的方向与 x 轴方向相反。

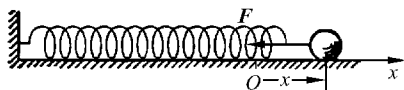


图 3.3 习题 3.1 解用图

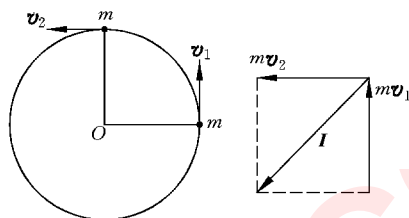


图 3.4 习题 3.2 解用图

3.2 一个质量 $m = 50 \text{ g}$, 以速率 $v = 20 \text{ m/s}$ 做匀速圆周运动的小球, 在 $1/4$ 周期内向心力加给它的冲量是多大?

解 如图 3.4 所示, $v_1 = v_2 = v$,

$$I = |mv_2 - mv_1| = \sqrt{2}mv = \sqrt{2} \times 0.05 \times 20 = 1.41 \text{ N} \cdot \text{s}$$

3.3 一跳水练习者一次从 10 m 跳台上跳下时失控, 以致肚皮平拍在水面上。如果她起跳时跃起的高度是 1.2 m , 触水面后 0.80 s 末瞬时停止, 她的身体受到的水的平均拍力多大? 设她的体重是 420 N 。

解 跳水者落到水面时的速率为 $v_1 = \sqrt{2gh}$ 。参考图 3.5, 由动量定理可知

$$F - mg = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_2 - m(-v_1)}{\Delta t} = \frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t}$$

她受水面的拍力为

$$\begin{aligned} F &= \frac{m(0 + \sqrt{2gh})}{\Delta t} + mg \\ &= \frac{420 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times (10 + 1.2)}}{9.8 \times 0.80} + 420 \\ &= 1.21 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

差不多是她自身重量的 3 倍。

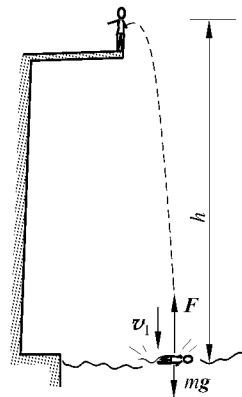


图 3.5 习题 3.3 解用图

3.4 自动步枪连发时每分钟射出 120 发子弹, 每发子弹的质量为 $m = 7.90 \text{ g}$, 出口速率为 735 m/s 。求射击时(以分钟计)枪托对肩部的平均压力。

解 以分钟计, 枪对子弹的平均推力为

$$\bar{F} = \frac{Nmv}{t} = \frac{120 \times 0.0079 \times 735}{60} = 11.6 \text{ N}$$

枪视作静止, 此力也等于肩对枪托的平均推力, 由牛顿第三定律可知, 枪托对肩的压力就等于 11.6 N 。

3.5 水管有一段弯曲成 90° 。已知管中水的流量为 $3 \times 10^3 \text{ kg/s}$, 流速为 10 m/s 。求水流对此弯管的压力的大小和方向。

解 如图 3.6 所示, 设在 Δt 时间内水段 AA' 以流速 v 流到 BB' 位置, 这段水的动量变化为

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_{BB'} - p_{AA'} = (p_{BA'} + p_{A'B'}) - (p_{AB} + p_{BA'}) \\ &= p_{A'B'} - p_{AB} = \Delta m v_{A'} - \Delta m v_A\end{aligned}$$

式中 Δm 为 AB 段和 $A'B'$ 段水的质量, $v_{A'} = v_A = v$ 。由此得水在弯管处受管的力为

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} (v_{A'} - v_A)$$

由图知, 此力的大小为

$$F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \sqrt{2} v = Q \sqrt{2} v = 3 \times 10^3 \times \sqrt{2} \times 10 = 4.24 \times 10^4 \text{ N}$$

方向沿弯曲 90° 的角平分线向外。

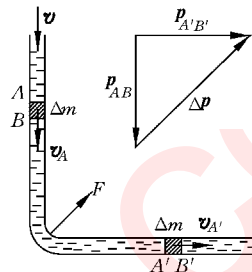


图 3.6 习题 3.5 解用图

3.6 一个原来静止的原子核, 放射性衰变时放出一个动量为 $p_1 = 9.22 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 的电子, 同时还在垂直于此电子运动的方向上放出一个动量为 $p_2 = 5.33 \times 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 的中微子。求衰变后原子核的动量的大小和方向。

解 原子核衰变过程应满足动量守恒定律。以 p_3 表示衰变后原子核的动量, 应有

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

由图 3.7 可知, p_3 的大小为

$$\begin{aligned}p_3 &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = 10^{-21} \times \sqrt{9.22^2 + 5.33^2} \\ &= 1.07 \times 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m/s}\end{aligned}$$

p_3 的方向应在 p_1 和 p_2 所在的平面内, 而且与 p_1 的夹角为

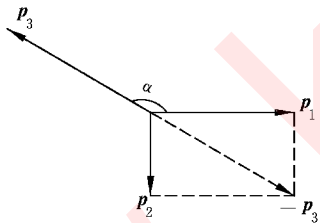


图 3.7 习题 3.6 解用图

$$\alpha = 90^\circ + \arctan \frac{p_1}{p_2} = 90^\circ + \arctan \frac{9.22}{5.33} = 149^\circ 58'$$

*** 3.7** 运载火箭的最后一级以 $v_0 = 7600 \text{ m/s}$ 的速率飞行。这一级由一个质量为 $m_1 = 290.0 \text{ kg}$ 的火箭壳和一个质量为 $m_2 = 150.0 \text{ kg}$ 的仪器舱扣在一起。当扣松开后, 二者间的压缩弹簧使二者分离。这时二者的相对速率为 $u = 910.0 \text{ m/s}$ 。设所有速度都在同一直线上, 求两部分分开后各自的速度。

解 对太空惯性系, 以 v_0 的方向为正方向, 以 v_1 和 v_2 分别表示火箭壳和仪器舱分开后各自的速度。由火箭壳和仪器舱的总动量守恒给出

$$(m_1 + m_2) v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

由于仪器舱应在前,所以 $u=v_2-v_1$, 即 $v_2=u+v_1$ 。将此式代入上式得

$$(m_1+m_2)v_0 = m_1v_1 + m_2(u+v_1)$$

由此得

$$v_1 = v_0 - \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = 7600 - \frac{150 \times 910}{150 + 290} = 7290 \text{ m/s}$$

$$v_2 = u + v_1 = 910 + 7290 = 8200 \text{ m/s}$$

v_1, v_2 均为正值,故二速度皆沿正向,即与未分开前 v_0 的方向相同。

3.8 两辆质量相同的汽车在十字路口垂直相撞,撞后二者扣在一起又沿直线滑动了 $s=25 \text{ m}$ 才停下来。设滑动时地面与车轮之间的动摩擦系数为 $\mu_k=0.80$ 。撞后两个司机都声明在撞车前自己的车速未超限(14 m/s),他们的话都可信吗?

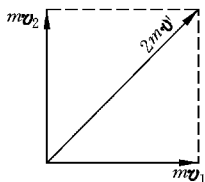


图 3.8 习题 3.8 解用图

解 两车相撞后的加速度为 $-\mu_k mg/m = -\mu_k g$, 由此可知刚撞后二者扣在一起时的速率为

$$v = \sqrt{2\mu_k g s} = \sqrt{2 \times 0.8 \times 9.8 \times 25} = 19.8 \text{ m/s}$$

如果两车均未超限,并都以最大允许速率 v_l 开行,则由两车的动量守恒可得(参考图 3.8)

$$(mv_1)^2 + (mv_2)^2 = (2mv')^2$$

由此可得撞后速度应为

$$v' = \frac{1}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_l = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 14 = 9.9 \text{ m/s}$$

由于实际撞后的初速 $v > v'$, 所以两个司机的话并不都可信,至少一人撒谎。

3.9 一空间探测器质量为 6090 kg,正相对于太阳以 105 m/s 的速率向木星运动。当它的火箭发动机相对于它以 253 m/s 的速率向后喷出 80.0 kg 废气后,它对太阳的速率变为多少?

解 由火箭速度公式(原书(3.10)式)可得空间探测器的最后速度为

$$v_f = v_i + u \ln \frac{M_i}{M_f} = 105 + 253 \times \ln \frac{6090}{6010} = 108 \text{ m/s}$$

3.10 在太空静止的一单级火箭,点火后,其质量的减少与初质量之比为多大时,它喷出的废气将是静止的?

解 当火箭体的速度 v_f 和废气相对于火箭体的喷出速度 u 相等,喷出废气的速度 $v_f - u$ 将等于零。由火箭速度公式 $v_f = v_i + u \ln(M_i/M_f)$ 可得此时

$$v_f = 0 + u \ln \frac{M_i}{M_f} = u$$

由此得

$$M_i/M_f = e$$

而火箭质量的减小与初质量之比为

$$\frac{M_i - M_f}{M_i} = 1 - \frac{M_f}{M_i} = 1 - \frac{1}{e} = 0.632$$

3.11 水分子的结构如图 3.9 所示。两个氢原子与氧原子的中心距离都是 0.0958 nm, 它们与氧原子中心的连线的夹角为 105° 。求水分子的质心。

解 由质量的对称分布可知水分子的质心在两氢原子对氧原子所张角度的平分线上, 两氢原子的质心在 B 点, 距氧原子中心的距离为

$$AB = 0.0958 \times \cos \frac{105}{2} = 0.0583 \text{ nm}$$

由质心 C 的定义可得

$$AC \times m_O = BC \times 2m_H = (AB - AC) \times 2m_H$$

由此得质心离氧原子中心的距离为

$$AC = \frac{AB \times 2m_H}{m_O + 2m_H} = \frac{0.0583 \times 2 \times 1}{16 + 2 \times 1} = 0.00648 \text{ nm}$$

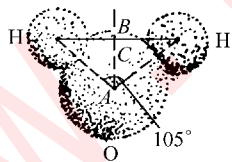


图 3.9 习题 3.11 解用图

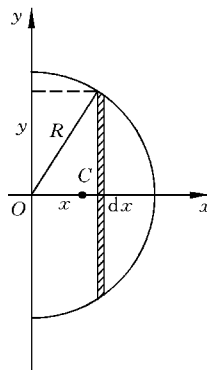


图 3.10 习题 3.12 解用图

3.12 求半圆形均匀薄板的质心。

解 如图 3.10 所示, 设薄板半径为 R , 质量为 m , 面密度 $\rho_A = 2m/(\pi R^2)$ 。由质量分布的对称性可得板的质心在 x 轴上, 而

$$x_C = \frac{\int x dm}{m} = \frac{1}{m} \int_0^R x \rho_A 2 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{4R}{3\pi}$$

3.13 有一正立方体铜块,边长为 a 。今在其下半部中央挖去一截面半径为 $a/4$ 的圆柱形洞(原书图 3.30)。求剩余铜块的质心位置。

解 如图 3.11 所示为垂直于圆柱洞轴线而前后等分铜块的平面。由质量分布的对称性可知,铜块的质心应在此平面内通过圆洞中心的竖直线上。完整铜块的质心应在正立方体中心 O 处。把挖去的铜柱塞回原处,其质心应在其中心 A 处。挖去铜柱后剩余铜块的质心应在 AO 连线上,设在 B 处。由于挖去的铜柱塞回后铜块复归完整,由此完整铜块的质心定义应有

$$m_1 BO = m_2 AO$$

其中 $m_2 = \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 a \rho$ 为铜柱的质量, $m_1 = a^3 \rho - m_2 = a^3 \left(1 - \frac{\pi}{16}\right) \rho$ 为挖去铜柱后剩余铜块的质量(ρ 为铜的密度)。

将 m_1 和 m_2 代入上式可得

$$\begin{aligned} BO &= \frac{m_2}{m_1} AO = \frac{\pi/16}{1 - \pi/16} \times AO = \frac{\pi a}{4 \times (16 - \pi)} \\ &= 0.061a \end{aligned}$$

即剩余铜块的质心在正方体中心上方 $0.061a$ 处。

3.14 哈雷彗星绕太阳运动的轨道是一个椭圆。它离太阳最近的距离是 $r_1 = 8.75 \times 10^{10} \text{ m}$, 此时它的速率是 $v_1 = 5.46 \times 10^4 \text{ m/s}$ 。它离太阳最远时的速率是 $v_2 = 9.08 \times 10^2 \text{ m/s}$, 这时它离太阳的距离 r_2 是多少?

解 彗星运行受的引力指向太阳, 所以它对太阳的角动量守恒, 它在走过离太阳最近或最远的地点时, 速度的方向均与对太阳的径矢方向垂直, 所以角动量守恒给出

$$m r_1 v_1 = m r_2 v_2$$

由此得

$$r_2 = \frac{r_1 v_1}{v_2} = \frac{8.75 \times 10^{10} \times 5.46 \times 10^4}{9.08 \times 10^2} = 5.26 \times 10^{12} \text{ m}$$

3.15 用绳系一小物块使之在光滑水平面上做圆周运动(见图 3.12), 圆半径为 r_0 ,

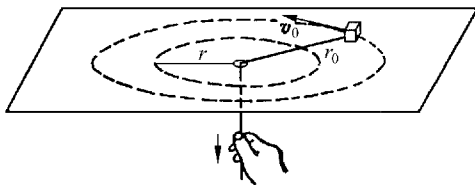


图 3.12 习题 3.15 解用图

速率为 v_0 。今缓慢地拉下绳的另一端,使圆半径逐渐减小。求圆半径缩短至 r 时,小物块的速率 v 是多大。

解 绳缩短时,物块受的拉力指向圆心。此力对圆心的力矩为零,因而物块运动的角动量守恒。以 m 表示物块的质量,应有

$$mr_0 v_0 = mrv$$

由此可得

$$v = v_0 \frac{r_0}{r}$$

功 和 能

4.1 内容提要

1. **功**: 力对质点做的功定义为力在位移方向上的分量与该位移大小的乘积。以 A 表示功, 就有

$$dA = F \cos \varphi |d\mathbf{r}| = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

式中 φ 为力 \mathbf{F} 和位移 $d\mathbf{r}$ 之间的夹角。质点从 A 点移动到 B 点的过程中力 \mathbf{F} 对它做的功为

$$A_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

L 表示质点移动的路径。

合力的功等于各分力沿同一路径所做的功的代数和。

保守力: 做功与路径形状无关的力; 或者说, 沿闭合路径一周做功为零的力。保守力做的功只由系统的初、末位形决定。

2. **动能定理**: 利用牛顿第二定律可导出, 对于一个质点, 合外力对它做的功等于它的动能的增量。写成公式, 为

$$A_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$$

对于质点系, 则有: 所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功之和等于质点系的总动能的增量。这里要注意的是, 内力做的功也对动能的增量有影响。

利用质心概念可以证明: 相对于某一惯性系, 质点系的总动能等于其轨道动能(或说其质心的动能)和内动能(即各质点相对于质心参考系的动能)之和, 即

$$E_k = E_{kC} + E_{k,int}$$

3. 势能

(1) 只有对保守力(即做功与路径无关的力)才能引进势能的概念。

(2) 保守力的功被定义为相应的势能的减小,即

$$A_{AB} = E_{pA} - E_{pB}$$

具体的各点的势能在选定势能零点后才能确定。

(3) 势能属于有保守力相互作用各物体组成的系统的整体。

(4) 系统的势能与参考系无关。

重力势能: $E_p = mgh$, “标准”高度, 如地面, 为势能零点。

弹簧的弹性势能: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, 以弹簧原长为势能零点。

引力势能: $E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r}$, 以 m_1, m_2 无限分离为势能零点(重力势能为引力势能的特殊情况)。

4. 机械能守恒定律: 以 E 表示系统的机械能, 它等于系统的总动能与系统的势能的和, 即 $E = E_k + E_p$, 则外力对系统做的功和内部非保守力做功之和等于系统机械能的增量, 即

$$A_{\text{ext}} + A_{\text{int, n-cons}} = E_B - E_A$$

对于保守系统, 即内部没有非保守力做功的系统, 就有

$$A_{\text{ext}} = E_B - E_A$$

对封闭的保守系统, 还有 $A_{\text{ext}} = 0$, 因而 $E_A = E_B$, 即系统的机械能保持不变。

5. 由势能函数求保守力: 在保守力场中, 保守力沿某一 l 方向的分量等于势能函数对 l 的导数的负值(或者说是沿 l 方向势能梯度的负值), 即 $F_l = -\frac{dE_p}{dl}$ 。这一关系出自势能的定义: 保守力的功等于势能的减小。

6. 碰撞: 一般指短时间内剧烈的相互作用。

完全非弹性碰撞: 碰撞后合在一起, 碰撞中损失的动能等于系统的内动能;

弹性碰撞: 碰撞时无动能损失;

对心碰撞: 碰撞前后两物体沿同一直线运动。

7. 理想流体的稳定流动: 理想流体为不可压缩和无粘滞性的流体。

连续性方程: 同一管道内 $S_1 v_1 = S_2 v_2$

伯努利方程:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2$$

4.2 解题思路

1. 对于功,要明确它是一个与质点运动过程有关的量,即“过程量”。计算功时要弄清楚质点移动的路径,然后沿路径进行力的线积分。只有对于保守力,才可以不管路径的形状,而用势能差来求相应的保守力从初始位置(或形状)到终了位置(或形状)的过程中所做的功。

注意,功是两矢量的标量积。功是标量,但有正负。

2. 动能定理说明功和能的关系。这一关系显示了功的正负的意义。力对质点做正功,质点的动能增加,而负功则意味着质点的动能将减小。

利用关于质点系的动能定理计算质点系的动能变化时,不可忘记系统内力做功的影响。

3. 利用机械能守恒定律解题和利用动量守恒定律解题的思路相似。在分析系统的运动状态时,要着重分清初态和终态系统内各质点的动能和各质点间的势能,从而计算出初态和终态时系统的总机械能。如果系统内无非保守力作用,由于系统内各质点间的保守力的功已由势能概念取代而包括在系统的机械能之内了,所以机械能的改变就只由系统所受的外力的功决定。

还应指明的是考虑一个物体的重力势能时,一定要把地球包括在内,即系统涉及物体和地球两者。在物体下落过程中,由于动量守恒,地球的速度和物体速度的比为 m/M_E 。在计算机械能时,由于地球的动能和物体的动能的比也等于 m/M_E ,所以在对物体-地球系统应用机械能守恒定律时,常常忽略地球的动能而只考虑物体的动能。

关于势能的计算,一定要明确势能零点的选择。

4. 对于质点和质点系的问题,到此已有三条守恒定律——分别对于动量、角动量和机械能可用。因此在解力学问题时,除直接利用牛顿定律及其变形(如动量定理、动能定理和角动量定理)外,要自觉地想到用守恒定律进行分析。当然,要注意这些守恒定律的条件是各不相同的。

4.3 思考题选答

4.1 一辆卡车在水平直轨道上匀速开行,你在车厢中将一木箱向前推动一段距离。在地面上测量木箱移动的距离与在车上测得的是否一样长?你用力推动木箱做的功在车上和在地面测量是否一样?一个力做的功是否与参考系有关?一个物体的动能呢?动能定理呢?

答 如图 4.1 所示,木箱移动的距离在车上测得为 s' ,在地面上测得为 s ,二者明显不

同,但推力与参考系无关,所以一个力做的功与参考系有关。

由于动能直接决定于速率,而同一物体的速率随参考系不同而不同,所以同一物体的动能与参考系有关。

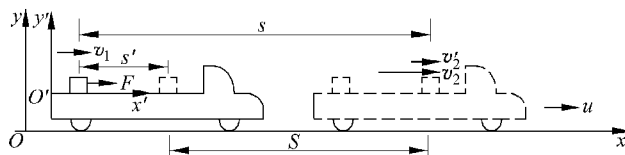


图 4.1 思考题 4.1 答用图

尽管功和动能都和参考系有关,但表示二者关系的动能定理的表示式的形式是与参考系无关的。仍以图 4.1 所示在卡车上推木箱为例。为简单计设卡车底板是光滑的。力 F 推木箱的时间为 t 。在卡车参考系 $x'O'y'$ 中设木箱的初速为零,而末速为 v_2' ,则在地面参考系 xOy 中,木箱的初速为 $v_1 = u$,末速 $v_2 = u + v_2'$ 。在地面参考系中,动能定理表示为

$$Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

代入上述速度关系可得

$$Fs = \frac{1}{2}mv_2'^2 + mv_2'u$$

在卡车参考系中,力做的功为

$$Fs' = Fs - FS = \frac{1}{2}mv_2'^2 + mv_2'u - Fut$$

根据动量定理,在卡车参考系中, $Ft = mv_2'$ 。代入上式可得

$$Fs' = \frac{1}{2}mv_2'^2$$

这正是在卡车参考系中动能定理的形式。可见动能定理的形式与参考系无关。

由于动能定理是牛顿第二定律的直接结果,所以动能定理的形式与参考系无关实际上根源于牛顿第二定律的形式与参考系无关。

4.8 如图 4.2 所示的两个由轻质弹簧和小球组成的系统,都放在水平光滑平面上。今拉长弹簧然后松手。在小球来回运动的过程中,对所选的参考系,两系统的动量是否都

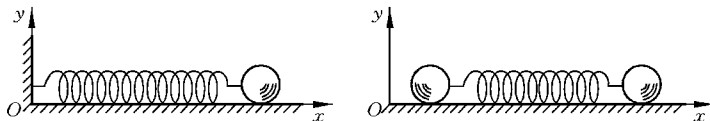


图 4.2 思考题 4.8 用图

改变? 两系统的动能是否都改变? 两系统的机械能是否都改变?

答 图 4.2 左图的弹簧振子总受到外力(墙对弹簧的拉力或压力)的作用,所以动量不守恒。但此外力不做功,所以它的机械能守恒。

右图中的弹簧振子在运动过程中不受外力,因而也没有外力对它做功,所以它的动量和机械能都守恒。

4.10 飞机机翼断面形状如图 4.3 所示。当飞机起飞或飞行时,机翼上、下侧的气流流线如图。试据此图说明飞机飞行时受到“升力”的原因,这和气球上升的原因有何不同?

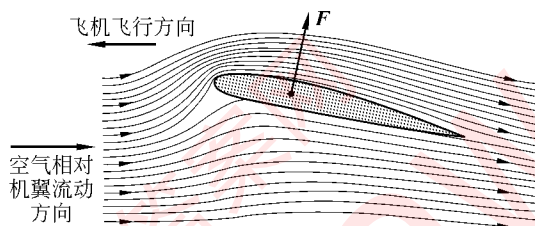


图 4.3 飞机升力的产生

答 图 4.3 中显示机翼下方的流线较上方的流线稀疏,所以机翼下方空气相对机翼的流速较机翼上方空气的流速小。根据伯努利定理,机翼下方的空气的压强大于其上方空气的压强。正是这一“动”压强差产生了对机翼的向上的升力。气球在空中上升是由于它受空气的浮力,而浮力是由于气球上方和下方的“静”压强差产生的。静止的气球仍会上升,而停在机场的飞机是不可能升空的。

4.4 习题解答

4.1 电梯由一个起重间与一个配重组成。它们分别系在一根绕过定滑轮的钢缆的两端(图 4.4)。起重间(包括负载)的质量 $M=1200\text{ kg}$,配重的质量 $m=1000\text{ kg}$ 。此电梯由和定滑轮同轴的电动机所驱动。假定起重间由低层从静止开始加速上升,加速度 $a=1.5\text{ m/s}^2$ 。

- (1) 这时滑轮两侧钢缆中的拉力各是多少?
- (2) 加速时间 $t=1.0\text{ s}$,在此时间内电动机所做功是多少(忽略滑轮与钢缆的质量)?
- (3) 在加速 $t=1.0\text{ s}$ 以后,起重间匀速上升。求它再上升 $\Delta h=10\text{ m}$ 的过程中,电动机又做了多少功?

解 (1) 如图 4.4 所示,沿竖直方向,分别对 M 和 m 用牛顿第二定律可得

$$T_1 - Mg = Ma$$

$$mg - T_2 = ma$$

由此可得

$$T_1 = M(g+a) = 1200 \times (9.8+1.5) = 1.36 \times 10^4 \text{ N}$$

$$T_2 = m(g-a) = 1000 \times (9.8-1.5) = 0.83 \times 10^4 \text{ N}$$

(2) 在加速 $t=1.0 \text{ s}$ 的过程中, 起重间上升的距离为 $h = \frac{1}{2}at^2$,

这也就是电动机拖动钢缆的距离, 电动机做的功为

$$A = (T_1 - T_2)h = (1.36 - 0.83) \times \frac{1}{2} \times 1.5 \times 1^2 = 3.95 \times 10^3 \text{ J}$$

(3) 起重间匀速上升时, 滑轮两侧钢缆中的张力分别为 $T_1' = Mg$, $T_2' = mg$ 。拖动钢缆的距离为 Δh 时电动机又做的功是

$$\begin{aligned} A' &= (T_1' - T_2')\Delta h = (M - m)g\Delta h \\ &= (1200 - 1000) \times 9.8 \times 10 = 1.96 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

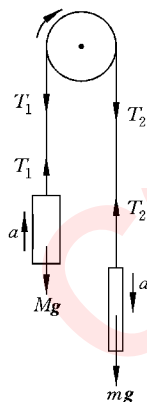


图 4.4 习题 4.1 解用图

4.2 一匹马拉着雪橇沿着冰雪覆盖的圆弧形路面极缓慢地匀速移动。设圆弧路面的半径为 R , 马对雪橇的拉力总是平行于路面, 雪橇的质量为 m , 与路面的滑动摩擦系数为 μ_k 。当把雪橇由底端拉上 45° 圆弧时, 马对雪橇做功多少? 重力和摩擦力各做功多少?

解 如图 4.5 所示, 以 F 表示马拉雪橇的力, 则对雪橇, 由牛顿第二定律

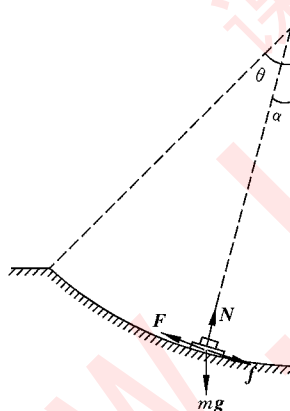


图 4.5 习题 4.2 解用图

切向

$$F - mg \sin \alpha - f = 0$$

法向

$$N - mg \cos \alpha = 0$$

再由 $f = \mu_k N$ 可解得

$$F = \mu_k mg \cos \alpha + mg \sin \alpha$$

由此得马拉雪橇做功

$$\begin{aligned} A_F &= \int_0^\theta (\mu_k mg \cos \alpha + mg \sin \alpha) R d\alpha \\ &= R [\mu_k mg \sin \theta - mg (\cos \theta - 1)] \\ &= Rmg (\mu_k \sin 45^\circ - \cos 45^\circ + 1) \\ &= mgR \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \mu_k \right] \end{aligned}$$

重力对雪橇做的功为

$$A_g = \int_0^\theta -mg \sin \alpha R d\alpha = mgR (\cos \theta - 1) = mgR \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$$

摩擦力对雪橇做的功为

$$A_f = \int_0^\theta -mg\mu_k \cos \alpha R d\alpha = -mg\mu_k \sin \theta R = -\frac{\sqrt{2}}{2} mg\mu_k R$$

4.3 2001年9月11日美国纽约世贸中心双子塔遭恐怖分子劫持的飞机撞毁。据美国官方发表的数据,撞击南楼的飞机是波音767客机,质量为132 t,速度为942 km/h。求该客机的动能,这一能量相当于多少 TNT 炸药的爆炸能量?

解 该客机动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 132 \times 10^3 \times \left(\frac{942 \times 10^3}{3600}\right)^2 = 4.52 \times 10^9 \text{ J}$$

1 kg TNT 炸药的爆炸能量是 $4.6 \times 10^6 \text{ J}$, 上述能量相当于

$$\frac{4.52 \times 10^9}{4.6 \times 10^6} = 0.982 \times 10^3 \text{ kg} \approx 1 \text{ t}$$

TNT 炸药的爆炸能量。

4.4 矿砂由料槽均匀落在水平运动的传送带上,落砂流量 $q=50 \text{ kg/s}$ 。传送带匀速移动,速率为 $v=1.5 \text{ m/s}$ 。求电动机拖动皮带的功率。这一功率是否等于单位时间内落砂获得的动能? 为什么?

解 如图 4.6 所示,设在 dt 时间内有质量为 dm 的砂落到传送带上,在传送带的摩擦力 F 作用下速度由 0 增大到 v 而随传送带一起运动。对这一点砂,由动量定理

$$Fdt = dm(v-0)$$

由此得

$$F = \frac{dm}{dt}v = qv$$

由牛顿第三定律,传送带受砂的向后的作用力也等于 F , 方向向后。由于带做匀速运动,电动机拖动传送带的力也等于 F 。于是电动机拖动皮带的功率为

$$P = Fv = qv^2 = 50 \times 1.5^2 = 113 \text{ W}$$

单位时间内落砂获得的动能为

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} dm v^2 / dt = \frac{1}{2} qv^2 = \frac{1}{2} P$$

此动能小于电动机的功率是因为在 dm 落到皮带上速度由 0 增大到 v 的过程中,相对于皮带向后运动,所经过的距离为 $s' = vt/2$ 。单位时间内,摩擦力 F 对此相对位移做的功为

$$A' = -\frac{Fs'}{dt} = -\frac{qv^2}{2}$$

这些功转变成了皮带和落砂的内能。正是这一部分能量和砂获得的动能等于同一时间内电动机所做的功。

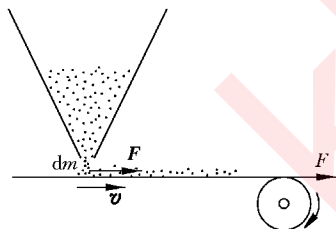


图 4.6 习题 4.4 解用图

4.5 如图 4.7 所示, A 和 B 两物体的质量 $m_A = m_B$, 物体 B 与桌面间的滑动摩擦系数 $\mu_k = 0.20$, 滑轮摩擦不计。试求物体 A 自静止落下 $h = 1.0 \text{ m}$ 时的速度。

解 如图 4.7 所示, 对两物体用动能定理可得

$$-fh + m_B gh = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2$$

又由于 $f = \mu_k m_A gh$, 代入上式可得

$$v = \sqrt{(1 - \mu_k)gh} = \sqrt{(1 - 0.2) \times 9.8 \times 1} = 2.8 \text{ m/s}$$

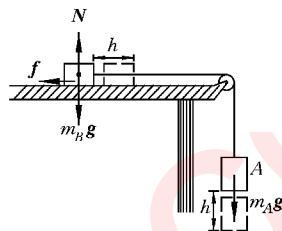


图 4.7 习题 4.5 解用图

4.6 如图 4.8 所示, 一木块 M 静止在光滑水平面上。一子弹 m 沿水平方向以速度 v 射入木块内一段距离 s' 而停在木块内。

(1) 在这一过程中子弹和木块的功能变化各是多少? 子弹和木块间的摩擦力对子弹和木块各做了多少功?

(2) 证明子弹和木块的总机械能的增量等于一对摩擦力之一沿相对位移 s' 做的功。

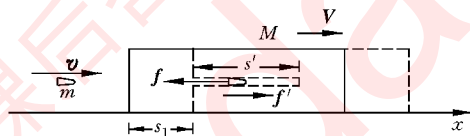


图 4.8 习题 4.6 解用图

解 如图 4.8 所示。在地面参考系中, 对子弹和木块系统, 水平方向不受外力, 动量守恒。以 V 表示二者最后的共同速度, 则有

$$mv = (m + M)V$$

由此得

$$V = \frac{m}{m + M}v$$

(1) 以 s_1 表示子弹停在木块内前木块移动的距离, 则子弹对地面的位移为 $s = s_1 + s'$ 。对子弹用动能定理, 摩擦力 f 对子弹做的功等于子弹动能的增量, 为

$$-f(s_1 + s') = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 \left[\left(\frac{m}{m + M} \right)^2 - 1 \right]$$

对木块, 摩擦力 f' 对它做的功等于木块动能的增量为

$$f's_1 = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M \left(\frac{mv}{m + M} \right)^2$$

(2) 考虑到 $f' = f$, 将两等式相加, 可得

$$-fs' = \left(\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}MV^2 \right) - \frac{1}{2}mv^2$$

此式即说明子弹和木块的总机械能增量等于一对摩擦力之一沿相对位移 s' 做的功。

- 4.7** 如图 4.9 所示,物体 A(质量 $m=0.5\text{ kg}$)静止于光滑斜面上。它与固定在斜面底 B 端的弹簧上端 C 相距 $s=3\text{ m}$ 。弹簧的劲度系数 $k=400\text{ N/m}$ 。斜面倾角 $\theta=45^\circ$ 。求当物体 A 由静止下滑时,能使弹簧长度产生的最大压缩量是多大?

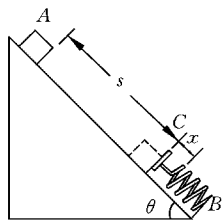


图 4.9 习题 4.7 解用图

解 由机械能守恒可知物体从开始下落到压缩弹簧达最大值 x 时,

$$mg(s+x)\sin\theta = \frac{1}{2}kx^2$$

代入数值

$$0.5 \times 9.8(3+x)\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 400x^2$$

解此方程,可得

$$x = 0.23\text{ m}$$

- 4.8** 如图 4.10 表示质量为 72 kg 的人跳蹦极。弹性蹦极带长 20 m ,劲度系数为 60 N/m (忽略空气阻力)。

(1) 此人自跳台跳出后,落下多高时速度最大? 此最大速度是多少?

(2) 已知跳台高于下面水面 60 m 。此人跳下后会不会触到水面?

解 (1) 此人下落时,当蹦极带对他的向上拉力和他受的重力相等时速度最大。以 l_0 表示蹦极带的原长,以 l 表示伸长的长度,则速度最大时, $mg = kl$ 。由此得 $l = mg/k$ 。此人速度最大时已下落的距离为

$$h = l_0 + l = l_0 + \frac{mg}{k} = 20 + \frac{72 \times 9.8}{60} = 31.8\text{ m}$$

由机械能守恒,以 v_m 表示最大速度,则应有

$$mgh = \frac{1}{2}kl^2 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

由此得

$$\begin{aligned} v_m &= \sqrt{\frac{mg^2}{k} + 2gl_0} \\ &= \sqrt{\frac{72 \times 9.8^2}{60} + 2 \times 9.8 \times 20} = 22.5\text{ m/s} \end{aligned}$$

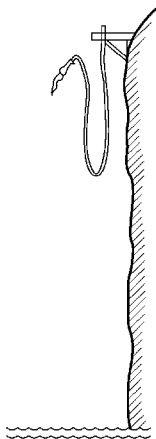


图 4.10 习题 4.8 解用图

(2) 人降到最下面时,动能为零。由机械能守恒定律,以 l' 表示蹦极带的最大伸长,则有

$$mg(l_0 + l') = \frac{1}{2}kl'^2$$

代入 m, l_0, k 的数据,可得一数字方程

$$l'^2 - 27.4l' - 549 = 0$$

解此方程可得

$$l' = 38.1 \text{ m}$$

此时人在跳台下的距离为

$$l_0 + l' = 20 + 38.1 = 58.1 \text{ m} < 60 \text{ m}$$

所以人不会触及水面。

4.9 如图 4.11 所示,一轻质弹簧劲度系数为 k ,两端各固定一质量均为 M 的物块 A 和 B ,放在水平光滑桌面上静止。今有一质量为 m 的子弹沿弹簧的轴线方向以速度 v_0 射入一物块而不复出,求此后弹簧的最大压缩长度。

解 由于子弹射入物块 A 所需时间甚短,当二者获得共同速度 V_0 时,弹簧长度几乎未变,而 B 尚未启动。由于 A 受水平弹力为零,所以子弹和 A 在子弹射入前后水平方向动量守恒,即

$$mv_0 = MV_0 + mV_0$$

由此得

$$V_0 = \frac{mv_0}{m+M}$$

此后弹簧将被压缩而 B 开始运动,当 B 的速度与 A 的速度相同时,弹簧将达到最大压缩长度 x_m 。以 V 表示此时 A 与 B 的共同速度,则由动量守恒又可得

$$mv_0 = (M+m+M)V$$

由此得

$$V = \frac{mv_0}{2M+m}$$

在子弹进入 A 达到共同速度 V_0 到 A 和 B 达到共同速度 V 的过程中,整个系统的机械能守恒给出

$$\frac{1}{2}(m+M)V_0^2 = \frac{1}{2}(2M+m)V^2 + \frac{1}{2}kx_m^2$$

由此可解得

$$x_m = mv_0 \left[\frac{M}{k(m+M)(m+2M)} \right]^{1/2}$$

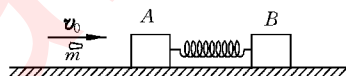


图 4.11 习题 4.9 解用图

4.10 一质量为 m 的物体,从质量为 M 的圆弧形槽顶端由静止滑下,设圆弧形槽的半径为 R ,张角为 $\pi/2$ (见图 4.12)。如所有摩擦都可忽略,求

- (1) 物体刚离开槽底端时,物体和槽的速度各是多少?
- (2) 在物体从 A 滑到 B 的过程中,物体对槽所做的功 A 。
- (3) 物体到达 B 时对槽的压力。

解 (1) 如图 4.12 所示,对物体、槽和地球系统,外力不做功,物体和槽的相互压力 N 和 N' 具有相同位移,所以做功之和为零。因此系统的机械能守恒。以 v 和 V 分别表示物体刚离开槽时物体和槽的速度,则有

$$mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

对物体和槽系统,由于水平方向不受外力,所以水平方向动量守恒。又由于 v 和 V 皆沿水平方向,所以有

$$mv - MV = 0$$

联立解上二式可得

$$v = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}}, \quad V = m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

(2) 对槽来说,只有物体对它的压力 N 推它做功,重力和桌面对它的支持力不做功。由动能定理可知在物体下落过程中,物体对槽做的功就等于槽的动能的增量,即

$$A_N = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m^2 gR}{M+m}$$

(3) 物体到达最低点 B 的瞬间,槽在水平方向不受外力,加速度为零,此时可以把槽当作惯性系。在此惯性系中,物体的水平速度为

$$v' = v + V = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} + m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}}$$

由牛顿第二定律

$$N' - mg = m\frac{v'^2}{R}$$

由此得

$$N' = mg + m\frac{v'^2}{R} = \left(3 + \frac{2m}{M}\right)mg$$

再由牛顿第三定律可知此时物体对槽的压力为

$$N = N' = \left(3 + \frac{2m}{M}\right)mg$$

方向向下。

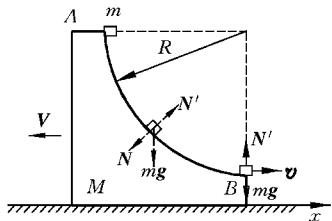


图 4.12 习题 4.10 解用图

4.11 证明:一个运动的小球与另一个静止的质量相同的小球作弹性的非对心碰撞后,它们将总沿互成直角的方向离开(参看原书图 4.23 和图 4.24)。

证 以 v_{10} 表示一个小球的初速度,以 v_1 和 v_2 分别表示碰撞后此小球和另一小球的速度。在 $m_1 = m_2$ 的情况下,对两球用动量守恒可得

$$v_{10} = v_1 + v_2$$

此等式两侧都平方,得

$$v_{10}^2 = v_1^2 + 2v_1 \cdot v_2 + v_2^2$$

又由弹性碰撞前后动能守恒可得

$$v_{10}^2 = v_1^2 + v_2^2$$

此式和上式对比,可知

$$v_1 \cdot v_2 = v_1 v_2 \cos \theta = 0$$

v_1 和 v_2 的标积为零,就说明二者方向的夹角 θ 总是 90° 。

4.12 一质量为 m 的人造地球卫星沿一圆形轨道运动,离开地面的高度等于地球半径的 2 倍(即 $2R$)。试以 m, R , 引力恒量 G , 地球质量 M 表示出:

- (1) 卫星的动能;
- (2) 卫星在地球引力场中的引力势能;
- (3) 卫星的总机械能。

解 (1) 对卫星用牛顿第二定律

$$\frac{GmM}{(3R)^2} = \frac{mv^2}{3R}$$

式中 v 为卫星的速率。由此式可得卫星的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{6R}$$

(2) 引力势能为

$$E_p = -\frac{GmM}{3R}$$

(3) 卫星的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{GmM}{6R} - \frac{GmM}{3R} = -\frac{GmM}{6R}$$

4.13 证明:行星在轨道上运动的总能量为

$$E = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}$$

式中 M, m 分别为太阳和行星的质量, r_1, r_2 分别为太阳到行星轨道的近日点和远日点的距离。

证 以 v_1 和 v_2 分别表示行星通过近日点和远日点时的速率。由于行星所受太阳引力指向太阳,故行星对太阳的角动量守恒,即

$$mr_1 v_1 = mr_2 v_2$$

又行星和太阳只有引力相互作用,所以行星的机械能守恒,即

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

联立解上两式,可得

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{GMmr_1}{(r_1 + r_2)r_2}$$

行星运行的总能量为

$$E = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} = -\frac{GMm}{r_1 + r_2}$$

4.14 两颗中子星质量都是 10^{30} kg,半径都是 20 km,相距 10^{10} m。如果它们最初都是静止的,求:

(1) 当它们的距离减小到一半时,它们的速度各是多大?

(2) 当它们就要碰上时,它们的速度又将各是多大?

解 (1) 由机械能守恒可得,对两中子星的距离 r 减小到一半的过程,有

$$-\frac{Gmm}{r} = -\frac{Gmm}{r/2} + 2 \times \frac{1}{2}mv_1^2$$

由此得

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{r}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 10^{30}}{10^{10}}} = 8.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(2) 同理,对两中子星的距离减小到就要碰上的过程,有

$$-\frac{Gmm}{r} = -\frac{Gmm}{2R} + 2 \times \frac{1}{2}mv_2^2$$

由此得

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{Gm \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{r} \right)} \\ &= \sqrt{6.67 \times 10^{-11} \times 10^{30} \left(\frac{1}{2 \times 2 \times 10^4} - \frac{1}{10^{10}} \right)} \\ &= 4.1 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

4.15 一个星体的逃逸速度为光速时,亦即由于引力的作用光子也不能从该星体表面逃离时,该星体就成了一个“黑洞”。理论证明,对于这种情况,逃逸速度公式($v_e = \sqrt{2GM/R}$)仍然正确。试计算太阳要是成为黑洞,它的半径应是多大(目前半径为 $R =$

$7 \times 10^8 \text{ m}$)? 质量密度是多大? 比原子核的平均密度($2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$)大到多少倍?

解 以光速 c 代入逃逸速度公式, 可得太阳成为黑洞时的半径为

$$R_b = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30}}{(3.0 \times 10^8)^2} = 2.95 \times 10^3 \text{ m}$$

这时太阳的密度为

$$\rho_b = \frac{3M}{4\pi R_b^3} = \frac{3 \times 1.99 \times 10^{30}}{4\pi \times (2.95 \times 10^3)^3} = 1.85 \times 10^{19} \text{ kg/m}^3$$

比原子核的平均密度大到 100 倍!

4.16 ^{238}U 核放射性衰变时放出 α 粒子释放的总能量是 4.27 MeV, 求一个静止的 ^{238}U 核放出的 α 粒子的动能。

解 ^{238}U 核放射 α 粒子后变为 ^{234}Th 核。由动量守恒可得

$$m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} = m_{\alpha} v_{\alpha}$$

由此可得

$$\frac{1}{2} m_{\text{Th}} v_{\text{Th}}^2 = \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

即

$$E_{\text{Th}} m_{\text{Th}} = E_{\alpha} m_{\alpha}$$

由能量守恒可得

$$E_{\text{Th}} + E_{\alpha} = E$$

利用上式可得

$$E_{\alpha} = \frac{E}{1 + m_{\alpha}/m_{\text{Th}}} = \frac{4.27}{1 + 4/234} = 4.20 \text{ MeV}$$

*** 4.17** 已知某双原子分子的原子间相互作用的势能函数为

$$E_p(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}$$

其中 A, B 为常量, x 为两原子间的距离。试求原子间作用力的函数式及原子间相互作用力为零时的距离。

解 力函数为

$$F = -\frac{dE_p(x)}{dx} = \frac{12A}{x^{13}} - \frac{6B}{x^7}$$

由此可得 $F=0$ 时

$$x = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}$$

*** 4.18** 在实验室内观察到相距很远的一个质子(质量为 m_p)和一个氦核(质量 $M=$

$4m_p$)相向运动,速率都是 v_0 。求二者能达到的最近距离。(忽略质子和氦核间的引力势能,但二者间的电势能需计入。电势能公式可根据引力势能公式猜出。)

解 仿引力势能公式,两电荷 e (质子)和 $2e$ (氦核)相距 r 时的势能为

$$E_p = \frac{k2e \cdot e}{r} = \frac{2ke^2}{r}$$

式中 k 为一常量。

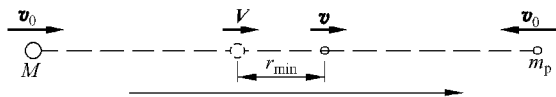


图 4.13 习题 4.18 解用图

如图 4.13 所示,在质子和氦核相向运动的过程中,速度方向设如图 4.13。由动量守恒可得

$$-m_p v_0 + Mv_0 = m_p v + MV$$

由此得

$$V = \frac{-m(v_0 + v) + Mv_0}{M}$$

由能量守恒可得

$$\frac{2ke^2}{r} + \frac{1}{2}m_p v^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m_p v_0^2 + \frac{1}{2}Mv_0^2$$

此式中当 r 最小时,第一项势能最大,而动能 $E_k = \left(\frac{1}{2}m_p v^2 + \frac{1}{2}MV^2\right)$ 应最小。将上面的 V 值代入动能表示式可得

$$E_k = \frac{1}{2}m_p v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{M} [-m_p(v_0 + v) + Mv_0]^2$$

E_k 最小值出现在 $\frac{dE_k}{dv} = 0$ 时,上式对 v 求导可得当 $r = r_{\min}$ 时

$$v = \frac{M - m_p}{M + m_p} v_0$$

将此结果代入上面求 V 的公式中可得

$$V = \frac{M - m_p}{M + m_p} v_0$$

这说明当质子和氦核速度相同时,二者相距最近。此时

$$v = V = \frac{4m_p - m_p}{4m_p + m_p} v_0 = \frac{3}{5} v_0$$

代入上面的能量守恒表示式即可得

$$r_{\min} = \frac{5}{4} \frac{ke^2}{m_p v_0^2}$$

4.19 有的黄河区段的河底高于堤外田地。为了用河水灌溉堤外田地,就用虹吸管越过堤面把河水引入田中。虹吸管如图 4.14 所示,是倒 U 形,其两端分别处于河内和堤外的水渠口上。如果河水水面和堤外管口的高度差是 5.0 m,而虹吸管的半径是 0.20 m,则每小时引入田地的河水的体积是多少 m^3 ?

解 对河水水面和堤外管口的水来说, $p_1 = 1 \text{ atm}$, $v_1 = 0$, $p_2 = 1 \text{ atm}$ 。以堤外管口高度为 0, 水的流速为 v_2 , 则伯努利定理给出

$$\rho gh = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

由此得

$$v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 5.0} = 9.9 \text{ m/s}$$

每小时引进田中的河水的体积为

$$V = v_2 S = v_2 \pi r^2 = 9.9 \times \pi \times 0.20^2 = 1.24 \text{ m}^3/\text{s} = 4.46 \times 10^3 \text{ m}^3/\text{h}$$

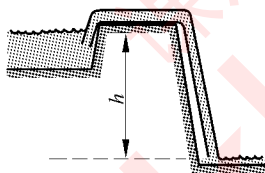


图 4.14 习题 4.19 解用图

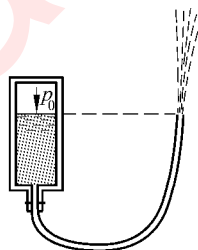


图 4.15 习题 4.20 解用图

4.20 喷药车的加压罐内杀虫剂水的表面的压强是 $p_0 = 21 \text{ atm}$, 管道另一端喷嘴的直径是 0.8 cm (图 4.15)。求喷药时, 每分钟喷出杀虫剂水的体积。设喷嘴与罐内液面处于同一高度。

解 对罐内液面和喷嘴处的水, 根据伯努利定理, 有

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

式中 $v_0 = 0$, $p_0 = 21 \text{ atm}$, $p_1 = 1 \text{ atm}$ 。代入上式可得杀虫剂水喷出的速率为

$$v_1 = \sqrt{2(p_0 - p_1)/\rho} = \sqrt{2 \times (21 - 1) \times 1.01 \times 10^5 / 10^3} = 63.6 \text{ m/s}$$

每分钟喷出的体积为

$$V = v_1 \cdot \pi r^2 = 63.6 \times \pi \times 0.4^2 \times 10^{-4} = 3.19 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s} = 0.19 \text{ m}^3/\text{min}$$

刚体的定轴转动

5.1 内容提要

1. 刚体定轴转动的角位移、角速度随时间变化的关系,在角加速度恒定的情况下是

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

二式消去 t 可得

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

2. 刚体的定轴转动定律

$$M = J\alpha = \frac{dL}{dt}$$

式中 M 为外力对转轴的力矩之和, J 为刚体对转轴的转动惯量, $L = J\omega$ 为刚体对转轴的角动量。

3. 刚体的转动惯量: 表示刚体转动惯性的量,不但决定于刚体的质量,还决定于它的质量对于轴的分布情况。它的定义是

$$J = \sum m_i r_i^2, \quad J = \int r^2 dm$$

式中, r_i 是质元 m_i 到轴的距离; r 是质元 dm 到轴的距离。典型的几种形状的刚体的转动惯量可查原书表 5.1。

4. 对定轴的角动量守恒: 系统(包括刚体)所受的对某一固定轴的合外力矩为零时,系统对此轴的总角动量保持不变。

5. 刚体转动的功和能

力矩的功:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

此处 M 是力对轴的力矩, 它等于力的垂直于轴的分量乘以此分量到轴的距离(力臂)。

转动动能:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

刚体的重力势能:

$$E_p = mgh_c$$

其中 h_c 是刚体质心的高度。

对包含转动的刚体的封闭的保守系统, 在运动过程中, 其总机械能, 包括转动动能, 保持不变。

5.2 解题思路

1. 解题思路基本上还是“三字经”, 不过此处“认物体”是认定一个刚体, 这时要特别注意轴在何处, 并由此确定其转动惯量。“查受力”时不但要找出刚体受的力而且要能计算出力对转轴的力矩, 然后用 $M = J\alpha$ 求解。

2. 由于转动惯量的可加性, 所以求有缺陷的规则形状的刚体的转动惯量时可采用“补偿法”求解(像求质心那样)。

3. 在用角动量守恒求解问题时, 要注意参考系的确定, 应以定轴所在的参考系为准。

4. 解刚体问题的思路和解质点问题的思路相似, 可参照原书 156~157 页的“对比表”加以理解。

5.3 思考题选答

5.3 走钢丝的杂技演员, 表演时为什么要拿一根长直棍?

答 演员拿一根长直棍就明显地增大了他的转动惯量。这样如果演员稍有歪斜, 棍和他转动的角加速度就很小, 在短时间内不会转较大角度。这就给演员以足够的调整体态的时间以保持他在钢丝上直立稳定。

5.6 花样滑冰运动员想高速旋转时, 她先把一条腿和两臂伸开, 并用脚蹬冰使自己转动起来, 然后再收拢腿和臂, 这时她的转速就明显地加快了。这是利用了什么原理?

答 运动员的一条腿和两臂伸开时, 她对于其竖直中心轴线的转动惯量 J_1 显然大于她将腿和两臂收回时的转动惯量 J_2 。忽略她收回手臂过程中脚尖触冰处所受的摩擦力矩, 她并没有受到其他外力矩, 因而她对竖直中心轴线的角动量守恒。以 ω_1 和 ω_2 表示两臂收回前后的角速度, 应该有

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

由于 $J_1 > J_2$, 自然有 $\omega_2 > \omega_1$, 即两臂收回后, 她的转速要明显地加快。

5.4 习题解答

5.1 掷铁饼运动员手持铁饼转动 1.25 圈后松手, 此刻铁饼的速度值达到 $v = 25 \text{ m/s}$ 。设转动时铁饼沿半径为 $R = 1.0 \text{ m}$ 的圆周运动并且均匀加速。求:

- (1) 铁饼离手时的角速度;
- (2) 铁饼的角加速度;
- (3) 铁饼在手中加速的时间(把铁饼视为质点)。

解 (1) 铁饼离手时的角速度为

$$\omega = v/R = 25/1.0 = 25 \text{ rad/s}$$

(2) 铁饼的角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega^2}{2\theta} = \frac{25^2}{2 \times 2\pi \times 1.25} = 39.8 \text{ rad/s}^2$$

(3) 铁饼在手中加速的时间为

$$t = \frac{2\theta}{\omega} = \frac{2 \times 2\pi \times 1.25}{25} = 0.628 \text{ s}$$

5.2 一汽车发动机的主轴的转速在 7.0 s 内由 200 r/min 均匀地增加到 3000 r/min。

- (1) 求在这段时间内主轴的初角速度和末角速度以及角加速度;
- (2) 求这段时间内主轴转过的角度;

解 (1) 初角速度为

$$\omega_0 = 2\pi \times 200/60 = 20.9 \text{ rad/s}$$

末角速度为

$$\omega = 2\pi \times 3000/60 = 314 \text{ rad/s}$$

角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{314 - 20.9}{7.0} = 41.9 \text{ rad/s}^2$$

(2) 转过的角度为

$$\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{20.9 + 314}{2} \times 7 = 1.17 \times 10^3 \text{ rad} = 186(\text{圈})$$

5.3 地球自转是逐渐变慢的。在 1987 年完成 365 次自转比 1900 年长 1.14 s。求在 1900 年到 1987 年这段时间内地球自转的平均角加速度。

解 平均角加速度为

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\frac{365 \times 2\pi}{T_0 + \Delta t} - \frac{365 \times 2\pi}{T_0}}{87 T_0} \\ &\approx -\frac{365 \times 2\pi \times \Delta t}{87 \times T_0^3} = -\frac{365 \times 2\pi \times 1.14}{87 \times (3.15 \times 10^7)^3} \\ &= -9.6 \times 10^{-22} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

5.4 求位于北纬 40° 的颐和园排云殿(以图 5.1 中 P 点表示)相对于地心参考系的线速度与加速度的数值与方向。

解 如图 5.1 所示, 所求线速度的大小为

$$\begin{aligned}v &= \omega R \cos \lambda = \frac{2\pi}{86\,400} \times 6370 \times 10^3 \times \cos \lambda \\ &= 463 \cos \lambda \text{ m/s}\end{aligned}$$

方向垂直于地轴向东。

加速度的大小为

$$\begin{aligned}a &= \omega^2 R \cos \lambda = \left(\frac{2\pi}{86\,400}\right)^2 \times 6370 \times 10^3 \times \cos \lambda \\ &= 3.37 \times 10^{-2} \cos \lambda \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

方向垂直指向地轴。

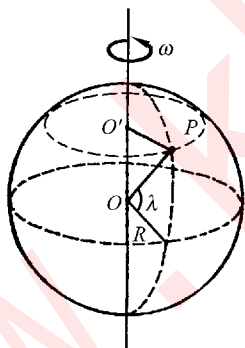


图 5.1 习题 5.4 解用图

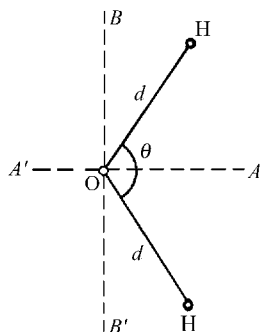


图 5.2 习题 5.5 解用图

5.5 水分子的形状如图 5.2 所示。从光谱分析得知水分子对 AA' 轴的转动惯量是 $J_{AA'} = 1.93 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 对 BB' 轴的转动惯量是 $J_{BB'} = 1.14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。试由此数据和各原子的质量求出氢和氧原子间的距离 d 和夹角 θ 。假设各原子都可当质点处理。

解 由图 5.2 可得

$$J_{AA'} = 2m_H d^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$J_{BB'} = 2m_H d^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

此二式相加,可得

$$J_{AA'} + J_{BB'} = 2m_H d^2$$

$$d = \sqrt{\frac{J_{AA'} + J_{BB'}}{2m_H}} = \sqrt{\frac{(1.93 + 1.14) \times 10^{-47}}{2 \times 1.67 \times 10^{-27}}} \\ = 9.59 \times 10^{-11} \text{ m}$$

上二式相比,可得

$$\frac{J_{AA'}}{J_{BB'}} = \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\theta = 2 \arctan \sqrt{\frac{J_{AA'}}{J_{BB'}}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{1.93}{1.14}} = 104^\circ 54'$$

5.6 C_{60} (Fullerene, 富勒烯) 分子由 60 个碳原子组成。这些碳原子各位于一个球形 32 面体的 60 个顶角上(见图 5.3)。此球体的直径为 71 nm。

(1) 按均匀球面计算,此球形分子对其一个直径的转动惯量是多少?

(2) 在室温下一个 C_{60} 分子的自转动能为 $4.14 \times 10^{-21} \text{ J}$ 。

求它的自转频率。

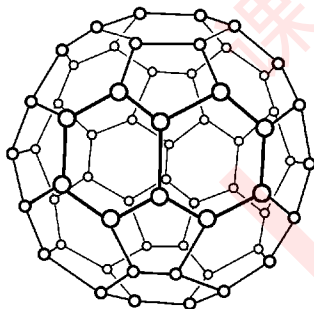


图 5.3 习题 5.6 解用图

解 (1) $J = \frac{2}{3} m R^2$

$$= \frac{2}{3} \times 12 \times 1.67 \times 10^{-27} \times 60 \times \left(\frac{71 \times 10^{-9}}{2} \right)^2 \\ = 1.01 \times 10^{-39} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

(2) 由 $E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J (2\pi\nu)^2$ 可得频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2E}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 4.14 \times 10^{-21}}{1.01 \times 10^{-39}}} = 4.56 \times 10^8 \text{ Hz}$$

5.7 一个氧原子的质量是 $2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}$, 一个氧分子中两个氧原子的中心相距 $1.21 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。求氧分子相对于通过其质心并垂直于二原子连线的轴的转动惯量。如果一个氧分子相对于此轴的转动动能是 $2.06 \times 10^{-21} \text{ J}$, 它绕此轴的转动周期是多少?

解 所求转动惯量为

$$J = 2 \cdot m r^2 = 2 \times 2.66 \times 10^{-26} \times \left(\frac{1.21}{2} \times 10^{-10} \right)^2 = 1.95 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

转动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2E_k/J}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(2 \times 2.06 \times 10^{-21}) / (1.95 \times 10^{-46})}} = 1.37 \times 10^{-12} \text{ s}$$

5.8 在伦敦的英国议会塔楼上的大本钟的分针长 4.50 m, 质量为 100 kg; 时针长 2.70 m, 质量为 60.0 kg。二者对中心转轴的角动量和转动动能各是多少? 将二者都当成均匀细直棒处理。

解 对分针,

$$J_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 = \frac{1}{3} \times 100 \times 4.50^2 = 675 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{3600} = 1.75 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$L_1 = J_1 \omega_1 = 675 \times 1.75 \times 10^{-3} = 1.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$E_{k,1} = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \times 675 \times (1.75 \times 10^{-3})^2 = 1.03 \times 10^{-3} \text{ J}$$

对时针,

$$J_s = \frac{1}{3} m_s l_s^2 = \frac{1}{3} \times 60.0 \times 2.70^2 = 146 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{2\pi}{3600 \times 12} = 1.45 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$L_s = J_s \omega_s = 146 \times 1.45 \times 10^{-4} = 2.12 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

$$E_{k,s} = \frac{1}{2} J_s \omega_s^2 = \frac{1}{2} \times 146 \times (1.45 \times 10^{-4})^2 = 1.54 \times 10^{-6} \text{ J}$$

*** 5.9** 从一个半径为 R 的均匀薄板上挖去一个直径为 R 的圆板, 所形成的圆洞中心在距原薄板中心 $R/2$ 处(见图 5.4), 所剩薄板的质量为 m 。求此时薄板对于通过原中心而与板面垂直的轴的转动惯量。

解 由于转动惯量具有可加性, 所以已挖洞的圆板的转动惯量 J 加上挖去的圆板补回原位后对原中心的转动惯量 J_1 就等于整个完整圆板对中心的转动惯量 J_2 。设板的密度为 ρ , 厚度为 a , 则对于通过原中心而与板面垂直的轴

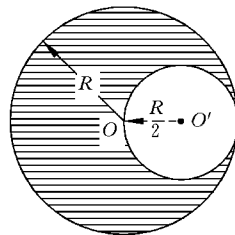


图 5.4 习题 5.9 用图

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{R}{2} \right)^2 + m_1 \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 a \rho \left(\frac{R}{2} \right)^2 \\ &= \frac{3}{32} \pi a \rho R^4 \end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} m_2 R^2 = \frac{1}{2} \pi a \rho R^4$$

$$J = J_2 - J_1 = \frac{13}{32} \pi a \rho R^4$$

又由于 $\left[\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right] a \rho = m$, 即

$$\pi a \rho R^2 = \frac{4}{3}m$$

代入上面求 J 的公式,最后可得

$$J = \frac{13}{24}mR^2$$

5.10 如图 5.5 所示,两物体质量分别为 m_1 和 m_2 ,定滑轮的质量为 m ,半径为 r ,可视为均匀圆盘。已知 m_2 与桌面间的滑动摩擦系数为 μ_k ,求 m_1 下落的加速度和两段绳子中的张力各是多少? 设绳子和滑轮间无相对滑动,滑轮轴受的摩擦力忽略不计。

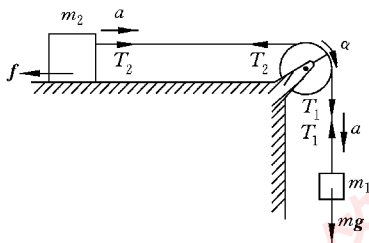


图 5.5 习题 5.10 解用图

解 对 m_1 , 由牛顿第二定律

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

对 m_2 , 由牛顿第二定律

$$T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a$$

对滑轮, 用转动定律

$$(T_1 - T_2)r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

又由运动学关系, 设绳在滑轮上不打滑

$$\alpha = a/r$$

联立解以上诸方程, 可得

$$a = \frac{m_1 - \mu_k m_2}{m_1 + m_2 + m/2}g$$

$$T_1 = \frac{(1 + \mu_k)m_2 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2}m_1 g, \quad T_2 = \frac{(1 + \mu_k)m_1 + \mu_k m/2}{m_1 + m_2 + m/2}m_2 g$$

5.11 一根均匀米尺, 在 60 cm 刻度处被钉到墙上, 且可以在竖直平面内自由转动。先用手使米尺保持水平, 然后释放。求刚释放时米尺的角加速度和米尺到竖直位置时的角速度各是多大?

解 如图 5.6 所示, 设米尺的总重量为 m , 则直尺对悬点的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}m_1 l_1^2 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5}m \times 0.4^2 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}m \times 0.6^2 \\ &= 0.093m \end{aligned}$$

对直尺, 手刚释放时, 由转动定律

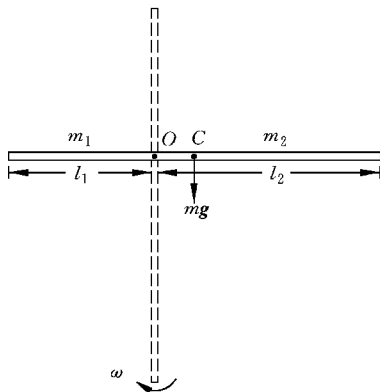


图 5.6 习题 5.11 解用图

$$mg \times OC = I\alpha$$

$$\alpha = \frac{mg \times OC}{I} = \frac{m \times 9.8 \times 0.1}{0.093m} = 10.5 \text{ rad/s}^2$$

在米尺转到竖直位置的过程中,机械能守恒给出

$$mg \times OC = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2mg \times OC}{I}} \\ &= \sqrt{\frac{2m \times 9.8 \times 0.1}{0.093m}} = 4.58 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

5.12 坐在转椅上的人手握哑铃(原书图 5.10)。两臂伸直时,人、哑铃和椅系统对竖直轴的转动惯量为 $J_1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。在外人推动后,此系统开始以 $n_1 = 15 \text{ r/min}$ 转动。当人的两臂收回,使系统的转动惯量变为 $J_2 = 0.80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 时,它的转速 n_2 是多大? 两臂收回过程中,系统的机械能是否守恒? 什么力做了功? 做功多少? 设轴上摩擦忽略不计。

解 由于两臂收回过程中,人体受的沿竖直轴的外力矩为零,所以系统沿此轴的角动量守恒。由此得

$$J_1 \cdot 2\pi n_1 = J_2 \cdot 2\pi n_2$$

于是

$$n_2 = n_1 \frac{J_1}{J_2} = 15 \times \frac{2}{0.8} = 37.5 \text{ r/min}$$

在两臂收回时,系统的内力(臂力)做了功,所以系统的机械能不守恒。臂力做的总功为

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[0.8 \times \left(2\pi \times \frac{37.5}{60} \right)^2 - 2 \times \left(2\pi \times \frac{15}{60} \right)^2 \right] \\ &= 3.70 \text{ J} \end{aligned}$$

5.13 图 5.7 中均匀杆长 $L = 0.40 \text{ m}$, 质量 $M = 1.0 \text{ kg}$, 由其上端的光滑水平轴吊起而处于静止。今有一质量 $m = 8.0 \text{ g}$ 的子弹以 $v = 200 \text{ m/s}$ 的速率水平射入杆中而不复出, 射入点在轴下 $d = 3L/4$ 处。求:

- (1) 子弹停在杆中时杆的角速度;
- (2) 杆的最大偏转角。

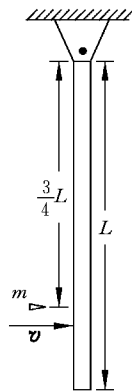


图 5.7 习题 5.13 解用图

解 (1) 由子弹和杆系统对悬点 O 的角动量守恒可得

$$\begin{aligned} mv \times \frac{3}{4}L &= \left[\frac{1}{3}ML^2 + m\left(\frac{3L}{4}\right)^2 \right] \omega \\ \omega &= \frac{3mv}{4\left(\frac{1}{3}ML + \frac{9}{16}mL\right)} \\ &= \frac{3 \times 0.008 \times 200}{4\left(\frac{1}{3} \times 1 \times 0.4 + \frac{9}{16} \times 0.008 \times 0.4\right)} \\ &= 8.89 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

(2) 对杆、子弹和地球系统,由机械能守恒可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + \frac{9}{16}mL^2\right)\omega^2 = \left(Mg\frac{L}{2} + mg\frac{3}{4}L\right)(1 - \cos\theta)$$

由此得

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{3}M + \frac{9}{16}m\right)L\omega^2}{\left(M + \frac{3}{2}m\right)g} \right] \\ &= \arccos \left[1 - \frac{\left(\frac{1}{3} \times 1 + \frac{9}{16} \times 0.008\right) \times 0.4 \times 8.89^2}{\left(1 + \frac{3}{2} \times 0.008\right) \times 9.8} \right] \\ &= 94^\circ 18' \end{aligned}$$

5.14 一转台绕竖直固定轴转动,每转一周所需时间为 $t=10 \text{ s}$,转台对轴的转动惯量为 $J=1200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。一质量为 $M=80 \text{ kg}$ 的人,开始时站在转台的中心,随后沿半径向外跑去,当人离转台中心 $r=2 \text{ m}$ 时转台的角速度是多大?

解 由于转台和人系统未受到沿轴方向外力矩,所以系统的角动量守恒,即

$$J\omega_1 = (J + Mr^2)\omega_2$$

由此可得转台后来的角速度为

$$\omega_2 = \frac{J}{J + Mr^2}\omega_1 = \frac{1200}{1200 + 80 \times 2^2} \times \frac{2\pi}{10} = 0.496 \text{ rad/s}$$

5.15 两辆质量都是 1200 kg 的汽车在平直公路上各以 72 km/h 的高速迎面开行。由于两车质心轨迹间距太小,仅为 0.5 m ,因而发生碰撞,碰后二车扣在一起,此残体对于其质心的转动惯量为 $2500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,求:

(1) 二车扣在一起时的旋转角速度;

(2) 由于碰撞而损失的机械能。

解 (1) 对两汽车的质心两汽车的角动量守恒给出

$$2mvr = I\omega$$

由此得

$$\omega = \frac{2mvr}{I} = \frac{2 \times 1200 \times 20 \times 0.25}{2500} = 4.8 \text{ rad/s}$$

(2) 损失的机械能为

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 &= 1200 \times 20^2 - \frac{1}{2} \times 2500 \times 4.8^2 \\ &= 4.5 \times 10^5 \text{ J} \end{aligned}$$

5.16 宇宙飞船中有三个宇航员绕着船舱内壁按同一方向跑动以产生人造重力。

(1) 如果想使人造重力等于他们在地面上时受的自然重力,那么他们跑动的速率应多大? 设他们的质心运动的半径为 2.5 m,人体当质点处理。

(2) 如果飞船最初未动,当宇航员按上面速率跑动时,飞船将以多大角速度旋转? 设每个宇航员的质量为 70 kg,飞船体对于其纵轴的转动惯量为 $3 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。

(3) 要使飞船转过 30° ,宇航员需要跑几圈?

解 (1) 由于 $v^2/r = g$

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9.8 \times 2.5} = 4.95 \text{ m/s}$$

(2) 由飞船和宇航员系统角动量守恒可得

$$3mvr - J\omega = 0$$

由此得飞船角速度为

$$\omega = \frac{3mvr}{J} = \frac{3 \times 70 \times 4.95 \times 2.5}{3 \times 10^5} = 8.67 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$

(3) 飞船转过 30° 用的时间 $t = \pi/(6\omega)$,宇航员对飞船的角速度为 $\omega + v/R$,在时间 t 内跑过的圈数为

$$\begin{aligned} n &= \frac{(\omega + v/R)t}{2\pi} = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{v}{\omega R} \right) \\ &= \frac{1}{12} \times \left(1 + \frac{4.95}{8.67 \times 10^{-3} \times 2.5} \right) = 19 \text{ 圈} \end{aligned}$$

5.17 把太阳当成均匀球体,试由原书的“数值表”给出的数据计算太阳的角动量。

再由原书表 5.2 的数据计算太阳的角动量是太阳系总角动量的百分之几?

解 太阳自转周期按 25 d 计算,太阳的自转角动量为

$$\begin{aligned} J_s &= \frac{2}{5}mR^2\omega \\ &= \frac{2}{5} \times 1.99 \times 10^{30} \times (6.96 \times 10^8)^2 \times \frac{2\pi}{25 \times 86400} \end{aligned}$$

$$= 1.1 \times 10^{42} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

此角动量占太阳系总角动量的百分数为

$$\frac{0.11 \times 10^{43}}{(0.11 + 3.2) \times 10^{43}} = 3.3\%$$

* 5.18 蟹状星云(原书图 5.29)中心是一颗脉冲星,代号 PSR 0531+21。它以十分确定的周期(0.033 s)向地球发射电磁波脉冲。这种脉冲星实际上是转动着的中子星,由中子密聚而成,脉冲周期就是它的转动周期。实测还发现,上述中子星的周期以 $1.26 \times 10^{-5} \text{ s/a}$ 的速率增大。

(1) 求此中子星的自转角速度。

(2) 设此中子星的质量为 $1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ (近似太阳的质量),半径为 10 km。求它的转动动能以多大的速率(以 J/s 计)减小(这减小的转动动能就转变为蟹状星云向外辐射的能量)。

(3) 若这一能量变化率保持不变,该中子星经过多长时间将停止转动。设此中子星可作均匀球体处理。

解 (1) 中子星的自转角加速度为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi}{T} \right) = -\frac{2\pi}{T^2} \frac{dT}{dt} \\ &= -\frac{2\pi}{0.033^2} \times \frac{1.26 \times 10^{-5}}{3.15 \times 10^7} = -2.3 \times 10^{-9} \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

(2) 中子星动能的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \frac{1}{2} J \times 2\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5} m R^2 \omega \frac{d\omega}{dt} \\ &= \frac{2}{5} \times 1.5 \times 10^{30} \times (10^4)^2 \times \frac{2\pi}{0.033} \times (-2.3 \times 10^{-9}) \\ &= -2.6 \times 10^{31} \text{ J/s} \end{aligned}$$

负号表示减小。

(3) 中子星转动持续时间为

$$\begin{aligned} t &= \frac{E}{\left| \frac{dE}{dt} \right|} = \frac{1}{2} \frac{J \omega^2}{\left| \frac{dE}{dt} \right|} \\ &= \frac{2 \times 1.5 \times 10^{30} \times (10^4)^2 (2\pi)^2}{2 \times 5 \times 0.033^2 \times 2.6 \times 10^{31}} \\ &= 4.18 \times 10^{10} \text{ s} = 1300 \text{ a} \end{aligned}$$

* 5.19 地球对自转轴的转动惯量是 $0.33MR^2$, 其中 M 是地球的质量, R 是地球的半径。求地球的自转动能。

由于潮汐对海岸的摩擦作用,地球自转的速度逐渐减小,每百万年自转周期增加 16 s。这样,地球自转动能的减小相当于摩擦消耗多大的功率? 一年内消耗的能量相当于我国 2004 年发电量 $7.3 \times 10^{18} \text{ J}$ 的几倍? 潮汐对地球的平均力矩多大? (提示: $dE_k/E_k = 2d\omega/\omega = -2dT/T$)

解 地球的自转动能为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.33 M R^2 \times \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.33 \times 5.98 \times 10^{24} \times (6.4 \times 10^6)^2 \times \left(\frac{2\pi}{8.64 \times 10^4} \right)^2 \\ &= 2.14 \times 10^{29} \text{ J} \end{aligned}$$

地球自转动能的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \right] = -J \frac{(2\pi)^2}{T^3} \frac{dT}{dt} \\ &= -0.33 \times 5.98 \times 10^{24} \times (6.4 \times 10^6)^2 \times \frac{4\pi^2}{(8.64 \times 10^4)^3} \times \frac{16}{10^6 \times 3.15 \times 10^7} \\ &= 2.6 \times 10^{12} \text{ J/s} = -2.6 \times 10^9 \text{ kW} \end{aligned}$$

即相当于摩擦消耗的功率为 $2.6 \times 10^9 \text{ kW}$, 一年内消耗能量相当我国 2004 年发电量的倍数约为

$$\frac{2.6 \times 10^{12} \times 3.15 \times 10^7}{7.3 \times 10^{18}} \approx 11$$

潮汐作用对地球的平均力矩为

$$\begin{aligned} M &= J \alpha = J \frac{d\omega}{dt} = -J \times \frac{2\pi}{T^2} \frac{dT}{dt} \\ &= -\frac{0.33 \times 5.98 \times 10^{24} \times (6.4 \times 10^6)^2 \times 2\pi \times 16}{(8.64 \times 10^4)^2 \times 10^6 \times 3.15 \times 10^7} \\ &= -3.5 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

5.20 太阳的热核燃料耗尽时,它将急速塌缩成半径等于地球半径的一颗白矮星。如果不计质量散失,那时太阳的转动周期将变为多少? 太阳和白矮星均按均匀球体计算,目前太阳的自转周期按 26 d 计。

解 由太阳的自转角动量守恒可得

$$\begin{aligned} J_1 \frac{2\pi}{T_1} &= J_2 \frac{2\pi}{T_2} \\ T_2 &= T_1 \frac{J_2}{J_1} = T_1 \frac{R_2^2}{R_1^2} = 26 \times 24 \times 60 \times \frac{(6.4 \times 10^6)^2}{(6.96 \times 10^8)^2} = 3.1 \text{ min} \end{aligned}$$

相 对 论

6.1 内容提要

1. 牛顿绝对时空观：长度和时间的测量与参考系无关，而且时空相互独立。

伽利略坐标变换式

$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

伽利略速度变换式

$$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z.$$

2. 狭义相对论基本假设

爱因斯坦相对性原理：物理规律(的表示式)对所有惯性系都是一样的，不存在任何一个特殊的(例如“绝对静止的”)惯性系。

光速不变原理：在任何惯性系中，光在真空中的速率都相等。

3. 爱因斯坦相对论时空观：长度和时间的测量相互联系，与参考系有关。

基本出发点：同时性的相对性——由于光速不变，在一参考系中同时发生的两事件在相对于该参考系运动的另一参考系中不是同时发生的，在前一参考系运动的后方的那一事件先发生。

利用光速的不变性可导出时间延缓：在一参考系 S' 中发生在同一地点的两事件的时间间隔称为固有时，以 $\Delta t'$ 表示，则在以速度 u 相对于前一参考系运动的另一参考系 S 中该两事件的时间间隔 Δt 延长了，其关系是

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

由此可知，总有 $\Delta t > \Delta t'$ ，即固有时最短。

沿长度方向运动的棒的长度的测量要求同时记录棒的两端的位置坐标。据此再由上述时间延缓公式可导出长度缩短公式

$$l = l' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

式中 l' 为棒在它静止的参考系中测出的长度,称为静长或固有长度。上式给出固有长度最长。

4. 洛伦兹坐标变换式: 由时间延缓和长度缩短可进一步导出

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

此变换式说明时间和空间坐标都和参考系有关,而且时间空间坐标相互联系在一起了。

5. 洛伦兹速度变换式

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

6. 相对论质量速度关系式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

其中 m_0 为质点的静止质量, v 是质点的速率。

7. 相对论动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

8. 相对论能量

$$E = mc^2 = m_0 c^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

相对论动能

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$$

其中 $m_0 c^2$ 为质点静止时的相对论能量,称为静能。

相对论动量能量关系式

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

* 9. 广义相对论

引力质量和惯性质量相等;加速运动等效于引力作用,即等效原理。引力是空间弯

曲、时间弯曲的表现。

6.2 解题思路

1. 解题之前要先弄清楚一些非牛顿力学的基本概念,如同时性的相对性,固有时,静长,相对论动能,相对论能量等。

2. 在应用洛伦兹变换公式时,要先明确所涉及的事件和所用的参考系。同一事件在不同参考系中的坐标 (x, y, z, t) 才有洛伦兹变换关系。

3. 在计算时间间隔时,一定要注意固有时是在两事件发生在同一地点的参考系中测得的。在相对于此参考系运动的另一参考系中该两事件就分别是在两个地点发生的了。

4. 在计算长度时,固有长度是在棒静止的参考系中测定的。长度缩短公式中的测量长度是在沿棒长方向运动的参考系中测得的。在垂直于棒长方向运动的参考系中,棒长对其静长并无变化。

5. 利用相对论质速关系时,应注意 m 是在一给定参考系中测量的,式中 v 是质点在此参考系中的速率,而不是两参考系的相对速率。

6.3 思考题选答

6.3 前进中的一列火车的车头和车尾各遭到一次闪电轰击,据车上的观察者测定这两次轰击是同时发生的。试问,据地面上的观察者测定它们是否仍然同时? 如果不同时,何处先遭到轰击?

答 运动的车上的观察者测定为同时的两闪电轰击事件,在地球上观察不再是同时发生的。由同时性的相对性知,轰击车尾的那次闪电先发生。

6.4 如图 6.1 所示,在 S 和 S' 系中的 x 和 x' 轴上分别固定有 5 个钟。在某一时刻,原点 O 和 O' 正好重合,此时钟 C_3 和钟 C'_3 都指零。若在 S 系中观察,试大致画出此时刻其他各钟的指针所指的方位。

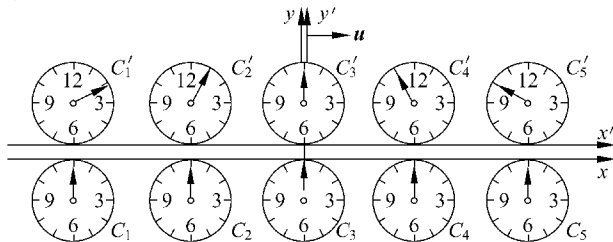


图 6.1 思考题 6.4 用图

答 在同一参考系中的所有的钟都是同步的,即在同一时刻的指数相同。在 S 系中观察,由于 C_1, \dots, C_5 各钟是同步的,所以它们的指数应相同,即指针都指零。在 S' 系中同步的钟 C'_1, \dots, C'_5 在 S' 系中观察,任何时刻指数都相同,但在 S 系中观察,它们就不同步了。就 S' 中的各钟的指针指向“零”这一事件来说,越是靠后(图中即靠左)的钟发生的越早,在观察时刻都已走过了“零”,越是靠前(图中即靠右)的钟发生的越晚,在观察时刻都尚未到“零”。因此各指针的位置就大致如图所示。

6.7 长度的测量和同时性有什么关系?为什么长度的测量会和参考系有关?长度收缩效应是否因为棒的长度受到了实际的压缩?

答 对运动的棒的长度测量(棒沿自己的长度方向运动)要求同时记下棒两端的坐标。这就使长度测量和时间测量联系起来了。由于记录棒的两端的坐标这两事件的时间间隔在不同的参考系是不同的,所以长度的测量就和参考系有关了。长度收缩效应完全是一种由相对运动引起的一种“相对论效应”,并不是棒受到了实际的压缩。一根坚硬的钢棒和一根静长一样的橡皮棒,在速度(很大)一样时,它的长度收缩是一样的,但实际的压缩将产生不同的缩短。

6.4 习题解答

6.1 一根直杆在 S 系中观察,其静止长度为 l ,与 x 轴的夹角为 θ ,试求它在 S' 系中的长度和它与 x' 轴的夹角。

$$\text{解} \quad \Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = l \cos \theta \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y = l \sin \theta$$

在 S' 系中棒长为

$$l' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} = l \left(1 - \cos^2 \theta \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

l' 与 x' 轴的夹角为

$$\theta' = \arctan \frac{l \sin \theta}{l \cos \theta \sqrt{1 - u^2/c^2}} = \arctan \left[\tan \theta \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right]$$

6.2 静止时边长为 a 的正立方体,当它以速率 u 沿与它的一个边平行的方向相对于 S' 系运动时,在 S' 系中测得它的体积将是多大?

解 在 S' 系中立方体平行于运动方向的边长将被测为长 $a' = a \sqrt{1 - u^2/c^2}$,垂直于运动方向的其他两边边长仍为 a 不变。于是立方体的体积被测得为

$$V = a' a^2 = a^3 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

6.3 S系中的观察者有一根米尺固定在 x 轴上,其两端各装一手枪。固定于 S' 系中的 x' 轴上有另一根长刻度尺。当后者从前者旁边经过时,S系的观察者同时扳动两枪,使子弹在 S' 系中的刻度上打出两个记号。求在 S' 尺上两记号之间的刻度值。在 S' 系中观察者将如何解释此结果。

解 如图 6.2 所示,两枪打出两个记号的事在 S 系和 S' 系中的坐标分别为 (x_1, t_1) 、 (x_2, t_2) 和 (x'_1, t'_1) 和 (x'_2, t'_2) (见图 6.2),由洛伦兹变换,

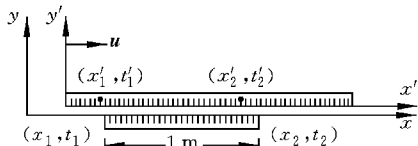


图 6.2 习题 6.3 解用图

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - u(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

由于 $t_2 = t_1$, $x_2 - x_1 = 1$ m, 所以有 S' 尺上两记号之间的距离为

$$x'_2 - x'_1 = 1 / \sqrt{1 - u^2/c^2} > 1 \text{ m}$$

在 S' 系中的观察者测量,两枪打出记号并不是同时发生的,而是米尺沿 $-x'$ 方向运动的后端,即 x_2 端,那支枪先发射, x_1 端的那支枪后发射,因此在 S' 系中那一根长刻度上打出的两记号之间的距离就大于 1 m 了。

6.4 宇宙射线与大气相互作用时能产生 π 介子衰变,此衰变在大气上层放出叫做 μ 子的基本粒子。这些 μ 子的速度接近光速 ($v = 0.998c$)。由实验室内测得的静止 μ 子的平均寿命等于 2.2×10^{-6} s,试问在 8000 m 高空由 π 介子衰变放出的 μ 子能否飞到地面。

解 在地面上测得的 μ 子的平均寿命为 $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - v^2/c^2}$,在此时间内 μ 子可以飞行的距离为

$$\begin{aligned} l' &= v \Delta t' = \frac{v \Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{0.998 \times 3 \times 10^8 \times 2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.998^2}} \\ &= 1.04 \times 10^4 > 8000 \text{ m} \end{aligned}$$

所以 μ 子能飞到地面。

6.5 在 S 系中观察到在同一地点发生两个事件,第二事件发生在第一事件之后 2 s。在 S' 系中观察到第二事件在第一事件后 3 s 发生。求在 S' 系中这两个事件的空间距离。

解 已知在 S 系中, $x_1 = x_2$, 所以

$$\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

由此得

$$u = c \sqrt{1 - (\Delta t / \Delta t')^2}$$

再由洛伦兹变换可得在 S' 系中两事件的空间距离为

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u \Delta t}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = -u \Delta t' = -c \sqrt{1 - (\Delta t / \Delta t')^2} \times \Delta t'$$

$$= -3 \times 10^8 \times \sqrt{1 - (2/3)^2} \times 3 = -6.71 \times 10^8 \text{ m}$$

6.6 在 S 系中观察到两个事件同时发生在 x 轴上, 其间距离是 1 m 。在 S' 系中观察这两个事件之间的距离是 2 m 。求在 S' 系中这两个事件的时间间隔。

解 由于在 S 系中 $\Delta t = 0, \Delta x = 1 \text{ m}$, 所以由洛伦兹变换

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

得

$$u = c \sqrt{1 - (\Delta x / \Delta x')^2}$$

再由洛伦兹变换可得在 S' 系中两事件的时间间隔为

$$\begin{aligned} |\Delta t'| &= \left| \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right| = \frac{u}{c^2} \Delta x' = \frac{\Delta x'}{c} \sqrt{1 - (\Delta x / \Delta x')^2} \\ &= \frac{2}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - (1/2)^2} = 5.77 \times 10^{-9} \text{ s} \end{aligned}$$

*** 6.7** 地球上的观察者发现一只以速率 $v_1 = 0.60c$ 向东航行的宇宙飞船将在 5 s 后同一个以 $v_2 = 0.80c$ 速率向西飞行的彗星相撞。

(1) 飞船中的人们看到彗星以多大速率向他们接近。

(2) 按照他们的钟, 还有多少时间允许他们离开原来航线避免碰撞。

解 (1) 如图 6.3 所示, 由洛伦兹速度变换, 在飞船测得的彗星速度为

$$v_2' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 - (-0.8 \times 0.6)} = -0.95c$$

即彗星以 $0.95c$ 的速率向飞船接近。

(2) 以地球上发现飞船经过某地时飞船和彗星最初隔一段距离(并于 5 s 后就要碰撞)为事件 1, 以地球上发现飞船和彗星就要相撞为事件 2。这两件事对飞船来说发生在同一地点, 飞船上测得的时间间隔应为固有时, 此时间间隔为

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v_1^2/c^2} = 5 \times \sqrt{1 - 0.6^2} = 4 \text{ s}$$

6.8 一光源在 S' 系的原点 O' 发出一光线, 其传播方向在 $x'y'$ 平面内并与 x' 轴夹角为 θ' , 试求在 S 系中测得的此光线的传播方向, 并证明在 S 系中此光线的速率仍是 c 。

解 在 S' 系中光的传播速度 $v' = c$ 。由洛伦兹速度变换可得在 S 系中光的两个分速度分别为

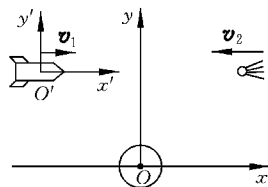


图 6.3 习题 6.7 解用图

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} = \frac{v' \cos \theta' + u}{1 + \frac{v' \cos \theta' u}{c^2}} = \frac{c \cos \theta' + u}{1 + \frac{u \cos \theta'}{c}}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{v'_x u}{c^2}} = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{v' \cos \theta' u}{c^2}} = \frac{c \sin \theta' \sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + \frac{u \cos \theta'}{c}}$$

由此得在 S 系中光线与 x 轴的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - u^2/c^2}}{\cos \theta' + u/c}$$

而光的速率为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= \frac{c}{c + u \cos \theta'} \left[(u + c \cos \theta')^2 + c^2 \sin^2 \theta' \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} \\ &= \frac{c}{c + u \cos \theta'} (u^2 \cos^2 \theta + 2uc \cos \theta + c^2)^{1/2} = c \end{aligned}$$

6.9 在什么速度下粒子的动量等于非相对论动量的两倍？又在什么速度下粒子的动能等于非相对论动能的两倍。

解 对动量问题,由题知

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2m_0 v$$

由此解得

$$v = \sqrt{3}c/2 = 0.866c$$

对动能问题有

$$mc^2 - m_0 c^2 = 2 \times \frac{1}{2} m_0 v^2$$

由此得

$$1 = \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

解此式可得

$$v = 0.786c$$

6.10 在北京正负电子对撞机中,电子可以被加速到动能为 $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV}$ 。

(1) 这种电子的速率和光速相差多少 m/s?

(2) 这样的—个电子动量多大?

(3) 这种电子在周长为 240 m 的储存环内绕行时,它受的向心力多大? 需要多大的

偏转磁场?

解 (1) 由 $E_k = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 \right) c^2$ 可得

$$c^2 - v^2 = \left(\frac{m_0 c^3}{E_k + m_0 c^2} \right)^2$$

由于 $c \approx v$, 所以 $c^2 - v^2 = (c+v)(c-v) \approx 2c(c-v)$, 从而由上式可得

$$c - v = \frac{1}{2c} \left(\frac{m_0 c^3}{E_k + m_0 c^2} \right)^2$$

又由于 $E_k = 2.8 \times 10^9 \text{ eV} \gg m_0 c^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}$, 所以又有

$$\begin{aligned} c - v &= \frac{m_0^2 c^5}{2E_k^2} = \frac{(0.911 \times 10^{-30})^2 \times (3 \times 10^8)^5}{2 \times (2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19})^2} \\ &= 5.02 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(2) 电子的动量为

$$p = \sqrt{\frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2}} = \frac{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0 c^2)}}{c}$$

由于 $E_k \gg m_0 c^2$, 所以有

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{E_k}{c} = \frac{2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} \\ &= 1.49 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

(3) 电子绕行所需的向心力为

$$\begin{aligned} F &= \frac{mv^2}{R} \approx \frac{mc^2}{R} = \frac{E}{R} \approx \frac{E_k}{R} \\ &= \frac{2.8 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19}}{240/(2\pi)} = 1.2 \times 10^{-11} \text{ N} \end{aligned}$$

所需的偏转磁场为

$$B = \frac{F}{ev} \approx \frac{F}{ec} = \frac{1.2 \times 10^{-11}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8} = 0.25 \text{ T}$$

6.11 一个质子的静质量为 $m_p = 1.67265 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个中子的静质量为 $m_n = 1.67495 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个质子和一个中子结合成的氘核的静质量为 $m_D = 3.34365 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。求结合过程中放出的能量是多少 MeV? 这能量称为氘核的结合能, 它是氘核静能量的百分之几?

一个电子和一个质子结合成一个氢原子, 结合能是 13.58 eV, 这一结合能是氢原子静能量的百分之几? 已知氢原子的静质量为 $m_H = 1.67323 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。

解 氘核的结合能为

$$(\Delta E)_D = (\Delta m)_D c^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (1.672\,65 + 1.674\,95 - 3.343\,65) \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \\
 &= 3.55 \times 10^{-13} \text{ J} = 2.22 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

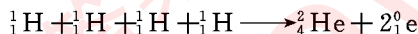
这一结合能是氘核的静质量的百分数为

$$\begin{aligned}
 \eta_D &= \frac{(\Delta E)_D}{m_D c^2} = \frac{3.55 \times 10^{-13}}{3.343\,65 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} \\
 &= 0.12\%
 \end{aligned}$$

氢原子的结合能是氢原子静质量的百分数为

$$\begin{aligned}
 \eta_H &= \frac{(\Delta E)_H}{m_H c^2} = \frac{13.58 \times 1.6 \times 10^{-19}}{1.673\,23 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} \\
 &= 1.45 \times 10^{-6}\%
 \end{aligned}$$

6.12 太阳发出的能量是由质子参与一系列反应产生的,其总结果相当于下述热核反应:



已知一个质子(${}_1^1\text{H}$)的静质量是 $m_p = 1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 一个氦核(${}_2^4\text{He}$)的静质量是 $m_{\text{He}} = 6.6425 \times 10^{-27} \text{ kg}$. 一个正电子(${}_1^0\text{e}$)的静质量是 $m_e = 0.0009 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

- (1) 这一反应释放多少能量?
- (2) 这一反应的释能效率多大?
- (3) 消耗 1 kg 质子可以释放多少能量?
- (4) 目前太阳辐射的总功率为 $P = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$, 它一秒钟消耗多少千克质子?
- (5) 目前太阳约含有 $m = 1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ 质子. 假定它继续以上述(4)求得的速率消耗质子, 这些质子可供消耗多长时间?

解 (1) 释放能量为

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= \Delta m c^2 \\
 &= (4 \times 1.6726 - 6.6425 - 2 \times 0.0009) \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 \\
 &= 4.15 \times 10^{-12} \text{ J}
 \end{aligned}$$

(2) 释能效率为

$$\eta = \frac{\Delta E}{4m_p c^2} = \frac{4.15 \times 10^{-12}}{4 \times 1.6726 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2} = 0.69\%$$

(3) 消耗 1 kg 质子可释放的能量为

$$4.15 \times 10^{-12} / (4 \times 1.6726 \times 10^{-27}) = 6.20 \times 10^{14} \text{ J}$$

(4) 一秒钟消耗质子的质量为

$$3.9 \times 10^{26} / (6.20 \times 10^{14}) = 6.29 \times 10^{11} \text{ kg/s}$$

(5) 消耗的时间为

$$1.5 \times 10^{30} / (6.29 \times 10^{11}) = 2.38 \times 10^{18} \text{ s} = 7.56 \times 10^{10} \text{ a}$$

6.13 北京正负电子对撞机设计为使能量都是 2.8 GeV 的电子和正电子发生对撞。这一对撞的资用能是多少？如果用高能电子去轰击静止的正电子而想得到同样多的资用能，入射高能电子的能量应多大？

解 由于实验室参考系就是对撞的电子和正电子的质心参考系，所以对撞时的资用能为 $2.8 \times 2 = 5.6 \text{ GeV}$ 。

如果用高能电子去轰击静止的正电子，则资用能为

$$E_{\text{av}} = \sqrt{2Mc^2 E_k + [(m+M)c^2]^2}$$

由此得

$$E_k = \frac{E_{\text{av}}^2 - [(m+M)c^2]^2}{2Mc^2}$$

将 $M=m=0.00051 \text{ GeV}/c^2$ 和 $E_{\text{av}}=5.6 \text{ GeV}$ 代入，可得

$$E_k = \frac{5.6^2 - (2 \times 0.00051)^2}{2 \times 0.00051} = 3.1 \times 10^4 \text{ GeV}$$

第

2

篇

热

学

课后答案网

www.khdaw.com

温度和气体动理论

7.1 内容提要

1. **平衡态**：在不受外界影响的条件下，一个系统的宏观性质不随时间改变的状态叫平衡态。大学物理的热学中主要就介绍关于平衡态的规律。热学中的平衡态是分子运动中的动态平衡。

2. **温度**：其宏观定性意义是处于平衡态的各系统的温度相同。温度相同的平衡态叫热平衡。

3. **热力学第零定律**：如果系统 A 和系统 B 分别都与系统 C 的同一状态处于热平衡，那么当 A 和 B 接触时，它们也必定处于热平衡。这一定律是制造温度计，建立温标，定量地计量温度的基础。

4. **理想气体温标**：在其有效范围内和热力学温标一致，这种温标建立过程如下：

由实验结果可知，理想气体的 pV 乘积只和温度有关，因此定义理想气体温标 $T(K)$ 使

$$T \propto pV$$

再定义一温度标准——水的三相点温度为

$$T_3 = 273.16 \text{ K}$$

就可以有温度数值定义公式

$$T = \frac{pV}{p_3 V_3} T_3$$

式中， p_3, V_3 是一定质量气体在水的三相点温度下的压强和体积； p, V 是该气体在待测温度下的压强和体积。

在理想气体温标有效的范围内，它和热力原温标完全一致。

摄氏温标与热力学温标的关系

$$t(^{\circ}\text{C}) = T - 273.15(\text{K})$$

5. 热力学第三定律：热力学零度是不能达到的。

6. 理想气体状态方程：描述在平衡态的理想气体的宏观量有下述关系：

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M}RT, \quad p = nkT$$

式中 R 为普适气体常量，

$$R = 8.31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$$

k 为玻耳兹曼常量，

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

式中， n 为分子数密度， M 为气体摩尔质量， m 为气体的质量。

7. 气体分子的无规则运动：气体分子在无规则运动中相互碰撞。连续两次碰撞间所经过的自由路程的方向和大小也是无规则的(布朗运动)。这些路程的大小的平均值叫平均自由程($\bar{\lambda}$)。它和平均碰撞频率(\bar{z})的关系为 $\bar{\lambda} = \bar{v}/\bar{z}$ ，利用气体分子的钢球模型可导出同种分子组成的气体内，分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

式中， σ 表示分子的碰撞截面， d 表示分子的直径。

8. 理想气体压强的微观公式：忽略分子间的相互作用和分子本身的大小，并认为碰撞是完全弹性的，就可以根据牛顿定律和求平均值的方法推导出

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\overline{\epsilon_i}$$

式中， n 是气体的平均数密度， $\overline{\epsilon_i}$ 是分子无规则运动的平均平动动能。

9. 温度微观统计意义：温度 T 与分子运动的平均动能有关，特别地，将压强的微观公式和理想气体状态方程对比，可得

$$\overline{\epsilon_i} = \frac{3}{2}kT$$

温度概念只适用由大量分子组成的而且宏观上处于平衡态的热力学系统，它反映的是系统内分子无规则运动，所涉及的能量也是这些分子的无规则运动能量。

10. 能量均分定理：在平衡态下，分子热运动的每个自由度(相应于分子能量表示式中的每一个平方项)的平均能量都相等，而且等于 $\frac{1}{2}kT$ 。以 i 表示分子热运动的总自由度，则一个分子总平均能量就是

$$\overline{\epsilon} = \frac{i}{2}kT$$

对于单原子分子, $i=3$, 分子平均总动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$ 。对于双原子分子, $i=5$, 分子平均总动能 $\bar{\epsilon}_k = \frac{5}{2}kT$ 。对于多原子分子, $i=6$, 分子平均总动能 $\bar{\epsilon}_k = 3kT$ 。

通常温度下, 双原子分子和多原子分子内部的振动能量不发生变化, 这些分子就都作为刚性分子处理。

ν mol 理想气体的内能只包含分子无规则运动的动能(分子间相互作用已忽略, 故不计分子间势能, 分子内部振动能量也如上所述不计), 因而有

$$E = \frac{i}{2} \nu N_A kT = \frac{i}{2} \nu RT$$

11. 气体分子速率分布函数: 这是从微观上说明气体分子无规则运动情况的一种方法。它指的是在速率 v 附近单位速率区间内的分子数 dN_v 占总分子数 N 的百分比, 即

$$f(v) = \frac{dN_v}{N dv}$$

由此可得在速率区间 dv 内的分子数占分子总数的百分比为

$$\frac{dN_v}{N} = f(v) dv$$

把对所有速率区间的分子数的百分比加起来, 总百分比应等于 1, 因此

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

这一公式叫速率分布函数 $f(v)$ 的归一化条件。

在平衡态下气体分子的速率分布函数为麦克斯韦速率分布函数, 其形式为

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

由此可求得三种有特别意义的速率:

最概然速率

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 1.41 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

平均速率

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

方均根速率

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1.73 \sqrt{\frac{RT}{M}} (= \sqrt{\overline{v^2}})$$

麦克斯韦速率分布曲线的特征是两端都是零而中间有一极大值。温度越高或分子质量越小, 极大值出现处 (v_p) 越向 v 大的方向移动, 而曲线也越平坦。曲线下的面积总等

于1。

12. 实际气体等温线:在某些温度和压强下,可能存在液汽共存的状态,这时的蒸气叫饱和蒸气。温度高于某一温度,则不可能有这种液汽共存的平衡状态出现;这时只靠压缩不能使气体液化。这一温度的限度叫临界温度。不同气体有不同的临界温度。

7.2 解题思路

对主要利用理想气体状态方程求解的题,一般首先确定要分析的系统,然后辨别其所处的状态,最后将同一平衡态的相关状态参量(指 p, V, T, m)代入状态方程求解。解题时要注意各量的单位。

对于有关分子动理论的习题,要首先建立统计概念,这里包括两点。一是要理解平均值的意义。对于分子的微观运动,我们不能给出一个分子的确定信息,只能求出平均值,如分子数密度,平均动能,平均速率,平均自由程都是对大量分子(或在宏观小微观大的区间内)的平均值。二是要理解分布的概念,这是从宏观上说明气体微观运动情况的方法(在宏观上或总体上对社会或经济状况也用给出分布的方法,如人口分布,年龄分布,财产分布等)。应注意的是速率分布公式中的 $f(v)$ 也是一种平均值,因为由于分子间的无停息地无规则碰撞,在某一给定速率区间的分子数在微观上是不可能恒定的,只有其平均值才有实际的意义。

本章多数习题都可以直接选取已有公式求解。但要注意分析题目所给条件是否真的符合所用公式的条件。

7.3 思考题选答

7.12 地球大气层上层的电离层中,电离气体的温度可达 2000 K,但每立方厘米中的分子数不超过 10^5 个。这温度是什么意思?一块锡放到该处会不会被熔化?已知锡的熔点是 505 K。

答 在该处温度的意义适用对温度的微观意义的理解,即温度和气体分子的平均动能有关。该处气体因紫外线照射而吸收能量使运动速度增大,因而温度高了。但因分子数密度较小,它们和锡块碰撞时并不能提供足够大的能量,所以锡块不会熔化(人处在那个环境中也感到很冷的)。

7.15 液体的蒸发过程是不是其表面一层一层地变成蒸气?为什么蒸发时液体的温度会降低?

答 液体的蒸发过程不是其表面一层一层地变为蒸气,而是由于液体分子的速度各不相同,那些速度大、能量大的分子克服液面层内分子的引力而飞出液面的过程。由于速

度大的分子出走了,剩下的分子的平均能量就小了。如果液体不能从外界得到及时的能量补充,它的温度就要降低了。

7.16 测定气体分子速率分布实验为什么要求在高度真空的容器内进行? 假若真空度较差,问容器内允许的气体压强受到什么限制?

答 如果真空度不够高,其速率待测的分子将与抽空后残余气体的分子发生碰撞而使前者速率改变,不能得出肯定的结果。要完成这种实验,应使残余气体的压强足够低从而使其分子运动的平均自由程大于容器的线度。

7.4 习题解答

7.1 定体气体温度计的测温气泡放入水的三相点管的槽内时,气体的压强为 $6.65 \times 10^3 \text{ Pa}$ 。

(1) 用此温度计测量 373.15 K 的温度时,气体的压强是多大?

(2) 当气体压强为 $2.20 \times 10^3 \text{ Pa}$ 时,待测温度是多少 K ? 多少 $^\circ\text{C}$?

解 (1) 对定体气体温度计,由于体积不变,气体的压强与温度成正比,即

$$T_1/T_3 = p_1/p_3$$

由此

$$\begin{aligned} p_1 &= p_3 T_1/T_3 = 6.65 \times 10^3 \times 373.15/273.16 \\ &= 9.08 \times 10^3 \text{ Pa} \end{aligned}$$

(2) 同理可得

$$\begin{aligned} T_2 &= T_3 p_2/p_3 = 273.16 \times 2.20 \times 10^3 / (6.65 \times 10^3) \\ &= 90.4 \text{ K} = -182.8 \text{ }^\circ\text{C} \end{aligned}$$

7.2 “28”自行车车轮直径为 71.12 cm (相当于 28 英寸),内胎截面直径为 3 cm 。在 $-3 \text{ }^\circ\text{C}$ 的天气里向空胎里打气。打气筒长 30 cm ,截面半径 1.5 cm 。打了 20 下,气打足了,问此时车胎内压强是多少? 设车胎内最后气体温度为 $7 \text{ }^\circ\text{C}$ 。

解 $T_1 = 273 - 3 = 270 \text{ K}$, $V_1 = 20 \times \pi \times 1.5^2 \times 30 \text{ cm}^3$, $p_1 = 1 \text{ atm}$,

$$T_2 = 273 + 7 = 280 \text{ K}, \quad V_2 = \pi \times 71.12 \times \pi \times 1.5^2 \text{ cm}^3。$$

由于气体被打入时质量不变,所以有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

由此得

$$p_2 = \frac{p_1 V_1 T_2}{T_1 V_2} = \frac{1 \times 20 \times \pi \times 1.5^2 \times 30 \times 280}{270 \times \pi \times 71.12 \times \pi \times 1.5^2} = 2.8 \text{ atm}$$

7.3 在 90 km 高空空气的压强为 0.18 Pa, 密度为 $3.2 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ 。求该处的温度和分子数密度。空气的摩尔质量取 29.0 g/mol。

解 由 $pV = \frac{m}{M} RT$ 可得该高空处的温度为

$$T = \frac{pVM}{mR} = \frac{pM}{\rho R} = \frac{0.18 \times 29.0 \times 10^{-3}}{3.2 \times 10^{-6} \times 8.31} = 196 \text{ K}$$

再由 $p = nkT$, 可得该处分子数密度为

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{0.18}{1.38 \times 10^{-23} \times 196} = 6.65 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

7.4 一个大热气球的容积为 $2.1 \times 10^4 \text{ m}^3$, 气球本身和负载质量共 $4.5 \times 10^3 \text{ kg}$, 若其外部空气温度为 20°C , 要想使气球上升, 其内部空气最低要加热到多少度?

解 以 ρ_0 表示标准状况下空气的密度, $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ 。以 ρ_1 和 ρ_2 分别表示热气球外内空气的密度, 则由于热气球外内压强相等(均取 1 atm)所以有

$$\rho_1 = \rho_0 T_0 / T_1, \quad \rho_2 = \rho_0 T_0 / T_2$$

由热气球所受浮力与负载重量平衡可得

$$(\rho_1 - \rho_2)Vg = mg$$

即

$$\rho_0 T_0 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) V = m$$

由此得内部空气所需的最低温度为

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{V\rho_0 T_0 T_1}{V\rho_0 T_0 - mT_1} \\ &= \frac{2.1 \times 10^4 \times 1.29 \times 273 \times 293}{2.1 \times 10^4 \times 1.29 \times 273 - 4.5 \times 10^3 \times 293} \\ &= 357 \text{ K} = 84^\circ\text{C} \end{aligned}$$

7.5 某柴油机的气缸充满空气, 压缩前其中空气的温度为 47°C , 压强为 $8.61 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。当活塞急剧上升时, 可把空气压缩到原体积的 $1/17$, 其时压强增大到 $4.25 \times 10^6 \text{ Pa}$, 求这时空气的温度(分别以 K 和 $^\circ\text{C}$ 表示)。

解 压缩过程中气体质量不变, 所以有

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

由此得

$$T_2 = \frac{p_2 V_2 T_1}{p_1 V_1} = \frac{4.25 \times 10^6 \times V_1 \times 320}{8.61 \times 10^4 \times V_1 \times 17} = 929 \text{ K} = 656^\circ\text{C}$$

7.6 一氢气球在 20 °C 充气后,压强为 1.2 atm,半径为 1.5 m。到夜晚时,温度降为 10 °C,气球半径缩为 1.4 m,其中氢气压强减为 1.1 atm。求已经漏掉了多少氢气。

解 漏掉的氢气的质量

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_1 - m_2 = \frac{M}{R} \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} - \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) \\ &= \frac{2 \times 10^{-3}}{8.31} \times \left(\frac{1.2 \times 4\pi \times 1.5^3 / 3}{293} - \frac{1.1 \times 4\pi \times 1.4^3 / 3}{283} \right) \times 1.01 \times 10^5 \\ &= 0.32 \text{ kg}\end{aligned}$$

7.7 目前可获得的极限真空度为 1.00×10^{-18} atm。求在此真空度下 1 cm^3 空气内平均有多少个分子? 设温度为 20 °C。

$$\begin{aligned}\text{解} \quad n &= \frac{p}{kT} = \frac{1.00 \times 10^{-18} \times 1.01 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 293} \\ &= 2.5 \times 10^7 \text{ m}^{-3} = 25 \text{ cm}^{-3}\end{aligned}$$

7.8 “火星探路者”航天器发回的 1997 年 7 月 26 日火星表面白天天气情况是:气压为 6.71 mbar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$), 温度为 -13.3 °C , 这时火星表面 1 cm^3 内平均有多少个分子?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad n &= \frac{p}{kT} = \frac{6.71 \times 10^2}{1.38 \times 10^{-23} \times (273.15 - 13.3)} \\ &= 1.87 \times 10^{23} \text{ m}^{-3} = 1.87 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}\end{aligned}$$

7.9 星际空间氢云内的氢原子数密度可达 $10^{10} / \text{m}^3$, 温度可达 10^4 K 。求这云内的压强。

$$\text{解} \quad p = nkT = 10^{10} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 10^4 = 1.4 \times 10^{-9} \text{ Pa}$$

7.10 设地球大气是等温的, 温度为 5.0 °C 。已知海平面上气压为 750 mmHg 时, 某山顶上的气压是 590 mmHg, 求山顶的高度。空气的摩尔质量以 29.0 g/mol 计。

解 由

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$$

可得

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0}{p} = \frac{8.31 \times 278}{29 \times 10^{-3} \times 9.8} \ln \frac{750}{590} = 1.95 \times 10^3 \text{ m}$$

7.11 氮分子的有效直径为 $3.8 \times 10^{-10} \text{ m}$, 求它在标准状态下的平均自由程和连续两次碰撞间的平均时间间隔。

解

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 273}{\sqrt{2} \pi (3.8 \times 10^{-10})^2 \times 1.01 \times 10^5} \\
 &= 5.8 \times 10^{-8} \text{ m}
 \end{aligned}$$

连续两次碰撞间的平均时间间隔为

$$\begin{aligned}
 \bar{\tau} &= \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = \bar{\lambda} \times \sqrt{\frac{\pi M}{8RT}} \\
 &= 5.8 \times 10^{-8} \times \sqrt{\frac{\pi \times 28 \times 10^{-3}}{8 \times 8.31 \times 273}} = 1.3 \times 10^{-10} \text{ s}
 \end{aligned}$$

7.12 真空管的线度为 10^{-2} m , 其中真空度为 $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$, 设空气分子的有效直径为 $3 \times 10^{-10} \text{ m}$, 求 27°C 时单位体积内的空气分子数、平均自由程和平均碰撞频率。

解

$$n = \frac{p}{kT} = \frac{1.33 \times 10^{-3}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} = 3.2 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

容器足够大时

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 3.2 \times 10^{17}} = 7.8 \text{ m}
 \end{aligned}$$

此 $\bar{\lambda}$ 比真空管线度 (10^{-2} m) 大得多, 所以空气分子之间实际上不可能发生相互碰撞, 而只能和管壁碰撞。所以平均自由程就应是真空管的线度, 即 $\bar{\lambda} = 10^{-2} \text{ m}$ 。这样, 平均碰撞频率为

$$\begin{aligned}
 \bar{z} &= \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \\
 &= \frac{1}{10^{-2}} \sqrt{\frac{8 \times 8.31 \times 300}{\pi \times 29 \times 10^{-3}}} \\
 &= 4.7 \times 10^4 \text{ s}^{-1}
 \end{aligned}$$

7.13 在 160 km 高空, 空气密度为 $1.5 \times 10^{-9} \text{ kg/m}^3$, 温度为 500 K 。分子直径以 $3.0 \times 10^{-10} \text{ m}$ 计, 求该处空气分子的平均自由程与连续两次碰撞相隔的平均时间。

解

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{M}{\sqrt{2} \pi d^2 \rho N_A} \\
 &= \frac{29 \times 10^{-3}}{\sqrt{2} \pi \times (3 \times 10^{-10})^2 \times 1.5 \times 10^{-9} \times 6.02 \times 10^{23}} \\
 &= 80 \text{ m} \\
 \bar{\tau} &= \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = \bar{\lambda} \sqrt{\frac{\pi M}{8RT}} = 80 \times \sqrt{\frac{\pi \times 29 \times 10^{-3}}{8 \times 8.31 \times 500}} = 0.13 \text{ s}
 \end{aligned}$$

7.14 在气体放电管中,电子不断与气体分子碰撞。因电子的速率远大于气体分子的平均速率,所以气体分子可以认为是不动的。设电子的“有效直径”比起气体分子的有效直径 d 来可以忽略不计。求:

- (1) 电子与气体分子的碰撞截面;
- (2) 电子与气体分子碰撞的平均自由程(以 n 表示气体分子数密度)。

解 (1)
$$\sigma = \pi \left(\frac{d}{2} + \frac{d_e}{2} \right)^2$$

由于 $d_e \ll d$, 所以可以得

$$\sigma = \pi d^2 / 4$$

$$(2) \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{v}_e}{\bar{z}} = \frac{\bar{v}_e}{n\sigma \bar{u}}$$

由于电子之间互相碰撞机会极小, \bar{z} 就是一个电子与气体分子的碰撞频率。由于电子的热运动平均速度 \bar{v}_e 比气体分子的热运动平均速度大得多, 所以电子对气体分子的相对速度 $\bar{u} = \bar{v}_e$ 。这样就有

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{n\sigma} = \frac{4}{\pi d^2 n}$$

7.15 一篮球充气后,其中有氮气 8.5 g, 温度为 17 °C, 在空中以 65 km/h 的高速飞行。求:

- (1) 一个氮分子(设为刚性分子)的热运动平均平动动能、平均转动动能和平均总动能;
- (2) 球内氮气的内能;
- (3) 球内氮气的轨道动能。

解 (1) $\bar{\epsilon}_t = \frac{t}{2} kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 290 = 6.00 \times 10^{-21} \text{ J}$

$$\bar{\epsilon}_r = \frac{r}{2} kT = \frac{2}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 290 = 4.00 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 290 = 10.00 \times 10^{-21} \text{ J}$$

$$(2) E = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{5}{2} \times \frac{8.5}{28} \times 8.31 \times 290 = 1.83 \times 10^3 \text{ J}$$

$$(3) E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 8.5 \times 10^{-3} \times \left(\frac{65 \times 1000}{3600} \right)^2 = 1.39 \text{ J}$$

7.16 温度为 27 °C 时, 1 mol 氮气、氢气和氧气各有多少内能? 1 g 的这些气体各有多少内能?

解 $E_{\text{m, He}} = \frac{i}{2}RT = \frac{3}{2} \times 8.31 \times 300 = 3.74 \times 10^3 \text{ J/mol}$

$$E_{\text{m, H}_2} = \frac{i}{2}RT = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 6.23 \times 10^3 \text{ J/mol}$$

$$E_{\text{m, O}_2} = \frac{i}{2}RT = \frac{5}{2} \times 8.31 \times 300 = 6.23 \times 10^3 \text{ J/mol}$$

对 1 g 的气体

$$E_{\text{He}} = \nu E_{\text{m, He}} = \frac{1}{4} \times 3.74 \times 10^3 = 0.935 \times 10^3 \text{ J}$$

$$E_{\text{H}_2} = \nu E_{\text{m, H}_2} = \frac{1}{2} \times 6.23 \times 10^3 = 3.12 \times 10^3 \text{ J}$$

$$E_{\text{O}_2} = \nu E_{\text{m, O}_2} = \frac{1}{32} \times 6.23 \times 10^3 = 0.195 \times 10^3 \text{ J}$$

7.17 某些恒星的温度达到 10^8 K 的数量级,在这温度下原子已不存在,只有质子存在,试求:

(1) 质子的平均动能是多少电子伏特?

(2) 质子的方均根速率多大?

解 (1) $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \times 1.38 \times 10^{-23} \times 10^8$
 $= 2.07 \times 10^{-15} \text{ J}$
 $= 1.29 \times 10^4 \text{ eV}$

(2) $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 10^8}{1 \times 10^{-3}}} = 1.58 \times 10^6 \text{ m/s}$

7.18 日冕的温度为 $2 \times 10^6 \text{ K}$,求其中电子的方均根速率。星际空间的温度为 2.7 K ,其中气体主要是氢原子,求那里氢原子的方均根速率。1994 年曾用激光冷却的方法使一群 Na 原子几乎停止运动,相应的温度是 $2.4 \times 10^{-11} \text{ K}$,求这些 Na 原子的方均根速率。

解 日冕中电子的方均根速率为

$$\begin{aligned} v_{\text{rms, e}} &= \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} \\ &= \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 2 \times 10^6}{9.1 \times 10^{-31}}} \\ &= 0.95 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

星际空间氢原子的方均根速率为

$$v_{\text{rms}, \text{H}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{H}}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 2.7}{1 \times 10^{-3}}} \\ = 2.6 \times 10^2 \text{ m/s}$$

激光冷却的 Na 原子的方均根速率为

$$v_{\text{rms}, \text{Na}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{Na}}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 2.4 \times 10^{-11}}{23 \times 10^{-3}}} \\ = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

7.19 火星的质量为地球质量的 0.108 倍,半径为地球半径的 0.531 倍,火星表面的逃逸速度多大? 以表面温度 240 K 计,火星表面 CO_2 和 H_2 分子的方均根速率多大? 以此说明火星表面有 CO_2 而无 H_2 (实际上,火星表面大气中 96% 是 CO_2)。

木星质量为地球的 318 倍,半径为地球半径的 11.2 倍,木星表面的逃逸速度多大? 以表面温度 130 K 计,木星表面 H_2 分子的方均根速率多大? 以此说明木星表面有 H_2 (实际上木星大气 78% 质量为 H_2 ,其余的是 He,其上盖有冰云,木星内部为液态甚至固态氢)。

解 对火星

$$v_{\text{e}, \text{M}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{M}}}{R_{\text{M}}}} = \sqrt{\frac{2G \times 0.108M_{\text{E}}}{0.531 \times R_{\text{E}}}} \\ = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 0.108 \times 5.98 \times 10^{24}}{0.531 \times 6.37 \times 10^6}} \\ = 5.0 \times 10^3 \text{ m/s} \\ v_{\text{rms}, \text{CO}_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{CO}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 240}{44 \times 10^{-3}}} \\ = 3.68 \times 10^2 \text{ m/s} \\ v_{\text{rms}, \text{H}_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{H}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 240}{2 \times 10^{-3}}} \\ = 1.73 \times 10^3 \text{ m/s}$$

与 CO_2 分子相比, H_2 分子容易逃逸,所以火星表面有 CO_2 而无 H_2 。

对木星

$$v_{\text{e}, \text{J}} = \sqrt{\frac{2GM_{\text{J}}}{R_{\text{J}}}} = \sqrt{\frac{2G \times 318M_{\text{E}}}{11.2R_{\text{E}}}} \\ = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 318 \times 5.98 \times 10^{24}}{11.2 \times 6.37 \times 10^6}} \\ = 6.0 \times 10^4 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{rms}, \text{H}_2} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{H}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 130}{2 \times 10^{-3}}} \\ = 1.27 \times 10^3 \text{ m/s}$$

由于 H_2 分子不易逃逸, 所以木星表面有 H_2 。

7.20 烟粒悬浮在空气中受空气分子的无规则碰撞作布朗运动的情况可用普通显微镜观察, 它和空气处于同一平衡态。一颗烟粒的质量为 $1.6 \times 10^{-16} \text{ kg}$, 求在 300 K 时它悬浮在空气中的方均根速率。此烟粒如果是在 300 K 的氢气中悬浮, 它的方均根速率与在空气中的相比会有不同吗?

解

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{1.6 \times 10^{-16}}} \\ = 8.8 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

烟粒在氢气中悬浮和在空气中悬浮, 其方均根速率不会有不同。

7.21 质量为 $6.2 \times 10^{-14} \text{ g}$ 的碳粒悬浮在 27°C 的液体中, 观察到它的方均根速率为 1.4 cm/s 。试由气体普适常量 R 值及此实验结果求阿伏伽德罗常量的值。

解 由方均根速率

$$\sqrt{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{N_A m}}$$

可得

$$N_A = \frac{3RT}{v^2 m} \\ = \frac{3 \times 8.31 \times 300}{(1.4 \times 10^{-2})^2 \times 6.2 \times 10^{-14} \times 10^{-3}} \\ = 6.15 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

7.22 摩尔质量为 89 g/mol 的氨基酸分子和摩尔质量为 $5.0 \times 10^4 \text{ g/mol}$ 的蛋白质分子在 37°C 的活细胞内的方均根速率各是多少?

解 氨基酸分子的方均根速率

$$v_{\text{rms}, \text{am}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{am}}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 310}{89 \times 10^{-3}}} = 2.9 \times 10^2 \text{ m/s}$$

蛋白质分子的方均根速率

$$v_{\text{rms}, \text{pr}} = \sqrt{\frac{3RT}{M_{\text{pr}}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 310}{5 \times 10^4}} = 12 \text{ m/s}$$

7.23 一气缸内封闭有水和饱和水蒸气, 其温度为 100°C , 压强为 1 atm , 已知这时水蒸气的摩尔体积为 $3.01 \times 10^4 \text{ cm}^3/\text{mol}$ 。

- (1) 每 cm^3 水蒸气中含有多少个水分子?
 (2) 等温压缩进活塞使水蒸气的体积缩小一半后,水蒸气的压强是多少?

解 (1) 每 cm^3 水蒸气中含有的水分子数

$$n = \frac{N_A}{V_m} = \frac{6.02 \times 10^{23}}{3.01 \times 10^{-4}} = 2.00 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

(2) 等温条件下,饱和蒸气压强与体积无关。体积缩小一半后,水蒸气压强仍是 1 atm。

7.24 证明:在平衡态下,两分子热运动相对速率的平均值 \bar{u} 与分子的平均速率 \bar{v} 有下述关系:

$$\bar{u} = \sqrt{2} \bar{v}$$

(提示:写 u_{12} 和 v_1, v_2 的关系式,然后求平均值。)

证 以 v_1 和 v_2 表示任意两个分子的热运动速度,则它们的相对速度

$$u_{12} = v_1 - v_2$$

由此可得

$$u_{12}^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta$$

其中 θ 为 v_1 和 v_2 之间的夹角。对此式求平均值,可得

$$\overline{u_{12}^2} = \overline{v_1^2} + \overline{v_2^2} - 2 \overline{v_1 v_2 \cos \theta}$$

在平衡态下, θ 角随机地在 0° 和 180° 之间分布,因而

$$\overline{\cos \theta} = 0$$

又由于 $\overline{u_{12}^2} = \overline{u^2}$, $\overline{v_1^2} = \overline{v_2^2} = \overline{v^2}$, 所以有

$$\overline{u^2} = 2 \overline{v^2}$$

由此得

$$\sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{2} \sqrt{\overline{v^2}}$$

又由于方均根速率和平均速率对于温度 T 和摩尔质量具有相同的量纲,所以最后可得

$$\bar{u} = \sqrt{2} \bar{v}$$

热力学第一定律

8.1 内容提要

1. 功的微观意义：外界对热力学系统做功而交换能量从微观机制上说可区别为做[宏观]功和传热两种情形。

系统内分子的无规则运动能量和外界分子有规则运动能量交换的过程是做宏观功的过程,简称做功过程,所交换能量的多少就等于功的大小。体积功是系统的体积发生变化时做的功,它总和系统的边界的宏观位移相联系。

系统和外界(或两个物体)的分子通过分子间无规则碰撞而交换无规则运动能量——内能的过程称为热传递过程。热传递只有在系统和外界的平均动能不同,也就是温度不同时才能发生。所传递的内能的多少叫热量,或简称热。

功和热量都是过程量。

2. 热力学第一定律：对一热力学系统,利用力学的功能关系和上述功和热的概念可导出下述功 A 、热量 Q 和内能 E 的增量的关系

$$Q = E_2 - E_1 + A, \quad dQ = dE + dA$$

其中, Q 为正时表示系统从外界吸收热量; A 为正时表示系统对外界做功; E 是状态量,其微小变化为 dE ; Q 和 A 都是过程量,其微量用 dQ 和 dA 表示。

上述公式称热力学第一定律。它是能量守恒定律的初级形式。在这一形式的基础上,通过研究范围的扩大和能量概念的发展,逐渐形成了普遍的能量守恒定律。

上述热力学第一定律公式,适用于任意过程(与是否准静态过程无关)。

3. 准静态过程：过程进行中的每一时刻,系统的状态都无限接近于平衡态(因而也就当作平衡态处理)。这种过程可以用状态图上的连续曲线表示。

准静态(无摩擦)过程中系统对外做的体积功为

$$dA = p dV, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$$

4. 热容：由于热量与过程有关，所以热容常区分为
摩尔定压热容

$$C_{p,m} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dQ}{dt} \right)_p$$

摩尔定体热容

$$C_{V,m} = \frac{1}{\nu} \left(\frac{dQ}{dt} \right)_V$$

理想气体的摩尔热容可导出为

$$C_{V,m} = \frac{i}{2}R, \quad C_{p,m} = \frac{i+2}{2}R$$

迈耶公式

$$C_{p,m} - C_{V,m} = R$$

比热比

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i}$$

5. 绝热过程：\$Q=0\$，\$A=E_1-E_2\$

理想气体的准静态绝热过程的过程方程为

$$pV^\gamma = \text{常量}, \quad A = \frac{1}{\gamma-1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$

绝热自由膨胀：一种非准静态过程。理想气体的内能不变，初末平衡态的温度相同。

6. 循环过程：系统状态发生一系列变化又回到起始状态的过程。

热循环(正循环)：系统从高温热库吸热 \$Q_1\$，向低温热库放热 \$Q_2\$。对外做功 \$A=Q_1-Q_2\$。效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

致冷循环(逆循环)：系统从低温热库吸热 \$Q_2\$，接受外界做功 \$A\$，向高温热库放热 \$Q_1=Q_2+A\$。致冷系数为

$$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}$$

7. 卡诺循环：系统只和两个恒温热库进行热交换的准静态循环过程。

正循环的效率

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

逆循环的致冷系数

$$\omega_c = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

8. 热力学温标: 利用卡诺循环的热交换关系可定义一个温标, 与进行循环的介质种类无关。这一温标称为热力学温标。它的定点也取水的三相点, 而令 $T_3 = 273.16 \text{ K}$ 。

8.2 解题思路

1. 对于本章中有关热力学第一定律的习题, 解题的一般思路也可以总结成为“热学三字经”如下:

(1) 认系统 即要确定题目中要作为分析对象的系统。这同时也就确定了外界。

(2) 辨状态 即要辨别清楚所选定的系统的初状态和末状态以及相应的状态参量, 并对同一状态参量 p 、 V 、 T 等加注同一数字下标, 如 p_1 、 V_1 、 T_1 等。对所关注的状态要弄清楚是否平衡态。对理想气体的平衡状态的各状态参量才能应用理想气体状态方程。内能表示式也只能用于平衡态。

(3) 明过程 即要明确所选定的系统经历的是什么过程。首先要分清是否是准静态过程。有很多公式, 如求体积功的积分公式和绝热过程的过程方程, 都只是准静态过程才适用的方程。其次要明确是怎样的具体过程, 如等温、等压、等体、绝热等。

(4) 列方程 即根据以上分析列出相应的方程求解。功是过程量, 可以利用求体积功的积分公式直接计算功的大小。热量也是过程量, 可以直接利用定压或定容热容量计算热量的多少。也可以利用热力学第一定律公式由已知热量求功或已知功求热量。

在解题过程中, 最好能画出过程图线。这样做对理解题目和分析求解都会有帮助。

2. 关于循环过程, 要首先理解效率和致冷系数的意义, 即如何用热量和功定义的。其次要明确卡诺循环的效率和致冷系数的意义以及它们和热力学温度的关系。这样就可以利用给出的温度计算相应的功或热, 或者相反地利用给出的功或热求出相应的温度。

8.3 思考题选答

8.4 有可能对系统加热而不致升高系统的温度吗? 有可能不作任何热交换, 而使系统的温度发生变化吗?

答 加热而系统温度不升高是可能的。如果对一定量理想气体加热的同时使它推动活塞对外做功, 而且做的功正好等于加给它的热量, 它的温度就可以保持不变。对一定量液体在沸点对它加热使之汽化, 则液体和蒸气都可以保持温度不变, 这时所加热量等于蒸气对外做的功以及液体变为蒸气时内能的增量。

外界和系统不作任何热交换也可以使系统的温度发生变化。绝热压缩气体时气体温

度升高,气体绝热膨胀时温度降低就是例子。

* 8.6 试计算 ν mol 理想气体在表 8.1 所列准静态过程中的 A, Q 和 ΔE , 以分子的自由度数和系统初、末态的状态参量表示之, 并填入表 8.1。

表 8.1 准静态过程

过程	A	Q	ΔE
等体	0	$C_V(T_2 - T_1) = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$ $= \frac{i}{2}(p_2 - p_1)V$	Q
等温	$\nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	A	0
绝热	$\frac{i}{2}\nu R(T_1 - T_2) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1 V_1 - p_2 V_2)$	0	$-A$
等压	$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1)$	$C_{p,m}(T_2 - T_1) = \frac{i+2}{2}\nu R(T_2 - T_1)$	$\frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$

8.8 一个卡诺机在两个温度一定的热库间工作时, 如果工质体积膨胀得多些, 它做的净功是否就多些? 它的效率是否就高些?

答 工质体积膨胀得多些, 卡诺机做的功就会多些。但因这时必须从高温热库吸收更多的热量, 所以效率并不会提高。这也可以用卡诺热机的效率只由两个热库的温度决定来说明。

8.4 习题解答

8.1 使一定质量的理想气体的状态按图 8.1 中的曲线沿箭头所示的方向发生变化, 曲线的 BC 段是以 p 轴和 V 轴为渐近线的双曲线。

- (1) 已知气体在状态 A 时的温度 $T_A = 300$ K, 求气体在 B, C 和 D 状态时的温度。
- (2) 从 A 到 D 气体对外做的功总共是多少?
- (3) 将上述过程在 V - T 图上画出, 并标明过程进行的方向。

解 (1) AB 为等压过程

$$T_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 300 \times \frac{20}{10} = 600 \text{ K}$$

BC 为等温过程

$$T_C = T_B = 600 \text{ K}$$

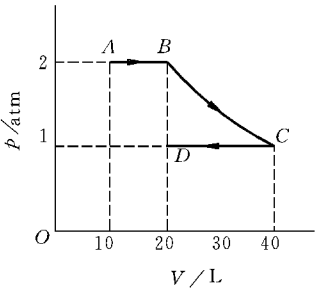


图 8.1 习题 8.1 解用图

CD 为等压过程

$$T_D = T_C \frac{V_D}{V_C} = 600 \times \frac{20}{40} = 300 \text{ K}$$

$$(2) A = A_{AB} + A_{BC} + A_{CD}$$

$$= p_A(V_B - V_A) + p_B V_B \ln \frac{V_C}{V_B} + p_C(V_D - V_C)$$

$$= \left[2 \times (20 - 10) + 2 \times 20 \times \ln \frac{40}{20} + 1 \times (20 - 40) \right] \times 1.01 \times 10^2$$

$$= 2.81 \times 10^3 \text{ J}$$

(3) V-T 图见图 8.2。

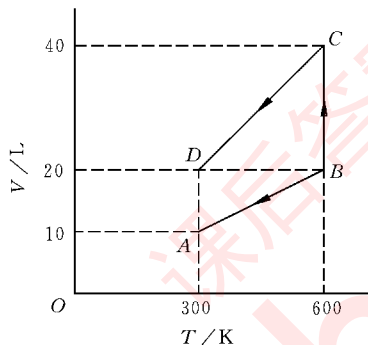


图 8.2 习题 8.1 解(3)用图

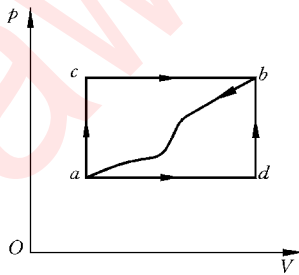


图 8.3 习题 8.2 解用图

8.2 一热力学系统由如图 8.3 所示的状态 *a* 沿 *acb* 过程到达状态 *b* 时,吸收了 560 J 的热量,对外做了 356 J 的功。

(1) 如果它沿 *adb* 过程到达状态 *b* 时,对外做了 220 J 的功,它吸收了多少热量?

(2) 当它由状态 *b* 沿曲线 *ba* 返回状态 *a* 时,外界对它做了 282 J 的功,它将吸收多少热量? 是真吸了热,还是放了热?

解 $E_b - E_a = Q_{acb} - A_{acb} = 560 - 356 = 204 \text{ J}$

(1) $Q_{adb} = E_b - E_a + A_{adb} = 204 + 220 = 424 \text{ J}$

(2) $Q_{ba} = E_a - E_b + A_{ba} = -204 + (-282) = -486 \text{ J}$

负号表示系统对外界放了 486 J 的热量。

8.3 64 g 氧气的温度由 0 °C 升至 50 °C, (1) 保持体积不变; (2) 保持压强不变。在这两个过程中氧气各吸收了多少热量? 各增加了多少内能? 对外各做了多少功?

解 (1) $Q = \nu C_{V,m} \Delta T = \frac{64}{32} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (50 - 0) = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$

$$\Delta E = Q = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$$

$$A=0$$

$$(2) \quad Q = \nu C_{p,m} \Delta T = \frac{64}{32} \times \frac{5+2}{2} \times 8.31 \times (50-0) = 2.91 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\Delta E = 2.08 \times 10^3 \text{ J}$$

$$A = Q - \Delta E = (2.91 - 2.08) \times 10^3 = 0.83 \times 10^3 \text{ J}$$

8.4 10 g 氦气吸收 10^3 J 的热量时压强未发生变化,它原来的温度是 300 K,最后的温度是多少?

解 由 $Q = \nu C_{p,m} \Delta T = \frac{mi+2}{M} R \times (T_2 - T_1)$, 得

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + \frac{2QM}{(i+2)Rm} \\ &= 300 + \frac{2 \times 10^3 \times 4}{(3+2) \times 8.31 \times 10} = 319 \text{ K} \end{aligned}$$

8.5 一定量氢气在保持压强为 $4.00 \times 10^5 \text{ Pa}$ 不变的情况下,温度由 0.0°C 升高到 50.0°C 时,吸收了 $6.0 \times 10^4 \text{ J}$ 的热量。

(1) 氢气的量是多少摩尔?

(2) 氢气内能变化多少?

(3) 氢气对外做了多少功?

(4) 如果这氢气的体积保持不变而温度发生同样变化,它该吸收多少热量?

解 (1) 由 $Q = \nu C_{p,m} \Delta T = \nu \frac{i+2}{2} R \Delta T$, 得

$$\nu = \frac{2Q}{(i+2)R\Delta T} = \frac{2 \times 6.0 \times 10^4}{(5+2) \times 8.31 \times 50} = 41.3 \text{ mol}$$

$$(2) \quad \Delta E = \nu C_{v,m} \Delta T = \nu \times \frac{i}{2} R \Delta T = 41.3 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times 50 = 4.29 \times 10^4 \text{ J}$$

$$(3) \quad A = Q - \Delta E = (6.0 - 4.29) \times 10^4 = 1.71 \times 10^4 \text{ J}$$

$$(4) \quad Q = \Delta E = 4.29 \times 10^4 \text{ J}$$

8.6 一定量的氮气,压强为 1 atm,体积为 10 L,温度为 300 K。当其体积缓慢绝热地膨胀到 30 L 时,其压强和温度各是多少? 在这一过程中它对外界做了多少功? 内能改变了多少?

解 题已给定氮气, $p_1 = 1 \text{ atm} = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 10 \text{ L} = 10^{-2} \text{ m}^3$, $V_2 = 30 \text{ L} = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^3$, $T_1 = 300 \text{ K}$, $i = 5$, $\gamma = 1.4$

由 $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ 得

$$p_2 = p_1 V_1^\gamma / V_2^\gamma = 1 \times (10/30)^{1.4} = 0.215 \text{ atm}$$

由 $p_1 V_1 / T_1 = p_2 V_2 / T_2$ 得

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = 300 \times \frac{0.215 \times 30}{1 \times 10} = 193 \text{ K}$$

气体对外做的功为

$$A = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{1}{1.4 - 1} (1 \times 10 - 0.215 \times 30) \times 1.01 \times 10^2 = 896 \text{ (J)}$$

而其内能的改变为

$$\Delta E = -A = -896 \text{ J}$$

8.7 3 mol 氧气在压强为 2 atm 时体积为 40 L, 先将它绝热压缩到一半体积, 接着再令它等温膨胀到原体积。

- (1) 求这一过程的最大压强和最高温度;
- (2) 求这一过程中氧气吸收的热量、对外做的功以及内能的变化;
- (3) 在 p - V 图上画出整个过程的过程曲线。

解 (1) 最大压强和最高温度出现在绝热过程的终态:

$$p_2 = p_1 (V_1 / V_2)^\gamma = 2 \times (40/20)^{1.4} = 5.28 \text{ atm}$$

$$T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R} = \frac{5.28 \times 1.013 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{3 \times 8.31} = 429 \text{ K}$$

$$(2) \quad Q = 0 + \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$= 3 \times 8.31 \times 429 \times \ln \frac{40}{20}$$

$$= 7.41 \times 10^3 \text{ J}$$

$$A = \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) + \nu R T_2 \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$= \frac{1}{1.4 - 1} (2 \times 40 - 5.28 \times 20) \times 1.013 \times 10^2$$

$$+ 3 \times 8.31 \times 429 \times \ln \frac{40}{20}$$

$$= 0.93 \times 10^3 \text{ J}$$

$$\Delta E = Q - A = (7.41 - 0.93) \times 10^3 = 6.48 \times 10^3 \text{ J}$$

(3) 整个过程的过程曲线如图 8.4 所示。

8.8 如图 8.5 所示, 有一气缸由绝热壁和绝热活塞构成。最初气缸内体积为 30 L, 有一隔板将其分为两部分: 体积为 20 L 的部分充以 35 g 氮气, 压强为 2 atm; 另一部分为真空。今将隔板上的孔打开, 使氮气充满整个气缸。然后缓慢地移动活塞使氮气膨胀, 体

积变为 50 L。

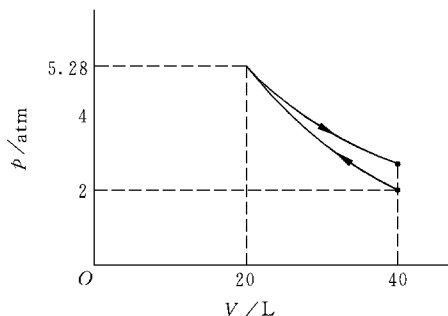


图 8.4 习题 8.7(3)解用图

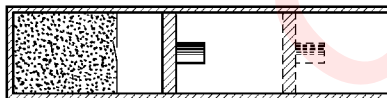


图 8.5 习题 8.8 用图

- (1) 求最后氮气的压强和温度；
- (2) 求氮气体积从 20 L 变到 50 L 的整个过程中氮气对外做的功及氮气内能的变化；
- (3) 在 p - V 图中画出整个过程的过程曲线。

解 (1) 氮气的初温度为

$$T_1 = \frac{Mp_1V_1}{mR} = \frac{28 \times 2 \times 1.013 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3}}{35 \times 8.31} = 390 \text{ K}$$

打开隔板上的孔, 气体绝热自由膨胀到 30 L, 温度为 $T_2 = T_1 = 390 \text{ K}$, 压强 $p_2 = p_1V_1/V_2 = 2 \times 20/30 = \frac{4}{3} \text{ atm}$ 。最后的压强为

$$p_3 = p_2(V_2/V_3)^2 = \frac{4}{3} \times \left(\frac{30}{50}\right)^{1.4} = 0.652 \text{ atm}$$

最后的温度为

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{Mp_3V_3}{mR} = \frac{28 \times 0.652 \times 1.0 \times 10^5 \times 50 \times 10^{-3}}{35 \times 8.31} \\ &= 317 \text{ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \Delta E &= \frac{m}{M} \frac{i}{2} R \Delta T \\ &= \frac{35}{28} \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (317 - 390) \\ &= -1.90 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

由于 $Q=0$

$$A = -\Delta E = 1.90 \times 10^3 \text{ J}$$

- (3) 整个过程的过程曲线如图 8.6

所示。

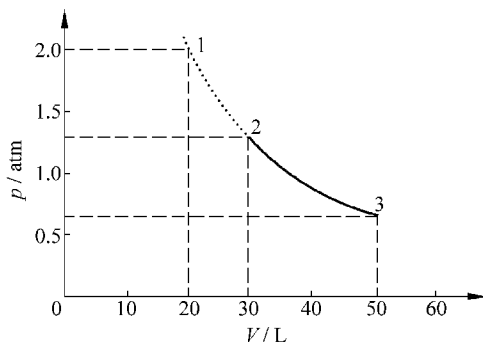


图 8.6 习题 8.8(3)解用图

8.9 两台卡诺热机串联运行,即以第一台卡诺热机的低温热库作为第二台卡诺热机的高温热库。试证明它们各自的效率 η_1 及 η_2 和该联合机的总效率 η 有如下的关系:

$$\eta = \eta_1 + (1 - \eta_1)\eta_2$$

再用卡诺热机效率的温度表示式证明这联合机的总效率和一台工作于最高温度与最低温度的热库之间的一台卡诺热机的效率相同。

证 以 T_1, T_2, T_3 分别表示三个热库的温度,以 Q_1 和 Q_2 分别表示第一台热机吸收和放出的热量,以 A_1 和 A_2 分别表示第一台和第二台热机对外做的功,则

$$A_1 = \eta_1 Q_1, \quad A_2 = \eta_2 Q_2 = \eta_2 (Q_1 - A_1) = Q_1 \eta_2 (1 - \eta_1)$$

总的效率为

$$\eta = \frac{A_1 + A_2}{Q_1} = \eta_1 + (1 - \eta_1)\eta_2$$

由于 $\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$, $\eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_2}$, 所以

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + \left[1 - \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)\right] \left(1 - \frac{T_3}{T_2}\right) = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

即与一台卡诺热机的效率相同。

8.10 有可能利用表层海水和深层海水的温差来制成热机。已知热带水域表层水温约 25°C , 300 m 深处水温约 5°C 。

(1) 在这两个温度之间工作的卡诺热机的效率多大?

(2) 如果一电站在此最大理论效率下工作时获得的机械功率是 1 MW , 它将以何速率排出废热?

(3) 此电站获得的机械功和排出的废热均来自 25°C 的水冷却到 5°C 所放出的热量, 问此电站将以何速率取用 25°C 的表层水?

解 (1)
$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278}{298} = 6.7\%$$

(2) 由 $\eta = 1 - Q_2/Q_1 = 1 - Q_2/(A + Q_2)$ 可得

$$Q_2 = \frac{A(1 - \eta)}{\eta} = \frac{10^6 \times (1 - 0.067)}{0.067} = 14 \times 10^6\text{ J}$$

即电站将以 14 MW 的速率排出废热。

(3) $Q_1 = A + Q_2 = Cm\Delta T$

$$m = \frac{A + Q_2}{C\Delta T} = \frac{1 \times 10^6 + 14 \times 10^6}{4.18 \times 10^3 (25 - 5)} = 1.8 \times 10^2\text{ kg}$$

即以 $1.8 \times 10^2\text{ kg/s} = 6.5 \times 10^2\text{ t/h}$ 的速率取用表层水。

8.11 一台冰箱工作时,其冷冻室中的温度为 -10°C , 室温为 15°C 。若按理想卡诺致冷循环计算,则此致冷机每消耗 10^3 J 的功,可以从冷冻室中吸出多少热量?

解 由于

$$w = \frac{Q_2}{A} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

所以

$$Q_2 = \frac{AT_2}{T_1 - T_2} = \frac{10^3 \times 263}{288 - 263} = 1.05 \times 10^4 \text{ J}$$

8.12 当外面气温为 32°C 时,用空调器维持室内温度为 21°C 。已知漏入室内热量的速率是 $3.8 \times 10^4 \text{ kJ/h}$,求所用空调器需要的最小机械功率是多少。

解

$$\begin{aligned} A &= \frac{Q_2}{w} > \frac{Q_2}{w_c} = \frac{Q_2(T_1 - T_2)}{T_2} \\ &= \frac{3.8 \times 10^4 \times (305 - 294)}{294} = 1.4 \times 10^3 \text{ kJ/h} \end{aligned}$$

所需最小功率为

$$P_{\min} = \frac{A_{\min}}{t} = \frac{1.4 \times 10^6}{3600} = 0.39 \text{ kW}$$

8.13 有一暖气装置如下:用一热机带动一致冷机,致冷机自河水中吸热而供给暖气系统中的水,同时这暖气中的水又作为热机的冷却器。热机的高温热库的温度是 $t_1 = 210^\circ\text{C}$,河水温度是 $t_2 = 15^\circ\text{C}$,暖气系统中的水温为 $t_3 = 60^\circ\text{C}$ 。设热机和致冷机都以理想气体为工质,分别以卡诺循环和卡诺逆循环工作,那么每燃烧 1 kg 煤,暖气系统中的水得到的热量是多少? 是煤所发热量的几倍? 已知煤的燃烧值是 $3.34 \times 10^7 \text{ J/kg}$ 。

解 如图 8.7 所示, $T_1 = 483 \text{ K}$, $T_2 = 333 \text{ K}$, $T_3 = 288 \text{ K}$, $Q_1 = 3.34 \times 10^7 \text{ J}$ 。

$$A = \eta Q_1 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) Q_1$$

$$Q_2 = Q_1 - A = \frac{T_2}{T_1} Q_1$$

$$Q'_2 = Q'_1 + A = A(\omega' + 1) = A\left(\frac{T_3}{T_2 - T_3} + 1\right)$$

$$= A \frac{T_2}{T_2 - T_3} = \frac{(T_1 - T_2)T_2}{T_1(T_2 - T_3)} Q_1$$

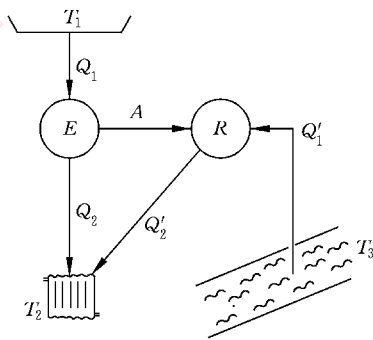


图 8.7 习题 8.13 解用图

$$\begin{aligned}
 Q_2 + Q'_2 &= \left[\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2(T_1 - T_2)}{T_1(T_2 - T_3)} \right] Q_1 \\
 &= \left[\frac{333}{483} + \frac{333 \times (483 - 333)}{483 \times (333 - 288)} \right] \times 3.34 \times 10^7 \\
 &= 9.98 \times 10^7 \text{ J}
 \end{aligned}$$

这一热量是煤所发热量的倍数为

$$\frac{9.98 \times 10^7}{4.43 \times 10^7} = 2.99 \text{ 倍}$$

8.14 美国马戏团曾有将人作为炮弹发射的节目。原书图 8.23 是 2005 年 8 月 27 日在墨西哥边境将著名美国人体炮弹戴维·史密斯发射到美国境内的情景。

假设炮筒直径是 0.8 m, 炮筒长 4.0 m。史密斯原来屈缩在炮筒底部。火药爆发后产生的气体在推动他之前的体积为 2.0 m^3 , 压强为 2.6 atm, 然后经绝热膨胀把他推出炮筒。如果气体推力对他做的功的 75% 用来推他前进, 而史密斯的质量是 70 kg, 则史密斯在出口处速率多大? 当时大气压强按 1.0 atm 计算, 火药产生的气体的比热比 γ 取值 1.4。

解 史密斯临飞出炮口时, 已爆发火药产生的气体体积为

$$V_2 = V_1 + \pi R^2 \cdot l = 2.0 + \pi \times 0.4^2 \times 4.0 = 2.0 + 2.0 = 4.0 \text{ m}^3$$

这时气体的压强变为

$$p_2 = p_1 (V_1/V_2)^\gamma = 2.6 \times (2/4)^{1.4} = 0.99 \text{ atm}$$

气体膨胀时推史密斯做的功减去他在炮筒中运动时要克服大气压做的功, 为

$$\begin{aligned}
 A_{\text{eff}} &= \frac{1}{\gamma - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) \times 75\% - p_0 \cdot \pi R^2 \cdot l \\
 &= \frac{1}{1.4 - 1} (2.6 \times 2 - 0.99 \times 4) \times 75\% - 1 \times \pi \times 0.4^2 \times 4.0 \\
 &= 0.315 \text{ atm} \cdot \text{m}^3 = 3.18 \times 10^4 \text{ J}
 \end{aligned}$$

这样多的能量转变成了史密斯的出口动能, 他在出口处的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2A_{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.18 \times 10^4}{75}} = 29 \text{ m/s}$$

热力学第二定律

9.1 内容提要

1. 各种宏观的自然过程都是不可逆的,而且它们的不可逆性又是相互沟通、相互支持的。

三个实例:功热转换、热传导、气体的绝热自由膨胀。

2. 热力学第二定律:说明过程方向性的定律。可以用任一个不可逆的自然过程表述。

克劳修斯表述:热量不能自动地由低温物体传向高温物体。

开尔文表述:其惟一效果是热全部转变为功的过程是不可能的。

热力学第二定律的微观意义是:自然过程总是沿着使分子运动更加无序的方向进行。

3. 热力学概率 Ω :描述由大量分子组成的系统的微观状态的无序性的定量表述。它等于和系统的同一宏观状态对应的可能微观状态数。用它可以把热力学第二定律表述为:自然过程沿着 Ω 增大的方向进行。平衡态相应于一定宏观条件下 Ω 最大的状态。

4. 玻耳兹曼熵公式:熵 S 是在微观描述基础上定义的表明系统微观无序性的宏观量。它的定义为

$$S = k \ln \Omega$$

式中 k 是玻耳兹曼常量。

用熵的概念,热力学第二定律可表述为:对孤立系的各种自然过程总有

$$\Delta S > 0$$

这是一条统计规律,只适用于由大量分子组成的集体。

5. 可逆过程:外界条件改变无穷小的量就可以使其反向进行的过程(其结果是系统

和外界能同时回到平衡态)。无摩擦的准静态过程就是可逆过程。系统和外界进行等温热传导(实际上是系统和外界的温差为无穷小)的过程也是可逆过程。本章所涉及的等温、等压、等体以及缓慢进行的绝热过程都可作为可逆过程处理。

6. 克劳修斯熵公式: 是可以宏观量计算熵的变化的公式,只用于可逆过程

$$dS = \frac{dQ}{T}, \quad S_2 - S_1 = \int_{R,1}^2 \frac{dQ}{T}$$

此处熵 S 是系统的平衡态的状态量。经过任意过程系统从平衡态 1 变化到平衡态 2 时,熵的增量需利用联系两状态的可逆过程和上式来计算。

对不可逆过程,有 $dS > \frac{dQ}{T}$ 。

熵增加原理: 对孤立系内进行的过程

$$\Delta S \geq 0$$

式中等于号用于可逆过程。

7. 能量的退降: 过程的不可逆性总要引起能量(包括内能)的退降即做功数量的减少。退降的能量大小和过程的不可逆性引起熵的增加成正比。

就能量的转换和传递来说,对于自然过程,热力学第一定律指出,能量的数量是守恒的;热力学第二定律指出,就做功来说,能量的质量越来越降低了。“You can't get ahead, and you can't even break even!”

9.2 解题思路

本章习题主要是进行熵变的计算。一般解题思路仍是“热学三字经”。在认定系统和辨明初末状态之后,“明过程”时首先要明确题目给出的是什么过程,是可逆的,还是不可逆的。如果是不可逆时,在利用克劳修斯熵公式计算熵变时,一定要选择一个从初态过渡到末态的可逆过程,然后代入公式计算。

9.3 思考题选答

9.4 一条等温线与一条绝热线是否能有两个交点? 为什么?

答 不可能! 设有两个交点分别在系统处于状态 1 和状态 2 处。等温线和绝热线表明系统进行的是可逆过程。按克劳修斯熵公式计算,对可逆绝热过程, $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = 0$, 对可逆等温过程则有 $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} \neq 0$ 。由于熵是状态量,状态 1 和状态 2 的熵变有惟一的值。上述计算给出的结果与此不符。所以一条等温线和一条绝热线不可能有

两个交点。

9.6 一杯热水置于空气中,它总是要冷却到与周围环境相同的温度。在这一自然过程中,水的熵减小了。这与熵增加原理矛盾吗?

答 不矛盾。因为熵增加原理只能应用于孤立系。此处水和环境交换热量,水并不是孤立系。如果把水和环境一起算在系统内构成一个孤立系统,则水的熵虽然减小了,但环境却同时由于吸热而熵增大了。由于传热是在有限温度差的条件下产生的,水和环境构成的孤立系的熵还是增加了。

9.4 习题解答

9.1 1 mol 氧气(当成刚性分子理想气体)经历如图 9.1 所示的过程由 a 经 b 到 c 。求在此过程中气体对外做的功、吸的热以及熵变。

解 气体对外做的功等于 abc 过程曲线下的面积,即

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(p_a + p_b)(V_b - V_a) + \frac{1}{2}(p_b + p_c)(V_c - V_b) \\ &= \frac{1}{2}(8 + 6) \times 10^5 \times (2 - 1) \times 10^{-3} \\ &\quad + \frac{1}{2}(8 + 4) \times 10^5 \times (3 - 2) \times 10^{-3} \\ &= 1.3 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

气体吸热为

$$\begin{aligned} Q &= E_c - E_a + A = C_{V,m}(T_c - T_a) + A \\ &= \frac{i}{2}R(T_c - T_a) + A = \frac{i}{2}(p_c V_c - p_a V_a) + A \\ &= \frac{5}{2}(4 \times 3 - 6 \times 1) \times 10^5 \times 10^{-3} + 1.3 \times 10^3 \\ &= 2.79 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= C_V \ln \frac{T_c}{T_a} + R \ln \frac{V_c}{V_a} = \frac{i}{2} R \ln \frac{p_c V_c}{p_a V_a} + R \ln \frac{V_c}{V_a} \\ &= R \left(\frac{i}{2} \ln \frac{p_c}{p_a} + \frac{i+2}{2} \ln \frac{V_c}{V_a} \right) \\ &= 8.31 \times \left(\frac{5}{2} \times \ln \frac{4}{6} + \frac{5+2}{2} \times \ln \frac{3}{1} \right) \end{aligned}$$

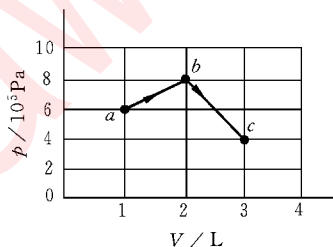


图 9.1 习题 9.1 解用图

$$= 23.5 \text{ J/K}$$

9.2 求在一个大气压下 30 g, -40°C 的冰变为 100°C 的蒸气时的熵变。已知冰的比热 $c_1 = 2.1 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$, 水的比热, $c_2 = 4.2 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$, 在 $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ 气压下冰的熔化热 $\lambda = 334 \text{ J/g}$, 水的汽化热 $L = 2260 \text{ J/g}$ 。

解 -40°C 的冰升温至 0°C 时的熵变为

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_1 m dT}{T} = c_1 m \ln \frac{T_2}{T_1}$$

冰等压等温熔成 0°C 的水时的熵变为

$$\Delta S_2 = \int_{T_2} \frac{dQ}{T_2} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{\lambda m}{T_2}$$

0°C 的水等压升温至 100°C 时的熵变为

$$\Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{dQ}{T} = \int_{T_2}^{T_3} \frac{c_2 m dT}{T} = c_2 m \ln \frac{T_3}{T_2}$$

100°C 的水等压等温汽化为 100°C 的水蒸气时的熵变为

$$\Delta S_4 = \int_{T_3} \frac{dQ}{T_3} = \frac{Q_4}{T_3} = \frac{Lm}{T_3}$$

-40°C 的冰变为 100°C 的水蒸气时的总熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 \\ &= m \left(c_1 \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda}{T_2} + c_2 \ln \frac{T_3}{T_2} + \frac{L}{T_3} \right) \\ &= 30 \times \left(2.1 \times \ln \frac{273}{233} + \frac{334}{273} + 4.2 \times \ln \frac{373}{273} + \frac{2260}{373} \right) \\ &= 268 \text{ J/K} \end{aligned}$$

9.3 你一天大约向周围环境散发 $8 \times 10^6 \text{ J}$ 热量, 试估算你一天产生多少熵? 忽略你进食时带进体内的熵, 环境的温度按 273 K 计算。

解 设人体温度为 $T_1 = 36^\circ\text{C} = 309 \text{ K}$, 环境温度为 $T_2 = 273 \text{ K}$ 。一天产生的熵即人和环境熵的增量之和, 即

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{-Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = 8 \times 10^6 \times \left(\frac{-1}{309} + \frac{1}{273} \right) \\ &= 3.4 \times 10^3 \text{ J/K} \end{aligned}$$

9.4 在冬日一座房子散热的速率为 $2 \times 10^8 \text{ J/h}$ 。设室内温度是 20°C , 室外温度是 -20°C , 这一散热过程产生熵的速率($\text{J}/(\text{K} \cdot \text{s})$)是多大?

解
$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{-Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = 2 \times 10^8 \times \left(\frac{-1}{293} + \frac{1}{253} \right)$$

$$=1.08 \times 10^5 \text{ J/K}$$

产生熵的速率为

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = 1.08 \times 10^5 / 3600 = 30 \text{ J/(K} \cdot \text{s)}$$

9.5 一汽车匀速开行时,消耗在各种摩擦上的功率是 20 kW。求由于这个原因而产生熵的速率(J/(K·s))是多大? 设气温为 12℃。

解 产生熵的速率为

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{Q}{T \Delta t} = \frac{20 \times 10^3}{285 \times 1} = 70 \text{ J/(K} \cdot \text{s)}$$

9.6 长白山瀑布的落差为 68 m。当其流量为 23 m³/s,气温为 12℃时,此瀑布每秒钟产生多少熵?

解 水落下后机械能转变为内能使水温从气温 T_1 升高到 T_2 。温差($T_2 - T_1$)可由以下能量关系式求得:

$$mgh = cm(T_2 - T_1)$$

即

$$T_2 - T_1 = \frac{gh}{c}$$

其中 c 为水的比热容,等于 $4.2 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ 。由于水温的改变

$$T_2 - T_1 = \frac{gh}{c} = \frac{9.8 \times 68}{4.2 \times 10^3} = 0.16 \text{ K}$$

甚小,此问题中的熵变可认为是在恒温 12℃ 下由机械能 mgh 转变成了内能而产生的。因此,1 秒内产生的熵为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{\Delta Q}{T} = \frac{mgh}{T_1} \\ &= \frac{23 \times 10^3 \times 9.8 \times 68}{285} = 5.4 \times 10^4 \text{ J/K} \end{aligned}$$

9.7 (1) 1 kg, 0℃ 的水放到 100℃ 的恒温热库上,最后达到平衡,问这一过程引起的水和恒温热库所组成的系统的熵变是增加还是减少?

(2) 如果 1 kg, 0℃ 的水,先放到 50℃ 的恒温热库上使之达到平衡,然后再把它移到 100℃ 的恒温热库上使之达到平衡。求这一过程引起的整个系统(水和两个恒温热库)的熵变,并与(1)比较。

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \Delta S &= \Delta S_{\text{water}} + \Delta S_{\text{reservoir}} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm dT}{T} + \frac{Q}{T_2} \\ &= cm \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{-cm(T_2 - T_1)}{T_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4.18 \times 10^3 \times 1 \times \ln \frac{373}{273} + \frac{-4.18 \times 10^3 \times 1 \times (373 - 273)}{373} \\
 &= 184 \text{ J/K} > 0
 \end{aligned}$$

熵增加了。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \Delta S &= \Delta S_{w1} + \Delta S_{w2} + \Delta S_{r1} + \Delta S_{r2} \\
 &= \Delta S_w + \Delta S_{r1} + \Delta S_{r2} \\
 &= cm \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{-cm(T' - T_1)}{T'} + \frac{-cm(T_2 - T')}{T_2} \\
 &= 4.18 \times 10^3 \times 1 \times \ln \frac{373}{273} - \frac{4.18 \times 10^3 \times 1 \times (323 - 373)}{323} \\
 &\quad - \frac{4.18 \times 10^3 \times 1 \times (373 - 323)}{373} \\
 &= 97 \text{ J/K}
 \end{aligned}$$

熵也增加了,但比只用两个热库时增加得少。中间热库越多,熵增加得越少。如果中间热库“无限多”,过程就变成可逆的,而系统的熵将保持不变。

9.8 一金属筒内放有 2.5 kg 水和 0.7 kg 冰,温度为 0 °C 而处于平衡态。

(1) 今将金属筒置于比 0 °C 稍有不同的房间内使筒内达到水和冰质量相等的平衡态。求在此过程中冰水混合物的熵变以及它和房间的整个熵变各是多少。

(2) 现将筒再放到温度为 100 °C 的恒温箱内使筒内的冰水混合物状态复原。求此过程中冰水混合物的熵变以及它和恒温箱的整个熵变各是多少。

解 (1) 要达到水和冰的质量相等,需有 0.9 kg 的水变为冰。这是在保持温度为 0 °C 的情况下发生的。这一变化过程的熵变为

$$\Delta S_w = \frac{-Q}{T} = \frac{-334 \times 10^3 \times 0.9}{273} = -1.10 \times 10^3 \text{ J/K}$$

与此同时,环境(0 °C)吸热引起的熵变为

$$\Delta S_{en} = \frac{Q}{T} = \frac{334 \times 10^3 \times 0.9}{273} = 1.10 \times 10^3 \text{ J/K}$$

水和房间的总熵变为

$$\Delta S_w + \Delta S_{en} = 0$$

(2) 冰水混合物的熵变为

$$\Delta S'_w = -\Delta S_w = 1.10 \times 10^3 \text{ J/K}$$

恒温箱放热的熵变为

$$\Delta S'_{en} = -\frac{Q}{T'} = -\frac{334 \times 10^3 \times 0.9}{373} = -0.81 \times 10^3 \text{ J/K}$$

总熵变为

$$\Delta S'_w + \Delta S'_{\text{en}} = (1.10 - 0.81) \times 10^3 = 0.29 \times 10^3 \text{ J/K}$$

9.9 一理想气体开始处于 $T_1 = 300 \text{ K}$, $p_1 = 3.039 \times 10^5 \text{ Pa}$, $V_1 = 4 \text{ m}^3$ 。该气体等温地膨胀到体积为 16 m^3 , 接着经过一等体过程而达到某一压强, 从这个压强再经一绝热压缩就能使气体回到它的初态。设全部过程都是可逆的。

(1) 在 p - V 图上画出上述循环过程。

(2) 计算每段过程和循环过程气体所做的功和它的熵的变化(已知 $\gamma = 1.4$)。

解 (1) 循环的 p - V 图如图 9.2 所示。

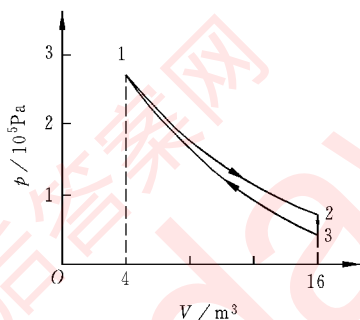


图 9.2 习题 9.9 解用图

(2) 等温过程中气体对外做的功为

$$\begin{aligned} A_T &= \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= 3.039 \times 10^5 \times 4 \times \ln \frac{16}{4} = 1.69 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S_T &= \frac{Q}{T_1} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= \frac{3.039 \times 10^5 \times 4}{300} \ln \frac{16}{4} \\ &= 5.63 \times 10^3 \text{ J/K} \end{aligned}$$

等体过程中气体对外做的功 $A_V = 0$, 熵变为

$$\Delta S_V = \int_{T_2}^{T_3} \frac{\nu C_{V,m} dT}{T} = \nu C_{V,m} \ln \frac{T_3}{T_2}$$

由于 $T_3/T_2 = T_3/T_1 = (V_1/V_2)^{\gamma-1}$, 所以又有

$$\Delta S_V = \nu C_{V,m} \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \nu(\gamma-1) C_{V,m} \ln \frac{V_1}{V_2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p_1 V_1}{RT_1} (\gamma - 1) C_{V,m} \ln \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_1 V_1}{T_1} \ln \frac{V_1}{V_2} \\
 &= \frac{3.039 \times 10^5 \times 4}{300} \ln \frac{4}{16} = -5.63 \times 10^3 \text{ J/K}
 \end{aligned}$$

绝热过程中气体对外做的功为

$$\begin{aligned}
 A_s &= \frac{1}{\gamma - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right] \\
 &= \frac{3.039 \times 10^5 \times 4}{1.4 - 1} \left[\left(\frac{4}{16} \right)^{1.4 - 1} - 1 \right] \\
 &= -1.30 \times 10^6 \text{ J}
 \end{aligned}$$

熵变为

$$\Delta S_s = 0$$

整个循环过程气体对外做功为

$$\begin{aligned}
 A &= A_T + A_V + A_s \\
 &= 1.69 \times 10^6 + 0 + (-1.30 \times 10^6) \\
 &= 0.39 \times 10^6 \text{ J}
 \end{aligned}$$

熵变为

$$\begin{aligned}
 \Delta S &= \Delta S_T + \Delta S_V + \Delta S_s \\
 &= 5.63 \times 10^3 + (-5.63 \times 10^3) + 0 = 0
 \end{aligned}$$

第

3

篇

电 磁 学

www.khdaW.com
课后答案网

静 电 场

10.1 内容提要

1. 电荷的基本性质：电荷有正、负两种，电荷有基本单元——量子性，孤立系的电荷守恒（电量的代数和保持不变），粒子所带电量及其速度无关——相对论不变性。

2. 电场和电场强度：电荷通过场相互作用，其中之一是电场。电场强度用静止电荷 q 在各处受的力定义，即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

电场叠加原理：

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i$$

3. 库仑定律：真空中两静止电荷之间的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}\boldsymbol{e}_r$$

其中

$$k = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

真空介电常量

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

静止的点电荷的电场分布

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0r^2}\boldsymbol{e}_r$$

q 为场源电荷。

电偶极子的中垂线上的静电场分布

$$E = \frac{-p}{4\pi\epsilon r^3}$$

其中 p 为电偶极子的电矩

$$p = ql$$

4. 电场线和电通量: 通过某一面积 S 的电通量为

$$\Phi_e = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

它等于通过 S 面的电场线的总条数。

对封闭面 S ,

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (d\mathbf{S} \text{ 的正(法线)方向由面内指向面外})$$

它等于从封闭面 S 净穿出的电场线的条数。

5. 高斯定律: 通过电场中任一封闭面的电通量 Φ_e 等于该封闭面所包围的电量的代数和除以 ϵ_0 , 即

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{int}}$$

6. 典型的静电场分布:

(1) 均匀带电球面, 带电量为 q ,

$$E = 0 (\text{球面内}), \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r (\text{球面外})$$

(2) 均匀带电球体, 体电荷密度为 $\rho (\text{C/m}^3)$,

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} (\text{球内}), \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r (\text{球外})$$

(3) 均匀带电无限长直线, 线电荷密度为 $\lambda (\text{C/m})$,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{方向垂直于带电直线}$$

(4) 均匀带电无限大平面, 面电荷密度为 $\sigma (\text{C/m}^2)$,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad \text{方向垂直带电平面}$$

7. 导体的静电平衡: 无宏观电荷移动

电场分布: $E_{\text{int}} = 0, E_{\text{sur}} \perp$ 表面

电荷分布: $q_{\text{in}} = 0, \sigma = \epsilon_0 E$ (曲率大处 σ 大)

封闭的金属壳在壳体内 $E_{\text{int}} = 0$, 形成“静电隔离带”, 起静电屏蔽作用。

8. 电场对电荷的作用力:

$$\mathbf{F} = E\mathbf{q} \quad (\text{此电场力与受力电荷 } q \text{ 的运动无关})$$

电偶极子受电场的力矩:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E}$$

10.2 解题思路

1. 从本章起,开始重点对“场”进行研究。它和力学中对质点和质点系的运动状况进行描述和研究在概念上有很大的不同。场的概念赋予空间各点一种局域性,要求确定一个物理量(如电场强度)在空间的分布。对电场来说,要具体求出场强的分布和场源电荷的关系,还要能确定一个电荷在电场中各处受的力,从而决定其运动。

对电场分布的求解,要注意参考系。本章只讨论在场源电荷静止的参考系内的电场分布。注意,电场强度的定义公式中的检验电荷在所讨论的参考系内是静止的。

2. 本章习题的一类是用矢量或矢量积分的方法求电场的分布。要注意的是各场源点电荷或电荷元在所给场点都各自产生自己的电场,总电场是这些分电场的叠加,即矢量和。要用求矢量和的数学方法,不能只是代数相加。

3. 本章习题的另一类是用高斯定律求解。要知道高斯定律虽然是关于电荷和它们产生的电场的关系的普遍规律,但要用它求出具体的电场分布,只有在场源电荷的分布具有一定的空间对称性时才有数学上的可能性。这是因为只有在这种情况下,才有可能将表示场强大小的量 E 从积分号下提出来得出解析的结果。场强的方向的分布要先根据电荷分布的对称性来分析。

4. 分析求解关于导体静电平衡的问题时,要注意静电感应,电荷守恒以及导体静电平衡条件。

10.3 思考题选答

10.5 如果通过闭合面 S 的电通量 Φ_e 为零,是否能肯定:(1)面 S 上每一点的场强都等于零?(2)面内没有电荷?(3)面内净电荷为零?

答 (1)不能肯定面 S 上每一点场强都等于零。因为电通量不是电场强度,它是电场强度的面积分。面 S 上各处电场强度不为零时,通过它的电通量仍然可能为零。通过在一个点电荷旁边的封闭曲面的电通量就是如此。

(2)不一定没有电荷。有两种电荷,一正一负,只要它们的代数和为零,通过包围它们的闭合曲面的电通量也等于零。

(3)肯定面内的净电荷为零。

10.7 用高斯定律说明:电场线总起自正电荷,终于负电荷,而且不能在无电荷处

中断。

答 如果电场线在某处 P 点中断,则包围 P 点设想一封闭曲面,通过此封闭曲面的电通量必定不等于零,但在此封闭面内并没有电荷,所以与高斯定律不符。因此电场线在此点中断的设想是错误的,不可能的。

10.9 把一个带电体移近一个导体,带电体自己在导体内的电场是否为零?为什么静电平衡时,导体内的电场为零呢?

答 带电体上电荷在导体内的电场并不等于零。在静电平衡时,导体上因带电体移近而产生的感应电荷在导体内也产生电场。该电场和带电体的电场的叠加使导体内的电场强度为零。

10.4 习题解答

10.1 在边长为 a 的正方形的四角,依次放置点电荷 $q, 2q, -4q$ 和 $2q$,求它的正中心 C 点的电场强度。

解 如图 10.1 所示,两个 $2q$ 在 C 点的电场强度互相抵消,该点的电场强度即 q 和 $-4q$ 的合电场强度,其大小为

$$F = F_1 + F_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{4q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{5q}{2\pi\epsilon_0 a^2}$$

方向指向 $-4q$ 。

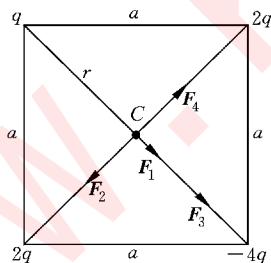


图 10.1 习题 10.1 解用图

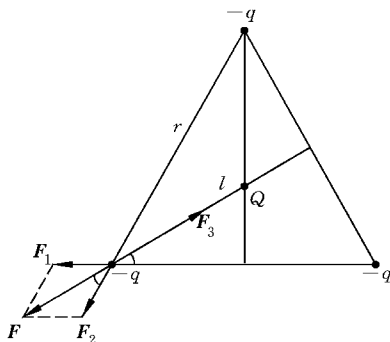


图 10.2 习题 10.2 解用图

10.2 三个电量为 $-q$ 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上,电荷 Q ($Q > 0$) 放在三角形的重心上。为使每个负电荷受力为零, Q 之值应为多大?

解 如图 10.2 所示, Q 受其他三个电荷的合力等于 0, 与 Q 的大小无关。一个 $-q$ 受其他三个电荷的合力的大小为

$$\begin{aligned}
 2F_1 \cos 30^\circ - F_3 &= 2 \times \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\sqrt{3}q - 3Q)
 \end{aligned}$$

此合力为零给出

$$Q = \sqrt{3}q/3$$

10.3 一个正 π 介子由一个 u 夸克和一个反 d 夸克组成。u 夸克带电量为 $\frac{2}{3}e$, 反 d 夸克带电量为 $\frac{1}{3}e$ 。将夸克作为经典粒子处理, 试计算正 π 介子中夸克间的电力(设它们之间的距离为 $1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$)。

解

$$F = \frac{q_d q_u}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{(1.0 \times 10^{-15})^2} = 51.2 \text{ N}$$

10.4 一个电偶极子的电矩为 $p = ql$, 证明此电偶极子轴线上距其中心为 $r (r \gg l)$ 处的一点的场强为 $E = 2p / (4\pi\epsilon_0 r^3)$ 。

证 电偶极子的 $+q$ 和 $-q$ 两个电荷在轴线上距中心为 r 处的合场强为

$$\begin{aligned}
 E &= E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{2pr}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}
 \end{aligned}$$

由于 $r \gg l$, 并考虑到方向可得

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

10.5 两根无限长的均匀带电直线相互平行, 相距为 $2a$, 线电荷密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$, 求每单位长度的带电直线受的作用力。

解 一根带电直线在另一带电直线处的电场为 $E = \lambda / (4\pi\epsilon_0 a)$, 方向垂直于直线。另一单位长度带电直线受此电场的力为

$$F = E\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

此力方向垂直于直线, 为相互吸引力。

10.6 一均匀带电直线段长为 L , 线电荷密度为 λ . 求直线段的延长线上距 L 中点为 r ($r > L/2$) 处的场强.

解 如图 10.3 所示, 电荷元 $dq = \lambda dx$ 在 P 点的场强为

$$dE = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(r-x)^2}$$

整个带电直线在 P 点的场强为

$$E = \int dE = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0(r-x)^2} = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0(r^2 - L^2/4)}$$

方向沿 x 轴正向.



图 10.3 习题 10.6 解用图

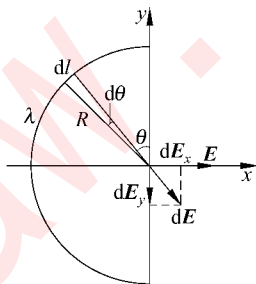


图 10.4 习题 10.7 解用图

10.7 一根弯成半圆形的塑料细杆, 圆半径为 R , 其上均匀分布的线电荷密度为 λ . 求圆心处的电场强度.

解 如图 10.4 所选的坐标系, 弧元 dl 上的电荷在圆心 O 处产生的电场强度的大小为

$$dE = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 R}$$

由半圆的对称性可知, 半圆电荷在 O 点的总电场的 y 向分量为零, 于是该处总电场为

$$E = E_x = \int dE_x = \int_0^\pi \frac{\lambda \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R},$$

方向沿 x 正向.

10.8 一根不导电的细塑料杆, 被弯成近乎完整的圆, 圆的半径 $R = 0.5 \text{ m}$, 杆的两端 $b = 2 \text{ cm}$ 的缝隙, $3.12 \times 10^{-9} \text{ C}$ 的正电荷均匀地分布在杆上, 求圆心处电场的大小和方向.

解 圆心处的电场应等于完整的均匀圆周电荷和相同线电荷密度填满缝隙的负电荷的电场的叠加, 由于前者在圆心处的电场为零, 所以圆心处的电场为

$$E = \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^2 (2\pi r - d)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{9 \times 10^9 \times 3.12 \times 10^{-9} \times 0.02}{0.5^2 \times (2\pi \times 0.5 - 0.02)} \\
 &= 0.72 \text{ V/m}
 \end{aligned}$$

方向指向负电荷,即指向缝隙。

10.9 如图 10.5 所示,两根平行长直线间距为 $2a$,一端用半圆形线连起来,全线上均匀带电。试证明在圆心 O 处的电场强度为零。

证 以 λ 表示线上的线电荷密度。如图 10.5 所示,考虑对顶的 $d\theta$ 所对应的电荷 dq 和 dq' 在 O 点的场强, $dq = \lambda a d\theta$ 在 O 点的场强为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\lambda a d\theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 a}$$

方向由 O 指向远离 dq 。 $dq' = \lambda r d\theta / \sin \theta$ 在 O 点的场强为

$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda r d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sin \theta} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 r \sin \theta} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\epsilon_0 a}$$

方向由 O 指向远离 dq' 。

由于 $dE = dE'$ 且方向相反,所以其合电场为零。又由于此结果与 θ 无关,所以任一与对顶的 $d\theta$ 相应的电荷元在 O 点的电场都是零,所以全线电荷在 O 点的总场强也等于零。

10.10 (1) 点电荷 q 位于边长为 a 的正立方体的中心,通过此立方体的每一面的电通量各是多少?

(2) 若电荷移至正立方体的一个顶点上,那么通过每个面的电通量又各是多少?

解 (1) 由于正立方体的 6 个侧面对于其中心对称,所以每个面通过的电通量应为 $q/(6\epsilon_0)$ 。

(2) 点电荷的电力线是径向的,因此包含电荷所在的顶点的三个面通过的电通量都是零,另三个面通过的总电通量应为 $q/(8\epsilon_0)$ 。由于这三个面对电荷所在顶点是对称的,所以通过它们每个面的电通量应为 $\frac{1}{3} \times \frac{q}{8\epsilon_0} = \frac{q}{24\epsilon_0}$ 。

10.11 实验证明,地球表面上方电场不为 0,晴天大气电场的平均场强约为 120 V/m ,方向向下,这意味着地球表面上有多少过剩电荷? 试以每平方厘米的额外电子数来表示。

解 设想地球表面为一均匀带电球面,总面积为 S ,则它所带总电量为

$$q = \epsilon_0 \oint E \cdot dS = \epsilon_0 ES$$

单位面积的带电量应为

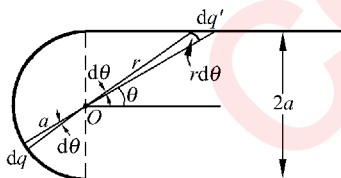


图 10.5 习题 10.9 证用图

$$\sigma = \frac{q}{S} = \epsilon_0 E$$

单位面积上的额外电子数应为

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sigma}{e} = \frac{\epsilon_0 E}{e} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 120}{1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 6.64 \times 10^9 / \text{m}^2 = 6.64 \times 10^5 / \text{cm}^2 \end{aligned}$$

10.12 地球表面上方电场方向向下,大小可能随高度改变(原书图 10.28)。设在地面上方 100 m 高处场强为 150 N/C, 300 m 高处场强为 100 N/C。试由高斯定律求在这两个高度之间的平均体电荷密度,以多余的或缺少的电子数密度表示。

解 设想高为从 100 m 高空到 300 m 高空而底面积为 S 的一立方封闭面,由高斯定理得面内电荷为

$$q = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 S(E_1 - E_2)$$

封闭面内单位体积内电子数为

$$\begin{aligned} n &= \frac{q}{ehS} = \frac{\epsilon_0 (E_1 - E_2)}{eh} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (150 - 100)}{1.6 \times 10^{-19} \times 200} \\ &= 1.38 \times 10^7 / \text{m}^3 \end{aligned}$$

由于 q 是正电荷,所以应是缺少电子。

10.13 一无限长的均匀带电薄壁圆筒,截面半径为 a ,面电荷密度为 σ ,设垂直于筒轴方向从中心轴向外的径矢的大小为 r ,求其电场分布并画出 $E-r$ 曲线。

解 由电荷分布的柱对称性可知,电场分布也具有柱对称性,取高为 l 半径为 r 的上下封底的圆柱面为高斯面,则由高斯定律可得

$$E \times 2\pi r l = q_{\text{int}} / \epsilon_0$$

在筒内,

$$r < a, \quad q_{\text{int}} = 0, \quad E = 0$$

在筒外,

$$r > a, \quad q_{\text{int}} = 2\pi a l \sigma, \quad E = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r}$$

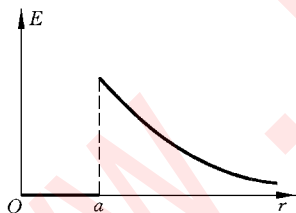


图 10.6 习题 10.13 解用图

$E-r$ 曲线如图 10.6 所示。

10.14 两个无限长同轴圆柱面半径分别为 R_1 和 R_2 , 单位长度带电量分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 。求内圆柱内、两圆柱间及外圆柱外的电场分布。

解 根据电场分布的轴对称性,可以选与圆柱同轴的圆柱面(上下封顶)作高斯面,再根据高斯定律即可求出:

在内圆柱面内,

$$r < R_1, \quad E = 0$$

在两圆柱面间,

$$R_1 < r < R_2, \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

在外圆柱面外,

$$R_2 < r, \quad E = 0$$

10.15 质子的电荷并非集中于一点,而是分布在一定空间内。实验测知,质子的电荷分布可用下述指数函数表示其电荷体密度:

$$\rho = \frac{e}{8\pi b^3} e^{-r/b}$$

其中 b 为一常量, $b = 0.23 \times 10^{-15} \text{ m}$ 。求电场强度随 r 变化的表示式和 $r = 1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ 处的电场强度的大小。

解 由于电荷是球对称分布,所以可选球面为高斯面而得到电场的分布为

$$\begin{aligned} E &= \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 b^3} \int_0^r r^2 e^{-r/b} dr \\ &= \frac{e}{8\pi\epsilon_0 b^3 r^2} [(-r^2 - 2br - 2b^2)e^{-r/b} + 2b^2] \end{aligned}$$

将 $r = 1.0 \times 10^{-15} \text{ m}$ 代入上式,可得

$$E = 1.2 \times 10^{21} \text{ N/C}$$

10.16 一均匀带电球体,半径为 R ,体电荷密度为 ρ ,今在球内挖去一半径为 r ($r < R$) 的球体,求证由此形成的空腔内的电场是均匀的,并求其值。

解 由电场的叠加原理可知,有空腔的带电球体的电场等于带正电的球体和空腔且以体电荷密度相等的负电荷充满的带电球体的电场的叠加(图 10.7)。

在空腔内 P 点,带正电球体的电场为

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_+$$

带负电球体的电场为

$$\mathbf{E}_- = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}_-$$

合电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$$

式中 \mathbf{a} 为由原带电球球心 O_+ 到空腔中心 O_- 的矢量线段。上述结果说明空腔内电场为均匀场,方向平行于两球心的连线。

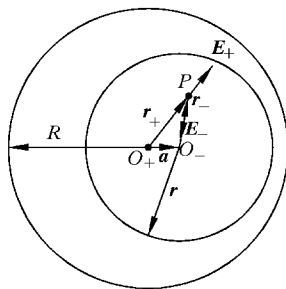


图 10.7 习题 10.16 解用图

10.17 一球形导体 A 含有两个球形空腔。这导体本身的总电荷为零,但在两空腔中心分别有一点电荷 q_b 和 q_c ,导体球外距导体球很远的 r 处有另一点电荷 q_d (图 10.8)。试求 q_b , q_c 和 q_d 各受到多大的力。哪个答案是近似的?

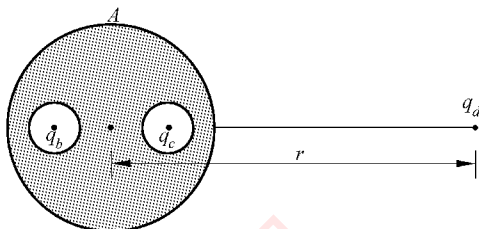


图 10.8 习题 10.17 解用图

解 由于 q_b 和 q_c 所在球形空间被周围金属所屏蔽,所以分别处于均匀带电球面的中心,该处 $E=0$,因此 q_b 和 q_c 受的力都严格地等于零。

由于电荷守恒, q_b 和 q_c 在导体球外表面感应出的总电荷的大小为 $(q_b + q_c)$ 。 q_d 在导体球表面感生的总电荷为零,由于 r 很大, $(q_b + q_c)$ 可视为点电荷,于是由库仑定律可得 q_d 受的力近似为

$$F = \frac{(q_b + q_c)q_d}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

10.18 τ 子是与电子一样带有负电而质量却很大的粒子。它的质量为 3.17×10^{-27} kg, 大约是电子质量的 3480 倍。 τ 子可穿透核物质,因此, τ 子在核电荷的电场作用下在核内可作轨道运动。设 τ 子在铀核内的圆轨道半径为 2.9×10^{-15} m, 把铀核看作是半径为 7.4×10^{-15} m 的球,并且带有 $92e$ 且均匀分布于其体积内的电荷。计算 τ 子的轨道运动的速率、动能、角动量和频率。

解 铀核的体电荷密度为

$$\rho = \frac{92e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{92 \times 1.6 \times 10^{-19}}{\frac{4}{3}\pi (7.4 \times 10^{-15})^3} = 8.67 \times 10^{24} \text{ C/m}^3$$

τ 子轨道处的电场为

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{8.67 \times 10^{24} \times 2.9 \times 10^{-15}}{3 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 9.47 \times 10^{20} \text{ V/m}$$

对 τ 子的圆周运动,由牛顿定律可得其速率为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{Eer}{m}} = \sqrt{\frac{9.47 \times 10^{20} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 2.9 \times 10^{-15}}{3.17 \times 10^{-27}}} \\ &= 1.2 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 3.17 \times 10^{-27} \times (1.2 \times 10^7)^2 \\ = 2.2 \times 10^{-13} \text{ J}$$

角动量为

$$L = mvr = 3.17 \times 10^{-27} \times 1.2 \times 10^7 \times 2.9 \times 10^{-15} \\ = 1.1 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

频率为

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1.2 \times 10^7}{2\pi \times 2.9 \times 10^{-15}} = 6.5 \times 10^{20} \text{ Hz}$$

10.19 设在氢原子中,负电荷均匀分布在半径为 $r_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ 的球体内,总电量为 $-e$,质子位于此电子云的中心。求当外加电场 $E = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ (实验室内很强的电场)时,负电荷的球心和质子相距多远(设电子云不因外加电场而变形)? 此时氢原子的“感生电偶极矩”多大?

解 氢原子负电荷密度为

$$\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \frac{-1.6 \times 10^{-19}}{\frac{4}{3}\pi \times (0.5 \times 10^{-10})^3} = -2.57 \times 10^{11} \text{ C/m}^3$$

质子离负电荷球心距离 r 可以通过质子受电子云的力和外加电场力平衡进行计算,即

$$\frac{\rho r}{3\epsilon_0} e + Ee = 0$$

由此得

$$r = \frac{3\epsilon_0 E}{-\rho} = \frac{3 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^6}{2.57 \times 10^{11}} = 3.1 \times 10^{-16} \text{ m}$$

此时氢原子的感生电偶极矩为

$$p = er = 1.6 \times 10^{-19} \times 3.1 \times 10^{-16} = 5.0 \times 10^{-35} \text{ C} \cdot \text{m}$$

10.20 喷墨打印机的结构简图如图 10.9 所示。其中墨盒可以发出墨汁微滴,其半径约 10^{-5} m (墨盒每秒钟可发出约 10^5 个微滴,每个字母约需百余滴)。此微滴经过带电室时被带上负电,带电的多少由计算机按字体笔画高低位置输入信号加以控制。带电后的微滴进入偏转板,由电场按其带电量的多少施加偏转电力,从而可沿不同方向射出,打到纸上即显示出字体来。无信号输入时,墨汁滴径直通过偏转板而注入回流槽流回墨盒。

设一个墨汁滴的质量为 $1.5 \times 10^{-10} \text{ kg}$, 经过带电室后带上了一 $1.4 \times 10^{-13} \text{ C}$ 的电量,随后即以 20 m/s 的速度进入偏转板,偏转板长度为 1.6 cm 。如果板间电场强度为 $1.6 \times 10^6 \text{ N/C}$, 那么此墨汁滴离开偏转板时在竖直方向将偏转多大距离? (忽略偏转板边缘的电场不均匀性,并忽略空气阻力。)

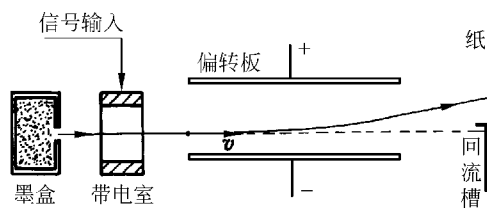


图 10.9 习题 10.20 用图

解 偏转距离为

$$\begin{aligned}
 \delta &= \frac{1}{2} \frac{Eq}{m} \left(\frac{l}{v} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1.6 \times 10^6 \times 1.4 \times 10^{-13}}{1.5 \times 10^{-10}} \times \left(\frac{1.6 \times 10^{-2}}{20} \right)^2 \\
 &= 4.8 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.48 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

电 势

11.1 内容提要

1. 静电场是保守场：在静电场中移动电荷时电场力做的功与路径无关。用电场强度表示这一性质时，可写成

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

即静电场的电场强度沿任一闭合回路的线积分等于零。这一结论叫静电场的环路定理。

2. 电势差：根据静电场的保守性，可以用电场的线积分定义电势差，

$$-\Delta\varphi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{或} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

在选定电势零点 P_0 的情况下，由上式可得 P 点的电势为

$$\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

在场源电荷较多时，电场中某点的电势 φ 等于各场源电荷在该点的电势 φ_i 之代数和，即

$$\varphi = \sum \varphi_i$$

这是电势叠加原理。它的基础是场强叠加原理。

3. 点电荷的电势：以离电荷 q 无穷远处为电势零点，

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

带电体的电势：也以无穷远处为电势零点，

$$\varphi = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

4. 由电势函数可求电场强度的分布：电场强度是电势梯度的负值，即

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi$$

在直角坐标系中，

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

5. 等势面

电场中其上电势处处相等的曲面。电场线处处与等势面垂直，并指向电势降低的方向；电场线密处等势面间距小。

处于静电平衡的导体是一个等势体。

6. 电荷 q 在外场中的电势能： $W = q\varphi$

移动电荷 q 时电场力做的功：

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = W_1 - W_2$$

电偶极子在电场中的电势能： $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$

* 7. 电荷系的静电能：即一个电荷系统由于其中各部分电荷的相互作用而具有的总能量。它等于电荷系各部分(或各电荷元)分散到相距无穷远时电场力做的功。这能量的大小为：

对点电荷系

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

其中 φ_i 是其他点电荷在 q_i 处的电势。

对电荷连续分布的带电体

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi dq$$

8. 静电场的能量：可以认为静电能储存在电场中，其能量密度为

$$W_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

一个带电系统的总能量为

$$W = \int_V \omega_e dV = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV$$

这一公式和上面由电势 φ 求带电系统的静电能公式是等效的。

11.2 解题思路

1. 应注意本章引入电势差和电势的概念是以静电场的保守性为基础的，要注意电势差的微分定义公式中的负号以及有限电势差定义公式中的 P_1 和 P_2 两点的顺序。它们

都表明电场力移动电荷做了正功,该电荷的电势能是要减小的。

2. 求电势有两种方法:一是在已知电荷分布的情况下,求出电场分布,再用电场的线积分来求。求电势时,线积分的起点是其电势待求的场点,终点是电势零点。另一方法是用点电荷的电势叠加,这时要注意电势零点已选到无穷远处了。

电荷分布到无穷远处的带电系统,如无限长带电直线或无限大带电平面,求其电势分布时不能选无穷远处为电势零点。

3. 对于静电场中的导体,要善于利用等势体这一条件。

4. 到此为止,求电场强度分布已讲过三种方法:(1)用点电荷场强(矢量)叠加法;(2)用高斯定律;(3)用求电势梯度的方法。这第三种方法分两步:先由电荷分布用点电荷电势叠加法求电势分布,再对电势分布函数求梯度而得电场强度。这虽然是两步,但因都是标量运算,所以总起来还可能比矢量叠加法简单些。

5. 要能够求带电系统的静电能并利用能量守恒求带电质点在电场中速度的改变,即要会利用带电粒子的静电势能的减小等于电场力对它做的功,也等于它的动能的增加这种关系解题。

11.3 思考题选答

11.3 试用环路定理证明:静电场电场线永不闭合。

证 如果有一条静电场线闭合,则沿这条静电场线一周 E 的线积分肯定不等于零,而这是违背静电场的环路定理的。

11.4 如果在一空间区域内电势是常量,对于这区域内的电场可得出什么结论?如果在一表面上的电势为常量,对于这表面上的电场强度又能得出什么结论?

答 如果在一空间区域内电势是常量,则在这一区域内的电场强度处处为零。如果在一表面上的电势为常量,这一表面就是一个等势面。由此可知表面上各处电场强度的方向都与表面垂直,对于电场强度的大小则不能给出肯定的结论。

11.7 为什么鸟能安全地停在一根 30 000 V 的高压输电线上?

答 因为高压输电线的“高压”是指两条输电线间的电压。小鸟停在一根输电线上,它的两脚间的电压,即电势差(可用欧姆定律计算),由于两脚间的电阻奇小面可以忽略,所以小鸟是安全的。

11.4 习题解答

11.1 两个同心球面,半径分别为 10 cm 和 30 cm,小球均匀带有正电荷 1×10^{-8} C,大球均匀带有正电荷 1.5×10^{-8} C。求离球心分别为(1)20 cm,(2)50 cm 的各点的电势。

解 由电势叠加原理可得

$$(1) \quad \varphi = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = 9 \times 10^9 \times \left(\frac{1 \times 10^{-8}}{20 \times 10^{-2}} + \frac{1.5 \times 10^{-8}}{30 \times 10^{-2}} \right) = 900 \text{ V}$$

$$(2) \quad \varphi = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = 9 \times 10^9 \times \frac{(1 + 1.5) \times 10^{-8}}{50 \times 10^{-2}} = 450 \text{ V}$$

11.2 两均匀带电球壳同心放置, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 已知内外球之间的电势差为 U_{12} , 求两球壳间的电场分布。

解 设内球的带电量为 q , 则

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

由此得两球壳间的电场分布为

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{U_{12}}{r^2} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

方向沿径向。

11.3 一均匀带电细杆, 长为 $l = 15.0 \text{ cm}$, 线电荷密度 $\lambda = 2.0 \times 10^{-7} \text{ C/m}$, 求:

(1) 细杆延长线上与杆的一端相距 $a = 5.0 \text{ cm}$ 处的电势;

(2) 细杆中垂线上与细杆相距 $b = 5.0 \text{ cm}$ 处的电势。

解 (1) 沿杆取 x 轴, 杆的 x 轴反向端点取作原点, 由电势叠加原理, 可得所给点的电势为

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^l \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (l + a - x)} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{a + l}{a} \\ &= 9 \times 10^9 \times 2.0 \times 10^{-7} \times \ln \frac{5.0 + 15.0}{5.0} \\ &= 2.5 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

(2) 取杆的中点为原点, 由电势叠加原理, 可得

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{b^2 + l^2/4} + l/2}{\sqrt{b^2 + l^2/4} - l/2} \\ &= 9 \times 10^9 \times 2.0 \times 10^{-7} \times \ln \frac{\sqrt{5^2 + 15^2/4} + 15/2}{\sqrt{5^2 + 15^2/4} - 15/2} \\ &= 4.3 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned}$$

11.4 求半径分别为 R_1 和 R_2 的两同轴圆柱面之间的电势差, 给定两圆柱面单位长度分别带有电量 $+\lambda$ 和 $-\lambda$ 。

解 两同轴圆柱面之间的电势差为

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

11.5 一计数管中有一直径为 2.0 cm 的金属长圆筒,在圆筒的轴线处装有一根直径为 1.27×10^{-5} m 的细金属丝。设金属丝与圆筒的电势差为 1×10^3 V,求:

(1) 金属丝表面的场强大小;

(2) 圆筒内表面的场强大小。

解 以 λ 表示金属丝上的线电荷密度,则

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}$$

由此得

$$\lambda = 2\pi\epsilon_0 U_{12} / \ln \frac{D}{d}$$

(1) 在金属丝表面

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{2U_{12}}{d \ln(D/d)} = \frac{2 \times 10^3}{1.27 \times 10^{-5} \times \ln \frac{0.02}{1.27 \times 10^{-5}}} \\ &= 2.14 \times 10^7 \text{ V/m} \end{aligned}$$

(2) 在圆筒内表面

$$\begin{aligned} E &= \frac{2\lambda}{2\pi\epsilon_0 D} = \frac{2U_{12}}{D \ln(D/d)} = \frac{2 \times 10^3}{0.02 \times \ln \frac{0.02}{1.27 \times 10^{-5}}} \\ &= 1.36 \times 10^4 \text{ V/m} \end{aligned}$$

11.6 (1) 一个球形雨滴半径为 0.40 mm,带有电量 1.6 pC,它表面的电势多大?
(2) 两个这样的雨滴碰后合成一个较大的球形雨滴,这个雨滴表面的电势又是多大?

解 (1)
$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-12}}{0.4 \times 10^{-3}} = 36 \text{ V}$$

(2) 两滴合为一滴后,半径增大为 $\sqrt[3]{2}R_1$ 。这时雨滴表面电势为

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{2q_1}{4\pi\sqrt[3]{2}\epsilon_0 R_1} \\ &= \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times 1.6 \times 10^{-12}}{\sqrt[3]{2} \times 0.4 \times 10^{-3}} = 57 \text{ V} \end{aligned}$$

11.7 金原子核可视为均匀带电球体,总电量为 $79e$,半径为 7.0×10^{-15} m。求金核表面的电势,它的中心的电势又是多少?

解 金核表面的电势为

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{9 \times 10^9 \times 79 \times 1.6 \times 10^{-19}}{7.0 \times 10^{-15}} = 1.6 \times 10^7 \text{ V}$$

金核中心的电势

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \int_0^R \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{3}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{3}{2} \times 1.6 \times 10^7 \\ &= 2.4 \times 10^7 \text{ V}\end{aligned}$$

11.8 一次闪电的放电电压大约是 $1.0 \times 10^9 \text{ V}$, 而被中和的电量约是 30 C 。

(1) 求一次放电所释放的能量是多大?

(2) 一所希望小学每天消耗电能 $20 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 。上述一次放电所释放的电能够该小学用多长时间?

解 (1) 一次释放的能量为

$$W = qU = 30 \times 1.0 \times 10^9 \text{ V} = 3.0 \times 10^{10} \text{ J}$$

(2) 够用的时间

$$t = \frac{W}{P} = \frac{3.0 \times 10^{10}}{20 \times 10^3 \times 3600} = 416 (\text{天})$$

11.9 电子束焊接机中的电子枪如图 11.1 所示。K 为阴极, A 为阳极, 其上有一小孔。阴极发射的电子在阴极和阳极电场作用下聚集成一细束, 以极高的速率穿过阳极上的小孔, 射到被焊接的金属上, 使两块金属熔化而焊接在一起。已知, $\varphi_A - \varphi_K = 2.5 \times 10^4 \text{ V}$, 并设电子从阴极发射时的初速率为零。求:

(1) 电子到达被焊接的金属时具有的动能(用电子伏表示);

(2) 电子射到金属上时的速率。

解 (1) $E_k = e(\varphi_A - \varphi_K) = 1.6 \times 10^{-19} \times 2.5 \times 10^4$
 $= 4 \times 10^{-15} \text{ J} = 2.5 \times 10^4 \text{ eV}$

$$(2) v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 10^{-15}}{9.1 \times 10^{-31}}} = 9.4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

此结果是按非相对论公式算的。应按相对论计算

$$v = \left[1 - \frac{1}{1 + E_k / (m_0 c^2)} \right]^{1/2} c = 6.5 \times 10^7 \text{ m/s}$$

11.10 一边长为 a 的正三角形, 其三个顶点上各放置 q , $-q$ 和 $-2q$ 的点电荷, 求此三角形重心上的电势。将一电量为 $+Q$ 的点电荷由无限远处移到重心上, 外力要做多少功?

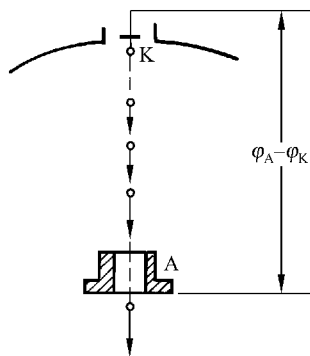


图 11.1 习题 11.9 用图

解 重心中的电势为

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{3}a} (1 - 1 - 2) = -\frac{\sqrt{3}q}{2\pi\epsilon_0 a}\end{aligned}$$

所求外力做的功为

$$A' = -A = -Q(\varphi_\infty - \varphi_0) = Q\varphi_0 = -\frac{\sqrt{3}qQ}{2\pi\epsilon_0 a}$$

11.11 在一半径为 $R_1 = 6.0 \text{ cm}$ 的金属球 A 外套有一个同心的金属球壳 B 。已知球壳 B 的内、外半径分别为 $R_2 = 8.0 \text{ cm}$, $R_3 = 10.0 \text{ cm}$ 。设 A 球带有总电量 $Q_A = 3 \times 10^{-8} \text{ C}$, 球壳 B 带有总电量 $Q_B = 2 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。

(1) 求球壳 B 内、外表面上各带有的电量以及球 A 和球壳 B 的电势。

(2) 将球壳 B 接地后然后断开, 再把球 A 接地。求金属球 A 和球壳 B 内、外表面上各带有的电量以及球 A 和球壳 B 的电势。

解 (1) 由高斯定律和电荷守恒可得球壳 B 内表面的电量为

$$Q_{B,\text{int}} = -Q_A = -3 \times 10^{-8} \text{ C}$$

球壳外表面所带电量为

$$Q_{B,\text{ext}} = Q_B + Q_A = 5 \times 10^{-8} \text{ C}$$

于是,

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_A}{R_1} + \frac{Q_{B,\text{int}}}{R_2} + \frac{Q_{B,\text{ext}}}{R_3} \right) \\ &= 9 \times 10^9 \times \left(\frac{3 \times 10^{-8}}{0.06} + \frac{-3 \times 10^{-8}}{0.08} + \frac{5 \times 10^{-8}}{0.10} \right) \\ &= 5.6 \times 10^3 \text{ V} \\ \varphi_B &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{B,\text{ext}}}{R_3} = 9 \times 10^9 \times \frac{5 \times 10^{-8}}{0.10} \\ &= 4.5 \times 10^3 \text{ V}\end{aligned}$$

(2) B 接地后断开, 则它带的总电量变为 $Q'_B = Q_{B,\text{int}} = -3 \times 10^{-8} \text{ C}$ 。然后 A 球接地, 则 $\varphi'_A = 0$ 。设此时 A 球带电量为 q'_A , 则

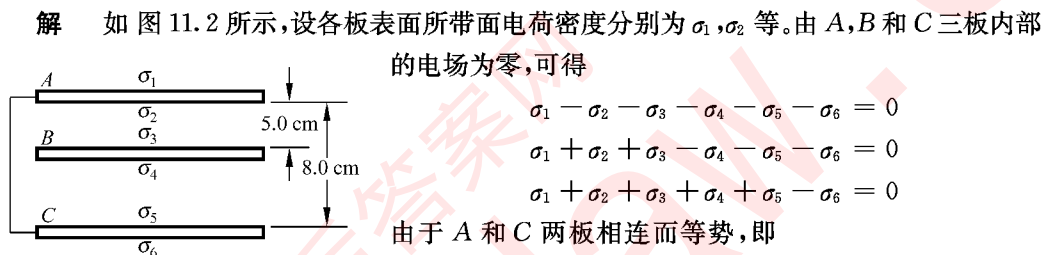
$$\varphi'_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'_A}{R_1} + \frac{-q'_A}{R_2} + \frac{Q'_B + q'_A}{R_3} \right) = 0$$

由此解得

$$\begin{aligned}q'_A &= \frac{-Q'_B/R_3}{1/R_1 - 1/R_2 + 1/R_3} = \frac{3 \times 10^{-8}/0.10}{1/0.06 - 1/0.08 + 1/0.10} \\ &= 2.1 \times 10^{-8} \text{ C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q'_{B,\text{int}} &= -q'_A = -2.1 \times 10^{-8} \text{ C} \\
 q'_{B,\text{ext}} &= Q'_B + q'_A = -0.9 \times 10^{-8} \text{ C} \\
 \varphi'_B &= \frac{Q'_B + q'_A}{4\pi\epsilon_0 R_3} = 9 \times 10^9 \frac{(-3 + 2.1) \times 10^{-8}}{0.1} \\
 &= -8.1 \times 10^2 \text{ V}
 \end{aligned}$$

11.12 如图 11.2 所示,有三块互相平行的导体板。外面的两块用导线连接,原来不带电。中间一块上所带总面电荷密度为 $1.3 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$ 。求每块板的两个表面的面电荷密度各是多少?(忽略边缘效应。)



$$U_{AB} = U_{CB}$$

图 11.2 习题 11.12 解用图

所以有

$$(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 - \sigma_5 - \sigma_6)d_{AB} = (\sigma_5 + \sigma_6 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4)d_{CB}$$

又由电荷守恒可得:对 B 板

$$\sigma_3 + \sigma_4 = \sigma = 1.3 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$$

对相连接的 A 板和 C 板

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_5 + \sigma_6 = 0$$

解以上关于诸 σ 的 6 个方程,可得

$$\sigma_1 = 6.5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = -4.9 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_4 = -\sigma_5 = 8.1 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

$$\sigma_6 = 6.5 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

11.13 在距一个原来不带电的实心导体球的中心 r 处放置一个电量为 q 的点电荷,此导体球的电势是多少?

答 由于 q 的放置,导体球表面将感应出电量大小相等而符号相反的电荷 q' 和 $-q'$ 。导体球是等势体,球心的电势,也就是球的电势,为

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{-q'}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

式中 R 为球的半径。

* 11.14 假设某一瞬时,氮原子的两个电子正在核的两侧,它们与核的距离都是 $0.20 \times 10^{-10} \text{ m}$ 。这种配置状态的静电势能是多少?(把电子与原子核看作点电荷。)

$$\begin{aligned}\text{解} \quad W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \times \frac{e(-2e)}{r^2} + \frac{(-e)(-e)}{(2r)^2} \right] \\ &= 9 \times 10^9 \times \left[\frac{-4 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{0.20 \times 10^{-10}} + \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{0.4 \times 10^{-10}} \right] \\ &= -4.0 \times 10^{-17} \text{ J}\end{aligned}$$

* 11.15 假设电子是一个半径为 R , 电荷为 e 且均匀分布在其外表面上的球体。如果静电能等于电子的静止能量 $m_e c^2$, 那么以电子的 e 和 m_e 表示的电子半径 R 的表达式是什么? R 在数值上等于多少?(此 R 是所谓电子的“经典半径”。现代高能实验确定, 电子的电量集中分布在不超过 10^{-18} m 的线度范围内。)

解 按题述电子经典模型, 静电能等于静止能量给出

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = m_e c^2$$

由此得

$$R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

代入已知数据, 可得

$$\begin{aligned}R &= \frac{(1.60 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 9.11 \times 10^{-31} \times (3.00 \times 10^8)^2} \\ &= 2.81 \times 10^{-15} \text{ m}\end{aligned}$$

11.16 地球表面上空晴天时的电场强度约为 100 V/m 。

(1) 此电场的能量密度多大?

(2) 假设地球表面以上 10 km 范围内的电场强度都是这一数值, 那么在此范围内所储存的电场能共是多少 $\text{kW} \cdot \text{h}$?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad w_e &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (100)^2}{2} \\ &= 4.4 \times 10^{-8} \text{ J/m}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad W &= 4\pi R_E^2 h w_e \\ &= \frac{4\pi \times (6.4 \times 10^6)^2 \times 10 \times 10^3 \times 4.4 \times 10^{-8}}{3.6 \times 10^6} \\ &= 6.3 \times 10^4 \text{ kW} \cdot \text{h}\end{aligned}$$

* 11.17 按照玻尔理论, 氢原子中的电子围绕原子核做圆运动, 维持电子运动的力为库仑力。轨道的大小取决于角动量, 最小的轨道角动量为 $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, 其他

依次为 $2\hbar, 3\hbar$, 等等。

(1) 证明: 如果圆轨道有角动量 $n\hbar (n=1, 2, 3, \dots)$, 则其半径 $r = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} n^2 \hbar^2$;

(2) 证明: 在这样的轨道中, 电子的轨道能量(动能+势能)为

$$W = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

(3) 计算 $n=1$ 时的轨道能量(用 eV 表示)。

解 (1) 对圆运动用牛顿第二定律

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$$

由玻尔角动量假设

$$m_e r v = n \hbar$$

联立解上二式, 即可得

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} n^2 \hbar^2$$

(2) 电子的轨道能量为

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m_e v^2 + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \\ &= -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad W_1 &= -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \\ &= -\frac{9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4 \times (9 \times 10^9)^2}{2 \times (1.05 \times 10^{-34})^2} \\ &= -21.8 \times 10^{-19} \text{ J} \\ &= -13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

电容器和介电质

12.1 内容提要

1. **电容器**：两个相互靠近而彼此绝缘的导体就构成一个电容器。平行板电容器是其基本形式。两板的相对表面上分别带上 $+Q$ 和 $-Q$ 的电荷。两板间电压和电量 Q 成正比，比值 Q/U 就定义为电容器的电容 C ，

$$C = \frac{Q}{U}$$

电容 C 决定于电容器的结构和尺寸，与电量 Q 无关。

平行板电容器的电容： $C = \epsilon_0 \epsilon_r S/d$

2. **电容器的联接**：

$$\text{并联 } C = \sum C_i; \quad \text{串联 } C = 1/\sum (1/C_i)$$

3. **介电质对电场的影响**：会影响电场的分布。在电量不变的情况下，电容器两板间充满介电质时其电压比板间为真空时要小到 $1/\epsilon_r$ 倍，即 $U = U_0/\epsilon_r$ ，也因此板间场强减小， $E = E_0/\epsilon_r$ ，而电容增大为 $C = \epsilon_r C_0$ 。 ϵ_r 称为介电质的相对介电常量，不同的介电质的 ϵ_r 不同。

电场受影响是由于介电质在电场的作用下发生电极化而产生了束缚电荷。

4. **电位移(D)矢量**

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E = \epsilon E, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

D 的高斯定律

$$\oint_S D \cdot dS = q_{0,\text{int}}$$

其中 $q_{0,\text{int}}$ 为封闭曲面包围的自由电荷。

5. 电容器的能量

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

6. 介电质中电场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} ED$$

总能量为

$$W = \int w_e dV = \int \frac{\epsilon_0 \epsilon_r E^2}{2} dV$$

12.2 解题思路

1. 在分析有导体存在时的静电场问题时,要根据(1)电荷守恒:导体上电荷重新分布时,其总电量不变;(2)高斯定律;(3)导体内电场为零。注意导体内的场强是导体表面上以及其他导体表面上的电荷分别产生的电场的叠加。应用导体内场强为零适当选择高斯面(一部分取在导体内部)可以得出有用的电荷和电场的关系;(4)相互连接的导体静电平衡时的电势是相等的。

2. 在分析电容器的问题时,要注意 Q 是两板相对表面上各自所带电量的大小。两板间电压和板间电场强度的关系要具体分析,平行板电容器和圆柱形电容器或球形电容器的 $U-E$ 关系并不相同。

求组合电容器的电容时要首先识别串联和并联。这要由各电容器带电情况决定。各电容器带电依次正负正负相间时为串联,各电容器相连接的板带有同种电荷时为并联。

3. 在有介电质存在的情况下求电场 E 的分布时,一般应先根据自由电荷的分布求出 D 的分布,然后利用 $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ 求 E 的分布。

12.3 思考题选答

12.1 根据静电场环路积分为零证明:平行板电容器边缘的电场不可能像图 12.1 所画的那样,突然由均匀电场变到零,一定存在着逐渐减弱的电场,即边缘电场。

答 如果电场分布像图中所示那样,则如图 12.1 取闭合回路 L ,对此回路计算电场的环路积分可得

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \left(\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \int_d^e + \int_e^f + \int_f^a \right) \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

由于沿 L 从 b 经 c, d, e, f 到 a , E 的线积均等于零,所以

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = Eab \neq 0$$

这一结果是静电场的环路定理相违背的。因此不可能存在如图示那样的突然改变的电场分布。

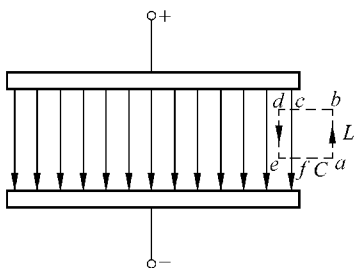


图 12.1 思考题 12.1 答用图

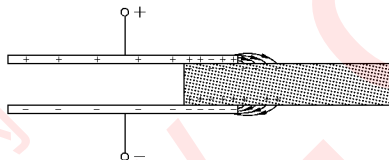


图 12.2 思考题 12.3 答用图

12.3 一个介电质板的一部分放在已带电的电容器两板之间(图 12.2)。如果电容器相对的两个表面很光滑,则介电质板会被吸到电容器内部,为什么?(提示:考虑边缘电场的作用。)

答 介电质板放入时,电场和介电质表面的束缚电荷的分布大致如图 12.2 所示。由于板上电荷对介质表面束缚电荷的作用,介电质板将被拉进电容器内部。

12.4 由极性分子组成的液态介电质,其相对介电常量在温度升高时是增大还是减小?

答 在相同的外电场作用下,介电质中极性分子排列得越整齐,其表面产生的束缚电荷就越多,介电质由于极化对电场的影响就越大。其结果就表现为相对介电常量越大。由于极性分子处于热运动中,温度越高,热运动越激烈,极性分子对整齐排列的抵抗倾向越大,越不容易排列。因此,温度升高时,液态介电质的相对介电常量将减小。

12.4 习题解答

12.1 地球的电容是多少法[拉]?

答 地球可视为半径 $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 的导体球,根据原书式(12.5)可求得其电容为

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi \times 8.85 \times 10^{-12} \times 6.4 \times 10^6 = 7.1 \times 10^{-4} \text{ F}$$

12.2 有的计算机键盘的每一个键下面连一小块金属片,它下面隔一定空气隙是一块小的固定金属片。这样两片金属片就组成一个小电容器(见图 12.3)。当键被按下时,此小电容器的电容就发生变化,与之相连的电子线路就能检测出是哪个键被按下了,从而给出相应的信号。设每个金属片的面积为 50.0 mm^2 ,两金属片之间的距离是 0.600 mm 。

如果电子线路能检测出的电容变化是 0.250 pF , 那么键需要按下多大的距离才能给出必要的信号?

解 按下时电容的变化为

$$\Delta C = \epsilon_0 S \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0} \right)$$

由此得

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\epsilon_0 S d_0}{d_0 \Delta C + \epsilon_0 S} \\ &= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 50 \times 10^{-6} \times 0.600 \times 10^{-3}}{0.250 \times 10^{-12} \times 0.600 \times 10^{-3} + 8.85 \times 10^{-12} \times 50 \times 10^{-6}} \\ &= 0.448 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.448 \text{ mm} \end{aligned}$$

需要按下的距离为

$$\Delta d = d_0 - d_1 = 0.600 - 0.448 = 0.152 \text{ mm}$$

12.3 空气的击穿场强为 $3 \times 10^3 \text{ kV/m}$ 。当一个平行板电容器两极板间是空气而电势差为 50 kV 时, 每平方米面积的电容最大是多少?

解 $E_b = \frac{U}{d}$ 而 $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

每平方米的电容的最大值为

$$\frac{C}{S} = \frac{\epsilon_0 E_b}{U} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 3 \times 10^6}{50 \times 10^3} = 5.3 \times 10^{-10} \text{ F/m}^2$$

12.4 如图 12.4 联结三个电容器, $C_1 = 50 \mu\text{F}$, $C_2 = 30 \mu\text{F}$, $C_3 = 20 \mu\text{F}$ 。

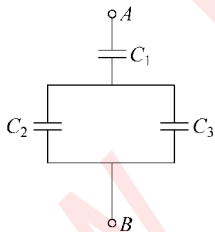


图 12.4 习题 12.4 解用图

(1) 求该联结的总电容;

(2) 当在 AB 两端加 100 V 的电压后, 各电容器上的电压和电量是多少?

解 (1) C_2 和 C_3 并联, 其总电容为

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 30 + 20 = 50 \mu\text{F}$$

C_{23} 和 C_1 串联, 总电容为

$$C = 1 / \left(\frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_1} \right) = 1 / \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{50} \right) = 25 \mu\text{F}$$

(2) 该联结的总电量即 C_1 所带电量, 为

$$Q_1 = CU = 25 \times 10^{-6} \times 100 = 2.5 \times 10^{-3} \text{ C}$$

C_1 上电压为

$$U_1 = Q_1 / C_1 = 2.5 \times 10^{-3} / 50 \times 10^{-6} = 50 \text{ V}$$

C_2 和 C_3 的电压相等

$$U_2 = U_3 = U - U_1 = 100 - 50 = 50 \text{ V}$$



图 12.3 习题 12.2 用图

C_2 上的电量是

$$Q_2 = C_2 U_2 = 30 \times 10^{-6} \times 50 = 1.5 \times 10^{-3} \text{ C}$$

C_3 上的电量是

$$Q_3 = C_3 U_3 = 20 \times 10^{-6} \times 50 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ C}$$

12.5 有 10 个相同的电容器, 电容都是 $10 \mu\text{F}$ 。

(1) 先把它们都并联起来, 加以 500 V 的电压, 若这时将它们很快改为都串联在一起, 则可得多高的总电压? 可放出的总电量是多少?

(2) 先把它们都串联起来, 加以总电压 2000 V , 若这时将它们很快改为都并联在一起, 则可放出的总电量是多少? 总电压变为多少?

解 (1) 将它们都并联起来, 各电容器上电压相等, 为 $U_0 = 500 \text{ V}$, 电量也相同, 为 $Q_1 = C_1 U_0 = 10 \times 10^{-6} \times 500 = 5 \times 10^{-3} \text{ C}$ 。若这时将它们串联起来, 总电压将为 $U = 10 U_0 = 5000 \text{ V}$, 而可放出的电量就是 $Q_1 = 5 \times 10^{-3} \text{ C}$ 。

(2) 将它们都串联起来, 总电压为 $U_0 = 2000 \text{ V}$, 每一个电容器上的电压为 $U_1 = U_0 / 10 = 200 \text{ V}$, 电量为 $Q_1 = U_1 C_1 = 200 \times 10 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-3} \text{ C}$ 。若这时将它们并联起来, 则总电压 $U = U_1 = 200 \text{ V}$, 而可放出的总电量就是各电容器所带电量之和, 即 $Q = 10 Q_1 = 2 \times 10^{-3} \times 10 = 2 \times 10^{-2} \text{ C}$ 。

由此例可知, 可利用电容器的并联改串联获得高电压, 可利用电容器的串联改并联获得大电量。

12.6 两个电容器的电容分别是 $C_1 = 20 \mu\text{F}$, $C_2 = 40 \mu\text{F}$ 。当它们分别用 $U_1 = 200 \text{ V}$ 和 $U_2 = 160 \text{ V}$ 的电压充电后, 将两者带相反电荷的极板连接起来, 最后它们的电压各是多少? 又各带多少电量?

解 两电容器充电后所带电量分别是

$$Q_1 = C_1 U_1 = 20 \times 10^{-6} \times 200 = 4 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q_2 = C_2 U_2 = 40 \times 10^{-6} \times 160 = 6.4 \times 10^{-3} \text{ C}$$

二者带相反电荷的极板连接后, Q_1 和 Q_2 将部分中和, 剩余电量为

$$Q' = Q_2 - Q_1 = 6.4 \times 10^{-3} - 4 \times 10^{-3} = 2.4 \times 10^{-3} \text{ C}$$

这些电量分布在两电容器上使二者成并联状态, 总电容为

$$C' = C_1 + C_2 = 20 + 40 = 60 \mu\text{F}$$

二者的电压都变为

$$U' = \frac{Q'}{C'} = \frac{2.4 \times 10^{-3}}{60 \times 10^{-6}} = 40 \text{ V}$$

二者的电量分别变为

$$Q'_1 = C_1 U'_1 = 20 \times 10^{-6} \times 40 = 0.8 \times 10^{-3} \text{ C}$$

$$Q'_2 = C_2 U'_1 = 40 \times 10^{-6} \times 40 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ C}$$

12.7 人体的某些细胞壁两侧带有等量的异号电荷。设某细胞壁厚为 $5.2 \times 10^{-9} \text{ m}$, 两表面所带面电荷密度为 $\pm 0.52 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$, 内表面为正电荷。如果细胞壁物质的相对介电常量为 6.0, 求:

- (1) 细胞壁内的电场强度;
- (2) 细胞壁两表面间的电势差。

解 (1) $E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon_r) = 0.52 \times 10^{-3} / (8.85 \times 10^{-12} \times 6.0) = 9.8 \times 10^6 \text{ V/m}$, 方向指向细胞外。

$$(2) U = Ed = 9.8 \times 10^6 \times 5.2 \times 10^{-9} = 5.1 \times 10^{-2} \text{ V} = 51 \text{ mV}$$

12.8 用两面夹有铝箔的厚为 $5 \times 10^{-2} \text{ mm}$, 相对介电常量为 2.3 的聚乙烯膜做一电容器, 如果电容为 $3.0 \mu\text{F}$, 则膜的面积要多大?

$$\text{解} \quad S = \frac{Cd}{\epsilon} = \frac{3.0 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-5}}{2.3 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 7.4 \text{ m}^2$$

12.9 图 12.5 所示为用于调谐收音机的一种可变空气电容器。这里奇数极板和偶数极板分别连在一起, 其中一组的位置是固定的, 另一组是可以转动的。假设极板的总数为 n , 每块极板的面积为 S , 相邻两极板之间的距离为 d 。证明这个电容器的最大电容为

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 S}{d}$$

证 每两相对的金属板面形成一个电容器, 其最大电容为 $C_1 = \epsilon_0 S/d$ 。 n 个板总共形成 $(n-1)$ 个这样的电容器, 而且是并联的, 所以最大的总电容就应为

$$C = (n-1)C_1 = (n-1)\epsilon_0 S/d$$

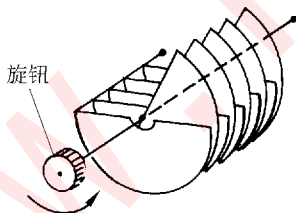


图 12.5 习题 12.9 用图

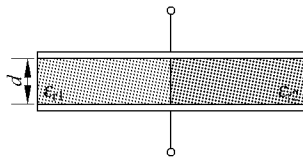


图 12.6 习题 12.10 用图

12.10 如图 12.6 所示的电容器, 板面积为 S , 板间距为 d , 板间各一半被相对介电常量分别为 ϵ_{r1} 和 ϵ_{r2} 的介电质充满。求此电容器的电容。

解 设电容器电压为 U , 则其间左、右两部分电场强度相等, 都等于 $E = U/d$ 。左侧一半板面积上自由面电荷密度为 $\sigma_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E$, 右侧一半板面积上自由面电荷密度为 $\sigma_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E$ 。总电量

$$Q=Q_1+Q_2=\frac{S}{2}(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{\epsilon_0(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})}{2}SE=\frac{\epsilon_0(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})SU}{2d}$$

电容器的电容为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\epsilon_0(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})S}{2d}$$

可以把左右两侧各看作一个电容器。上述结果实际上是这两个电容器的并联总电容。

12.11 空气的介电强度为 3 kV/mm, 试求空气中半径分别为 1.0 cm, 1.0 mm, 0.1 mm 的长直导线上单位长度最多各能带多少电荷?

解 由 $E_b=\lambda_{\max}/(2\pi\epsilon_0 r)$, 可得 $\lambda_{\max}=2\pi\epsilon_0 r E_b$ 。以 $E_b=3\times 10^3$ kV/mm= 3×10^6 V/m 和给定的 r 值代入此式可得

$$r_1=1.0\text{ cm 时, } \lambda_{\max,1}=1.7\times 10^{-6}\text{ C/m}$$

$$r_2=1.0\text{ mm 时, } \lambda_{\max,2}=1.7\times 10^{-7}\text{ C/m}$$

$$r_3=0.1\text{ mm 时, } \lambda_{\max,3}=1.7\times 10^{-8}\text{ C/m}$$

12.12 一个金属球浸在一大油池中。当金属球带电 q 时和它贴近的油表面会由于油的电极化而带上面束缚电荷。求证此面束缚电荷总量为

$$q'=\left(\frac{1}{\epsilon_r}-1\right)q$$

其中 ϵ_r 为油的相对介电常量。

解: 原书 12.5 节最后已求得球外的电场分布为

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}\mathbf{e}_r$$

此电场应是自由电荷 q 和束缚电荷 q' 的电场的叠加, 即

$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r$$

将此式和上式列成等式, 消去 $4\pi\epsilon_0 r^2$ 后整理即可得

$$q'=\left(\frac{1}{\epsilon_r}-1\right)q$$

由于 $\epsilon_r>1$, q' 和 q 总是符号相反的。

12.13 一种利用电容器测量油箱中油量的装置示意图如图 12.7 所示。附接电子线路能测出等效相对介电常量 $\epsilon_{r,\text{eff}}$ (即电容相当而充满板间的介电质的相对介电常量)。设电容器两板的高度都是 a , 试导出等效相对介电常量和油面高度的关系, 以 ϵ_r 表示油的相对介电常量。就汽油 ($\epsilon_r=1.95$) 和甲醇 ($\epsilon_r=33$) 相比, 哪种燃料更适宜用此

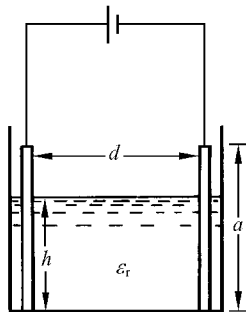


图 12.7 习题 12.13 解用图

种油量表?

解 以 b 和 d 分别表示两板的宽度和它们之间的距离,则两板间的总电容应为

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r h b}{d} + \frac{\epsilon_0 (a-h)b}{d} = \frac{\epsilon_0 b}{d} [h(\epsilon_r - 1) + a] = \frac{\epsilon_0 \epsilon_{r,\text{eff}} ab}{d}$$

由此得

$$\epsilon_{r,\text{eff}} = 1 + (\epsilon_r - 1) \frac{h}{a}$$

对 ϵ_r 大的燃料,当液面变化时, $\epsilon_{r,\text{eff}}$ 变化较大,所以甲醇更适宜用这种油量表。

*** 12.14** 一个平行板电容器,板面积为 S ,板间距为 d (见图 12.8)。

(1) 充电后保持其电量 Q 不变,将一块厚为 b 的金属板平行于两极板插入。与金属板插入前相比,电容器储能增加多少?

(2) 导体板进入时,外力(非电力)对它做功多少? 是被吸入还是需要推入?

(3) 如果充电后保持电容器的电压 U 不变,则(1),(2)两问结果又如何?

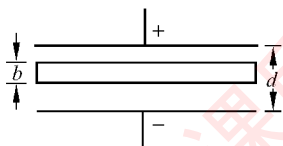


图 12.8 习题 12.14 解用图

解 电容器原来的电容为 $C_0 = \epsilon_0 S/d$, 插入金属板后相当于把两板移近一段距离 b , 电容变为 $C = \epsilon_0 S/(d-b)$ 。

$$(1) \Delta W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{d-b}{\epsilon_0 S} - \frac{d}{\epsilon_0 S} \right) = -\frac{Q^2 b}{2\epsilon_0 S}$$

(2) 由于 $A_{\text{ext}} = \Delta W < 0$, 所以外力做了负功, 即电场力做了功, 因而导体板是被吸入的。这是边缘电场对插入的板上的感生电荷的力作用的结果。

(3) 如果电压 U 保持不变, 则电容器的电量就要改变, 其增加量为

$$\Delta Q = (C - C_0)U$$

此电量是电源在恒定电压 U 作用下供给的, 电源将随同供给电容器的能量为

$$W_s = \Delta Q \cdot U = (C - C_0)U^2$$

电容器储存的能量增加为

$$\Delta W = \frac{1}{2} CU^2 - \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2} (C - C_0) U^2 = \frac{\epsilon_0 U^2 S b}{2d(d-b)}$$

以 A' 表示外力做的功, 则能量守恒给出

$$W_s + A' = \Delta W$$

由此得

$$\begin{aligned} A' &= \Delta W - W_s = \frac{1}{2} (C - C_0) U^2 - (C - C_0) U^2 \\ &= -\frac{1}{2} (C - C_0) U^2 = -\frac{\epsilon_0 U^2 S b}{2d(d-b)} \end{aligned}$$

* 12.15 证明:球形电容器带电后,其电场的能量的一半储存在内半径为 R_1 ,外半径为 $2R_1R_2/(R_1+R_2)$ 的球壳内,式中 R_1 和 R_2 分别为电容器内球和外球的半径。一个孤立导体球带电后其电场能的一半储存在多大的球壳内?

证 球形电容器带电量 Q 后,其中电场为

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

而能量密度表示式为

$$w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$$

以半径为 R' 的球面内储存能量为总能的一半,则有

$$\int_{R_1}^{R'} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr$$

此式可化简为

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

由此可得

$$R' = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

对于孤立导体球,可以认为 $R_2 \rightarrow \infty$,这样上式就给出

$$R' = 2R_1$$

电流和磁场

13.1 内容提要

1. 电流强度和电流密度

通过一根导线的电流强度：

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

相同的载流子在导体内形成的电流密度为

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$$

其中, n 为载流子数密度; q 为每个载流子的电量; \mathbf{v} 为各载流子的平均速度, 叫漂移速度。
用电流密度表示电流强度, 则有

$$I = \int_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

由电荷守恒可得到电流的连续性方程

$$\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_{\text{int}}}{dt}$$

2. 金属中电流的经典微观图像：自由电子的定向运动是一段一段加速运动的接替，各段加速运动都从碰撞后的定向速度为零开始。

电导率

$$\sigma = \frac{ne^2}{m}\tau$$

其中, m 为电子的质量; τ 为电子相邻两次碰撞之间的自由飞行时间的平均值。利用此电导率可得欧姆定律

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad I = \frac{U}{R}$$

电动势: 单位电荷通过电源时非静电力做的功

$$\mathcal{E} = \int_L \mathbf{E}_{ne} \cdot d\mathbf{r}$$

3. 磁力是运动电荷(如两支电流或电流与磁体)之间的相互作用力。它是通过磁场而实现的。

4. 用磁感应强度 \mathbf{B} 来描述磁场, 用洛伦兹力公式定义, 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}q + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

此等式右边第一项表示电力, 第二项为磁力。式中 \mathbf{v} 是受磁力作用的电荷 q 对参考系的运动速度。由此定义可知, 沿磁场 \mathbf{B} 方向运动的电荷不受磁力。

5. 毕奥-萨伐尔定律: 在真空中电流元 $I d\mathbf{l}$ 产生的磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2}$$

其中 μ_0 为真空磁导率, $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 。

无限长直电流周围的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

磁感线是垂直于电流的平面上以电流为心的同心圆。

载流长直螺线管内的磁场

$$B = \mu_0 n I,$$

方向平行于管的轴线, 在管内为均匀磁场。

6. 磁通连续定理: 通过任意封闭曲面的磁通量为零, 即

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

这一定理说明没有单独的“磁荷”存在。

*** 7. 匀速运动点电荷的磁场:** 以 \mathbf{v} 表示点电荷 q 相对于某参考系的速度, 则在此参考系内距 q 为 r 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2} \quad (v \ll c)$$

运动电荷 q 的磁场 \mathbf{B} 和电场 \mathbf{E} 的一般关系

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E} / c^2$$

8. 安培环路定理: 对于恒定电流(其电流总是闭合的), 它的磁场 \mathbf{B} 沿任何闭合回路 L 的线积分(称为 \mathbf{B} 沿该回路的环流)等于该回路所包围的电流的代数和乘以 μ_0 , 即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \sum I_{\text{int}}$$

由于恒定电流总是闭合的,所以“回路所包围的电流”应理解为“和回路铰链的电流”。对一段电流的磁场,环路定理不成立。

9. 与变化电场相联系的磁场:在电场 E 随时间变化的区域有磁场产生,变化电场 E 相联系的磁场 B 和电场的关系为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

其中 L 是面积 S 的边界。

将此式和上面关于恒定电流的安培环路定理合在一起,可得普遍的安培环路定理。

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \right)$$

此式说明磁场的源有两种:运动电荷和变化电场。

*** 10. 电场和磁场的相对性:**同一电荷系统的电场和磁场的表现形式(即 E 和 B 的分布)随参考系的不同而不同。这说明电场和磁场是一个统一的实体,称为电磁场。

由于现在只发现有电荷存在而没有磁荷,所以可以说(也可以用狭义相对论证明)磁现象是电现象的相对论效应,或者说,磁场是电场的相对论效应。

13.2 解题思路

1. 由载流子的运动导出电流密度公式的思路和方法是物理学中常用的一个方法,应该能理解它并应用它进行分析计算。

2. 在应用洛伦兹力公式求磁力时应注意该公式是一矢量式,各量的方向之间的关系要明确。再者是要注意式中的速度 v 是带电粒子相对于参考系的速度。要留意所选参考系。

3. 给定一段有限长(如一段直电流或一段圆弧)的电流,求其磁场时要用毕奥-萨伐尔定律对各电流元的磁场积分。由于该定律公式涉及矢量的矢积,所以更要注意 $d\mathbf{l}$, \mathbf{r} 与 \mathbf{B} 的方向之间的关系。

4. 利用安培环路定理求恒定电流的磁场分布时,要首先根据电流分布的对称性分析出磁场分布的对称性,然后选择适当的环路求解。所选环路“包围”线圈时,应该用所包围的匝数乘以通过每匝的电流作为被包围的电流的代数和。被“包围”的电流的正负要看回路所选的正方向决定。按右手螺旋规则与回路铰链着的电流取正值。

13.3 思考题选答

13.5 一根导线中间分成相同的两支,形成一菱形(图 13.1)。通入电流后菱形的连接两支分、合两点的对角线上的合磁场如何?

答 如图 13.1 所示,根据毕奥-萨伐尔定律,在所提及的对角线上任一点 P ,左,右两

支电流相对应的电流元所产生的磁场大小相等,方向相反,相互抵消。据此,两支电流在 P 点的合磁场为 O ;在该对角线上各点的合磁场也为零。

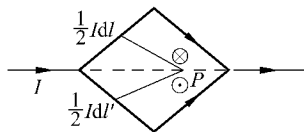


图 13.1 思考题 13.5 答用图

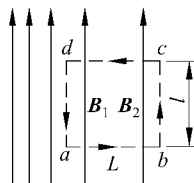


图 13.2 思考题 13.9 证用图

13.9 在无电流的空间区域内,如果磁感线是平行直线,那么磁场一定是均匀场。试证明之。

证 设磁场是不均匀的,如图 13.2 所示, $B_1 > B_2$ 。令作一矩形安培环路 $abcd$,沿此环路的磁场的线积分为

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = (B_1 - B_2)l$$

由于 $B_1 > B_2$,此积分不等于 0。但此环路并未包围电流,这就违反了安培环路定律。故应有 $B_1 = B_2$,且二者方向相同,即磁场为均匀磁场。

13.12 像原书图 13.39 那样的截面是任意形状的密绕长直螺线管,管内磁场是否是均匀磁场? 其磁感应强度是否仍可按 $B = \mu_0 nI$ 计算?

答 异形截面的密绕长直螺线管内的磁场仍是均匀磁场而且其磁感应强度仍可按 $B = \mu_0 nI$ 计算。这是因为异形截面的螺线管可以看成是许多截面较小的具有同样 n 和 I 的圆形截面螺线管平行集束形成的,其截面如图 13.3 所示。在管内任一点 P 处相邻的圆螺线管的电流方向相反,合电流为零,只有边界上的电流仍是 I 。这样,这个圆形螺线管束的电流的总的分布就和原来异形截面螺线管的电流分布一样,其磁场分布也应该一样。对圆形螺线管束的每一个螺线管,其内部磁场是均匀的而且其大小可

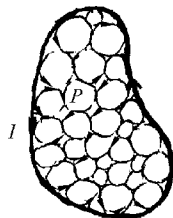


图 13.3 思考题 13.12 答用图

以用 $B = \mu_0 nI$ 计算。它在其外部的磁场为零。因此,异形截面螺线管内各处的磁场就只由本地的圆形螺线管决定。这样,异形截面螺线管内的磁场也就是均匀的而且可以用 $B = \mu_0 nI$ 计算了。

13.4 习题解答

13.1 北京正负电子对撞机的储存环是周长为 240 m 的近似圆形轨道。当环中电子流强度为 8 mA 时,在整个环中有多少电子在运行? 已知电子的速率接近光速。

解 以 N_1 表示单位长度轨道上的电子数, 则 $I = N_1 e v$ 。在整个环中的电子数为

$$N = l N_1 = \frac{I l}{e v} = \frac{240 \times 8 \times 10^{-3}}{1.6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^8} = 4 \times 10^{10} (\text{个})$$

13.2 设想在银这样的金属中, 导电电子数等于原子数。当 1 mm 直径的银线中通过 30 A 的电流时, 电子的漂移速度是多大? 给出近似答案, 计算中所需要的那些你一时还找不到的数据, 可自己估计数量级并代入计算。若银线温度是 20 °C, 按经典电子气模型, 其中自由电子的平均速率是多大?

解
$$v = \frac{I}{S n e} = \frac{I M}{\frac{\pi}{4} D^2 \rho N_A e}$$

银的摩尔质量取 $M = 100 \text{ g/mol} = 0.1 \text{ kg/mol}$, 密度取 $\rho = 10 \text{ g/cm}^3 = 10^4 \text{ kg/m}^3$, 则

$$v = \frac{4 \times 30 \times 0.1}{\pi \times (10^{-3})^2 \times 10^4 \times 6 \times 10^{23} \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ = 4 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = 1.60 \sqrt{\frac{kT}{m}} = 1.60 \times \sqrt{\frac{1.38 \times 10^{-23} \times 293}{9.1 \times 10^{-31}}} \\ = 1.1 \times 10^5 \text{ m/s}$$

13.3 大气中由于存在少量的自由电子和正离子而具有微弱的导电性。

(1) 地表附近, 晴天大气平均电场强度约为 120 V/m, 大气平均电流密度约为 $4 \times 10^{-12} \text{ A/m}^2$ 。求大气电阻率是多大?

(2) 电离层和地表之间的电势差为 $4 \times 10^5 \text{ V}$, 大气的总电阻是多大?

解 (1) $\rho = \frac{E}{J} = \frac{120}{4 \times 10^{-12}} = 3 \times 10^{13} \Omega \cdot \text{m}$

(2) $R = \frac{U}{I} = \frac{U}{J \times 4\pi R_E^2} = \frac{4 \times 10^5}{4 \times 10^{-12} \times 4\pi \times (6.37 \times 10^6)^2} = 196 \Omega$

13.4 求图 13.4 各图中 P 点的磁感应强度 B 的大小和方向。

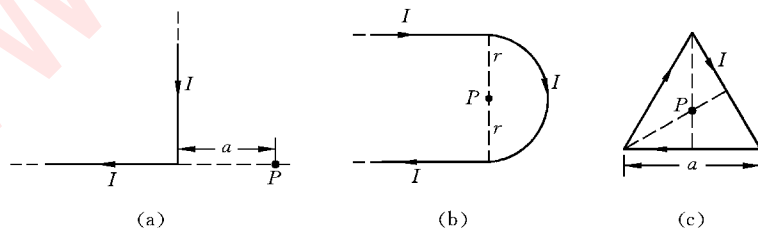


图 13.4 习题 13.4 解用图

解 (a) 水平段电流在 P 点不产生磁场。竖直段电流是一“半无限长”直电流,它在 P 点的磁场为

$$B = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

方向垂直纸面向外。

(b) 两直电流在 P 点的磁场相当于两个“半无限长”直电流磁场的叠加,等于一个无限长直电流在相距 r 处的磁场,为 $\mu_0 I/(2\pi r)$ 。半圆电流在 P 点的磁场为圆电流在圆心处的磁场的一半,即 $\mu_0 I/(4r)$ 。在 P 点的总磁场为上述同向磁场的叠加,其大小为

$$P = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{4r}$$

方向垂直纸面向里。

(c) P 点到每一边的距离为 $a/(2\sqrt{3})$ 。 P 点的磁场是三边电流产生的同向磁场的叠加,为

$$B = 3 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi a/(2\sqrt{3})} (\cos 30^\circ - \cos 150^\circ) = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$$

13.5 高压输电线在地面上空 25 m 处,通过电流为 1.8×10^3 A。

(1) 求在地面上由这电流所产生的磁感应强度多大?

(2) 在上述地区,地磁场为 0.6×10^{-4} T,问输电线产生的磁场与地磁场相比如何?

解 (1) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1.8 \times 10^3}{2\pi \times 25} = 1.4 \times 10^{-5}$ T

(2) $B/B_E = 1.4 \times 10^{-5} / (0.6 \times 10^{-4}) = 0.24$

13.6 两根导线沿半径方向被引到铁环上 A, C 两点,电流方向如图 13.5 所示。求环中心 O 处的磁感应强度是多少?

解 两根长直电流在圆心处的磁场均为零。 I_1 在圆心处的磁场为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2r} \frac{l_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi r^2}$$

方向垂直纸面向外。 I_2 在圆心处的磁场为

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2r} \frac{l_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi r^2}$$

方向垂直纸面向里。由于 l_1 和 l_2 的电阻与其长度成正比,于是

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

所以 $I_1 l_1 = I_2 l_2$ 。因此 B_1 与 B_2 大小相等,方向相反,因而圆心处的合磁场为零。

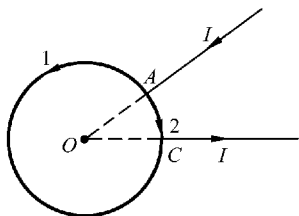


图 13.5 习题 13.6 解用图

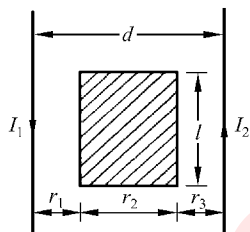


图 13.6 习题 13.7 解用图

13.7 两平行直导线相距 $d=40\text{ cm}$, 每根导线载有电流 $I_1=I_2=20\text{ A}$, 如图 13.6 所示。求:

- (1) 两导线所在平面内与该两导线等距离的一点处的磁感应强度;
- (2) 通过图中斜线所示面积的磁通量(设 $r_1=r_3=10\text{ cm}$, $l=25\text{ cm}$)。

解 (1) 在两导线所在平面内与两导线等距离处的磁场为

$$B_0 = 2 \frac{\mu_0 I}{2\pi d/2} = \frac{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 20}{\pi \times 0.4} = 4.0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

(2) 所求磁通量为

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2 \int_{r_1}^{r_1+r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \ln \frac{r_1 + r_2}{r_1} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 0.25}{\pi} \ln \frac{0.10 + 0.20}{0.10} \\ &= 2.2 \times 10^{-6} \text{ Wb} \end{aligned}$$

13.8 试设想一矩形回路(图 13.7)并利用安培环路定理导出长直螺线管内的磁场为 $B=\mu_0 nI$ 。

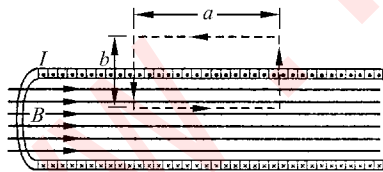


图 13.7 习题 13.8 解用图

解 由于长直螺线管通有电流时, 其外部磁场为 0, 而所选矩形回路的侧边(长为 b)在管内部分和磁场方向垂直, 所以由安培环路定理可得

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B \cdot a = \mu_0 n a I$$

由此得

$$B = \mu_0 n I$$

13.9 研究受控热核反应的托卡马克装置中, 用螺绕环产生的磁场来约束其中的等离子体。设某一托卡马克装置中环管轴线的半径为 2.0 m , 管截面半径为 1.0 m , 环上均匀绕有 10 km 长的水冷铜线。求铜线内通入峰值为 $7.3 \times 10^4\text{ A}$ 的脉冲电流时, 管内中心的磁场峰值多大?(近似地按恒定电流计算)

解 螺绕环的总匝数为 $N=l/(2\pi r)$ 。由安培环路定理

$$B \cdot 2\pi R = \mu_0 NI = \frac{\mu_0 l I}{2\pi r}$$

$$B = \frac{\mu_0 l I}{4\pi^2 r R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 10^3 \times 7.3 \times 10^4}{4\pi^2 \times 1.0 \times 2.0} = 11.6 \text{ T}$$

13.10 如图 13.8 所示,线圈均匀密绕在截面为长方形的整个木环上(木环的内外半径分别为 R_1 和 R_2 ,厚度为 h ,木料对磁场分布无影响),共有 N 匝,求通入电流 I 后,环内外磁场的分布。通过管截面的磁通量是多少?

解 作垂直于木环中轴线而圆心在中轴线上的圆为安培环路。如果圆周在环外,则由安培环路定理可得,在环外, $B=0$ 。如果圆周在环内,且半径为 $r(R_1 < r < R_2)$,则由安培环路定理

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r B = \mu_0 NI$$

由此得,在环内,

$$B = \mu_0 NI / (2\pi r)$$

为求环管截面通过的磁通量,可先考虑环管内截面上宽为 dr ,高为 h 的一窄条面积通过的磁通量为

$$d\Phi = Bh dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi r} dr$$

通过管全部截面的磁通量为

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

13.11 两块平行的大金属板上有均匀电流流通,面电流密度都是 j ,但方向相反。求板间和板外的磁场分布。

解 已知每块平板两侧的磁场大小相等,都等于 $\mu_0 j/2$,而方向相反。如图 13.9 所示对于两板产生的合磁场 B ,则在两板间,由于两板产生的磁场方向相同,所以 $B=B_1+B_2=\mu_0 j$ 。在两板外,由于两板产生的磁场方向相反,所以 $B=B_1-B_2=0$ 。

13.12 有一长圆柱形导体,截面半径为 R 。今在导体中挖去一个与轴平行的圆柱体,形成一个截面半径为 r 的圆柱形空洞,其横截面如图 13.10 所示。在有洞的导体柱内有电流沿柱轴方向流通。求洞中各处的磁场分布。设柱内电流均匀分布,电流密度为 J ,从柱轴到空洞轴之间的距离为 d 。

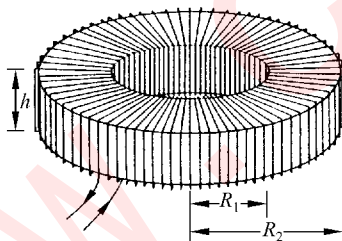


图 13.8 习题 13.10 解用图

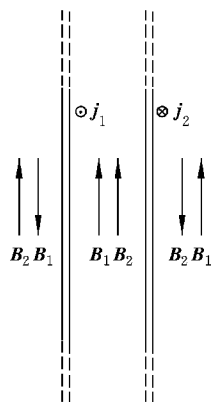


图 13.9 习题 13.11 解用图

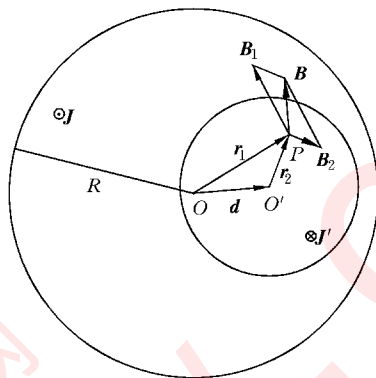


图 13.10 习题 13.12 解用图

解 有洞的导体柱通有电流密度 \mathbf{J} 的磁场分布应和无空洞的导体柱通有电流密度 \mathbf{J} 叠加上空洞中通有电流密度 \mathbf{J}' ($\mathbf{J}' = -\mathbf{J}$) 的磁场分布相同。如图 13.10 所示, 导体柱全通有电流密度 \mathbf{J} 在洞内 P 点的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_1$$

而洞中通有电流密度 \mathbf{J}' 在 P 点的磁场应为

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J}' \times \mathbf{r}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_2$$

洞中 P 点的总磁场为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{d}$$

由此可知, 洞内磁场为均匀磁场, 其大小为 $\mu_0 Jd/2$, 方向与洞和柱的轴线的共同垂线垂直。

13.13 一平行板电容器的两板都是半径为 5.0 cm 的圆导体片, 在充电时, 其中电场强度的变化率为 $\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12} \text{ V/m} \cdot \text{s}$ 。求极板边缘的磁感应强度 \mathbf{B} 。

解

$$\begin{aligned} I_d &= \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt} \\ &= 8.85 \times 10^{-12} \times \pi \times 0.05^2 \times 1.0 \times 10^{12} \\ &= 7.0 \times 10^{-2} \text{ A} \\ B &= \frac{\mu_0 I_d}{2\pi R} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 7 \times 10^{-2}}{2\pi \times 0.05} = 2.8 \times 10^{-7} \text{ T} \end{aligned}$$

磁 力

14.1 内容提要

1. 带电粒子在均匀磁场中的运动

圆周运动的半径

$$R = \frac{mv}{qB}$$

圆周运动的周期

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

螺旋运动的螺距

$$h = \frac{2\pi m}{qB} v_{//}$$

2. 霍尔效应是形成电流的载流子受磁场力作用所产生的现象。它使得在导体上沿垂直于电流的方向出现电势差,此电势差叫霍尔电压。以 b 表示通有电流 I 的导电窄条的厚度,则对磁场垂直于窄条表面的情况可导出霍尔电压为

$$U_H = \frac{IB}{nqb}$$

霍尔电压的正负和形成电流的载流子的正负有关。

3. 安培力: 安培力是磁场对电流的作用力,它是磁场对形成电流的载流子的作用力的宏观表现。从洛伦兹力出发,可导出电流元 Idl 受磁场 \mathbf{B} 的作用力为

$$d\mathbf{F} = Idl \times \mathbf{B}$$

一段电流受磁场的作用力

$$\mathbf{E} = \int_L I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

4. 载流线圈受的磁力和磁力矩

载流线圈的磁矩

$$\mathbf{m} = I\mathbf{S} = I\mathbf{S}\mathbf{e}_n$$

在均匀磁场中,载流线圈受的磁力的合力为零;受的力矩为

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

载流线圈在磁场中的势能为

$$W_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

5. 平行电流间的相互作用力: 同向电流相吸, 反向电流相斥; 单位长度线段受的力的大小为

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

国际上约定用这一相互作用力定义电流的 IS 单位——A(安培)。

14.2 解题思路

1. 在应用洛伦兹力公式求磁力时应注意该公式是一矢量式, 各量的方向之间的关系要明确。再者是要注意式中的速度 \mathbf{v} 是带电粒子相对于参考系的速度。要留意所选参考系。

2. 安培力公式也是一个矢量公式, 也要分清 \mathbf{F} , $d\mathbf{l}$ 和 \mathbf{B} 的方向。还要注意式中的 \mathbf{B} 是电流元所在处的外磁场的磁感应强度。

3. 要明确通电线圈的磁矩的含义, 特别是它的方向和电流平面的关系。也要注意磁矩受的力矩和磁矩在磁场中的能量公式也都是以矢量表示的。

14.3 思考题选答

14.5 图 14.1 显示出在一汽泡室中产生的一对正负电子的径迹图, 磁场垂直于图画面而指离读者。试判断哪一支是电子的轨迹, 哪一支是正电子的轨迹? 为何轨迹呈螺旋形?

答 由图中的螺旋线轨迹可知其共同起点是产生正负电子的地点, 而产生这一对电子的粒子是从图上方射入的。由此可知正负电子的运动方向。再根据磁场 \mathbf{B} 的方向可判断出向右偏转的较小的螺旋线轨迹是电子的, 另一支是正电子的。由于电子和正电子在气泡室中运动时要不断和过热液体分子碰撞而动能减小, 速度降低, 所以轨迹的曲率半径就越来越小而显出螺旋形。

14.6 解释等离子体电流的箍缩效应, 即等离子体柱中通以电流时(图 14.2), 它会

受到自身电流磁场的作用而向轴心收缩的现象。

答 等离子体是由等量的正负离子构成的物质存在的状态。其中电流的形成就是正和负离子沿相反方向的宏观运动。如图 14.2 所示,正离子沿与电流方向相同的方向运动。这种运动就形成一个电流密度通过横截面的圆柱电流。由安培环路定理可知其内存在着磁场,其磁感线是以轴为心的同心圆。在此磁场的作用下,运动的正负离子都受到指向轴线的力。这就引起了柱形等离子体电流向轴心收缩的现象。

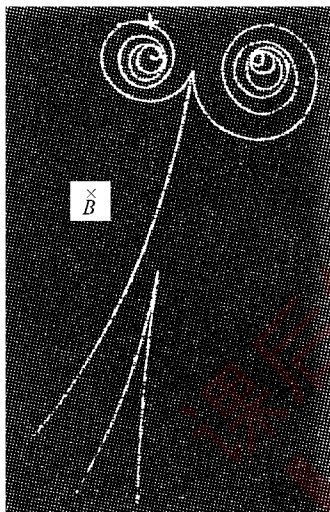


图 14.1 思考题 14.5 用图

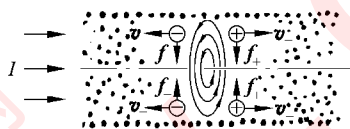


图 14.2 等离子体柱电流内的磁场

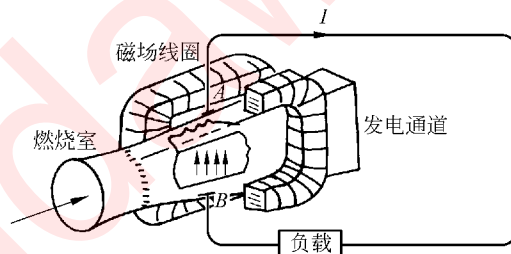


图 14.3 思考题 14.7 答用图

14.7 磁流体发电机(图 14.3)是利用磁场对高温电离气体的作用而产生电流的装置。图中发电通道内箭头表示电离气体中离子移动方向。试问按这种方向运动的离子是正离子还是负离子? A、B 两极中,哪一极是发电机正极? 使离子偏转的磁场方向如何?

答 由电流 I 的方向可知按图示方向运动的离子是正离子, A 为发电机正极。使离子偏转的磁场方向是水平方向而指向输入离子运动的左方。

14.4 习题解答

14.1 如图 14.4 所示,一电子经过 A 点时,具有速率 $v_0 = 1 \times 10^7 \text{ m/s}$ 。

(1) 欲使这电子沿半圆自 A 至 C 运动,试求所需的磁场大小和方向;

(2) 求电子自 A 运动到 C 所需的时间。

解 (1) 对电子的圆运动用牛顿第二定律

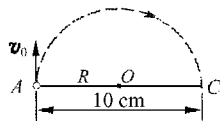


图 14.4 习题 14.1 解用图

$$ev_0 B = m \frac{v_0^2}{R}$$

由此得

$$B = \frac{mv_0}{eR} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 1 \times 10^7}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.05} = 1.1 \times 10^{-3} \text{ T}$$

此磁场方向应垂直纸面向里。

(2) 所需时间应为

$$t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi R}{2v_0} = \frac{\pi \times 0.05}{1 \times 10^7} = 1.6 \times 10^{-8} \text{ s}$$

14.2 把 $2.0 \times 10^3 \text{ eV}$ 的一个正电子, 射入磁感应强度 $B=0.1 \text{ T}$ 的匀强磁场中, 其速度矢量与 B 成 89° 角, 路径成螺旋线, 其轴在 B 的方向。试求这螺旋线运动的周期 T 、螺距 h 和半径 r 。

解 正电子的速率为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.11 \times 10^{-31}}} = 2.6 \times 10^7 \text{ m/s}$$

做螺旋运动的周期为

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi \times 9.11 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} = 3.6 \times 10^{-10} \text{ s}$$

螺距为

$$h = v \cos 89^\circ T = 2.6 \times 10^7 \times \cos 89^\circ \times 3.6 \times 10^{-10} = 1.6 \times 10^{-4} \text{ m}$$

半径为

$$r = \frac{mv \sin 89^\circ}{eB} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times 2.6 \times 10^7 \times \sin 89^\circ}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$$

14.3 估算地球磁场对电视机显像管中电子束的影响。假设加速电势差为 $2.0 \times 10^4 \text{ V}$, 如电子枪到屏的距离为 0.2 m , 试计算电子束在大小为 $0.5 \times 10^{-4} \text{ T}$ 的横向地磁场作用下约偏转多少? 这偏转是否影响电视图像?

解 电子离开电子枪的速度为

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^4}{9.1 \times 10^{-31}}} = 8.4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

电子在地磁场作用下的轨道半径为

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 8.4 \times 10^7}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.5 \times 10^{-4}} = 9.6 \text{ m}$$

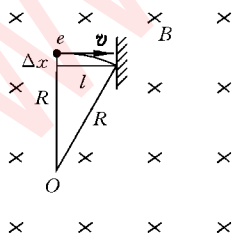


图 14.5 习题 14.3 解用图

如图 14.5 所示, 电子的偏转距离为

$$\begin{aligned}\Delta x &= R - \sqrt{R^2 - l^2} \approx \frac{l^2}{2R} = \frac{0.2^2}{2 \times 9.6} \\ &= 2 \times 10^{-3} \text{ m} = 2 \text{ mm}\end{aligned}$$

此偏转比较大,但由于全画面电子束均有此偏转,故对图像无影响。

14.4 北京正负电子对撞机中电子在周长为 240 m 的储存环中做轨道运动。已知电子的动量是 $1.49 \times 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, 求偏转磁场的磁感应强度。

解 由 $R = mv/(eB) = p/(eB)$ 可得

$$B = \frac{p}{eR} = \frac{1.49 \times 10^{-18}}{1.6 \times 10^{-19} \times 240/(2\pi)} = 0.244 \text{ T}$$

14.5 从太阳射来的速度是 $0.80 \times 10^8 \text{ m/s}$ 的电子进入地球赤道上空高层范艾伦带中,该处磁场为 $4 \times 10^{-7} \text{ T}$ 。此电子做圆周运动的轨道半径是多大? 此电子同时沿绕地磁场磁感线的螺线缓慢地向地磁北极移动。当它到达地磁北极附近磁场为 $2 \times 10^{-5} \text{ T}$ 的区域时,其轨道半径又是多大?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad R_1 &= \frac{mv}{eB_1} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 0.8 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^{-7}} = 1.1 \times 10^3 \text{ m} \\ R_2 &= \frac{mv}{eB_2} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \times 0.8 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-5}} = 23 \text{ m}\end{aligned}$$

14.6 一台用来加速氦核的回旋加速器的 D 盒直径为 75 cm,两磁极可以产生 1.5 T 的均匀磁场(原书图 14.22)。氦核的质量为 $3.34 \times 10^{-27} \text{ kg}$,电量就是质子电量。求:

- (1) 所用交流电源的频率应多大?
- (2) 氦核由此加速器射出时的能量是多少 MeV?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad \nu &= \frac{1}{T} = \frac{eB}{2\pi m_D} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 1.5}{2\pi \times 3.34 \times 10^{-27}} = 1.1 \times 10^7 \text{ Hz} \\ (2) \quad E_k &= \frac{1}{2} m_D v^2 = \frac{p^2}{2m_D} = \frac{e^2 B^2 R^2}{2m_D} \\ &= \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2 \times (1.5)^2 \times (0.75/2)^2}{2 \times 3.34 \times 10^{-27}} \\ &= 1.2 \times 10^{-12} \text{ J} = 7.6 \text{ MeV}\end{aligned}$$

14.7 如图 14.6 所示,一铜片厚为 $d=1.0 \text{ mm}$,放在 $B=1.5 \text{ T}$ 的磁场中,磁场方向与铜片表面垂直。已知铜片里每立方厘米有 8.4×10^{22} 个自由电子,每个电子的电荷 $-e=-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$,铜片中有 $I=200 \text{ A}$ 的电流流通。

- (1) 求铜片两侧的电势差 $U_{aa'}$;
- (2) 铜片宽度 b 对 $U_{aa'}$ 有无影响? 为什么?

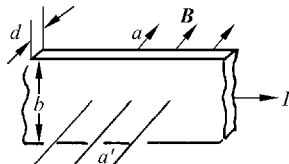


图 14.6 习题 14.7 解用图

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1)} \quad U_{aa'} &= \frac{IB}{nqd} \\
 &= \frac{200 \times 1.5}{8.4 \times 10^{22} \times (-1.6 \times 10^{-19}) \times 1.0 \times 10^{-3}} \\
 &= -2.23 \times 10^{-5} \text{ V}
 \end{aligned}$$

负号表示 a' 侧电势高。

(2) 铜片宽度 b 对 $U_{aa'} = U_H$ 无影响。这是因为 $U_H = E_H b = vb/B$ 和 b 有关,而在电流 I 一定的情况下,漂移速度 $v = I/(nqbd)$ 又和 b 成反比的缘故。

14.8 如图 14.7 所示,一块半导体样品的体积为 $a \times b \times c$,沿 x 方向有电流 I ,在 z 轴方向加有均匀磁场 B 。这时实验得出的数据 $a = 0.10 \text{ cm}$, $b = 0.35 \text{ cm}$, $c = 1.0 \text{ cm}$, $I = 1.0 \text{ mA}$, $B = 3000 \text{ G}$,片两侧的电势差 $U_{AA'} = 6.55 \text{ mV}$ 。

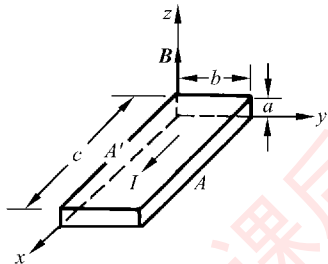


图 14.7 习题 14.8 解用图

(1) 这半导体是正电荷导电(P型)还是负电荷导电(N型)?

(2) 求载流子浓度。

解 (1) 由电流方向、磁场方向和 A 侧电势高于 A' 侧电势可知此半导体是负电荷导电。

$$\begin{aligned}
 (2) \quad n &= \frac{IB}{U_{AA'}qa} = \frac{1.0 \times 10^{-3} \times 0.3}{6.55 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{-3}} \\
 &= 2.86 \times 10^{20} \text{ 个/m}^3
 \end{aligned}$$

14.9 掺砷的硅片是 N 型半导体,这种半导体中的电子浓度是 $2 \times 10^{21} \text{ 个/m}^3$,电阻率是 $1.6 \times 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}$ 。用这种硅做成霍尔探头以测量磁场,硅片的尺寸相当小,是 $a \times b \times c = 0.5 \text{ cm} \times 0.2 \text{ cm} \times 0.005 \text{ cm}$ 。将此片长度的两端接入电压为 1 V 的电路中。当探头放到磁场某处并使其最大表面与磁场方向垂直时,测得 0.2 cm 宽度两侧的霍尔电压是 1.05 mV 。求磁场中该处的磁感应强度。

解 以 a, b, c 分别表示硅片的长、宽、高。

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{nqU_H c}{I} = \frac{nqU_H c \rho a}{U b c} = \frac{nqU_H \rho a}{U b} \\
 &= (2 \times 10^{21} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1.05 \times 10^{-3} \\
 &\quad \times 1.6 \times 10^{-2} \times 0.5 \times 10^{-2}) / (1 \times 0.2 \times 10^{-2}) \\
 &= 1.34 \times 10^{-2} \text{ T}
 \end{aligned}$$

14.10 磁力可用来输送导电液体,如液态金属、血液等而不需要机械活动组件。如图 14.8 所示是输送液态钠的管道,在长为 l 的部分加一横向磁场 B ,同时垂直于磁场和管道通以电流,其电流密度为 J 。

(1) 证明: 在管内液体 l 段两端由磁力产生的压力差为 $\Delta p = J l B$, 此压力差将驱动液体沿管道流动;

(2) 要在 l 段两端产生 1.00 atm 的压力差, 电流密度应多大? 设 $B = 1.50 \text{ T}$, $l = 2.00 \text{ cm}$.

$$\text{解 (1)} \quad \Delta p = \frac{F}{S} = \frac{I B l}{S} = J B l$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad J &= \frac{\Delta p}{B l} = \frac{1.00 \times 1.013 \times 10^5}{1.50 \times 2.00 \times 10^{-2}} \\ &= 3.38 \times 10^6 \text{ A/m}^2 = 338 \text{ A/cm}^2 \end{aligned}$$

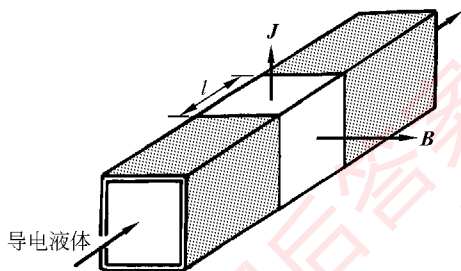


图 14.8 习题 14.10 解用图

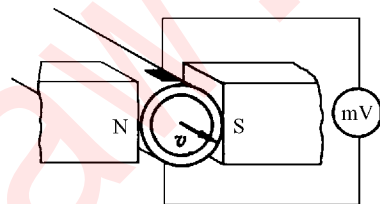


图 14.9 习题 14.11 解用图

14.11 霍尔效应可用来测量血流的速度。其原理如图 14.9 所示, 在动脉血管两侧分别安装电极并加以磁场。设血管直径是 2.0 mm , 磁场为 0.080 T , 毫伏表测出的电压为 0.10 mV , 血流的速度多大? (实际上磁场由交流电产生而电压也是交流电压。)

解 血流稳定时, 应有

$$q v B = q E_H$$

$$v = \frac{E_H}{B} = \frac{U_H}{dB} = \frac{0.10 \times 10^{-3}}{0.080 \times 2 \times 10^{-3}} = 0.63 \text{ m/s}$$

14.12 一正方形线圈由外皮绝缘的细导线绕成, 共绕有 200 匝, 每边长为 150 mm , 放在 $B = 4.0 \text{ T}$ 的外磁场中, 当导线中通有 $I = 8.0 \text{ A}$ 的电流时, 求:

(1) 线圈磁矩 m 的大小;

(2) 作用在线圈上的力矩的最大值。

$$\text{解 (1)} \quad m = N I S = 200 \times 8.0 \times (150 \times 10^{-3})^2 = 36 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

$$\text{(2)} \quad M_{\max} = m B = 36 \times 4.0 = 144 \text{ N} \cdot \text{m}$$

14.13 如图 14.10 所示, 在长直电流近旁放一矩形线圈与其共面, 线圈各边分别平行和垂直于长直导线。线圈长度为 l , 宽为 b , 近边距长直导线距离为 a , 长直导线中通有电流 I 。当矩形线圈中通有电流 I_1 时, 它受的磁力的大小和方向各如何? 它又受到多大

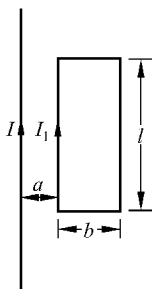


图 14.10 习题 14.13 解用图

的磁力矩?

解 如图 14.10 所示,线圈左边受力为

$$F_l = B_l I_1 l = \frac{\mu_0 I I_1 l}{2\pi a}$$

方向向左;线圈右边受的力为

$$F_r = B_r I_1 l = \frac{\mu_0 I I_1 l}{2\pi(a+b)}$$

方向向右。线圈上下两边受的磁力大小相等方向相反。因此线圈受的磁力的合力为

$$F = F_l - F_r = \frac{\mu_0 I I_1 l b}{2\pi a(a+b)}$$

方向向左,即指向长直电流。

由于线圈各边受力共面,所以它受的力矩为零。

14.14 正在研究的一种电磁导轨炮(子弹的出口速度可达 10 km/s)的原理可用图 14.11 说明。子弹置于两条平行导轨之间,通以电流后子弹会被磁力加速而以高速从出口射出。以 I 表示电流, r 表示导轨(视为圆柱)半径, a 表示两轨面之间的距离。将导轨近似地按无限长处理,证明子弹受的磁力近似地可以表示为

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a+r}{r}$$

设导轨长度 $L = 5.0$ m, $a = 1.2$ cm, $r = 6.7$ cm, 子弹质量为 $m = 317$ g, 发射速度为 4.2 km/s。

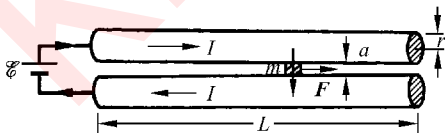


图 14.11 习题 14.14 解用图

(1) 求该子弹在导轨内的平均加速度是重力加速度的几倍?(设子弹由导轨末端启动)

(2) 通过导轨的电流应多大?

(3) 以能量转换效率 40% 计,子弹发射需要多少千瓦功率的电源?

解 子弹受的磁力为(子弹处磁场 B_1 按半无限长直电流的磁场计)

$$F = 2 \int_r^{a+r} I B_1 dr = 2 \int_r^{a+r} \frac{\mu_0 I^2}{4\pi r} dr = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a+r}{r}$$

(1) 子弹的平均加速度为

$$\begin{aligned}\bar{a} &= v^2 / (2L) = (4.2 \times 10^3)^2 / (2 \times 5.0) \\ &= 1.76 \times 10^6 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

这一加速度为重力加速度的倍数为

$$\bar{a}/g = 1.76 \times 10^6 / 9.8 = 1.8 \times 10^5$$

(2) 由 $F = m\bar{a}$, 可得

$$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln \frac{a+r}{r} = m\bar{a}$$

由此可得

$$\begin{aligned}I &= \left\{ \frac{2\pi m\bar{a}}{\mu_0 \ln[(a+r)/r]} \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \frac{2\pi \times 317 \times 10^{-3} \times 1.76 \times 10^6}{4\pi \times 10^{-7} \times \ln[(1.2+6.7)/6.7]} \right\}^{1/2} \\ &= 4.1 \times 10^6 \text{ A}\end{aligned}$$

(3) 所需电源的功率应为

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}mv^2 / (0.4t) = \frac{1}{2}mv^2 / (0.4 \times 2L/v) \\ &= \frac{mv^3}{1.6L} = \frac{317 \times 10^{-3} \times 4.2^3 \times 10^9}{1.6 \times 5.0} \\ &= 2.9 \times 10^9 \text{ W} = 2.9 \text{ MW}\end{aligned}$$

14.15 一无限长薄壁金属筒, 沿轴线方向有均匀电流流通, 面电流密度为 $j \text{ A/m}$ 。求单位面积筒壁受的磁力的大小和方向。

解 如图 14.12 所示, 宽为 dl 长为 dL 的电流片受 $d\theta$ 所对的宽为 $Rd\theta$ 的长条电流的磁力为

$$dF = \frac{\mu_0 j R d\theta}{2\pi a} j dl dL = \frac{\mu_0 j R d\theta}{4\pi R \sin(\theta/2)} j dl dL$$

方向如图所示, 指向长条电流。

该电流片单位面积受长条电流的力为

$$dF_1 = \frac{dF}{dl dL} = \frac{\mu_0 j^2 d\theta}{4\pi \sin(\theta/2)}$$

根据电流分布对该电流片的对称性, 可知整个圆筒面电流对该电流片的磁力的垂直于径向的分量为零。因此该电流片单位面积所受的磁力为

$$F_1 = F_{R1} = \int dF_{R1} = \int dF_1 \sin \frac{\theta}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 j^2 d\theta}{4\pi} = \frac{\mu_0 j^2}{2}$$

此力的方向沿径向向筒内。

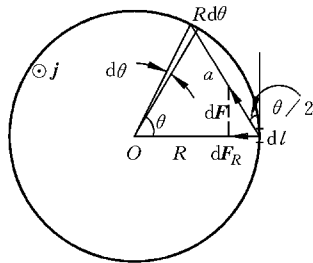


图 14.12 习题 14.15 解用图

14.16 两条无限长平行直导线相距 5.0 cm, 各通以 30 A 的同向电流。求一条导线上每单位长度受的磁力多大? 如果导线中没有正离子, 只有电子在定向运动, 那么电流都是 30 A 的一条导线的每单位长度受另一条导线的电力多大? 电子的定向运动速度为 1.0×10^{-3} m/s。

解 导线的单位长度受的磁力为

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 30 \times 30}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} = 3.6 \times 10^{-3} \text{ N/m, 为相互吸引力。}$$

如果没有正离子, 则单位长度导线受的电力为

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{\mu_0 c^2}{2\pi d} \frac{I_1 I_2}{v_1 v_2} = \frac{c^2}{v^2} F_m = \frac{(3 \times 10^8)^2}{(1 \times 10^{-3})^2} \times 3.6 \times 10^{-3}, \\ &= 3.2 \times 10^{20} \text{ N/m} \end{aligned}$$

该力为相互排斥力。这时两导线受的磁力和有正离子时相同; 但由于 $F_e \gg F_m$, 所以两导线的相互作用力基本上就是电力。

*** 14.17** 两个电子并排以相同的速率 $c/3$ (c 为光速) 运动, 二者之间的距离是 1×10^{-10} m。求它们之间的相互作用力(注意利用原书式(13.39)和式(13.40)求 E' 和 B)。

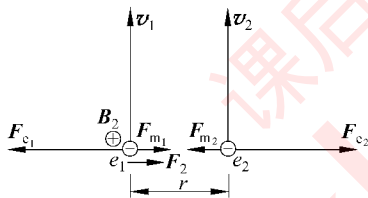


图 14.13 习题 14.17 解用图

解 如图 14.13 所示, 两电子的相互作用电力为斥力, 其大小以电子 1 受力计, 为

$$F_{e_1} = E_2 e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}$$

两电子的相互作用磁力为吸力, 其大小以电子 1 受力

计, 为

$$\begin{aligned} F_{m_1} &= e v_1 B_2 = e v_1 \frac{E_2 v_2}{c^2} \\ &= \frac{e^2 v_1 v_2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 (1 - \beta^2)^{1/2}} \\ &= \frac{e^2 v^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 (1 - \beta^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

由于 $F_e > F_m$, 所以合力仍为斥力, 其大小为

$$\begin{aligned} F &= F_e - F_m = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 (1 - \beta^2)^{1/2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}{(1 \times 10^{-10})^2 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \\ &= 2.2 \times 10^{-8} \text{ N} \end{aligned}$$

物质的磁性

15.1 内容提要

1. 物质对磁场的影响：设一通有电流的螺线管中为真空时，管内磁场为 B_0 。当螺线管内充满某种物质时，管内磁场将增大到 μ_r 倍，即

$$B = \mu_r B_0$$

式中 μ_r 为管内物质的相对磁导率，随物质的不同而不同。 $\mu_r < 1$ 的叫抗磁质； $\mu_r > 1$ 的叫顺磁质；二者的 μ_r 和 1 相差均甚微。 $\mu_r \gg 1$ 而且随磁场明显改变的叫铁磁质。

2. 物质受磁场作用和影响磁场分布是由于原子内的电子的轨道运动和自旋运动均有磁矩。分子的磁矩是其中所有电子的轨道磁矩和自旋磁矩的矢量和。抗磁质分子的这一矢量和为零，没有总磁矩。顺磁质分子的这一矢量和不为零，即有固有磁矩。在外磁场中，电子的轨道运动会改变而产生附加磁矩。附加磁矩总和与外磁场方向相反。处于外磁场中的分子中的电子的轨道运动改变所产生的附加磁矩的总和叫分子的感应磁矩，它的方向与外磁场方向相反。

3. 物质的磁化：物质在磁场中产生感应磁矩或其固有磁矩在磁场作用下排列的现象叫磁化。磁化时在物质的表面会出现束缚电流。抗磁质的表面束缚电流与激磁电流方向相反，使原磁场减弱。顺磁质的表面束缚电流方向和激磁电流方向相同，使原磁场加强。铁磁质的表面束缚电流和激磁电流方向相同，而且大到许多倍，使得铁磁质中的磁场基本上是这些表面束缚电流产生的。

4. H 矢量及其环路定理

H 矢量：有物质存在时引入 H 矢量（磁场强度），其定义为

$$H = \frac{B}{\mu_r \mu_0} = \frac{B}{\mu}, \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

H 的环路定理:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_{0,\text{int}}$$

其中 I_0 为闭合回路包围的自由电流。

5. 铁磁质有磁饱和现象和磁滞现象。依磁滞回线的胖瘦可区分硬铁磁质和软铁磁质。温度高于一定温度(居里点)铁磁性会消失。铁磁性可用磁畴的结构说明。外加磁场反复变化时,磁滞现象会引起能量消耗产生热量。

15.2 解题思路

1. 本章习题一部分是磁矩和磁力矩、磁矩在磁场中能量的计算。这些计算要利用已知的公式。如磁针的总磁矩是其中各电子的磁矩的矢量和,圆电流的磁矩是电流乘以圆面积等。

2. 本章另一部分习题是应用 \mathbf{H} 的环路定理求磁场分布。解题时要先分析电流和磁性物质分布的对称性,再考虑磁场分布的对称性,然后利用 \mathbf{H} 的环路定理求出 \mathbf{H} ,最后用 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 的关系求出磁场 \mathbf{B} 的分布。对铁磁质磁路计算,要根据铁磁质的几何形状分析磁路的构成,然后用 \mathbf{H} 的环路定理求解(一般是近似解)。

15.3 思考题选答

15.5 顺磁质和铁磁质的磁导率明显地依赖于温度,而抗磁质的磁导率则几乎与温度无关,为什么?

答 顺磁质和铁磁质的磁化主要是其固有磁矩在外磁场作用下整齐排列,而原子的热运动是抵抗这种排列的。温度越高,热运动对这种排列的抵抗越强,因而明显地影响到顺磁质和铁磁质的磁导率。抗磁质的磁化是外加磁场的作用产生了感生磁矩,与温度无关,所以抗磁质的磁导率也就基本上与温度无关了。

* 15.6 磁冷却。将顺磁样品(如硝酸铈镁)在低温下磁化,其固有磁矩沿磁场排列时要放出能量以热量的形式向周围环境排出。然后在绝热情况下撤去外磁场,这时样品温度就要降低,实验中可降低到 10^{-3} K,如果使核自旋磁矩先排列,然后再绝热地撤去磁场,则温度可降到 10^{-6} K。试解释为什么样品绝热退磁时温度会降低。

答 顺磁样品在低温下(实验中在液氮温度以下)加磁场时,外磁场要对方向杂乱的固有磁矩施加力矩做功,输入能量,这时为保持低温,即保持样品内能不变,由热力学第一定律($Q=\Delta E+A$)就必须将输入的能量以热量 Q 的形式排给环境(实验中是液氮)。然后在绝热的情况下($Q=0$)退磁时,样品要对外做功,“解放”整齐排列的固有磁矩(加磁场时

外界通过磁场对样品做功,其逆过程是撤外磁场时,样品要通过磁场对外做功)。由于 $A > 0$, 则由 $Q = \Delta E + A$ 可得 $\Delta E < 0$ 因而内能减小,样品温度就要降低。

15.4 习题解答

* 15.1 在铁晶体中,每个原子有两个电子的自旋参与磁化过程。设一根磁铁棒直径为 1.0 cm,长 12 cm,其中所有有关电子的自旋都沿棒轴的方向排列整齐了。已知铁的密度为 7.8 g/cm^3 ,摩尔(原子)质量是 55.85 g/mol 。

- (1) 自旋排列整齐的电子数是多少?
- (2) 这些自旋已排列整齐的电子的总磁矩多大?
- (3) 磁铁棒的面电流多大才能产生这样大的总磁矩?
- (4) 这样的面电流在磁铁棒内部产生的磁场多大?

解 (1) $N = 12 \times 0.5^2 \times \pi \times 7.8 \times 6.023 \times 10^{23} \times 2 / 55.85 = 1.6 \times 10^{24}$ (个)

(2) $m = Nm_B = 1.6 \times 10^{24} \times 9.27 \times 10^{-24} = 15 \text{ A} \cdot \text{m}^2$

(3) $I = m / S = 15 / (\pi \times (0.005)^2) = 1.9 \times 10^5 \text{ A}$

(4) $B = \mu_0 I / l = 4\pi \times 10^{-7} \times 1.9 \times 10^5 / 0.12 = 2.0 \text{ T}$

15.2 在铁晶体中,每个原子有两个电子的自旋参与磁化过程。一根磁针按长 8.5 cm,宽 1.0 cm,厚 0.02 cm 的铁片计算,设其中有关电子的自旋都排列整齐了。已知铁的密度是 7.8 g/cm^3 ,摩尔(原子)质量是 55.85 g/mol 。

- (1) 这根磁针的磁矩多大?
- (2) 当这根磁针垂直于地磁场放置时,它受的磁力矩多大? 设地磁场为 $0.52 \times 10^{-4} \text{ T}$ 。
- (3) 当这根磁针与上述地磁场逆平行地放置时,它的磁场能多大?

解 (1) $m = Nm_B = \frac{8.5 \times 1.0 \times 0.02 \times 7.8}{55.85} \times 6.023 \times 10^{23} \times 2 \times 9.27 \times 10^{-24}$
 $= 0.27 \text{ A} \cdot \text{m}^2$

(2) $M = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}_E| = mB_E = 0.27 \times 0.52 \times 10^{-4} = 1.4 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$

(3) $W_m = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_E = mB_E = 0.27 \times 0.52 \times 10^{-4} = 1.4 \times 10^{-5} \text{ J}$

15.3 螺绕环中心周长 $l = 10 \text{ cm}$,环上线圈匝数 $N = 20$,线圈中通有电流 $I = 0.1 \text{ A}$ 。

- (1) 求管内的磁感应强度 B_0 和磁场强度 H_0 ;
- (2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁介质,那么管内的 B 和 H 是多少?
- (3) 磁介质内由导线中电流产生的 B_0 和由磁化电流产生的 B' 各是多少?

解 (1) $B_0 = \mu_0 nI = \mu_0 NI / l = 4\pi \times 10^{-7} \times 20 \times 0.1 / 0.1 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ T}$

$$H_0 = nI = NI/l = 20 \times 0.1/0.1 = 20 \text{ A/m}$$

$$(2) B = \mu_r B_0 = 4200 \times 2.5 \times 10^{-5} = 0.11 \text{ T}$$

$$H = H_0 = 20 \text{ A/m}$$

$$(3) B_0 = 2.5 \times 10^{-5} \text{ T}, \quad B' = B - B_0 = 0.11 \text{ T}$$

15.4 一铁制的螺绕环,其平均圆周长 30 cm,截面积为 1 cm^2 ,在环上均匀绕以 300 匝导线。当绕组内的电流为 0.032 A 时,环内磁通量为 $2 \times 10^{-6} \text{ Wb}$ 。试计算:

(1) 环内的磁通量密度(即磁感应强度);

(2) 磁场强度;

(3) 磁化面电流(即面束缚电流)密度;

(4) 环内材料的磁导率和相对磁导率;

解 (1) $B = \Phi/S = 2 \times 10^{-6} / (1 \times 10^{-4}) = 2 \times 10^{-2} \text{ T}$

(2) $H = nI = NI/l = 300 \times 0.032/0.3 = 32 \text{ A/m}$

(3) $j' = (\mu_r - 1)nI = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{2 \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7}} - 32 = 1.6 \times 10^4 \text{ A/m}$

(4) $\mu = B/H = 2 \times 10^{-2} / 32 = 6.3 \times 10^{-4} \text{ H/m}$

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 6.3 \times 10^{-4} / (4\pi \times 10^{-7}) = 5.0 \times 10^2$$

15.5 在铁磁质磁化特性的测量实验中,设所用的环形螺线管上共有 1000 匝线圈,平均半径为 15.0 cm,当通有 2.0 A 电流时,测得环内磁感应强度 $B = 1.0 \text{ T}$,求:

(1) 螺绕环铁芯内的磁场强度 H ;

(2) 该铁磁质的磁导率 μ 和相对磁导率 μ_r ;

(3) 已磁化的环形铁芯的面束缚电流密度。

解 (1) $H = nI = NI/(2\pi r) = 1000 \times 2.0 / (2 \times \pi \times 0.15) = 2.1 \times 10^3 \text{ A/m}$

(2) $\mu = B/H = 1 / (2.1 \times 10^3) = 4.7 \times 10^{-4} \text{ H/m}$

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 4.7 \times 10^{-4} / (4\pi \times 10^{-7}) = 3.8 \times 10^2$$

(3) $j' = (\mu_r - 1)H = (3.8 \times 10^2 - 1) \times 2.1 \times 10^3 = 8.0 \times 10^5 \text{ A/m}$

15.6 如图 15.1 是退火纯铁的起始磁化曲线。用这种铁做芯的长直螺线管的导线中通入 6.0 A 的电流时,管内产生 1.2 T 的磁场。如果抽出铁芯,要使管内产生同样的磁场,需要在导线中通入多大电流?

解 由起始磁化曲线图 15.1 可查出当 $B = 1.2 \text{ T}$ 时, $H = 2.2 \times 10^2 \text{ A/m}$ 。由于 $H = nI_1$, 所以 $n = H/I_1$ 。抽去铁芯,产生同样的 B , 所需电流为

$$I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{BI_1}{\mu_0 H} = \frac{1.2 \times 6.0}{4\pi \times 10^{-7} \times 2.2 \times 10^2} = 2.6 \times 10^4 \text{ A}$$

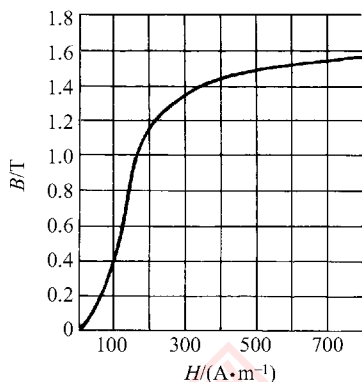


图 15.1 习题 15.6 和 15.7 解用图

15.7 如果想用退火纯铁作铁芯做一个每米 800 匝的长直螺线管,而在管中产生 1.0 T 的磁场,导线中应通入多大的电流?(参照上题图 15.1 的 $B-H$ 图线。)

解 由 $B-H$ 图线可查出 $B=1.0$ T 时,相应的 $H=1.7 \times 10^2$ A/m。所需电流为

$$I = H/n = 1.7 \times 10^2 / 800 = 0.21 \text{ A}$$

15.8 一个利用空气间隙获得强磁场的电磁铁如图 15.2 所示。铁芯中心线的长度 $l_1=500$ mm,空气隙长度 $l_2=20$ mm,铁芯是相对磁导率 $\mu_r=5000$ 的硅钢。要在空气隙中得到 $B=3$ T 的磁场,求绕在铁芯上的线圈的安匝数 NI 。

$$\begin{aligned} \text{解 } NI &= \frac{B}{\mu_0} \left(\frac{l_1}{\mu_r} + \frac{l_2}{1} \right) = \frac{3}{4\pi \times 10^{-7}} \left(\frac{0.5}{5 \times 10^3} + 0.02 \right) \\ &= 4.9 \times 10^4 \text{ (安匝)} \end{aligned}$$

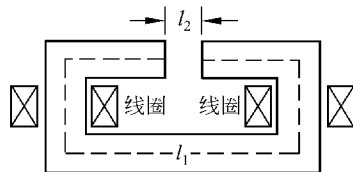


图 15.2 习题 15.8 解用图

15.9 某电钟里有一铁芯线圈,已知铁芯的磁路长 14.4 cm,空气隙宽 2.0 mm,铁芯横截面积为 0.60 cm^2 ,铁芯的相对磁导率 $\mu_r=1600$ 。现在要使通过空气隙的磁通量为 4.8×10^{-6} Wb,求线圈电流的安匝数 NI 。若线圈两端电压为 220 V,线圈消耗的功率为 20 W,求线圈的匝数 N 。

$$\begin{aligned} \text{解 } NI &= \frac{\Phi}{\mu_0 S} \left(\frac{l_1}{\mu_r} + \frac{l_2}{1} \right) \\ &= \frac{4.8 \times 10^{-6} \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^{-7} \times 0.6 \times 10^{-4}} \left(\frac{14.4 - 0.2}{1600} + 0.2 \right) \\ &= 1.33 \times 10^2 \text{ (安匝)} \\ N &= \frac{NI}{I} = \frac{1.33 \times 10^2 \times 220}{20} = 1.46 \times 10^3 \text{ (匝)} \end{aligned}$$

电磁感应和电磁波

16.1 内容提要

1. 法拉第电磁感应定律：一个导电回路中产生的感应电动势的大小和通过回路的磁通量的变化率成正比，即

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

其中负号表明感应电动势的方向和磁通变化情况的关系。通常先根据穿过回路的磁场方向以右手螺旋铰链关系规定回路的正方向。如果 Φ 是增大的， $d\Phi/dt > 0$ ，则 $\mathcal{E} < 0$ ，说明 \mathcal{E} 沿回路的负方向； Φ 减小时， $d\Phi/dt < 0$ ， \mathcal{E} 沿回路的正方向。这一关于 \mathcal{E} 的方向的规律就是楞次定律。

在有若干线圈串联的情况下，总感应电动势为

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Psi}{dt}$$

式中 Ψ 等于通过各线圈的磁通量之和，叫全磁通。在螺线管的情况下， $\Psi = N\Phi$ ， N 为线圈匝数。

感生电动势的根源有两种：洛伦兹力和感生电场。

2. 动生电动势：导体回路(或其一部分)在磁场中运动时产生的电动势，其原因归之于洛伦兹力。在磁场中一段运动的导线中产生的电动势

$$\mathcal{E}_{ab} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

在导体运动过程中，洛伦兹力不做功，但起到把机械能转换为电能的作用。

3. 感生电动势：磁场的变化会产生感生电场。感生电场的电场线是闭合的，感生电场沿一闭合回路的线积分即回路中的感生电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

式中 \mathbf{E}_i 表示感生电场强度。

4. 互感和自感：实际电路中磁场的改变多是由于电流的改变引起的，这种情况下引入互感和自感的概念。

两个靠近的线圈的一个中的电流发生变化在另一线圈中激起感生电动势的现象叫互感。变压器工作就是靠互感作用。两线圈通过磁场的相互影响的程度用互感系数 M 表示，

$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}$$

互感系数决定于两线圈的几何结构和相对位置以及磁介质分布情况。

法拉第电磁感应定律给出互感电动势

$$\mathcal{E}_{21} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (M \text{ 一定时})$$

一个线圈中电流发生变化时在线圈自身内激起感生电动势的现象叫自感。对通有交变电流的线圈就需要考虑自感现象对电流的影响。自感系数定义为

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

自感系数决定于线圈本身的几何结构和磁介质分布情况。

法拉第电磁感应定律给出自感电动势

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt} \quad (L \text{ 一定时})$$

此式说明自感电动势总是阻碍线圈中电流的变化。

一个螺线管的自感系数为 $L = \mu_0 \mu_r n^2 V$

5. 磁场的能量：一个自感线圈的磁能：当电流为 I 时，

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

磁场能量体密度

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} = \frac{1}{2} BH \quad (\text{非铁磁质中})$$

6. 麦克斯韦方程组：在真空中

(1) $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{int}}/\epsilon_0$ ，最基本的电场和场源电荷的关系。此式在 q_{int} 静止的参考系中给出静电场。

(2) $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ，磁通连续定理，说明自然界没有单独的“磁荷”存在。

(3) $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$, 法拉第电磁感应定律, 说明变化的磁场产生电场(感生电场)。在磁场不改变的情况下, 此式给出静电场的环路定理。

(4) $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$, 普遍的安培环路定理, 说明磁场由运动电荷或变化的电场产生。

7. 电磁波: 电磁波是横波, 即电场 \mathbf{E} 和磁场 \mathbf{B} 都和电磁波的传播方向垂直; 电场和磁场互相垂直而且同相地变化:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{E}}{c^2}, \quad B = \frac{E}{c}$$

电磁波具有能量, 真空中能量密度为

$$w = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

能流密度称为坡印亭矢量, 为

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}, \quad S = \frac{EB}{\mu_0}$$

简谐电磁波的强度为

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_m^2 = c \epsilon_0 E_{\text{rms}}^2$$

其中, E_m 为电磁波中电场的振幅; E_{rms} 为此电场的方均根值。

电磁波具有动量, 动量密度为

$$\mathbf{p} = \frac{w}{c^2} \mathbf{c}$$

电磁波垂直射到绝对黑面上时对黑面的辐射压强为

$$p_r = pc = w$$

16.2 解题思路

1. 关于感应电动势方向的判断, 在中学已学过楞次定律和右手定则。但在学习本章后, 应该能提高一步, 用矢量积中各矢量方向之间的关系判断动生电动势的方向, 用规定回路正方向的方法根据法拉第电磁感应定律给出的正负来判断感应电动势的方向。

2. 在求感生电动势时, 常可利用“补全回路”的方法(如在习题 16.5 中), 但最好也要学会用感生电场的线积分的方法。在一段电路中感生电场的线积分也就等于这一段电路中的感生电动势。

3. 在求互感系数和自感系数时, 要注意 Ψ 是通过各单线圈的磁通量的总和。这里的“通过”是指与线圈铰链的意思。计算互感系数时, 要注意两线圈正方向之间的联系, 它

们的正方向和通过它们的同一条磁感线都是右手铰链关系。

4. 电磁波部分多是“代公式”的题目,要注意题目给定的条件和要求,选择适当公式代入求解。

16.3 思考题选答

16.7 利用楞次定律说明为什么一个小的条形磁铁能悬浮在用超导材料做成的盘上。

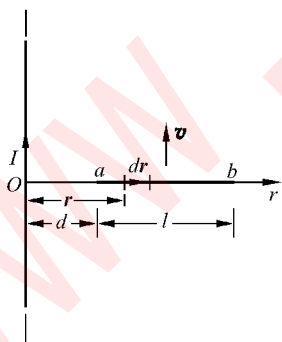
答 当小磁铁刚下落时,它的磁场通过超导盘面的磁通量就发生变化。这一变化将在超导盘面内产生涡电流。由于是超导体,所以这电流可以很大而且常流不衰。由楞次定律可知,这一涡流是阻止小磁铁的进一步下落的,其最后的效果可能使小磁铁下落停止而悬浮在空中。

16.8 金属探测器的探头内通入脉冲电流,才能测到埋在地下的金属物品发回的电磁信号,能否用恒定电流来探测? 埋在地下的金属为什么能发回电磁信号?

答 脉冲电流产生的磁场也是脉冲,即随时间快速变化的。这快速变化的磁场传到地下金属物品中将激起较大的脉冲电流,这随时间快速变化的脉冲电流就向外发射(即发回)脉冲信号,根据发回的信号就可判断地下金属物品的存在与否。这里关键是要有变化的磁场。恒定电流的磁场保持恒定不变,不能产生这样的效果。

16.4 习题解答

16.1 在通有电流 $I=5\text{ A}$ 的长直导线近旁有一导线段 ab , 长 $l=20\text{ cm}$, 离长直导线距离 $d=10\text{ cm}$, 如图 16.1。当它沿平行于长直导线的方向以速度 $v=10\text{ m/s}$ 平移时, 导线段中的感应电动势多大? a, b 哪端的电势高?



解 如图 16.1 所示

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ab} &= \int d\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} = - \int vB dr = -v \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr \\ &= -\frac{\mu_0 Iv}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d} = -\frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5 \times 10}{2\pi} \ln \frac{10+20}{10} \\ &= -1.1 \times 10^{-5} \text{ V}\end{aligned}$$

图 16.1 习题 16.1 解用图 由于 $\mathcal{E}_{ab} < 0$, 所以 a 端电势高。

16.2 平均半径为 12 cm 的 4×10^3 匝线圈,在强度为 0.5 G 的地磁场中每秒钟旋转 30 周,线圈中可产生最大感生电动势为多大? 如何旋转和转到何时,才有这样大的电动势?

解 $\mathcal{E}_{\max} = NBS\omega$
 $= 4 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-4} \times \pi \times 0.12^2 \times 2 \times \pi \times 30$
 $= 1.7 \text{ V}$

线圈绕垂直于磁场的直径旋转,当线圈平面法线与磁场垂直时感生电动势出现此最大值。

16.3 如图 16.2 所示,长直导线中通有电流 $I=5.0 \text{ A}$,另一矩形线圈共 1×10^3 匝,宽 $a=10 \text{ cm}$,长 $L=20 \text{ cm}$,以 $v=2 \text{ m/s}$ 的速度向右平动,求当 $d=10 \text{ cm}$ 时线圈中的感应电动势。

解 如图 16.2 所示,线圈向右平移时,上下两边不产生生电动势。因此,整个线圈内的感应电动势为

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = N(B_1 - B_2)Lv = NLv \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right)$$

$$= 1 \times 10^3 \times 0.2 \times 2 \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 5.0}{2\pi} \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.1+0.1} \right)$$

$$= 2 \times 10^{-3} \text{ V}$$

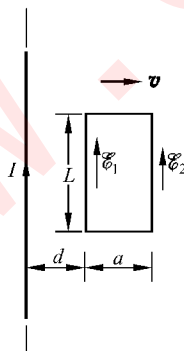


图 16.2 习题 16.3 解用图

16.4 上题中若线圈不动,而长导线中通有交变电流 $i=5\sin 100\pi t \text{ A}$,线圈内的感生电动势将为多大?

解 通过线圈的磁链为

$$\Psi = N\Phi = N \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \int_a^{d+a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} L dr = \frac{\mu_0 NiL}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{\mu_0 NL}{2\pi} \left(\ln \frac{d+a}{d} \right) \frac{di}{dt}$$

$$= - \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^3 \times 0.2}{2\pi} \left(\ln \frac{0.1+0.1}{0.1} \right) \frac{d(5\sin 100\pi t)}{dt}$$

$$= - 4.4 \times 10^{-2} \cos 100\pi t$$

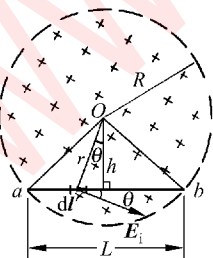


图 16.3 习题 16.5 解用图

16.5 在半径为 R 的圆柱形体积内,充满磁感应强度为 B 的均匀磁场。有一长为 L 的金属棒放在磁场中,如图 16.3 所示。设磁场在增强,并且 $\frac{dB}{dt}$ 已知,求棒中的感生电动势,并指出哪端电势高。

解 如图 16.3 所示,考虑 $\triangle Oba$ 。以 S 表示其面积,则通过 S 的磁通量 $\Phi = BS$ 。当磁通变化时,感应电场的电场线为圆心在 O 的同心圆。由法拉第电磁感应定律可得

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\Phi}{dt} &= -S \frac{dB}{dt} = \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_O^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} + \int_b^a \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} + \int_a^O \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} \\
 &= 0 + \mathcal{E}_{ba} + 0 = \mathcal{E}_{ba}
 \end{aligned}$$

由此得

$$\mathcal{E}_{ba} = -S \frac{dB}{dt} = -\frac{1}{2}L \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \frac{dB}{dt}$$

由于 $\frac{dB}{dt} > 0$, 所以 $\mathcal{E}_{ba} < 0$, 因而 b 端电势高。

另一解法: 直接对感应电场积分。在棒上 $d\mathbf{l}$ 处的感应电场的大小为 $E_i = \frac{1}{2} \frac{dB}{dt}$, 方向如图 16.3 所示。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_{ab} &= \int_a^b \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b E_i dl \cos \theta = \int_a^b \frac{r \cos \theta}{2} \frac{dB}{dt} dl \\
 &= \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} \int_a^b dl = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}L \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \frac{dB}{dt}
 \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{E}_{ab} > 0$, 所以 b 端电势高。

16.6 1996 年 2 月一航天飞机用长 19.7 km 的金属缆线吊着一个绳系卫星以 8 km/s 的速度横扫地磁场。缆线上产生的电压峰值为 3500 V。试由此估算此系统飞越处的地磁场的 B 值。

解 按缆线横扫地磁场磁感线计算, 该处地磁场磁感应强度的大小应为

$$B = \frac{\mathcal{E}}{lv} = \frac{U}{lv} = \frac{3500}{19.7 \times 10^3 \times 8 \times 10^3} = 2.2 \times 10^{-5} \text{ T}$$

16.7 为了探测海洋中水的运动, 海洋学家有时依靠水流通过地磁场所产生的动生电动势。假设在某处地磁场的竖直分量为 $0.70 \times 10^{-4} \text{ T}$, 两个电极垂直插入被测的相距 200 m 的水流中, 如果与两极相连的灵敏伏特计指示 $7.0 \times 10^{-3} \text{ V}$ 的电势差, 求水流速率多大。

解 $v = \mathcal{E}/(Bl) = U/(Bl) = 7.0 \times 10^{-3} / (0.70 \times 10^{-4} \times 200)$
 $= 0.50 \text{ m/s}$

16.8 发电机由矩形线环组成, 线环平面绕竖直轴旋转。此竖直轴与大小为 $2.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ 的均匀水平磁场垂直。环的尺寸为 $10.0 \text{ cm} \times 20.0 \text{ cm}$, 它有 120 圈。导线的两端接到外电路上, 为了在两端之间产生最大值为 12.0 V 的感应电动势, 线环必须以多大的转速旋转?

解 线环转动时, $\mathcal{E}_{\max} = NBS\omega = 2\pi NBSn$ 。由此得

$$n = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{2\pi NBS} = \frac{12.0}{2\pi \times 120 \times 2.0 \times 10^{-2} \times 0.1 \times 0.2} = 40 \text{ s}^{-1}$$

16.9 一种用小线圈测磁场的方法如下: 做一个小线圈, 匝数为 N , 面积为 S , 将它的两端与一测电量的冲击电流计相连。它和电流计线路的总电阻为 R 。先把它放到待测磁场处, 并使线圈平面与磁场方向垂直, 然后急速地把它移到磁场外面, 这时电流计给出通过的电量是 q 。试用 N, S, q, R 表示待测磁场的大小。

解 线圈移动时通过冲击电流计的总电量

$$\begin{aligned} q &= \int i dt = \frac{1}{R} \int \mathcal{E} dt = -\frac{1}{R} \int \frac{d\Psi}{dt} dt \\ &= -\frac{1}{R} \int_{\Psi}^0 d\Psi = \frac{\Psi}{R} = \frac{NBS}{R} \end{aligned}$$

由此得

$$B = qR/NS$$

16.10 电磁阻尼。一金属圆盘, 电阻率为 ρ , 厚度为 b 。在转动过程中, 在离转轴 r 处面积为 a^2 的小方块内加以垂直于圆盘的磁场 B 如图 16.4。试导出当圆盘转速为 ω 时阻碍圆盘的电磁力矩的近似表达式。

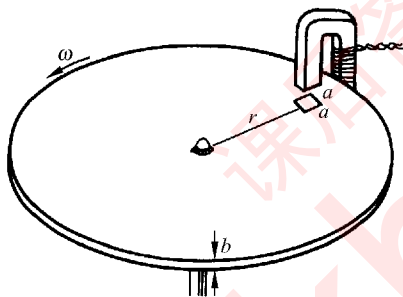


图 16.4 习题 16.10 解用图

解 圆盘转动时, 小方块内产生的径向电动势为

$$\mathcal{E} = Blv = Ba\omega r$$

以小方块为电源所在, “外电路”是圆盘的其余部分, 而外电路电阻可视为零。“内电路”电阻为 $\rho a/(ab) = \rho/b$ 。因而通过小方块的径向电流近似为 $I = \mathcal{E}b/\rho = Bab\omega r/\rho$ 。此小方块受永磁体磁场的磁力为 $F = BIl = B^2 a^2 b\omega r/\rho$ 。而此力对圆盘转动的阻力矩为

$$M = Fr = (Bar)^2 b\omega/\rho$$

16.11 在电子感应加速器中, 要保持电子在半径一定的轨道环内运行, 轨道环内的磁场 B 应该等于环围绕的面积中 B 的平均值 \bar{B} 的一半, 试证明之。

证 电子沿半径为 R 的一定轨道运动时, 其运动方程为

$$eE = m_e a_t = m_e \frac{dv}{dt}$$

$$evB = m_e a_n = m_e \frac{v^2}{R}$$

由第二式得 $eB = \frac{m_e v}{R}$ (其中 B 为环内磁场), 而 $\frac{dv}{dt} = \frac{eR}{m_e} \frac{dB}{dt}$, 代入上面第一式可得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{E}{R}$$

又由于感应电场 $E = \frac{1}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi R^2}{2\pi R} \frac{d\bar{B}}{dt} = \frac{R}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$ (此处 \bar{B} 为环围绕的面积内的磁场的平均值)。代入上式, 即可得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

由此可得

$$B = \bar{B}/2$$

16.12 一个长 l 、截面半径为 R 的圆柱形纸筒上均匀密绕有两组线圈。一组的总匝数为 N_1 , 另一组的总匝数为 N_2 。求筒内为空气时两组线圈的互感系数。

解 N_1 组线通电流 I_1 后, 通过 N_2 的磁链数为

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_1 = N_2 \mu_0 N_1 I_1 S / l = \mu_0 N_1 N_2 \pi R^2 I_1 / l$$

$$M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2}{l}$$

16.13 一圆环形线圈 a 由 50 匝细线绕成, 截面积为 4.0 cm^2 , 放在另一个匝数等于 100 匝, 半径为 20.0 cm 的圆环形线圈 b 的中心, 两线圈同轴。求:

- (1) 两线圈的互感系数;
- (2) 当线圈 a 中的电流以 50 A/s 的变化率减少时, 线圈 b 内磁通量的变化率;
- (3) 线圈 b 的感生电动势。

解 (1) 线圈 b 通电流 I_b 时, 由于线圈 a 的半径较线圈 b 的半径甚小, 所以可近似求得线圈 a 通过的磁链为

$$\Psi_{ab} = N_b \frac{\mu_0 I_b}{2R_b} N_a S_a$$

由此得两线圈的互感系数为

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Psi_{ab}}{I_b} = \frac{\mu_0 N_a N_b S_a}{2R_b} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 50 \times 100 \times 4.0 \times 10^{-4}}{2 \times 0.2} \\ &= 6.3 \times 10^{-6} \text{ H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{d\Phi_{ba}}{dt} &= \frac{1}{N_b} \frac{d\Psi_{ba}}{dt} = \frac{1}{N_b} M \frac{di_a}{dt} = \frac{1}{100} \times 6.3 \times 10^{-6} \times (-50) \\ &= -3.1 \times 10^{-6} \text{ Wb/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \mathcal{E}_{ba} &= -M \frac{di_a}{dt} = -6.3 \times 10^{-6} \times (-50) \\ &= 3.1 \times 10^{-4} \text{ V} \end{aligned}$$

又本题两线圈的互感系数也可如下求得。设线圈 a 中通电流 I_a 。由 I_a 产生的磁通

量通过线圈 a 为 Φ , 通过线圈 a 和线圈 b 之间的面积为 Φ_1 , 通过线圈 b 外面的面积为 Φ_2 。由于 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, 因而通过线圈 b 所围绕的面积磁通量为 $\Phi - \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_{ba}$ 。由于 $R_b > R_a$, 所以 Φ_2 可通过 I_a 形成的磁偶极矩的磁场进行计算。在线圈所在平面内线圈 b 以外距线圈 a 中心为 r 处的磁场为 $B = \mu_0 m / (4\pi r^3) = \mu_0 I_a S_a N_a / (4\pi r^3)$ 。由此可得

$$\Phi_{ba} = \Phi_2 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{R_b}^{\infty} \frac{\mu_0 I_a S_a N_a}{4\pi r^3} \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I_a S_a N_a}{2R_b}$$

于是二者互感系数为

$$M = \frac{\Psi_{ba}}{I_a} = \frac{N_b \mu_0 I_a S_a N_a}{2R_b I_a} = \frac{\mu_0 N_a N_b S_a}{2R_b}$$

与上面求得的结果相同。

16.14 半径为 2.0 cm 的螺线管, 长 30.0 cm, 上面均匀密绕 1200 匝线圈, 线圈内为空气。

(1) 求这螺线管中自感多大?

(2) 如果在螺线管中电流以 3.0×10^2 A/s 的速率改变, 在线圈中产生的自感电动势多大?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad (1) \quad L &= \mu_0 N^2 S / l = \mu_0 N^2 \pi R^2 / l \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \times (1.2 \times 10^3)^2 \times \pi \times 0.02^2 / 0.3 \\ &= 7.6 \times 10^{-3} \text{ H} \end{aligned}$$

$$(2) \quad |\mathcal{E}| = L \frac{di}{dt} = 7.6 \times 10^{-3} \times 3.0 \times 10^2 = 2.3 \text{ V}$$

16.15 一长直螺线管的导线中通入 10.0 A 的恒定电流时, 通过每匝线圈的磁通量是 $20 \mu\text{Wb}$; 当电流以 4.0 A/s 的速率变化时, 产生的自感电动势为 3.2 mV。求此螺线管的自感系数与总匝数。

$$\text{解} \quad L = \mathcal{E} / \frac{di}{dt} = 3.2 \times 10^{-3} / 4.0 = 0.8 \times 10^{-3} \text{ H}$$

又

$$L = N\Phi / I$$

所以

$$\begin{aligned} N &= LI / \Phi = 0.8 \times 10^{-3} \times 10.0 / (20 \times 10^{-6}) \\ &= 400 \text{ (匝)} \end{aligned}$$

16.16 如图 16.5 所示的截面为矩形的螺绕环, 总匝数为 N 。

(1) 求此螺绕环的自感系数;

(2) 沿环的轴线拉一根直导线。求直导线与螺绕环的互感系数 M_{12} 和 M_{21} , 二者是否相等?

解 (1) 可求得电流为 I 时通过环截面积的磁通量为 $\Phi = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ 。因此自感系数为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

(2) 直导线可以认为在无限远处闭合, 匝数为 1。螺绕环通过电流 I_1 时, 通过螺绕环截面的磁通量也就是通过直导线回路的磁链。因此

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{\mu_0 N I_1 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} / I_1 = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

当直导线通有电流 I_2 时, 其周围的磁场为 $B_2 = \mu_0 I_2 / (2\pi r)$ 。通过螺绕环截面积的磁通量为

$$\Phi_{12} = \int_{R_1}^{R_2} B_2 h dr = \frac{\mu_0 I_2 h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

比较两个结果得

$$M_{12} = M_{21}$$

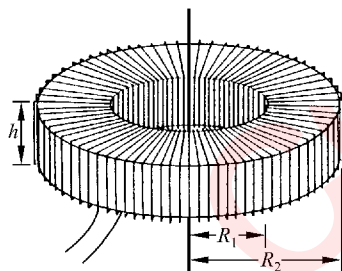


图 16.5 习题 16.16 用图

16.17 两条平行的输电线半径为 a , 二者中心相距为 D , 电流一去一回。若忽略导线内的磁场, 证明这两条输电线单位长度的自感为

$$L_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

证 两条平行输电线一去一回构成一长窄条回路, 可以引入单位长度的自感的概念。当电线中通有电流 I 时, 通过导线间单位长度的面积的磁通量为

$$\Phi = 2 \int_a^{D-a} B_1 dr \cdot 1 = 2 \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

从而得单位长度的输电线的自感为

$$L_1 = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

16.18 中子星表面的磁场估计为 10^8 T, 该处的磁能密度 (以 kg/m^3 为单位) 多大?

解
$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{(10^8)^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7} \times (3 \times 10^8)^2} = 4.4 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$$

此值约为水的质量密度的 44 倍。

16.19 实验室中一般可获得的强磁场约为 2.0 T, 强电场约为 1×10^6 V/m。求相应的磁场能量密度和电场能量密度多大? 哪种场更有利于储存能量?

解

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(2.0)^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}} = 1.6 \times 10^6 \text{ J/m}^3$$

$$w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (10^6)^2}{2} = 4.4 \text{ J/m}^3$$

两者相比,磁场更有利于储存能量。

16.20 可能利用超导线圈中的持续大电流的磁场储存能量。要储存 $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ 的能量,利用 1.0 T 的磁场,需要多大体积的磁场? 若利用线圈中的 500 A 的电流储存上述能量,则该线圈的自感系数应多大?

解 需要的磁场的体积为

$$V_m = W/w_m = 3.6 \times 10^6 \times 2 \times 4\pi \times 10^{-7} / 1.0^2 = 9.0 \text{ m}^3$$

所需线圈的自感系数为

$$L = 2W/I^2 = 2 \times 3.6 \times 10^6 / 500^2 = 29 \text{ H}$$

16.21 太阳光射到地球大气顶层的强度为 $1.38 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ 。求该处太阳光内的电场强度和磁感应强度的方均根值(视太阳光为简谐电磁波)。

解

$$I = c\epsilon_0 E_{\text{rms}}^2$$

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{I/(c\epsilon_0)} = \sqrt{1.38 \times 10^3 / (3 \times 10^8 \times 8.85 \times 10^{-12})}$$

$$= 7.2 \times 10^2 \text{ V/m}$$

$$B_{\text{rms}} = E_{\text{rms}}/c = 7.2 \times 10^2 / (3 \times 10^8) = 2.4 \times 10^{-6} \text{ T}$$

16.22 用于打孔的激光束截面直径为 $60 \mu\text{m}$, 功率为 300 kW 。求此激光束的坡印亭矢量的大小。该束激光中电场强度和磁感应强度的振幅各多大?

解

$$S = \frac{P}{\pi R^2} = \frac{300 \times 10^3}{\pi \times (30 \times 10^{-6})^2} = 1.1 \times 10^{14} \text{ W/m}^2$$

$$E_m = \sqrt{S/(c\epsilon_0)}$$

$$= \sqrt{1.1 \times 10^{14} / (3 \times 10^8 \times 8.85 \times 10^{-12})}$$

$$= 2.8 \times 10^8 \text{ V/m}$$

$$B_m = E_m/c = 2.8 \times 10^8 / (3 \times 10^8) = 0.93 \text{ T}$$

16.23 一台氩离子激光器(发射波长 514.5 nm) 以 3.8 kW 的功率向月球发射光束。光束的全发散角为 $0.880 \mu\text{rad}$ 。地月距离按 $3.82 \times 10^5 \text{ km}$ 计。求:

(1) 该光束在月球表面覆盖的圆面积的半径;

(2) 该光束到达月球表面时的强度。

解 (1) 所求半径为 $R = r\Delta\theta/2 = 3.82 \times 10^8 \times 0.880 \times 10^{-6} / 2 = 168 \text{ m}$ (2) $I = P/S = 3.8 \times 10^3 / (\pi \times 168^2) = 0.043 \text{ W/m}^2$

* 16.24 一平面电磁波的波长为 3.0 cm , 电场强度 E 的振幅为 30 V/m , 求:

(1) 该电磁波的频率为多少?

(2) 磁场的振幅为多大?

(3) 对一垂直于传播方向的, 面积为 0.5 m^2 的全吸收表面的平均辐射压力是多少?

解 (1) $\nu = c/\lambda = 3 \times 10^8 / (3.0 \times 10^{-2}) = 1.0 \times 10^{10} \text{ Hz}$

(2) $B_m = E_m/c = 30 / (3 \times 10^8) = 1.0 \times 10^{-7} \text{ T}$

(3) $F = pA = \epsilon_0 \bar{E}^2 A = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_m^2 A$
 $= \frac{1}{2} \times 8.85 \times 10^{-12} \times 30^2 \times 0.5 = 2 \times 10^{-9} \text{ N}$

* 16.25 太阳光直射海滩的强度为 $1.1 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ 。你晒太阳时受的太阳光的辐射压力多大? 设你的迎光面积为 0.5 m^2 , 而皮肤的反射率为 50% 。

解 $p = \frac{S}{c} (1 + 50\%)$
 $F = pA = \frac{SA}{c} (1 + 50\%)$
 $= \frac{1.1 \times 10^3 \times 0.5}{3 \times 10^8} \times 1.5 = 2.8 \times 10^{-6} \text{ N}$

* 16.26 强激光被用来压缩等离子体。当等离子体内的电子数密度足够大时, 它能完全反射入射光。今有一束激光脉冲峰值功率为 $1.5 \times 10^9 \text{ W}$, 汇聚到 1.3 mm^2 的高电子密度等离子体表面。它对等离子体的压强峰值多大?

解 $p_m = \frac{2S_m}{c} = \frac{2 \times P_m}{cA} = \frac{2 \times 1.5 \times 10^9}{3 \times 10^8 \times 1.3 \times 10^{-6}} = 7.7 \times 10^6 \text{ Pa}$

* 16.27 假设在绕太阳的圆轨道上有个“尘埃粒子”, 设它的质量密度为 1.0 g/cm^3 。粒子的半径 r 是多大时, 太阳把它推向外的辐射压力等于把它拉向内的万有引力? (已知太阳表面的辐射功率为 $6.9 \times 10^7 \text{ W/m}^2$ 。)对于这样的尘埃粒子会发生什么现象?

解 以 R 表示粒子的轨道半径, 则太阳对它的引力为

$$F_g = \frac{GM_s}{R^2} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

它受的太阳光的辐射压力为

$$F_r = \frac{S}{c} A = \frac{P_s R_s^2}{c R^2} \pi r^2$$

$F_g = F_r$ 给出

$$r = \frac{3 P_s R_s^2}{4 G M_s \rho}$$

$$= \frac{3 \times 6.9 \times 10^7 \times (7 \times 10^8)^2}{4 \times 6.67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times 3 \times 10^8 \times 1.0 \times 10^3}$$

$$= 6.3 \times 10^{-7} \text{ m} = 6.3 \times 10^{-4} \text{ mm}$$

由于对这样的粒子,其受太阳引力和太阳光辐射压力平衡的条件与它离太阳的距离 R 无关,所以离太阳不论远近该二力总是平衡的。因此,只在此二力作用下,粒子将做匀速直线运动。

16.28 一个电子在与一原子碰撞时经受一个 $2.0 \times 10^{24} \text{ m/s}^2$ 的减速度。与减速度方向成 45° 角,距离 20 cm 处,这个电子所产生的辐射电场是多大? 碰撞瞬时之后,该辐射电场何时到达此处?

解
$$E_\theta = \frac{e a \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{24} \times \sin(\pi/4) \times 9 \times 10^9}{(3 \times 10^8)^2 \times 0.2} = 0.11 \text{ V/m}$$

$$t = \frac{r}{c} = \frac{0.2}{3 \times 10^8} = 6.7 \times 10^{-10} \text{ s}$$

*** 16.29** 在 X 射线管中,使一束高速电子与金属靶碰撞。电子束的突然减速引起强烈的电磁辐射(X 射线)。设初始能量为 $2 \times 10^4 \text{ eV}$ 的电子均匀减速,在 $5 \times 10^{-9} \text{ m}$ 的距离内停止。在垂直于加速度的方向上,求距离碰撞点 0.3 m 处的辐射电场的大小。

解
$$E_\theta = \frac{e a \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{e E_k}{4\pi\epsilon_0 c^2 m s r}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}{(3 \times 10^8)^2 \times 0.91 \times 10^{-30} \times 5 \times 10^{-9} \times 0.3}$$

$$= 3.8 \times 10^{-2} \text{ V/m}$$

*** 16.30** 在无线电天线上(一段直导线),电子做简谐振动。设电子的速度 $v = v_0 \cos \omega t$, 其中 $v_0 = 8.0 \times 10^{-3} \text{ m/s}$, $\omega = 6.0 \times 10^6 \text{ rad/s}$ 。

(1) 求其中一个电子的最大加速度是多少?

(2) 在垂直天线的方向上,距天线为 1.0 km 处,由一个电子所产生的横向电场强度的最大值是多少? 发生此最大加速度的瞬时与电场到达 1.0 km 处的瞬时之间的时间延迟是多少?

解 (1) $a_{\max} = \omega v_0 = 6.0 \times 10^6 \times 8.0 \times 10^{-3} = 4.8 \times 10^4 \text{ m/s}^2$

(2)
$$E_{\theta, \max} = \frac{e a_{\max} \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}$$

$$= \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 4.8 \times 10^4 \times \sin(\pi/2) \times 9 \times 10^9}{(3 \times 10^8)^2 \times 10^3} = 7.7 \times 10^{-25} \text{ V/m}$$

$$\Delta t = r/c = 10^3 / (3 \times 10^8) = 3.3 \times 10^{-6} \text{ s}$$

第

4

篇

波动与光学

www.khdaW.com
课后答案网

振 动

17.1 内容提要

1. 简谐运动表达式

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中有三个特征量：

振幅 A 决定振动的范围和能量。

角频率 ω 决定振动重复的快慢，频率 $\nu = \omega/2\pi$ ，周期 $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$ 。

初相 φ 决定起始时刻质点的位置和速度。

$(\omega t + \varphi)$ 为简谐运动在时刻 t 的相(位)。

简谐运动的上述三个特征量可用相量图表示。

由上述简谐运动的表达式可得其运动特征是

$$a = -\omega^2 x$$

或

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

即简谐运动的加速度总与位移成正比而反向。

2. 简谐运动的动力学方程：由上述运动特征和牛顿第二定律可得简谐运动中质点受的合力为

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

即简谐运动中质点受的合力和位移成正比而反向。具有这种性质的力可表示为

$$F = -kx$$

式中 k 为比例常量。和上式对比，可得在弹性力作用下简谐运动的角频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

它由振动系统本身的性质决定。

弹簧振子

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

k 为弹簧的劲度系数。

单摆小角度振动

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

l 为摆长。

3. 简谐运动的能量

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$\bar{E}_k = \bar{E}_p = \frac{1}{2}E$$

做简谐振动的质点的机械能是守恒的。

4. 阻尼振动：对于欠阻尼情况，

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

表示振幅按指数规律衰减，其中 β 为阻尼系数。振幅减小到初振幅的 $1/e$ 所需时间叫时间常量，在这段时间内可能振动的次数的 2π 倍称为振动系统的 Q 值。

5. 受迫振动：是在驱动力作用下的振动。稳态的受迫振动的频率等于驱动力的频率。当驱动力的频率等于振动系统的固有频率时发生共振现象，振幅最大。这时振动系统最大限度地从外界吸收能量。

6. 在同一直线上的两个简谐运动的合成

(1) 两个简谐运动的频率相同时，合运动振幅决定于两分运动的相(位)差。同相(即 $\Delta\varphi = 2k\pi, k=0, 1, 2, \dots$)时，合振幅最大，为二分振幅之和。反相(即 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi, k=0, 1, 2, \dots$)时，合振幅最小，为二分振幅之差。

(2) 两个简谐运动的频率不同而相差较小时，叠加时会产生拍的现象。拍的频率等于两个分运动的频率之差。

* 7. 两个相互垂直的简谐运动的合成

两个分简谐运动的频率相同时，合成的质点运动的轨迹为直线段或椭圆，视二者的相差而定。频率不同而有简单整数比时，合成的质点运动的轨迹形成李萨如图。

17.2 解题思路

1. 根据给定条件写简谐运动的表达式时,要找出其三个特征量 A , ω 和 φ 。其中求 φ 要注意初始条件,利用初始条件画相量图是求 φ 的一个方便的方法。由质点的初位置及初速度(特别是其正负)就可以画出振幅矢量的位置,由此就可由图上确定 φ 值了。

2. 从分析力着手判定简谐运动时,基本步骤就是求质点在题给条件下受的合力。只要能得到质点受的合力对某一平衡位置的位移成正比而反向,就可判定质点的运动是简谐运动,并可立即由力和位移的比例常量和质点的质量写出简谐运动的角频率或频率或周期。

3. 应用同一直线上两个简谐运动的合成规律时,要特别注意它们的相(位)差和合成振幅的关系:同相时合振幅最大,反相时合振幅最小。

17.3 思考题选答

17.7 弹簧振子的无阻尼自由振动是简谐运动,同一弹簧振子在简谐驱动力持续作用下的稳态受迫振动也是简谐运动,这两种简谐运动有什么不同?

答 弹簧振子的无阻尼自由振动是在“无阻尼”,包括没有空气等外界施加的阻力和弹簧内部的塑性因素引起的阻力的情况下发生的,是一种理想情况。由于外界不输入能量,所以弹簧振子的机械能守恒。这时振动的频率由弹簧振子的自身因素(k 和 m)决定。

在简谐驱动力作用下的稳态简谐运动是在驱动力作用下产生的。这时实际上弹簧振子受的阻力也起作用,只是在策动力对弹簧振子做功且输入弹簧振子的能量等于弹簧振子由于阻力消耗的能量时,振动才达到稳态。这样弹簧振子的能量才保持不变。还有,稳态受迫振动的频率决定于驱动力的频率而和弹簧振子的固有频率无关。

17.8 任何一个实际的弹簧都是有质量的,如果考虑弹簧的质量,弹簧振子的振动周期将变大还是变小?

答 从质量的意义上说,质量表示物体的惯性。弹簧本身的质量计入时,系统的质量增大,更不易改变运动状态。对不断地周期性改变运动状态的弹簧振子的简谐运动来说,其进程一定要变慢。这就是说,考虑弹簧的质量时,弹簧振子的振动周期要变大。

17.4 习题解答

17.1 一个小球和轻弹簧组成的系统,按

$$x = 0.05 \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

的规律振动。

- (1) 求振动的角频率、周期、振幅、初相、最大速度及最大加速度；
- (2) 求 $t=1\text{ s}, 2\text{ s}, 10\text{ s}$ 等时刻的相；
- (3) 分别画出位移、速度、加速度与时间的关系曲线。

解 (1) 与简谐运动的标准表示式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较即可得

$$\omega=8\pi=25.1\text{ s}^{-1}$$

$$T=2\pi/\omega=0.25\text{ s}$$

$$A=0.05\text{ m}, \quad \varphi=\pi/3$$

$$v_m=\omega A=8\pi\times 0.05=1.26\text{ m/s}$$

$$a_m=\omega^2 A=(8\pi)^2\times 0.05=31.6\text{ m/s}^2$$

$$(2) \varphi_1=\omega t_1+\varphi=8\pi\times 1+\pi/3=25\pi/3$$

$$\varphi_2=\omega t_2+\varphi=8\pi\times 2+\pi/3=49\pi/3$$

$$\varphi_3=\omega t_3+\varphi=8\pi\times 10+\pi/3=241\pi/3$$

(3) x, v, a 和 t 的关系图线如图 17.1 所示。

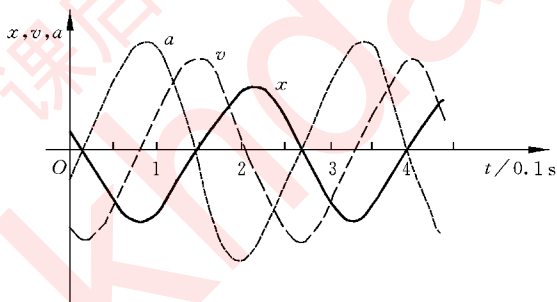


图 17.1 习题 17.1 解用图

17.2 有一个和轻弹簧相连的小球,沿 x 轴做振幅为 A 的简谐运动。该振动的表达式用余弦函数表示。若 $t=0$ 时,球的运动状态分别为:(1) $x_0=-A$; (2) 过平衡位置向 x 正方向运动; (3) 过 $x=A/2$ 处,且向 x 负方向运动。试用相量图法分别确定相应的初相。

解 (1) $\varphi=\pi$; (2) $\varphi=-\pi/2$; (3) $\varphi=\pi/3$ 。相量图如图 17.2 所示。

17.3 已知一个谐振子的振动曲线如图 17.3 所示。

- (1) 求和 a, b, c, d, e 各状态相应的相；
- (2) 写出振动表达式；
- (3) 画出相量图。

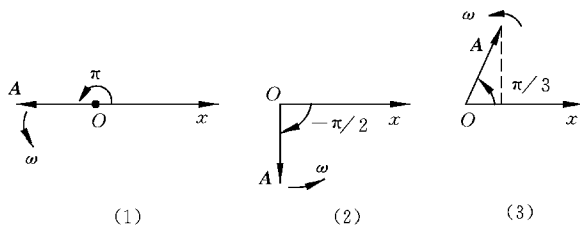


图 17.2 习题 17.2 解用图

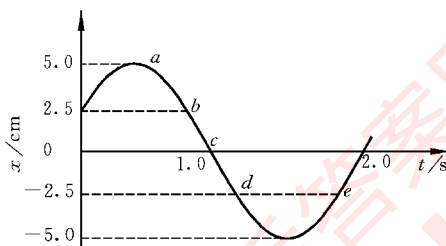


图 17.3 习题 17.3 用图

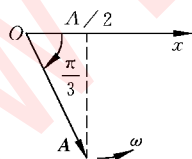


图 17.4 习题 17.3 解用图

解 (1) 以 $x = A \cos \varphi$ 表示振动曲线, 则由各点的 x 值得:

$$x_a = A, \quad \varphi_a = 0$$

$$x_b = \frac{A}{2}, \quad \varphi_b = \frac{\pi}{3}$$

$$x_c = 0, \quad \varphi_c = \frac{\pi}{2}$$

$$x_d = -\frac{A}{2}, \quad \varphi_d = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_e = -\frac{A}{2}, \quad \varphi_e = \frac{4\pi}{3}$$

(2) 由 $t=0$ 时, $x = \frac{A}{2}$, 可知 $\varphi = \arccos \frac{1}{2} = \pm \frac{\pi}{3}$; 再由 $v > 0$, 可知 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ 。又由

$\frac{T}{2} = 1.2 \text{ s}$, 可得 $\omega = \frac{2\pi}{T/2} = \frac{5\pi}{6}$ 。由此可写出振动表达式为

$$x = 0.05 \cos\left(\frac{5}{6}\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

(3) 相量图如图 17.4 所示。

17.4 做简谐运动的小球, 速度最大值为 $v_m = 3 \text{ cm/s}$, 振幅 $A = 2 \text{ cm}$ 。若从速度为正的最大值的某时刻开始计算时间,

- (1) 求振动的周期;
- (2) 求加速度的最大值;
- (3) 写出振动表达式。

解 (1) 由 $v_m = \omega A = \frac{2\pi A}{T}$, 可得

$$T = \frac{2\pi A}{v_m} = \frac{2 \times \pi \times 0.02}{0.03} = 4.2 \text{ s}$$

$$(2) a_m = \omega^2 A = \frac{v_m^2}{A} = \frac{0.03^2}{0.02} = 4.5 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

(3) 由于 $t=0$ 时, $v = +v_m$, 可知 $\varphi = \frac{-\pi}{2}$, 而 $\omega = \frac{v_m}{A} = \frac{0.03}{0.02} = 1.5 \text{ s}^{-1}$, 所以有

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.02 \cos(1.5t - \pi/2)$$

17.5 一水平弹簧振子, 振幅 $A = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}$, 周期 $T = 0.50 \text{ s}$ 。当 $t=0$ 时,

- (1) 物体过 $x = 1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处, 向负方向运动;
- (2) 物体过 $x = -1.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处, 向正方向运动。

分别写出以上两种情况下的振动表达式。

解 (1) $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = 2.0 \times 10^{-2} \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$$(2) x = 2.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t - 2\pi/3)$$

17.6 两个谐振子做同频率、同振幅的简谐运动。第一个振子的振动表达式为 $x_1 = A \cos(\omega t + \varphi)$, 当第一个振子从振动的正方向回到平衡位置时, 第二个振子恰在正方向位移的端点。

- (1) 求第二个振子的振动表达式和二者的相差;
- (2) 若 $t=0$ 时, $x_1 = -A/2$, 并向 x 负方向运动, 画出二者的 $x-t$ 曲线及相量图。

解 (1) 第一谐振子的相为 $\pi/2$ 时, 第二谐振子的相为零, 于是 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0 - \pi/2$ 。因此, $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2 = \varphi - \pi/2$ 。第二谐振子的振动表达式为

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

(2) 由 $t=0$ 时, $x_1 = A/2$ 且 $v < 0$, 可知 $\varphi = 2\pi/3$, 由此得

$$x_1 = A \cos(\omega t + 2\pi/3), \quad x_2 = A \cos(\omega t + \pi/6)$$

两谐振子的 $x-t$ 曲线和相量图如图 17.5 所示。

17.7 一弹簧振子, 弹簧劲度系数为 $k = 25 \text{ N/m}$, 当物体以初动能 0.2 J 和初势能 0.6 J 振动时, 试回答:

- (1) 其振幅是多大?
- (2) 其位移是多大时, 势能和动能相等?

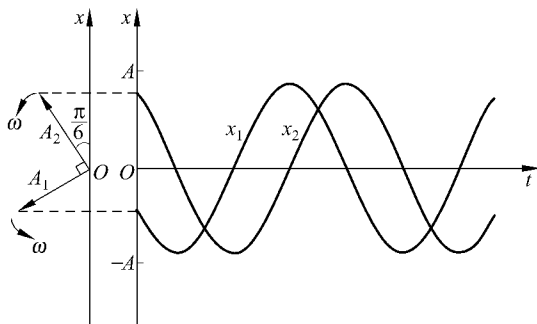


图 17.5 习题 17.6 解用图

(3) 其位移是振幅的一半时, 势能多大?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad (1) \quad A &= \sqrt{2E/k} = \sqrt{2(E_k + E_p)/k} \\ &= \sqrt{2 \times (0.2 + 0.6)/25} = 0.25 \text{ m}\end{aligned}$$

$$(2) \quad E_p = E_k \text{ 时}, E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} E = \frac{1}{2} kA^2/2$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} A = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0.25 = \pm 0.18 \text{ m}$$

$$(3) \quad E_p = \frac{1}{2} k \left(\frac{A}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} kA^2 \right) = \frac{1}{4} (0.2 + 0.6) = 0.2 \text{ J}$$

17.8 将一劲度系数为 k 的轻质弹簧上端固定悬挂起来, 下端挂一质量为 m 的小球, 平衡时弹簧伸长为 b 。试写出以此平衡位置为原点的小球的动力学方程, 从而证明小球将做简谐运动并求出其振动周期。若它的振幅为 A , 它的总能量是否还是 $\frac{1}{2} kA^2$ (总能量包括小球的动能和重力势能以及弹簧的弹性势能, 两种势能均取平衡位置为势能零点)。

解 由平衡条件 $mg = kb$, 可得 $k = mg/b$ 。

以平衡位置为原点, 竖直向下为 x 轴正向, 列出小球的动力学方程为

$$mg - k(x + b) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

将 $mg = kb$ 代入, 可得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

由此可知小球以所选原点为中心做简谐运动, 其周期为 $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, 与水平弹簧振子周期相同。

以所选原点作为势能零点, 则弹簧的弹性势能为

$$E_{p,e} = \frac{1}{2}k(x+b)^2 - \frac{1}{2}kb^2 = \frac{1}{2}kx^2 + kbx$$

小球的重力势能为

$$E_{p,g} = -mgx$$

弹簧振子的总能量为

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = E_k + E_{p,e} + E_{p,g} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + (kb - mg)x \end{aligned}$$

利用平衡条件,则有

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

当 $x=A$ 时, $v=0$, 由此上式给出

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

即具有和水平弹簧振子相同的能量公式。

*** 17.9** 劲度系数分别为 k_1 和 k_2 的两根弹簧和质量为 m 的物体相连, 如图 17.6 所示, 试写出物体的动力学方程并证明该振动系统的振动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

解 如图 17.6 所示, 设物体在平衡位置时, 两弹簧伸长分别为 x_1 和 x_2 , 则平衡条件给出 $k_1x_1 = k_2x_2$ 。以物体的平衡位置为原点, 当物体向右移 x 时, 牛顿第二定律给出

$$k_1(x_1 + x) - k_2(x_2 - x) = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

利用平衡条件即可得动力学方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x$$

由此可得此系统的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

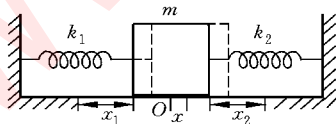


图 17.6 习题 17.9 解用图

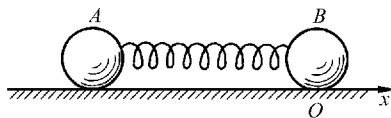


图 17.7 习题 17.10 解用图

*** 17.10** 如图 17.7 所示, 在水平光滑桌面上用轻弹簧连接两个质量都是 0.05 kg 的小球。弹簧的劲度系数为 $1 \times 10^3\text{ N/m}$ 。今沿弹簧轴线向相反方向拉开两球然后释放, 求

此后两球振动的频率。

解 如图 17.7 所示, 对一个球, 如 B 来说, 以其平衡位置为原点。由于当 B 球向右移 x 时, A 球同时向左移了 x 的距离, 所以弹簧伸长为 $2x$ 。对 B 球用牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(2x) = -2kx$$

由此得 B 球的振动频率, 也就是 A 球的振动频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 1 \times 10^3}{0.05}} = 31.8 \text{ Hz}$$

*** 17.11** 设想穿过地球挖一条直细隧道(图 17.8), 隧道壁光滑。在隧道内放一质量为 m 的球, 它离隧道中点的距离为 x 。设地球为均匀球体, 质量为 M_E , 半径为 R_E 。

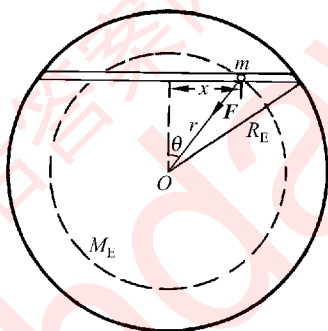


图 17.8 习题 17.11 解用图

- (1) 求球受的重力(提示: 球只受其所处的球面以内的地球质量的引力作用)。
- (2) 证明球在隧道内在重力作用下的运动是简谐运动, 并求其周期。
- (3) 近地圆轨道人造地球卫星的周期多大?

解 (1) 如图 17.8 所示, 球受的重力为

$$F = \frac{Gm}{r^2} M_E \frac{r^3}{R_E^3} = \frac{GmM_E}{R_E^3} r$$

(2) 以隧道中点为 x 轴原点, 则球的动力学方程为 $F_x = ma_x$ 。由于

$$F_x = -F \sin \theta = -\frac{GmM_E}{R_E^3} r \cdot \frac{x}{r}$$

所以有

$$a_x = -\frac{GM_E}{R_E^3} x$$

由此可知, 球在隧道内做简谐运动, 其周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}} = 2\pi R_E \sqrt{\frac{R_E}{GM_E}}$$

(3) 对于近地圆轨道卫星,有

$$\frac{mv^2}{R_E} = \frac{GM_E m}{R_E^2}$$

由此得

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}}$$

其运行周期为

$$T = \frac{2\pi R_E}{v} = 2\pi R_E \sqrt{\frac{R_E}{GM_E}}$$

与上述隧道内做简谐运动的球的周期相同。

* 17.12 一物体放在水平木板上,物体与板面间的最大静摩擦系数为 0.50。

(1) 当此板沿水平方向做频率为 2.0 Hz 的简谐运动时,要使物体在板上不致滑动,振幅的最大值应是多大?

(2) 若令此板改做竖直方向的简谐运动,振幅为 5.0 cm,要使物体一直保持与板面接触,则振动的最大频率是多少?

解 (1) 物体不沿板滑动,要求

$$\begin{aligned}\mu_s mg &= ma_m = mA\omega^2 = mA(2\pi\nu)^2 \\ A &= \frac{\mu_s g}{(2\pi\nu)^2} = 0.50 \times \frac{9.8}{(2\pi \times 2.0)^2} = 3.1 \times 10^{-2} \text{ m}\end{aligned}$$

(2) 物体总与板保持接触,要求

$$\begin{aligned}mg &= ma_m = mA(2\pi\nu)^2 \\ \nu &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9.8}{0.05}} = 2.2 \text{ Hz}\end{aligned}$$

17.13 如图 17.9 所示,一块均匀的长木板质量为 m ,对称地平放在相距 $l=20 \text{ cm}$ 的两个滚轴上。滚轴的转动方向如图示,滚轴表面与木板间的摩擦系数为 $\mu=0.5$ 。今使木板沿水平方向移动一段距离后释放,证明此后木板将做简谐运动并求其周期。

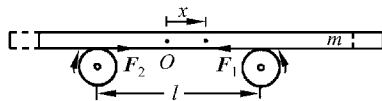


图 17.9 习题 17.13 证用图

证 如图 17.9 所示,当木板的质心由两滚轴之间距离的中点向右移 x 的距离时,由于板对滚轴的压力与其质心到滚轴的距离成反比,所以板受滚轴的滑动摩擦力的合力为

$$\begin{aligned}
 F &= F_1 - F_2 = -\mu mg \frac{l/2 + x}{l} + \mu mg \frac{l/2 - x}{l} \\
 &= -\frac{2\mu mgx}{l}
 \end{aligned}$$

由于此合力与 x 成正比而反向, 所以木板将在水平方向做简谐运动, 其周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{2\mu mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.20}{2 \times 0.5 \times 9.8}} = 0.90 \text{ s}$$

17.14 质量为 $m=121 \text{ g}$ 的水银装在 U 形管中, 管截面积 $S=0.30 \text{ cm}^2$, 若使两边水银面相差 $2y_0$, 然后使水银面上下振动, 求振动周期 T 。水银的密度为 13.6 g/cm^3 。忽略水银与管壁的摩擦。

解 按 U 形管两臂竖直放置考虑, 忽略水银与管壁的摩擦, 以两臂中水银面相平时为水银的重力势能零点, 则当水银上下振动而高水银面较两水银面相平处高出 y 时, 水银的重力势能变为

$$E_p = \rho y S g \frac{y}{2} - \left[\rho y S g \left(-\frac{y}{2} \right) \right] = \rho g S y^2$$

此时水银的动能为 $E_k = \frac{1}{2} m v^2$, 而总机械能为

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \rho g S y^2$$

和简谐运动的能量公式比较, 可知整个水银柱在 U 形管中来回做简谐运动, 其周期为

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g S}} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{0.121}{2 \times 13.6 \times 9.8 \times 0.30}} \\
 &= 0.77 \text{ s}
 \end{aligned}$$

*** 17.15** 一固定的均匀带电细圆环, 半径为 R , 带电量为 Q 。在其圆心上有一质量为 m , 带电量为 $-q$ 的粒子。证明此粒子沿圆环轴线方向上的微小振动是简谐运动, 并求其频率。

证 带电量为 $-q$ 的粒子在圆环轴线上受的力为

$$F = -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

其中 x 为从环心到粒子的距离。当 $|x| \ll R$ 时, 粒子受的力为

$$F = -\frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

此式就说明粒子沿圆环轴线方向上的微小振动是简谐运动, 其频率为

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$$

17.16 一质量为 m 的刚体在重力矩的作用下绕固定的水平轴 O 做小幅度无阻尼自由摆动,如图 17.10 所示。设刚体质心 C 到轴线 O 的距离为 b ,刚体对轴线 O 的转动惯量为 I 。试用转动定律写出此刚体绕轴 O 的动力学方程,并证明 OC 与竖直线的夹角 θ 的变化为简谐运动,而且振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

证 如图 17.10 所示,刚体所受的对轴线的力矩为 $-mgb\sin\theta$,于是由转动定律可得

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\sin\theta$$

对小幅度的振动, $\sin\theta \approx \theta$, 上式给出

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\theta$$

此式说明 θ 的变化为简谐运动,其振动周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}$$

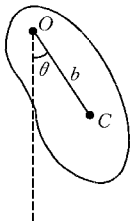


图 17.10 习题 17.16 证用图

17.17 一细圆环质量为 m , 半径为 R , 挂在墙上的钉子上。求它的微小摆动的周期。

解 圆环摆起一角度 θ 时, 将受到力矩 $-mgR\sin\theta$, 由于圆环对悬挂点的转动惯量为 $2mR^2$, 所以根据转动定律, 对微小摆动, 有

$$2mR^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgR\sin\theta \approx -mgR\theta$$

由此得

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

17.18 一单摆在空气中摆动, 摆长为 1.00 m , 初始振幅为 $\theta_0 = 5^\circ$ 。经过 100 s , 振幅减为 $\theta_1 = 4^\circ$ 。此单摆的阻尼系数多大? Q 值多大? 再经过多长时间, 它的振幅减为 $\theta_2 = 2^\circ$?

解 由 $\theta_1 = \theta_0 e^{-\beta t}$, 得阻尼系数为

$$\beta = \frac{\ln \frac{\theta_0}{\theta_1}}{t} = \frac{\ln \frac{5}{4}}{100} = 2.2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{2\pi\beta} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2 \times 2.2 \times 10^{-3}} \sqrt{\frac{9.8}{1.00}} = 712$$

由 $\theta_2 = \theta_1 e^{-\beta \Delta t}$, 所以从 θ_1 到 θ_2 经过的时间为

$$\Delta t = \frac{\ln \frac{\theta_1}{\theta_2}}{\beta} = \frac{\ln \frac{4}{2}}{2.2 \times 10^{-3}} = 311 \text{ s}$$

17.19 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐运动, 其表达式为

$$x_1 = 0.04 \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_2 = 0.03 \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$$

试写出合振动的表达式。

解

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ &= \sqrt{0.04^2 + 0.03^2 + 2 \times 0.04 \times 0.03 \times \cos(-\pi/6 - \pi/6)} \\ &= 0.06 \text{ m} \\ \varphi &= \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \\ &= \arctan \frac{0.04 \sin(\pi/6) + 0.03 \sin(-\pi/6)}{0.04 \cos(\pi/6) + 0.03 \cos(-\pi/6)} \\ &= 0.08 \end{aligned}$$

合振动的表达式为

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) = 0.06 \cos(2t + 0.08)$$

*** 17.20** 一质点同时参与相互垂直的两个简谐运动:

$$x = 0.06 \cos 20\pi t$$

$$y = 0.04 \cos(20\pi t + \pi/2)$$

试证明其轨迹为一正椭圆(即其长短轴分别沿两个坐标轴)并求其半长轴和半短轴的长度以及绕行周期。此质点的绕行是右旋(即顺时针)还是左旋(即逆时针)的?

证明 两个简谐运动的表示式可换写成

$$x/0.06 = \cos 20\pi t$$

$$y/0.04 = -\sin 20\pi t$$

将此二式两边都平方, 再相加, 可得

$$\frac{x^2}{0.06^2} + \frac{y^2}{0.04^2} = 1$$

这是一个标准的正椭圆表示式。其长轴沿 x 轴, 半长轴长 $a = 0.06 \text{ m}$; 短轴沿 y 轴, 半短

轴长 $b=0.04\text{ m}$ 。其绕行周期与两个简谐振动周期相同,为 $T=2\pi/\omega=2\pi/20\pi=0.1(\text{s})$ 。

由于 y 超前 x 的相位,所以质点绕行时先经过 $(0, +y_{\max})$,再经过接着的 $(x_{\max}, 0)$,因此椭圆运动是右旋的(图 17.11)。

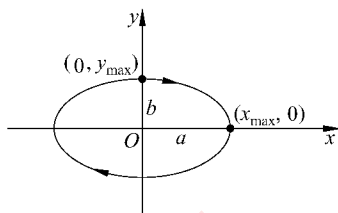


图 17.11 习题 17.20 证用图

波 动

18.1 内容提要

1. **行波**：行波是扰动的传播。机械波在介质中传播时，只是扰动在传播，介质并不迁移。

2. **简谐波**：简谐运动的传播。根据简谐运动状态沿波的传播方向逐点延迟的规律可以写出沿 x 轴的简谐波的波函数为

$$\begin{aligned} y &= A \cos \omega \left(t \mp \frac{x}{u} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= A \cos(\omega t \mp kx) \end{aligned}$$

式中负号用于沿 x 轴正向传播的波，正号用于沿 x 轴负向传播的波；周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$ ，波

数 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ， $u = \lambda\nu$ 为相速度，波长 λ 是沿波的传播方向两相邻的同相质元间的距离。

3. **弹性介质中的波速**：波速决定于介质的弹性和质量密度。

横波波速

$$u = \sqrt{G/\rho}$$

纵波波速

$$u = \sqrt{E/\rho}$$

液体气体中纵波波速

$$u = \sqrt{K/\rho}$$

式中 G 、 E 和 K 分别表示介质的切变模量，杨氏模量和体变模量； ρ 为介质质量密度。

拉紧的绳中的横波波速为

$$u = \sqrt{F/\rho_l}$$

式中 F 为绳中张力, ρ_l 为绳的线密度 (kg/m)。

4. 简谐波的能量: 简谐波中质元的振动速度为 $v = \frac{\partial y}{\partial t}$, 弹性应变为 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 。由此可得质元 ($\Delta m = \rho \Delta V$) 的动能为

$$\Delta W_k = \frac{1}{2} \Delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

弹性势能为

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} \frac{G}{u^2} \omega^2 A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \Delta V = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \Delta V \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{u} \right)$$

由此知, 波传播时, 任意质元任意时刻的动能和弹性势能都相等, 它们是同幅同相地随时间改变的。

波的平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

波的强度, 即单位时间通过与波的方向垂直的单位面积的能量的平均值为

$$I = \bar{w} u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u$$

5. 惠更斯原理: 介质中波阵面 (或叫同相面或波前) 上各点都可看作子波波源, 其后任一时刻这些子波的包迹就是该时刻新的波阵面。这一原理实际上是由某一时刻波阵面画出其后另一时刻波阵面的作图方法。用此作图法可说明波的反射定律和折射定律。

6. 驻波: 两列频率、振动方向和振幅都相同而传播方向相反的简谐波叠加时形成驻波。驻波的表达式为

$$y = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \omega t$$

驻波实际上是一种稳定的分段振动, 其频率即波的频率。各处振幅不同, 有波节 (振幅为零) 和波腹 (振幅最大)。两相邻波节间各质元振动同相, 同一波节两侧各质元振动反相。

各种声源的振动都是驻波。特别是两端固定的弦振动时, 其驻波波长一定是弦长的 $2/n$ 倍, 其中 n 是整数。这表示允许的波长是“量子化”的。

7. 声波: 声波的强度常用声级 L 表示, 定义为

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0} (\text{dB}), \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

空气中的声速

$$u = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$$

8. 多普勒效应: 接收器接收到的频率与接收器(R)及波源(S)的运动有关。

波源静止

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u} \nu_S$$

接收器向波源运动时, v_R 取正值;

接收器静止

$$\nu_R = \frac{u}{u - v_S} \nu_S$$

波源向接收器运动时, v_S 取正值;

波源和接收器在同一直线上运动时,

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$$

光学多普勒效应: ν_R 决定于光源和接收器的相对运动。二者的相对速度为 v 时, 有

$$\nu_R = \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} \nu_S$$

波源速度超过它发出的波的传播速度时, 产生冲击波。冲击波呈圆锥形, 以波源为顶点, 这种“马赫锥”的半顶角 α 由下式决定

$$\sin \alpha = \frac{u}{v_S}$$

*** 9. 复波和群速度:** 有的介质中的波速可能和波的频率有关, 即 $u = u(\lambda)$ 。这种介质叫色散介质。在色散介质中, 波形成波包传播。波包的传播速度叫群速度,

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

这种情况下, 能量和信号就以群速度在介质中传播。

18.2 解题思路

1. 关于波函数的题目, 基本的是两类。一类是识别给定波函数, 即由给定的波函数公式求波的频率、振幅、速度、波长等。这时将给定波函数和波函数的标准式加以对比即可求得。另一类由已知条件, 如某一质元的振动表达式和波速, 写出波函数。这时要注意“沿波的传播方向振动逐点延迟”这一基本规律, 求出延迟的时间 ($\Delta t = \frac{\Delta x}{u}$), 然后改写已知质元的振动表达式即可得所求的波函数。

在写反射波的波函数时, 也要先计算从给定质元到反射波中任一点的时间延迟。这时还要特别留意反射的情况。如果是遇到波密介质(或固定点)而反射, 需要计入半波损

失,即在传播距离上要加上(或减去)半个波长,或在波函数的相(位)式中加(或减) π 。

2. 在计算波的能量或强度时,要注意质元的振动速度 $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$ 和波的传播速度 u 的区别。质元的动能决定于前者,而波的强度还和后者有关。

3. 对驻波的波函数,应注意到它是由一个振动因子 $(\cos \omega t)$ 和一个随坐标周期性变化的因子 $\left(\cos \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ 的乘积组成,由此可制定各质元的振动频率以及振幅、相(位)随坐标的分布。

对于两端固定的弦上形成的驻波,应注意波长是“量子化”了的。由波长和弦中的波速可求得波的频率,此波的频率也就是弦振动的频率,而且也就是弦振动时所发出的声音的频率。

4. 在计算由于多普勒效应而产生频率改变时,要注意公式中速度的符号。要注意区别发射的频率,波的频率和接收的频率的区别。

18.3 思考题选答

18.9 在原书图 18.22 的驻波形成图中,在 $t=T/4$ 时,各质元的能量是什么能? 大小分布如何? 在 $t=T/2$ 时,各质元的能量是什么能? 大小分布如何? 波节和波腹处的质元的能量各是如何变化的?

答 在该图中,在 $t=T/4$ 时,各质元都在越过各自的平衡位置,因无形变而无弹性势能;但由于有速度而具有动能,在波节处的质元速度为零,动能为零;在波腹处的质元速度最大,动能最大;从波腹到波节,各质元动能逐渐减小。在 $t=T/2$ 时,各质元均达到各自的极端位移处,速度均为零而无动能。但由于形变而具有弹性势能。在波节处的质元形变最大而弹性势能最大;波腹处质元(即位移最大的质元)无形变而弹性势能为零;从波节到波腹,各质元弹性势能逐渐减小。波节处质元始终无动能,其弹性势能作周期性变化。波腹处质元始终无形变而无弹性势能,其动能作周期性变化。波腹处质元的动能最大时,波节处质元的弹性势能为零;波节处质元的弹性势能最大时,波腹处质元的动能为零。能量就这样周期性地波节和波腹间转化并转移着。

18.10 二胡调音时,要拧动上部的旋杆,演奏时手指压触弦线的不同部位,就能发出各种音调不同的声音。这都是什么缘故?

答 拧旋杆是改变弦线中的张力,从而改变弦线中的波速使对应于弦线全长(从千斤到码子)的弦的振动频率发生改变,以确定二胡的标准基音。弦线张力固定后,手指触压弦的不同部位,就是改变弦线上振动部分的长度,也就是改变弦线所发出的基音的频率,即发出不同音阶的声音。

18.14 在有北风的情况下,站在南方的人听到在北方的警笛发出的声音和无风的情况下听到的有何不同?你能导出一个相应的公式吗?

答 在警笛是静止的情况,北风只是改变了声波相对于地面的传播速度。对于站在南方的人来说,他听到的警笛的声音的频率并无改变。这是因为,以 u 和 u' 分别表示声波在静止的空气中的声速和北风相对地面的速度,则在有北风的情况下,相对于地面的声速为 $(u+u')$,这时由警笛发出向南的声音的波长为 $\lambda' = (u+u')T$, T 为警笛声音的周期。南方的人一周期内接收到的声波波列的长度为 $(u+u')$ 。这样,他一周期内接收到的波数就是 $\frac{u+u'}{\lambda'} = \frac{1}{T} = \nu$,这就是他接收到的声波的频率,也是警笛发射声波的频率。在没有风的情况下人接收到的频率也是这个频率。

18.4 习题解答

18.1 太平洋上有一次形成的洋波速度为 740 km/h,波长为 300 km。这种洋波的频率是多少?横渡太平洋 8000 km 的距离需要多长时间?

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \nu &= \frac{u}{\lambda} = \frac{740 \times 10^3}{300 \times 10^3 \times 3600} = 6.9 \times 10^{-4} \text{ Hz} \\ t &= \frac{s}{u} = \frac{8000}{740} = 10.8 \text{ h}\end{aligned}$$

18.2 一简谐横波以 0.8 m/s 的速度沿一长弦线传播。在 $x=0.1$ m 处,弦线质点的位移随时间的变化关系为 $y=0.05 \sin(1.0-4.0t)$ 。试写出波函数。

解 由 $x=0.1$ m 处质点的振动函数

$$y = 0.05 \sin(1.0 - 4.0t)$$

可得 $\omega = 4.0 \text{ s}^{-1}$

$$\lambda = \frac{2\pi u}{\omega} = \frac{2\pi \times 0.8}{4.0} = 0.4\pi \text{ m}$$

任意 x 处的质元振动的相和 $x=0.1$ m 处的相之差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(x-0.1)}{\lambda} = 5x - 0.5$$

这样,波函数可以是

$$\begin{aligned}y &= 0.05 \sin(1.0 - 4.0t + \Delta\varphi) \\ &= 0.05 \sin(5x - 4.0t + 0.5) \\ &= 0.05 \sin(4.0t - 5x + 2.64)\end{aligned}$$

这表示的是沿 x 轴正向传播的波。

波函数也可以是

$$\begin{aligned}
 y &= 0.05 \sin(1.0 - 4.0t - \Delta\varphi) \\
 &= 0.05 \sin(1.5 - 4.0t - 5x) \\
 &= 0.05 \sin(4.0t + 5x + 1.64)
 \end{aligned}$$

这表示的是沿 x 轴负向传播的波。

18.3 一横波沿绳传播,其波函数为

$$y = 2 \times 10^{-2} \sin 2\pi(200t - 2.0x)$$

- (1) 求此横波的波长、频率、波速和传播方向;
- (2) 求绳上质元振动的最大速度并与波速比较。

解 (1) 将所给波函数和标准式

$$y = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

比较,即可得

$$\lambda = 1/2.0 = 0.50 \text{ m}, \quad \nu = 200 \text{ Hz}, \quad u = \lambda\nu = 100 \text{ m/s}$$

由于 t 和 x 的系数反号,知波沿 x 正向传播。

(2) 由于振动速度为

$$v = \frac{dy}{dt} = 2\pi\nu A \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

所以

$$v_{\max} = 2\pi\nu A = 2\pi \times 200 \times 2 \times 10^{-2} = 25 \text{ m/s}$$

18.4 据报道,1976年唐山大地震时,当地某居民曾被猛地向上抛起2 m高。设地震横波为简谐波,且频率为1 Hz,波速为3 km/s,它的波长多大? 振幅多大?

解 人离地的速度即地壳上下振动的最大速度,为

$$v_m = \sqrt{2gh}$$

地震波的振幅为

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{v_m}{2\pi\nu} = \frac{\sqrt{2gh}}{2\pi\nu} \\
 &= \frac{\sqrt{2 \times 9.8 \times 2}}{2\pi \times 1} = 1.0 \text{ m}
 \end{aligned}$$

地震波的波长

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{3}{1} = 3 \text{ km}。$$

18.5 一平面简谐波在 $t=0$ 时的波形曲线如图 18.1 所示。

- (1) 已知 $u=0.08 \text{ m/s}$, 写出波函数;

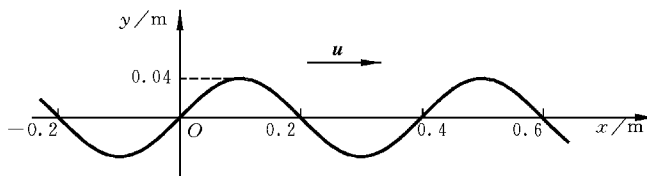


图 18.1 习题 18.5 用图

(2) 画出 $t = \frac{T}{8}$ 时的波形曲线。

解 (1) 由图可知, $\lambda = 0.4 \text{ m}$, $u = 0.08 \text{ m/s}$, $\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{0.08}{0.4} = 0.2 \text{ Hz}$ 。

以余弦函数表示波函数, 由图知, $t = 0$, $x = 0$ 时, $y = 0$, 因而 $\varphi = \pi/2$ 。由此可写波函数为

$$y = A \cos \left[2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] = 0.04 \cos \left(0.4\pi t - 5\pi x + \frac{\pi}{2} \right)$$

(2) $t = \frac{T}{8}$ 的波形曲线可以将原曲线向 x 正向平移 $\frac{\lambda}{8} = 0.05 \text{ m}$ 而得, 如图 18.2 所示。

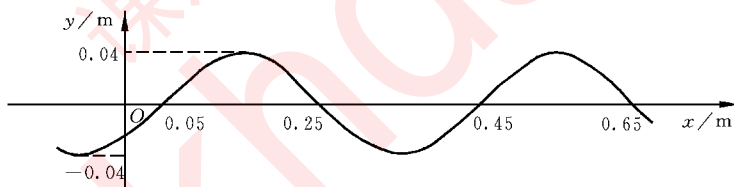


图 18.2 习题 18.5(2)解用图

18.6 已知波的波函数为 $y = A \cos \pi(4t + 2x)$ 。

(1) 写出 $t = 4.2 \text{ s}$ 时各波峰位置的坐标表示式, 并计算此时离原点最近的一个波峰的位置, 该波峰何时通过原点?

(2) 画出 $t = 4.2 \text{ s}$ 时的波形曲线。

解 (1) $t = 4.2 \text{ s}$ 时波峰的位置由波函数中 $y = A$ 决定, 即要求

$$\pi(4t + 2x) = 2\pi \cdot n$$

将 $t = 4.2 \text{ s}$ 代入可得波峰的位置为

$$x = n - 8.4, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

离原点最近要求 $|x|$ 为最小。据此, n 应取 8, 而 $x = -0.4 \text{ m}$ 。

此波峰通过原点的时刻应是对应于 $n = 8$ 而 $x' = 0$ 的时刻 t' , 即

$$\pi(4t' + 2 \times 0) = 2\pi \times 8$$

由此得

$$t' = 4 \text{ s}$$

(2) 此波长为 $\lambda = 2\pi/(2\pi) = 1 \text{ m}$ 。按此 λ 值和波峰在 -0.4 m 处即可画出波形曲线, 如图 18.3 所示。

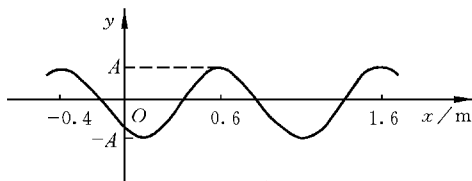


图 18.3 习题 18.6(2)解用图

18.7 频率为 500 Hz 的简谐波, 波速为 350 m/s 。

- (1) 沿波的传播方向, 相差为 60° 的两点间相距多远?
- (2) 在某点, 时间间隔为 10^{-3} s 的两个振动状态, 其相差为多大?

解 (1) 由 $\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{350}{500} = 0.7 \text{ m}$ 和 $\Delta\varphi = 2\pi\Delta\frac{x}{\lambda}$ 可得

$$\Delta x = \frac{\lambda \cdot \Delta\varphi}{2\pi} = \frac{0.7 \times \frac{\pi}{3}}{2\pi} = 0.12 \text{ m}$$

(2) $\Delta\varphi = 2\pi\Delta\frac{t}{T} = 2\pi\nu\Delta t = 2\pi \times 500 \times 10^{-3} = \pi$

18.8 在海岸抛锚的船因海浪传来而上下振荡, 振荡周期为 4.0 s , 振幅为 60 cm , 传来的波浪每隔 25 m 有一波峰。

(1) 求海波的速度。

* (2) 求海面上水的质点做圆周运动的线速度, 并和波速比较。由此可知波传播能量的速度可以比介质质元本身运动的速度大得多。

解 (1) $u = \lambda/T = 25/4.0 = 6.25 \text{ m/s}$

(2) $v = 2\pi r/T = 2\pi A/T = 2 \times \pi \times 0.6/4.0 = 0.94 \text{ m/s} < u$

18.9 在标准状态下, 声音在氧气中的波速为 $3.172 \times 10^2 \text{ m/s}$, 问氧的比热比 γ 是多少?

解 由 $u = \sqrt{\gamma RT/M}$ 可得

$$\gamma = \frac{Mu^2}{RT} = \frac{32 \times 10^{-3} \times 317.2^2}{8.31 \times 273} = 1.42$$

18.10 在钢棒中声速为 5100 m/s , 求钢的杨氏模量(钢的密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)。

解 由 $u = \sqrt{E/\rho}$ 可得

$$E = \rho u^2 = 7.8 \times 10^3 \times (5.1 \times 10^3)^2 = 2.03 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

18.11 如图 18.4 所示为一次智利地震时在美国华盛顿记录下来的地震波图,其中显示了 P 波与 S 波到达的相对时间。如果 P 波和 S 波的平均速度分别为 8 km/s 与 6 km/s ,试估算此次地震震中到华盛顿的距离。

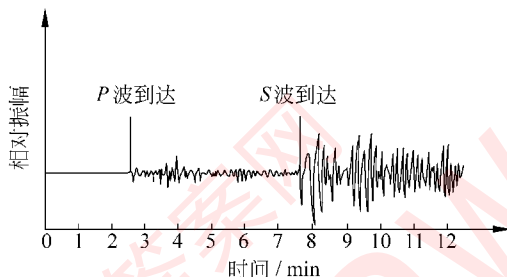


图 18.4 地震波记录图

解 以 v_P 和 v_S 分别表示 P 波和 S 波的速度,以 l 表示地震震中到华盛顿的距离,两波到达的时间差为 $\Delta t \approx 5.1 \text{ min}$,则有

$$\Delta t = \frac{l}{v_S} - \frac{l}{v_P}$$

由此

$$l = \frac{v_P v_S \Delta t}{v_P - v_S} = \frac{8 \times 6 \times 5.1 \times 60}{8 - 6} = 7.3 \times 10^3 \text{ km}$$

18.12 钢轨中声速为 $5.1 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。今有一声波沿钢轨传播,在某处振幅为 $1 \times 10^{-9} \text{ m}$,频率为 $1 \times 10^3 \text{ Hz}$ 。钢的密度为 $7.9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,钢轨的截面积按 15 cm^2 计。

- (1) 试求该声波在该处的强度;
- (2) 试求该声波在该处通过钢轨输送的功率。

解 (1) $I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 u = \frac{1}{2} \times 7.9 \times 10^3 \times (2\pi \times 10^3)^2 \times (10^{-9})^2 \times 5.1 \times 10^3$
 $= 8 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$

(2) $P = IS = 8 \times 10^{-4} \times 15 \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-6} \text{ W}$

18.13 一次地震中地壳释放的能量很大,可能造成巨大灾害。一次地震释放的能量 $E(\text{J})$ 通常用里氏地震级 M 表示,它们之间的关系是

$$M = 0.67 \lg E - 2.9$$

1976 年唐山大地震为里氏 9.2 级,试求那次地震所释放的总能量,这能量相当于几个百

万吨级氢弹爆炸所释放的能量? (“百万吨”是指相当的 TNT 炸药的质量, 1 kg TNT 炸药爆炸时释放的能量为 $4.6 \times 10^6 \text{ J}$ 。)

解 该次地震释放的总能量为

$$E = 10^{(M+2.9)/0.67} = 10^{(9.2+2.9)/0.67} = 10^{18} \text{ J}$$

相当于百万吨级氢弹的个数

$$n = E / (4.6 \times 10^6 \times 10^6 \times 10^3) = 10^{18} / (4.6 \times 10^{15}) = 217$$

18.14 一日本妇女的喊声曾创吉尼斯世界纪录, 达到 115 dB。这喊声的声强多大? 后来一中国女孩破了这个记录, 她的喊声达到 141 dB, 这喊声的声强又是多大?

解 日本妇女喊声的声强为

$$I_J = I_0 10^{L/10} = 10^{-12} \times 10^{115/10} = 10^{-0.5} = 0.316 \text{ W/m}^2$$

中国女孩喊声的声强为

$$I_C = I_0 e^{L/10} = 10^{-12} \times 10^{141/10} = 10^{2.1} = 126 \text{ W/m}^2$$

18.15 位于 A, B 两点的两个波源, 振幅相等, 频率都是 100 Hz, 相差为 π , 若 A, B 相距 30 m, 波速为 400 m/s, 求 AB 连线上二者之间叠加而静止的各点的位置。

解 考虑 AB 间距离 A 为 x 的一点, 两波由 A 和 B 传到此点的相差为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_A - \frac{2\pi}{\lambda}x - \left[\varphi_B - \frac{2\pi}{\lambda}(l-x) \right] \\ &= \varphi_A - \varphi_B + \frac{2\pi\nu}{u}(l-2x) \\ &= \pi + \frac{2\pi \times 100}{400}(l-2x) \\ &= \pi + \frac{\pi(l-2x)}{2} \end{aligned}$$

两波叠加而质点静止的条件是 $\Delta\varphi = (2n+1)\pi$, 因而有

$$\pi + \frac{\pi(l-2x)}{2} = (2n+1)\pi$$

$$x = \frac{l}{2} - 2n = 15 - 2n$$

n 为整数, $0 < x < 30$, 所以有 $x = 1, 3, 5, \dots, 29 \text{ m}$ 。

18.16 一驻波波函数为

$$y = 0.02 \cos 20x \cdot \cos 750t$$

求: (1) 形成此驻波的两行波的振幅和波速各为多少?

(2) 相邻两波节间的距离多大?

(3) $t = 2.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ 时, $x = 5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ 处质点振动的速度多大?

解 (1) 与 $y=2A\cos kx\cos\omega t$ 比较, 可得 $A=0.01\text{ m}$

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{750}{20} = 37.5\text{ m/s}$$

(2) 由于 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, 相邻两波节之间的距离为

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{20} = 0.157\text{ m}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad v &= \frac{dy}{dt} = -0.02 \times 750 \cos 20x \sin 750t \\ &= -0.02 \times 750 \cos(20 \times 0.05) \sin(750 \times 2.0 \times 10^{-3}) \\ &= -8.08\text{ m/s} \end{aligned}$$

18.17 超声波源常利用压电石英晶片的驻波振动。如图 18.5 在两面镀银的石英晶片上加上交变电压, 晶片中就沿其厚度的方向上以交变电压的频率产生纵驻波。有电极的两表面是自由的而成为波腹。设晶片的厚度为 2.00 mm , 其中沿厚度方向的声速是 $5.74 \times 10^3\text{ m/s}$, 要想激起石英片的基频振动, 外加电压的频率应是多少?

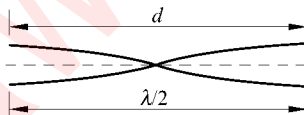


图 18.5 习题 18.17 解用图

解 有电极的两表面为自由的驻波的基频振动要求驻波中的波长 $\lambda = 2d$ (图 18.5), 其波的频率是

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2d} = \frac{5.74 \times 10^3}{2 \times 2.0 \times 10^{-3}} \\ &= 1.44 \times 10^6\text{ Hz} \end{aligned}$$

此驻波是外加电压引起晶片的共振产生的, 所以此频率也就应是外加电压的频率。

18.18 一摩托车驾驶者撞人后驾车逃逸, 一警车发现后开车鸣笛追赶, 二者均沿同一直路开行。摩托车速率为 80 km/h , 警车速率 120 km/h , 如果警笛发声频率为 400 Hz , 空气中声速为 330 m/s , 摩托车驾驶者听到的警笛声的频率是多少?

解 此题应该用原书公式(18.50)

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S} \nu_S$$

计算, 其中 $u = 330\text{ m/s}$, $v_R = -22.2\text{ m/s}$, $v_S = 33.3\text{ m/s}$, $\nu_S = 400\text{ Hz}$, 上式代入这些值可得摩托车驾驶者听到的警笛声的频率为

$$\nu_R = \frac{330 + (-22.2)}{330 - 33.3} \times 400 = 415\text{ Hz}$$

18.19 海面上波浪的波长为 120 m , 周期为 10 s 。一只快艇以 24 m/s 的速度迎浪开行。它撞击浪峰的频率是多大? 多长时间撞击一次? 如果它顺浪开行, 它撞击浪峰的频

率又是多大?多长时间撞击一次?

解 波浪的速度

$$u = \frac{\lambda}{T} = \frac{120}{10} = 12 \text{ m/s}$$

快艇迎浪开行时,撞击浪峰的频率为

$$\nu_f = \frac{u+v}{\lambda} = \frac{24+12}{120} = 0.30 \text{ Hz}$$

周期为

$$T_f = \frac{1}{\nu_f} = \frac{1}{0.30} = 3.3 \text{ s}$$

顺浪开行时,撞击浪峰的频率

$$\nu_a = \frac{v-u}{\lambda} = \frac{24-12}{120} = 0.10 \text{ Hz}$$

周期为

$$T_a = \frac{1}{\nu_a} = \frac{1}{0.10} = 10 \text{ s}$$

18.20 一驱逐舰停在海面上,它的水下声纳向一驶近的潜艇发射 $1.8 \times 10^4 \text{ Hz}$ 的超声波。由该潜艇反射回来的超声波的频率和发射的相差 220 Hz ,求该潜艇的速度。已知海水中声速为 $1.54 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。

解 驱逐舰发射的超声波的频率为 ν_s ,潜艇反射回来而被驱逐舰接收到的超声波的频率为 $\nu'_s = \frac{u+v}{u-v} \nu_s$ 。二者相差为

$$\Delta\nu = \nu'_s - \nu_s = \left(\frac{u+v}{u-v} - 1 \right) \nu_s = \frac{2v}{u-v} \nu_s$$

一般的, $u \gg v$, 所以 $\Delta\nu = \frac{2v\nu_s}{u}$, 而潜艇速度为

$$v = \frac{u\Delta\nu}{2\nu_s} = \frac{1.54 \times 10^3 \times 220}{2 \times 1.8 \times 10^4} = 9.4 \text{ m/s}$$

18.21 主动脉内血液的流速一般是 0.32 m/s 。今沿血流方向发射 4.0 MHz 的超声波,该红血球反射回的波与原发射波将形成的拍频是多少? 已知声波在人体内的传播速度为 $1.54 \times 10^3 \text{ m/s}$ 。

解

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \nu \left(1 - \frac{u-v}{u+v} \right) = \nu \frac{2v}{u+v} = \frac{2v\nu}{u} \\ &= \frac{2 \times 0.32 \times 4.0 \times 10^6}{1.54 \times 10^3} = 1.66 \times 10^3 \text{ Hz} \end{aligned}$$

18.22 公路检查站上警察用雷达测速仪测来往汽车的速度,所用雷达波的频率为 5.0×10^{10} Hz。发出的雷达波被一迎面开来的汽车反射回来,与入射波形成了频率为 1.1×10^4 Hz 的拍频。此汽车是否已超过了限定车速 100 km/h。

解 由 $\Delta\nu = \frac{2v\nu}{u}$ 可得

$$\begin{aligned} v &= \frac{u\Delta\nu}{2\nu} = \frac{3 \times 10^8 \times 1.1 \times 10^4}{2 \times 5 \times 10^{10}} \\ &= 33 \text{ m/s} = 119 \text{ km/h} > 100 \text{ km/h} \end{aligned}$$

汽车超过了限定速度。

18.23 物体超过声速的速度常用马赫数表示,马赫数定义为物体速度与介质中声速之比。一架超音速飞机以马赫数为 2.3 的速度在 5000 m 高空水平飞行,声速按 330 m/s 计。

(1) 求空气中马赫锥的半顶角的大小。

(2) 飞机从人头顶上飞过后要经过多长时间人才能听到飞机产生的冲击波声?

解 (1) 如图 18.6 所示,马赫锥半顶角为

$$\alpha = \arcsin \frac{u}{v} = \arcsin \frac{1}{2.3} = 25.8^\circ$$

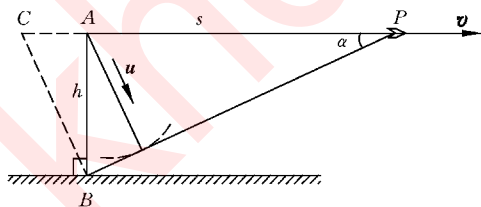


图 18.6 习题 18.23 解用图

$$(2) \quad \tan \alpha = \frac{h}{s} = \frac{h}{vt}$$

$$t = \frac{h}{v \tan \alpha} = \frac{5000}{2.3 \times 330 \times \tan 25.8^\circ} = 13.6 \text{ s}$$

要注意的是人最先听到的声音并不是飞机在头顶上时发出的声音,而是在较早时经过 C 点时发出的声音。

18.24 千岛湖水面上快艇以 60 km/h 的速率开行时,其后留下的张角约为 10° 。试估算湖面水波的静水波速。

解 题给马赫锥半顶角 $\alpha = 10/2 = 5^\circ$, 由此得水波的静水波速为

$$u = v_s \sin \alpha = 16.7 \times \sin 5^\circ = 1.46 \text{ m/s}$$

* 18.25 有两列平面波,波函数分别为

$$y_1 = A \sin(5x - 10t)$$

$$y_2 = A \sin(4x - 9t)$$

求: (1) 两波叠加后,合成波的波函数;

(2) 合成波的群速度。

解 (1)

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = A \sin(5x - 10t) + A \sin(4x - 9t) \\ &= 2A \cos(0.5x - 0.5t) \sin(4.5x - 9.5t) \end{aligned}$$

(2)

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = \frac{10 - 9}{5 - 4} = 1 \text{ m/s}$$

光的干涉

19.1 内容提要

1. 光的干涉现象：指两列光波叠加时产生的光强在空间有一稳定分布的现象。它是光的波动性的表现。

光的干涉现象的出现要求相叠加的光是相干的。相干条件是相叠加的两束光的振动方向相同，频率相同和相位差恒定。

普通光源发光时，其中各原子各自独立地发出振动方向、频率以及初相(位)互不相同的波列，这种光不是相干光。

用普通光源产生两束相干光，需要把原来同一束光分成两束。分法有两种，即分波阵面法(如杨氏双缝实验)和分振幅法(如薄膜干涉)。

2. 杨氏双缝干涉实验：用分波阵面法产生两个相干光源。干涉条纹是平行于双缝的等间距直条纹，条纹间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$$

式中 d 是两条缝之间的距离， D 是缝到观察屏之间的距离。实验条件要求 $D \gg d$ 。

3. 光程：和折射率为 n 的介质中的几何路径 x 相应的光程为 nx 。利用光程计算相差时，

$$\text{相差} = \frac{2\pi}{\lambda} \times \text{光程差}$$

其中 λ 为真空中波长。

光由光疏介质射向光密介质而在分界面上反射时，发生半波损失，相当于相位突变 π 或光程差 $\lambda/2$ 。

透镜不引起附加的光程差。

4. **薄膜干涉**：入射光在薄膜(空气薄层或物质薄层)的上表面由于反射和折射把入射光的振幅分成两部分。折射光在下表面也反射,此反射光透过薄膜回到薄膜上面与在上表面反射的光叠加形成干涉现象。同一干涉条纹下面各处薄膜的厚度相等。

5. **迈克耳孙干涉仪**：利用分振幅法使两个相互垂直的平面镜形成一等效的空气薄膜。

19.2 解题思路

1. 干涉问题的解答根本上是依靠两束相干光的相差或光程差的计算。首先要判断是哪两束相干光叠加,然后再看它们路程差。在光线通过介质时,还要计算出光程差。在有反射时,还要判断是否有半波损失。总的光程差计算出来后,就可以用光程差和(真空中的)波长的关系来判断叠加时明暗条纹的位置了:光程差等于波长的整数倍时给出明条纹,等于半波长的奇数倍时给出暗条纹。

2. 要注意干涉条纹的分布和相干光的波长的关系。白光干涉时会出现彩色条纹。

19.3 思考题选答

19.6 在双缝干涉实验中,

(1) 当缝间距不断增大时,干涉条纹如何变化? 为什么?

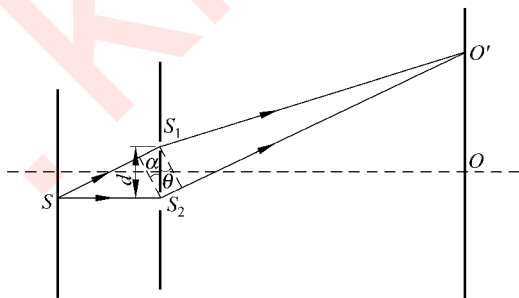


图 19.1 思考题 19.6 答用图

(2) 当缝光源 S 平行于双缝屏面向上或向下移动时,干涉条纹如何变化?

答 (1) 根据 $\Delta x = (D/d)\lambda$ 可知,随着 d 增大, Δx 变小,即条纹越密集但中央明纹的位置不变,上下条纹向中央靠拢。

(2) 缝光源下移时,条纹间距不变,但这时中央明纹的角位置 θ 需满足 $d \sin \alpha = d \sin$

θ , 即 $\theta = \alpha$ 的条件 (见图 19.1, α 为缝光源偏下的角度)。因此, 中央亮纹上移, 整个条纹区向上平移, 如果缝光源上移, 则整个条纹区向下平移。

19.9 隐形飞机所以很难为敌方雷达发现, 可能是由于飞机表面涂敷了一层介电质 (如塑料或橡胶) 从而使入射的雷达波反射极微。试说明这层介电质可能是怎样减弱反射波的。

答 可能是利用薄膜干涉的原理, 使从电介质层两表面反射的雷达波干涉相消了, 因而反射波极弱。也可能是介电质的吸收作用, 它吸收入射波的能量因而减小了反射波的强度。

19.10 在双缝干涉实验中, 如果在上方的缝后面贴一片薄的透明云母片, 干涉条纹的间距有无变化? 中央条纹的位置有无变化?

答 如图 19.2 所示, 云母片 (厚度为 t) 贴上后从双缝发出的两条光束到达屏上 P 点时的光程差为 (考虑到 θ 和 t 均甚小)

$$\delta = d \sin \theta - (nt - t)$$

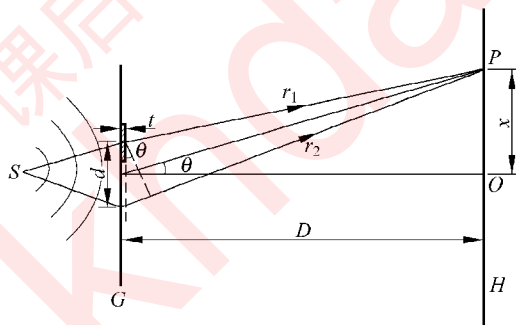


图 19.2 思考题 19.10 答用图

对第 k 级亮纹中心, 应有

$$\delta_k = d \sin \theta_k - (nt - t) = k\lambda$$

第 k 级亮纹中心的位置为

$$x_k = D \sin \theta_k = \frac{D}{d} [k\lambda + (nt - t)]$$

两相邻亮条纹的间距为

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{D}{d} \lambda$$

即贴上云母片后, 条纹间距没有变化。

在贴上云母片后, 中央条纹的位置为

$$x_0 = \frac{D}{d}[0 \times \lambda + (n-1)t] = \frac{D}{d}(n-1)t$$

即中央条纹从 $x=0$ 处上移了一段距离 $\frac{D}{d}(n-1)t$, 位置改变了。

19.4 习题解答

19.1 汞弧灯发出的光通过一滤光片后照射双缝干涉装置。已知缝间距 $d = 0.60 \text{ mm}$, 观察屏与双缝相距 $D = 2.5 \text{ m}$, 并测得相邻明纹间距离 $\Delta x = 2.27 \text{ mm}$ 。试计算入射光的波长, 并指出属于什么颜色。

解 由 $\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$ 得入射光的波长

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{d\Delta x}{D} = \frac{0.60 \times 10^{-3} \times 2.27 \times 10^{-3}}{2.5} \\ &= 5.45 \times 10^{-7} \text{ m} = 545 \text{ nm}\end{aligned}$$

为绿色。

19.2 劳埃德镜干涉装置如图 19.3 所示, 光源波长 $\lambda = 7.2 \times 10^{-7} \text{ m}$, 试求镜的右边缘到第一条明纹的距离。

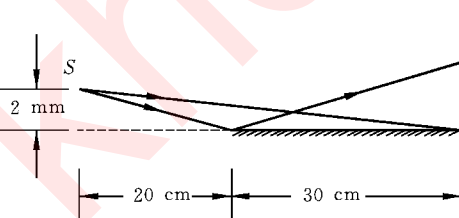


图 19.3 习题 19.2 解用图

解
$$\Delta x = \frac{1}{2} \frac{D}{d} \lambda = \frac{1}{2} \times \frac{20+30}{0.2 \times 2} \times 7.2 \times 10^{-7} \text{ m} = 4.5 \times 10^{-5} \text{ m}$$

19.3 一双缝实验中两缝间距为 0.15 mm , 在 1.0 m 远处测得第 1 级和第 10 级暗纹之间的距离为 36 mm 。求所用单色光的波长。

解
$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{d}{D} \Delta x = \frac{0.15 \times 10^{-3}}{1.0} \times \frac{36 \times 10^{-3}}{10-1} \\ &= 6.0 \times 10^{-7} = 0.60 \mu\text{m}\end{aligned}$$

19.4 沿南北方向相隔 3.0 km 有两座无线发射台, 它们同时发出频率为 $2.0 \times 10^5 \text{ Hz}$ 的无线电波。南台比北台的无线电波的相位落后 $\pi/2$ 。求在远处无线电波发生相

长干涉的方位角(相对于东西方向)。

解 如图 19.4 所示,两台发出的无线电波到达远处时的相差为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda} + \frac{\pi}{2}$$

相长干涉要求 $\Delta\varphi = 2n\pi$, 即

$$2\pi \frac{d\sin\theta}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = 2n\pi$$

$$\sin\theta = \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2d}$$

$$= \left(2n - \frac{1}{2}\right) \frac{3 \times 10^8}{2 \times 3.0 \times 10^3 \times 2 \times 10^5}$$

$$= \frac{1}{4} \left(2n - \frac{1}{2}\right)$$

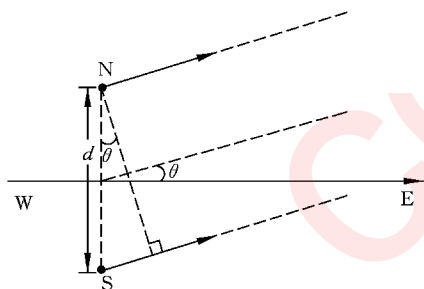


图 19.4 习题 19.4 解用图

由于 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 n 的可能取值为 $-1, 0, 1, 2$, 而 $\sin\theta$ 相应地为 $-5/8, -1/8, 3/8, 7/8$, 对应的 θ 的可能值为 $-39^\circ, -7.2^\circ, 22^\circ, 61^\circ$ 。

以上相长干涉出现在电台的东方, 对称地在电台的西方也应出现相长干涉。

19.5 使一束水平的氦氖激光器发出的激光($\lambda = 632.8 \text{ nm}$)垂直照射一双缝。在缝后 2.0 m 处的墙上观察到中央明纹和第 1 级明纹的间隔为 14 cm 。

- (1) 求两缝的间距;
- (2) 在中央条纹以上还能看到几条明纹?

解 (1)
$$d = \frac{D\lambda}{\Delta x} = \frac{2.0 \times 632.8 \times 10^{-9}}{0.14} = 9.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

(2) 由于 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 。按 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 计算, 则

$$k = \frac{d\sin\theta}{\lambda} = \frac{D}{\Delta x} = 2.0/0.14 = 14.3$$

应取 14 即还能看到 14 条明纹。

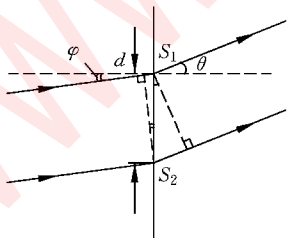


图 19.5 习题 19.6 证用图

19.6 一束激光斜入射到间距为 d 的双缝上, 入射角为 φ 。

- (1) 证明双缝后出现明纹的角度 θ 由下式给出:

$$d\sin\theta - d\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (2) 证明在 θ 很小的区域, 相邻明纹的角距离 $\Delta\theta$ 与 φ 无关。

证 (1) 如图 19.5 所示, 透过两条缝的光的光程差为

$d\sin\theta - d\sin\varphi$ 。因此,出现明纹的条件应是

$$d\sin\theta - d\sin\varphi = \pm k\lambda, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 当 θ 很小时, $\sin\theta \approx \theta$, 上式给出

$$\theta = \pm k\lambda/d + \sin\varphi$$

$$\Delta\theta = \theta_{k+1} - \theta_k$$

$$= [(k+1)\lambda/d + \sin\varphi] - [k\lambda/d + \sin\varphi] = \lambda/d$$

它与 φ 无关。

此结果说明,在 θ 较小的范围内(一般实验的条件大都这样),双缝干涉实验对入射光垂直于缝屏的要求可以降低。

19.7 澳大利亚天文学家通过观察太阳发出的无线电波,第一次把干涉现象用于天文观测。这无线电波一部分直接射向他们的天线,另一部分经海面反射到他们的天线,如图 19.6。设无线电的频率为 6.0×10^7 Hz,而无线电接收器高出海面 25 m。求观察到相消干涉时太阳光线的掠射角 θ 的最小值。

解 如图 19.6 所示,反射光线和直射光线到达天线的相差为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{2h\sin\theta}{\lambda} + \pi$$

干涉相消要求 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$, 代入上式可得

$$\sin\theta = \frac{k\lambda}{2h} = \frac{kc}{2\nu h}$$

$k=1$ 给出

$$\begin{aligned} \theta_{\min} &= \arcsin \frac{c}{2\nu h} = \arcsin \frac{3 \times 10^8}{2 \times 6.0 \times 10^7 \times 25} \\ &= 5.7^\circ \end{aligned}$$

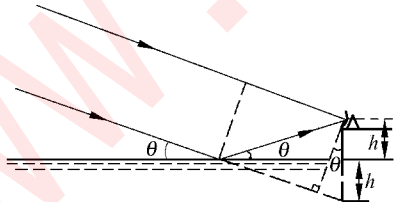


图 19.6 习题 19.7 解用图

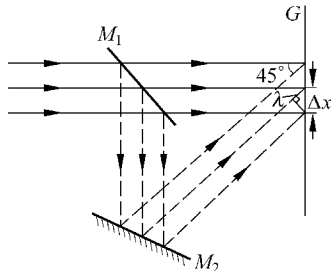


图 19.7 习题 19.8 解用图

19.8 如图 19.7 所示为利用激光做干涉实验。 M_1 为一半镀银平面镜, M_2 为一反射平面镜。入射激光束一部分透过 M_1 , 直接垂直射到屏 G 上, 另一部分经过 M_1 和 M_2 反射与前一部分叠加。在叠加区域两束光的夹角为 45° 。所用激光波长为 632.8 nm。求

在屏上干涉条纹的间距。

解 如图 19.7 所示,到达相邻两条明纹的入射光线的光程差的差应为 λ ,因此

$$\Delta x = \lambda / \cos 45^\circ = 632.8 / \sqrt{2} = 447.5 \text{ nm}$$

19.9 用很薄的玻璃片盖在双缝干涉装置的一条缝上,这时屏上零级条纹移到原来第 7 级明纹的位置上。如果入射光的波长 $\lambda = 550 \text{ nm}$,玻璃片的折射率 $n = 1.58$,试求此玻璃片的厚度。

解 设所加玻片厚度为 t ,盖在 S_2 缝上。原来第 7 级明纹处两缝发出的光的光程差为 $r_1 - r_2 = 7\lambda$ 。加玻片后此处为零级明纹,光程差应为 $r_1 - (nt + r_2 - t) = 0$ 。由此二式可得

$$\begin{aligned} t &= \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 550 \times 10^{-9}}{1.58-1} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ m} \\ &= 6.6 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

19.10 制造半导体元件时,常常要精确测定硅片上二氧化硅薄膜的厚度,这时可把二氧化硅薄膜的一部分腐蚀掉,使其形成劈尖,利用等厚条纹测出其厚度。已知 Si 的折射率为 3.42, SiO_2 的折射率为 1.5,入射光波长为 589.3 nm ,观察到 7 条暗纹如图 19.8 所示。问 SiO_2 薄膜的厚度 h 是多少?

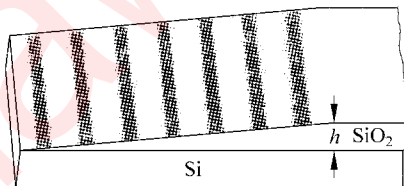


图 19.8 习题 19.10 用图

解 由 $2nh = \frac{(2k+1)\lambda}{2}$ 可得

$$\begin{aligned} h &= \frac{(2k+1)\lambda}{4n} \\ &= \frac{(2 \times 6 + 1) \times 589.3 \times 10^{-9}}{4 \times 1.5} \\ &= 1.28 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.28 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

19.11 一薄玻璃片,厚度为 $0.4 \text{ } \mu\text{m}$,折射率为 1.50,用白光垂直照射,问在可见光范围内,哪些波长的光在反射中加强? 哪些波长的光在透射中加强?

解 反射光加强的条件是

$$\begin{aligned} 2nh - \frac{\lambda}{2} &= k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \lambda &= \frac{4nh}{2k+1} = \frac{4 \times 1.50 \times 0.4 \times 10^{-6}}{2k+1} \\ &= \frac{2.4 \times 10^{-6}}{2k+1} \text{ m} \end{aligned}$$

在可见光范围内, $k=2, \lambda=480 \text{ nm}$, 反射加强。

透射光加强的条件是

$$2nh = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = 2nh/k = 2 \times 1.50 \times 0.4 \times 10^{-6}/k = 1.2 \times 10^{-6}/k$$

在可见光范围内, $k=2, \lambda=600 \text{ nm}; k=3, \lambda=400 \text{ nm}$, 透射加强。

19.12 在制作珠宝时, 为了使人造水晶($n=1.5$)具有强反射本领, 就在其表面上镀一层一氧化硅($n=2.0$)。要使波长为 560 nm 的光强烈反射, 这镀层至少应多厚?

解 由于在一氧化硅-空气界面反射时有相位跃变 π , 所以反射光加强的条件是 $2nh + \lambda/2 = k\lambda$ 。 $k=1$ 时有

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{560 \times 10^{-9}}{4 \times 2.0} = 7.0 \times 10^{-8} \text{ m} = 70 \text{ nm}$$

19.13 在折射率 $n_1=1.52$ 的镜头表面涂有一层折射率 $n_2=1.38$ 的 MgF_2 增透膜, 如果此膜适用于波长 $\lambda=550 \text{ nm}$ 的光, 膜的厚度应是多少?

解 透射光干涉加强的条件是

$$2nh - \lambda/2 = k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} h &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2n} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \times \frac{550 \times 10^{-9}}{2 \times 1.38} \\ &= (199.3k + 99.6) \times 10^{-9} \text{ m} \end{aligned}$$

因此, 膜的厚度最薄需要 $h=99.6 \text{ nm}$ 。

19.14 如图 19.9(a) 所示, 在一块平玻璃 B 上放一曲率半径 R 很大的平凸透镜 A , 在 A, B 之间就形成一薄的劈形空气层。当单色平行光垂直入射于平凸透镜时, 可以观察到(为了使光源 S 发出的光能垂直射向空气层并观察反射光, 在装置中加进了一个 45° 放置的半反射半透射的平面镜 M) 在透镜下表面出现一组干涉条纹, 这些条纹是以接触点 O 为中心的同心圆环, 称为牛顿环(图 19.9(b))。试分析干涉的起因并求出环半径 r 与 R 的关系。

设在某一次实验中, 测得某一明环的直径为 3.00 mm , 它外面第 5 个明环的直径为 4.60 mm , 平凸透镜的半径为 1.03 m , 求此单色光的波长。

解 当垂直入射的单色平行光透过上面的平凸透镜后, 在空气层的上下表面反射形成两束向上的相干光。这两束相干光的光程差如图 19.10 所示为

$$\delta = 2h + \frac{\lambda}{2}$$

其中 h 是空气层厚度, $\lambda/2$ 是在空气层的下表面反射时产生的半波损失。明条纹处,

$$\delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

暗条纹处,

$$\delta = 2h + \frac{\lambda}{2} = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

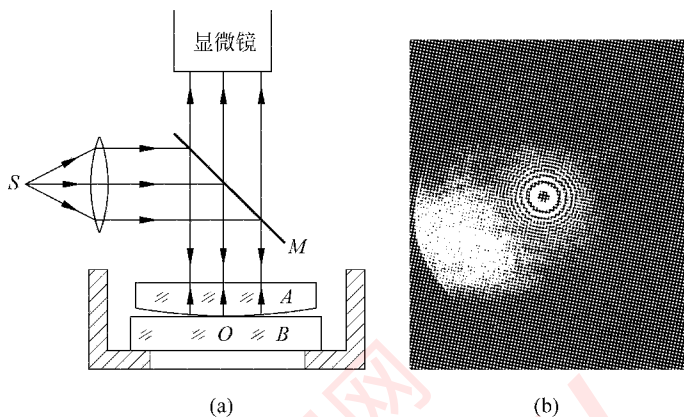


图 19.9 牛顿环实验
(a) 装置简图; (b) 牛顿环照相

由于在平凸透镜下空气薄层中同一圆环上的 h 相同, 所以这时形成的明暗条纹成环状。

干涉图样环半径 r 和平凸透镜下表面的曲率半径 R 的关系可参照图 19.10 用下述方法求得。在以 R 为斜边的直角三角形中

$$r^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$$

由于 $R \gg h$, 可略去 h^2 项而得

$$r = \sqrt{2Rh}$$

由上面的明暗条纹条件求出相应的 h 代入此式, 可得明纹半径为

$$r_{\text{br}} = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

暗纹半径为

$$r_{\text{da}} = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

由于暗环半径和级次 k 的平方根成正比, 所以牛顿环图样中越向外环越密。

用实验测得的数据求 λ 时, 可先由上面的 r_{br} 公式得出

$$r_{\text{br}, k}^2 = \frac{2k-1}{2} R\lambda \quad \text{和} \quad r_{\text{br}, k+5}^2 = \frac{2(k+5)-1}{2} R\lambda$$

由此可得

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{r_{\text{br}, k+5}^2 - r_{\text{br}, k}^2}{5R} = \frac{D_{\text{br}, k+5}^2 - D_{\text{br}, k}^2}{20R} \\ &= \frac{(4.60 \times 10^{-3})^2 - (3.00 \times 10^{-3})^2}{20 \times 1.03} \\ &= 5.90 \times 10^{-7} \text{ m} = 590 \text{ nm} \end{aligned}$$

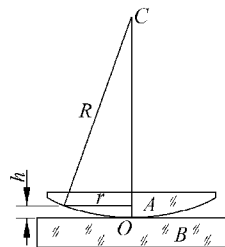


图 19.10 习题 19.14 解用图

19.15 利用迈克耳孙干涉仪可以测量光的波长。在一次实验中,观察到干涉条纹。当推进可动反射镜时,可看到条纹在视场中移动。当可动反射镜被推进 0.187 mm 时,在视场中某定点共通过了 635 条暗纹。试由此求所用入射光的波长。

答 可动反射镜每推进 $\lambda/2$, 两臂的反射光的光程差增加 λ , 经某定点将移过一个条纹。因此应有

$$\Delta l = \frac{N\lambda}{2}$$

由此得

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\Delta l}{N} = \frac{2 \times 0.187 \times 10^{-3}}{635} = 5.89 \times 10^{-7} \text{ m} \\ &= 589 \text{ nm}\end{aligned}$$

光的衍射

20.1 内容提要

1. 惠更斯-菲涅耳原理的基本概念：波阵面上各点都可以当成子波波源，其后波场中各点波的强度由各子波在该点的相干叠加决定。

2. 夫琅禾费衍射：光源在离衍射屏无限远处(或平行光入射衍射屏)，而且观察屏也离衍射屏无限远处(通常利用在衍射屏后面放一凸透镜来实现)时，所产生的衍射现象叫夫琅禾费衍射。

(1) 单缝衍射：可用半波带法分析。当单色光垂直入射宽度为 a 的单缝时，沿衍射角 θ 方向，从缝的上缘和下缘发出的子波的路程差为 $\pm k\lambda$ 时，即

$$a \sin \theta_k = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

时，可将缝看作 $2k$ 条等宽的细缝排列组成，相邻两细缝发出的子波沿 θ_k 方向在观察屏上叠加时将干涉相消。各对细缝发出的光都干涉相消的结果，就在沿 θ_k 方向出现了暗条纹。所以上式即决定单缝衍射产生的暗条纹的角位置的条件。

在单缝的正后方出现中央亮纹，它的角宽度为

$$\theta_0 = 2\theta_1 \approx 2\sin \theta_1 = \frac{2\lambda}{a}$$

以 f 表示衍射屏后面透镜的焦距，则中央亮纹的线宽度为

$$\Delta x_0 = 2f \tan \theta_1 \approx 2f \sin \theta_1 = \frac{2f\lambda}{a}$$

(2) 圆孔衍射：当单色光垂直入射直径为 D 的圆孔时，观察屏上显示环状明暗条纹。中央亮斑的角半径为 θ_0 ，则

$$D \sin \theta_0 = 1.22\lambda$$

或

$$\theta_0 \approx \sin \theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

(3) 细丝(或细粒)衍射: 根据巴比涅原理, 细丝(或细粒)和上述细缝(或圆孔)按同样规律产生衍射图样。

3. 光学仪器的分辨本领: 光学仪器的入射孔都是圆孔。远处发光点发的光通过入射孔进入成像时都会因衍射产生放大的光斑。两个发光点形成的光斑如果重合太多将不能分辨。根据瑞利判据, 远处两个发光点的最小分辨角为

$$\delta\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

而相应的光学仪器的分辨率为

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

4. 光栅衍射: 大量的平行透光缝紧密排列构成光栅。每缝的透光宽度为 a , 两缝间不透光宽度为 b ,

$$d = a + b$$

称为光栅常数。平行单色光入射光栅, 则会在其后面形成在黑暗的背景上显出窄细明亮条纹的衍射图样。这些条纹称为谱线。缝数越多, 谱线越细越亮。

单色光垂直入射光栅时, 谱线(主极大)的角位置 θ_k 满足

$$d \sin \theta_k = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

谱线的强度还受单缝衍射的调制, 有时有主极大缺级现象。

光栅能分开的两条谱线的波长差为

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{kN}$$

光栅的分辨本领为

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = kN \quad (N \text{ 为光栅总缝数})$$

5. X 射线衍射的布拉格公式: 当 X 光以掠射角 φ 入射到晶面间距为 d 的晶面上时反射光干涉加强的条件是

$$2d \sin \varphi = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

20.2 解题思路

1. 关于光的衍射问题的分析, 基本上也是相(位)差的计算, 不过此处处理的是连续分布的相干子波波源所发出的光的叠加。书中所给公式都是入射光垂直于衍射屏的情

况。这种情况下,衍射屏上连续分布的子波波源都是同相的。如果是斜入射,则计算光程差时还需要计入这些子波波源的相差。

2. 细丝和细粒的衍射应和细缝及细孔的衍射一样处理。

3. 光栅衍射是结合了各缝之间的干涉和每条缝中连续波源的衍射所引起的叠加现象。要既能求主极大(即谱线)的角位置,又能求谱线的宽度;还要能解决缺级现象。

4. 对于 X 射线衍射,要能根据具体的入射情况和晶体的晶面间距,自己列出干涉加强的条件,不可以死套公式。

20.3 思考题选答

20.6 在杨氏双缝实验中,每一条缝自身(即把另一缝遮住)的衍射条纹光强分布各如何? 双缝同时打开时条纹光强分布又如何? 前两个光强分布图的简单相加能得到后一个光强分布图吗? 大略地在同一张图中画出这 3 个光强分布曲线来。

答 如图 20.1 所示,只有一条缝打开时,衍射条纹是中央亮纹中心在各自缝正后方的单缝衍射条纹,光强分布如 I_1 和 I_2 曲线所示。两缝同时打开时,衍射条纹为双缝干涉条纹,光强分布如图中 I_{12} 曲线所示。很明显, I_{12} 并不等于 I_1 和 I_2 的简单相加(图中两缝间距为缝宽的 5 倍)。

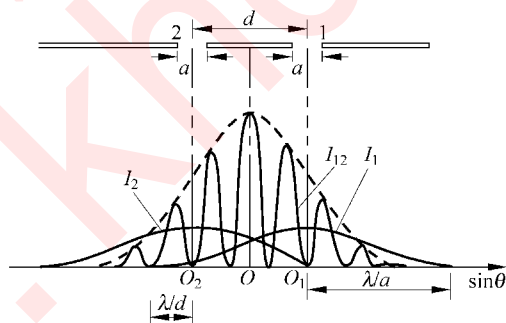


图 20.1 思考题 20.6 答用图

20.7 一个“杂乱”光栅,每条缝宽度是一样的,但缝间距离有大有小随机分布。单色光垂直入射这种光栅时,其衍射图样会是什么样子的?

答 由于各缝间距离杂乱,各缝间透过的光的相互干涉将被破坏而不能出现光强有主极大那样的谱线。各缝所产生的衍射将依然存在,在透镜后面形成单缝衍射条纹,其强度为各缝单独产生的强度之和。

20.4 习题解答

20.1 有一单缝,缝宽 $a=0.10\text{ mm}$,在缝后放一焦距为 50 cm 的会聚透镜,用波长 $\lambda=546.1\text{ nm}$ 的平行光垂直照射单缝,试求位于透镜焦平面处屏上中央明纹的宽度。

解
$$\begin{aligned}\Delta x &= 2f \tan \theta_1 \approx 2f \sin \theta_1 \approx 2f \theta_1 = 2f\lambda/a \\ &= \frac{2 \times 50 \times 10^{-2} \times (546.1 \times 10^{-9})}{0.1 \times 10^{-3}} \\ &= 5.46 \times 10^{-3} \text{ m}\end{aligned}$$

20.2 用波长 $\lambda=632.8\text{ nm}$ 的激光垂直照射单缝时,其夫琅禾费衍射图样的第1极小与单缝法线的夹角为 5° ,试求该缝的缝宽。

解 由于 $a \sin \theta_1 = \lambda$, 所以

$$a = \frac{\lambda}{\sin \theta_1} = \frac{632.8 \times 10^{-9}}{\sin 5^\circ} = 7.26 \times 10^{-6} \text{ m}$$

20.3 一单色平行光垂直入射一单缝,其衍射第3级明纹位置恰与波长为 600 nm 的单色光垂直入射该缝时衍射的第2级明纹位置重合,试求该单色光波长。

解 明纹位置近似地由 $a \sin \theta = (2k+1)\lambda/2$ 确定,所以有

$$\begin{aligned}\frac{(2 \times 3 + 1)\lambda_1}{2} &= \frac{(2 \times 2 + 1)\lambda_2}{2} \\ \lambda_1 &= \frac{5\lambda_2}{7} = \frac{5 \times 600}{7} = 429 \text{ nm}\end{aligned}$$

20.4 波长为 20 m 的海面波垂直进入宽 50 m 的港口。在港内海面上衍射波的中央波束的角宽度是多少?

解 由于 $a \sin \theta_1 = \lambda$, 所以中央波束的角宽度为

$$2\theta_1 = 2 \arcsin \frac{\lambda}{a} = 2 \arcsin \frac{20}{50} = 47^\circ$$

20.5 用肉眼观察星体时,星光通过瞳孔的衍射在视网膜上形成一个小亮斑。

(1) 瞳孔最大直径为 7.0 mm ,入射光波长为 550 nm 。星体在视网膜上的像的角宽度多大?

(2) 瞳孔到视网膜的距离为 23 mm 。视网膜上星体的像的直径多大?

(3) 视网膜中央小凹(直径 0.25 mm)中的柱状感光细胞每平方米约 1.5×10^5 个。星体的像照亮了几个这样的细胞?

解 (1) 角宽度

$$\begin{aligned}\delta &= 2\theta_1 = 2 \times 1.22 \times \frac{\lambda}{D} \\ &= \frac{2 \times 1.22 \times 550 \times 10^{-9}}{7.0 \times 10^{-3}} = 1.9 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$

(2) 像的直径

$$D_i = \delta l = 1.9 \times 10^{-4} \times 23 = 4.4 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

(3) 细胞数目

$$N = \frac{\pi D_i^2 n}{4} = \frac{\pi \times (4.4 \times 10^{-3})^2 \times 1.5 \times 10^5}{4} = 2.3 \text{ 个}$$

20.6 有一种利用太阳能的设想是在 $3.5 \times 10^4 \text{ km}$ 的高空放置一块大的太阳能电池板, 把它收集到的太阳能用微波形式传回地球。设所用微波波长为 10 cm , 而发射微波的抛物天线的直径为 1.5 km 。此天线发射的微波的中央波束的角宽度是多少? 在地球表面它所覆盖的面积直径多大?

解 由于 $\sin \theta_1 = 1.22\lambda/D_1$, 所以天线发射的中央波束的角宽度为

$$\begin{aligned}\delta &= 2\theta_1 = 2\arcsin(1.22\lambda/D_1) \\ &= 2\arcsin\left(\frac{1.22 \times 0.1}{1.5 \times 10^3}\right) \\ &= 1.6 \times 10^{-4} \text{ rad}\end{aligned}$$

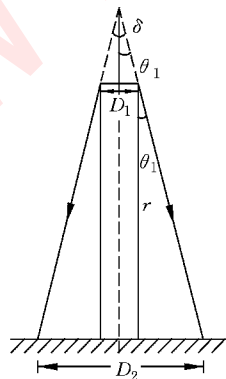


图 20.2 习题 20.6 解用图

如图 20.2 所示, 微波在地面覆盖的圆面积的直径为

$$\begin{aligned}D_2 &= r\delta + D_1 = 3.5 \times 10^7 \times 1.6 \times 10^{-4} + 1.5 \times 10^3 \\ &= 7.1 \times 10^3 \text{ m}\end{aligned}$$

20.7 在迎面驶来的汽车上, 两盏前灯相距 120 cm 。试问汽车离人多远的地方, 眼睛恰能分辨这两盏前灯? 设夜间人眼瞳孔直径为 5.0 mm , 入射光波长为 550 nm , 而且仅考虑人眼瞳孔的衍射效应。

解 由 $\theta_c = \frac{d}{l} = \frac{1.22\lambda}{D}$ 可得

$$\begin{aligned}l &= \frac{dD}{1.22\lambda} = \frac{1.20 \times 0.5 \times 10^{-3}}{1.22 \times 550 \times 10^{-9}} \\ &= 8.9 \times 10^3 \text{ m}\end{aligned}$$

20.8 据说间谍卫星上的照相机能清楚识别地面上汽车的牌照号码。

(1) 如果需要识别的牌照上的字划间的距离为 5 cm , 在 160 km 高空的卫星上的照相

机的角分辨率应多大?

(2) 此照相机的孔径需要多大? 光的波长按 500 nm 计。

解 (1) 角分辨率应为

$$\theta_c = \frac{d}{l} = \frac{5 \times 10^{-2}}{160 \times 10^3} = 3 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

(2) 照相机孔径应为

$$D = \frac{1.22\lambda}{\theta_c} = \frac{1.22 \times 500 \times 10^{-9}}{3 \times 10^{-7}} = 2 \text{ m}$$

20.9 美国波多黎各阿里西玻谷地的无线电天文望远镜(原书图 20.27)的“物镜”镜面孔径为 300 m, 曲率半径也是 300 m。它工作的最短波长是 4 cm。对于此波长, 这台望远镜的角分辨率是多少?

解
$$\theta_c = \frac{1.22\lambda}{D} = \frac{1.22 \times 4 \times 10^{-2}}{300} = 1.6 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.56'$$

20.10 大熊星座 ζ 星(原书图 20.28)实际上是一对双星。二星的角距离为 $14''$ ([角]秒)。试问望远镜物镜的直径至少要多大, 才能把这两颗星分辨开来? 使用的光的波长按 550 nm 计。

解
$$D = \frac{1.22\lambda}{\theta_c} = 1.22 \times 550 \times 10^{-9} / \left(\frac{14 \times \pi}{3600 \times 180} \right) = 1.0 \text{ cm}$$

20.11 一双缝, 缝间距 $d = 0.10 \text{ mm}$, 缝宽 $a = 0.02 \text{ mm}$, 用波长 $\lambda = 480 \text{ nm}$ 的平行单色光垂直入射该双缝, 双缝后放一焦距为 50 cm 的透镜, 试求:

- (1) 透镜焦平面处屏上干涉条纹的间距;
- (2) 单缝衍射中央亮纹的宽度;
- (3) 单缝衍射的中央包线内有多少条干涉的主极大。

解 (1) 干涉条纹的间距

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{f\lambda}{d} = \frac{50 \times 10^{-2} \times 480 \times 10^{-9}}{0.10 \times 10^{-3}} \\ &= 2.4 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

(2) 单缝衍射中央亮纹宽度为

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \frac{2f\lambda}{a} = \frac{2 \times 50 \times 10^{-2} \times 480 \times 10^{-9}}{0.02 \times 10^{-3}} \\ &= 2.4 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

(3) 中央亮纹内干涉主极大的数目

$$N = \frac{\Delta x'}{\Delta x} - 1 = \frac{24}{2.4} - 1 = 9$$

20.12 一光栅,宽 2.0 cm,共有 6000 条缝。今用钠黄光垂直入射,问在哪些角位置出现主极大?

解 由光栅方程可得出主极大的角位置为

$$\begin{aligned}\theta &= \arcsin\left(\pm \frac{k\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\pm \frac{k\lambda l}{N}\right) \\ &= \arcsin\left(\frac{\pm k \times 589.3 \times 10^{-9} \times 2.0 \times 10^{-2}}{6000}\right) \\ &= \arcsin(\pm 0.1768k)\end{aligned}$$

由于 $\sin \theta \leq 1$, 所以取 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 。相应的角位置值为 $0^\circ, \pm 10^\circ 11', \pm 20^\circ 42', \pm 32^\circ 2', \pm 45^\circ, \pm 62^\circ 7'$ 。

20.13 某单色光垂直入射到每厘米有 6000 条刻痕的光栅上,其第 1 级谱线的角位置为 20° ,试求该单色光波长。它的第 2 级谱线在何处?

解

$$\begin{aligned}\lambda &= d \sin \theta_1 = \frac{10^{-2} \sin 20^\circ}{6000} \\ &= 5.70 \times 10^{-7} \text{ m} = 570 \text{ nm} \\ \theta_2 &= \arcsin \frac{2\lambda}{d} \\ &= \arcsin \frac{2 \times 5.70 \times 10^{-7} \times 6000}{10^{-2}} \\ &= 43.2^\circ\end{aligned}$$

20.14 试根据原书图 20.20 所示光谱图,估算所用光栅的光栅常数和每条缝的宽度。

解 以 H_α 的第 2 级谱线为例, $k = 2, \theta = 41^\circ, \lambda = 656.3 \text{ nm}$, 光栅常数为

$$d = \frac{k\lambda}{\sin \theta} = \frac{2 \times 656.3 \times 10^{-9}}{\sin 41^\circ} = 2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

由于主极大第 3 级缺级,所以缝宽为

$$\begin{aligned}a &= \frac{d}{3} = \frac{2.0 \times 10^{-6}}{3} \\ &= 6.7 \times 10^{-7} \text{ m}\end{aligned}$$

20.15 北京天文台的米波综合孔径射电望远镜由设置在东西方向上的一列共 28 个抛物面组成(原书图 20.29)。这些用作天线的望远镜都用等长的电缆连到同一个接收器上(这样各电缆对各天线接收的电磁波信号不会产生附加的相差),接收由空间射电源发射的 232 MHz 的电磁波。工作时各天线的作用等效于间距为 6 m,总数为 192 个天线的一维天线阵列。接收器接收到的从正天顶上的一颗射电源发来的电磁波将产生极大强度

还是极小强度? 在正天顶东方多大角度的射电源发来的电磁波将产生第一级极小强度?

又在正天顶东方多大角度的射电源发来的电磁波将产生下一级极大强度?

解 从正天顶的射电源发来的电磁波到达各天线时同相, 所以产生极大强度。

极小方位由 $d \sin \theta = m \lambda / N$ 决定, 令 $m=1$ 得产生第一级极小的射电源的方位为偏东

$$\begin{aligned}\theta &= \arcsin\left(\frac{\lambda}{Nd}\right) = \frac{c}{Nd\nu} \\ &= \frac{3 \times 10^8}{192 \times 6 \times 2.32 \times 10^8} \\ &= 1.12 \times 10^{-3} \text{ rad} = 3.85'\end{aligned}$$

极大方位由 $d \sin \theta = m \lambda$ 决定, 令 $m=1$ 得产生下一级极大的射电源的方位为偏东

$$\begin{aligned}\theta &= \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right) = \arcsin\left(\frac{3 \times 10^8}{6 \times 2.32 \times 10^8}\right) \\ &= 0.217 \text{ rad} = 12.4^\circ\end{aligned}$$

20.16 在原书图 20.24 中, 若 $\varphi = 45^\circ$, 入射的 X 射线包含有从 0.095 nm 到 0.130 nm 这一波带中的各种波长。已知晶格常数 $d = 0.275 \text{ nm}$, 问是否有干涉加强的衍射 X 射线产生? 如果有, 这种 X 射线的波长如何?

解 由布拉格公式 $2d \sin \varphi = k \lambda$ 可得干涉加强的可能 X 射线波长为

$$\lambda = \frac{2d \sin \varphi}{k} = \frac{2 \times 0.275 \times \sin 45^\circ}{k} = \frac{0.389}{k} \text{ nm}$$

在所给波长范围内能干涉加强的波长为

$$\lambda_3 = \frac{0.389}{3} = 0.130 \text{ nm}$$

$$\lambda_4 = \frac{0.389}{4} = 0.097 \text{ nm}$$

*** 20.17** 1927 年戴维孙和革末用电子束射到镍晶体上的衍射(散射)实验证实了电子的波动性。实验中电子束垂直入射到晶面上。他们在 $\varphi = 50^\circ$ 的方向测得了衍射电子流的极大强度(图 20.3)。已知晶面上原子间距为 $d = 0.215 \text{ nm}$, 求与入射电子束相应的电子波波长。

解 如图 20.3 所示, 相邻两镍原子散射的电子波的波程差为 $\delta = d \sin \varphi$ 。由叠加加强的条件可得

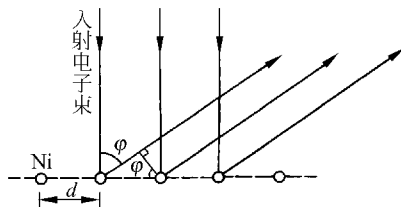


图 20.3 习题 20.17 解用图

$$\lambda = \delta = d \sin \varphi = 0.215 \times \sin 50^\circ = 0.165 \text{ nm}$$

光的偏振

21.1 内容提要

1. 自然光和偏振光：光是电磁波，是横波，其中电场方向（即光振动的方向）垂直于光的传播方向。在垂直于光的传播方向的平面内，各方向光振动的振幅都相等的光叫自然光（注意，各方向的光振动是不相干的）；只在某一方向有光振动的光叫线偏振光；各方向的光振动都有，但振幅不同的光叫部分偏振光。

2. 由介质吸收引起的光的偏振：偏振片（由拉长了的浸过碘的长链有机分子顺列构成）只允许某一方向（即垂直于碘链的方向，叫通光方向）的光振动通过，和这一方向垂直的光振动被完全吸收。偏振片可用作起偏器，即将自然光变为线偏振光；也可用作检偏器，检查入射光是否线偏振光。

以 I_0 表示入射的线偏振光的强度。当它的光振动方向与偏振片的通光方向的夹角为 α 时，通过偏振片的光的强度可以根据振幅的分解和光强与振幅的平方成正比而得出通过偏振片后光的强度为

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

这一公式称为马吕斯定律。

3. 由反射引起的光的偏振：自然光在介电质的表面反射时，反射光是部分偏振光，当入射角 i_0 满足

$$\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

的条件时，反射光为线偏振光，其光振动方向与入射面垂直。 i_0 称为相关介质的布儒斯特角。

4. 由双折射引起的光的偏振：一束自然光射入某些晶体时，会分成两束：一束遵守

折射定律,折射率不随入射方向改变,叫寻常光;另一束折射率随入射方向改变叫非常光。寻常光和非常光都是线偏振光,而且二者光振动方向相互垂直。

5. 由散射引起的光的偏振: 自然光在传播路径上遇到小微粒或分子时,会激起微粒中的电子振动而向四周发射光线,这就是散射。垂直于入射光方向的散射光是线偏振光,其光振动方向与入射光和散射光形成的平面垂直。其他方向的散射光是部分偏振的。

* 6. 旋光现象: 指线偏振光通过物质时振动面旋转的现象。旋转角度与光通过物质的路径长度成正比。

21.2 解题思路

本章主要内容是了解几种线偏振光产生的条件,习题计算方面则只要求应用马吕斯定律和布儒斯特角定义。这需了解光振动的分解及光强和光振动振幅的平方成正比的规律以及注意光振动方向及偏振片透光方向的正确判断。

21.3 思考题选答

21.5 1906年巴克拉(C. G. Barkla, 1917年诺贝尔物理奖获得者)曾做过下述“双散射”实验。如图 21.1 所示,先让一束从 X 射线管射出的 X 射线沿水平方向射入一碳块而被向各方向散射。在与入射线垂直的水平方向上放置另一碳块,接收沿水平方向射来的散射的 X 射线。在这第二个碳块的上下方向就没有再观察到 X 射线的散射光。他由此证实了 X 射线是一种电磁波的想法。他是如何论证的?

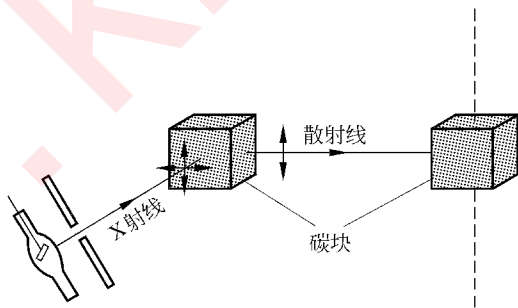


图 21.1 思考题 21.5 用图

答 他是根据电磁波是横波这一性质论证的。假定 X 射线是横波。由 X 光管射出的 X 光是自然光,其中上下和水平方向的光振动都有。经第一个碳块散射后,在向右的水平散射光中,不可能存在与光的传播方向相同的光振动(电磁波是横波)。于是这一散射光中光振动的水平分量就没有了,只有竖直方向的光振动。这样的线偏振光在第二个

碳块中被散射。由于光的横波性质,在竖直方向上,即第二个碳块上下方向就不会有 X 光的散射光了。这样的论证和观察的结果相符,说明光是电磁波。如果 X 光是纵波或是由微粒(从经典的意义上说)组成的,都不能得出与实验符合的结论。

21.4 习题解答

21.1 自然光通过两个偏振化方向间成 60° 的偏振片,透射光强为 I_1 。今在这两个偏振片之间再插入另一偏振片,它的偏振化方向与前两个偏振片均成 30° 角,则透射光强为多少?

解 设入射的自然光光强为 I_0 ,则透过第一个偏振片后光强变为 $I_0/2$ 。透过第二个偏振片后光强变为 $I_0 \cos^2 60^\circ / 2 = I_1$ 。由此得

$$I_0 = \frac{2I_1}{\cos^2 60^\circ} = 8I_1$$

上述两偏振片间加入另一偏振片后,透过的光强变为

$$I' = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 30^\circ \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \times 8I_1 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4} I_1 = 2.25 I_1$$

21.2 自然光入射到两个互相重叠的偏振片上。如果透射光强为(1)透射光最大强度的三分之一,或(2)入射光强度的三分之一,则这两个偏振片的偏振化方向间的夹角是多少?

解 (1) 自然光入射,两偏振片同向时,透过光强最大,为 $I_0/2$ 。当透射光强为 $(I_0/2)/3$ 时,有

$$\frac{I_0 \cos^2 \theta}{2} = \frac{I_0}{2} \frac{1}{3}$$

两偏振片的偏振化方向夹角为

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}} = 54^\circ 44'$$

(2) 由于透射光强 I' 为

$$I' = \frac{I_0 \cos^2 \theta'}{2} = \frac{I_0}{3}$$

所以有

$$\theta' = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} = 35^\circ 16'$$

21.3 使一束部分偏振光垂直射向一偏振片,在保持偏振片平面方向不变而转动偏振片 360° 的过程中,发现透过偏振片的光的最大强度是最小强度的 3 倍。试问在入射光束中线偏振光的强度是总强度的几分之几?

解 设在入射光束中自然光的强度为 I_1 , 线偏振光的强度为 I_2 。由于两种成分是不相干的, 所以总强度就是 $I = I_1 + I_2$ 。

自然光透过偏振片后, 强度变为 $\frac{1}{2}I_1$, 而线偏振光的强度最大为 I_2 最小为 0。所以透过的光的最大强度为 $\frac{I_1}{2} + I_2$, 最小强度为 $I_1/2$ 。由题意,

$$\frac{I_1}{2} + I_2 = 3 \frac{I_1}{2},$$

由此得 $I_1 = I_2$, 进一步得

$$\frac{I_2}{I} = \frac{I_2}{I_1 + I_2} = \frac{1}{2}$$

21.4 水的折射率为 1.33, 玻璃的折射率为 1.50, 当光由水中射向玻璃而反射时, 起偏振角为多少? 当光由玻璃中射向水而反射时, 起偏振角又为多少? 这两个起偏振角的数值间是什么关系?

解 光由水中射向玻璃而反射时, 起偏振角为

$$i_{0,12} = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1.5}{1.33} = 48^\circ 26'$$

光由玻璃中射向水而反射时, 起偏振角为

$$i_{0,21} = \arctan \frac{n_1}{n_2} = \arctan \frac{1.33}{1.50} = 41^\circ 34'$$

由于 $\tan i_{0,12} = \frac{n_2}{n_1} = (\tan i_{0,21})^{-1}$, 所以 $i_{0,12} + i_{0,21} = \frac{\pi}{2}$, 即二者互余。

21.5 光在某两种介质界面上的临界角是 45° , 它在界面同一侧的起偏振角是多少?

解 临界角 β 与折射率的关系为 $\sin \beta = \frac{n_2}{n_1}$ 。在界面的同一侧的起偏振角为

$$i_0 = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan(\sin \beta) = \arctan(\sin 45^\circ) = 35^\circ 16'$$

21.6 根据布儒斯特定律可以测定不透明介质的折射率。今测得釉质的起偏振角 $i_b = 58^\circ$, 试求它的折射率。

解 由 $\tan i_b = n_2/n_1$ 可得釉质折射率为

$$n_2 = n_1 \tan i_b = 1.00 \times \tan 58^\circ = 1.60$$

21.7 已知从一池静水的表面反射出来的太阳光是线偏振光, 此时, 太阳在地平线上多大仰角处?

解 此时, 太阳光射向水面的入射角为 $i = i_0 = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1.33}{1.00} = 53^\circ 4'$ 。太阳此时的仰角为 $\alpha = 90^\circ - i = 36^\circ 56'$ 。

第

5

篇

量子物理基础

www.khdaW.com
课后答案网

量子物理的基本概念

22.1 内容提要

1. **黑体辐射**: 辐射体发出的电磁辐射, 能量按频率分布只由温度决定时, 其电磁辐射称为黑体辐射。

普朗克 1900 年突破经典物理思想提出了带电谐振子的能量量子化假设, 即谐振子能量为

$$E = nh\nu, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

根据这一假设, 他得出了描述黑体辐射的能量按频率分布的正确公式——普朗克公式, 即

$$M_\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

式中 M_ν 是温度为 T 的黑体在单位时间内从单位面积上发出的频率在 ν 附近单位频率区间的电磁波的能量。

由普朗克公式可求出黑体在单位时间内从单位面积上发出的总能量为

$$M = \int_0^\infty M_\nu d\nu = \sigma T^4$$

其中

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^2)$$

称为斯特藩-玻耳兹曼常量。

2. **光电效应**: 光照射到金属(或其他材料)表面上时从表面发射电子的现象。它的下述特征不能为经典电磁波理论解释: (1) 光电子的最大初动能与入射光频率有线性关系。对于给定的金属, 能产生光电效应的光的频率不能小于某一确定的红限值。(2) 从光照到金属表面到从表面发出光电子的延迟时间极短($\approx 10^{-9} \text{ s}$)。

为解释光电效应, 爱因斯坦提出光是由能量子, 后称为光子的微粒组成的。

每个光子的能量为 $E = h\nu$, 质量为 $m = \frac{h\nu}{c^2}$, 动量为 $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$ 。

圆满解释光电效应现象的光电效应方程为

$$\frac{1}{2}m_0 v_{\max}^2 = h\nu - A$$

其中 A 为金属的逸出功(功函数)。由此可得出红限频率为

$$\nu_0 = \frac{A}{h}$$

3. 康普顿散射: 可以用光子和静止的自由电子间的“粒子性”碰撞解释。被散射的光的波长和入射光波长相比的增加量和散射角 φ 有关, 即有

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

式中 m_0 为电子的静质量。常量

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 2.4263 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

称为电子的康普顿波长。

4. 粒子的波动性

德布罗意假设: 粒子也有波动性。动量为 $p = mv$ 的粒子的“德布罗意波长”为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

5. 概率波与概率幅

德布罗意波是概率波, 它描述粒子在各处被发现的概率。

用波函数 Ψ 描述微观粒子的状态。 Ψ 叫概率幅, $|\Psi|^2$ 为概率密度, 表示时刻 t 在给定空间点周围单位体积内发现粒子的概率。概率幅具有叠加性。

6. 不确定关系: 它是波粒二象性的反映。

位置动量不确定关系

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

能量时间不确定关系

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

7. 定态薛定谔方程(一维)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U\psi = E\psi$$

式中 ψ 为粒子的定态波函数, E 是粒子的能量。此微分方程是线性的, 说明 ψ 满足叠加

原理。

在数学上,上述微分方程的解 ψ 对 E 值没有什么特别要求。但要使波函数 ψ 满足物理的标准条件,即单值、有限、连续,那么在束缚状态下的粒子的能量 E 就只能取离散的值。这样,薛定谔方程就自然地给出了微观粒子能量量子化等特征。

8. 一维无限深方势阱中的粒子

能量量子化

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

波函数 ψ 是正弦函数,表示概率密度分布不均匀。

德布罗意波长量子化

$$\lambda_n = \frac{2a}{n}$$

此式类似于经典理论中的两端固定的弦中的驻波的波长公式。

9. 势垒穿透

微观粒子可以进入其势能(有限的)大于其总能量的区域,这是由不确定关系决定的。

在势垒高度、宽度有限的情况下,粒子可以穿过势垒到达另一侧。这种现象称隧穿效应。

* 10. 谐振子: 薛定谔方程自然地给出谐振子的能量量子化结果,即

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

最低能量

$$E_0 = \frac{1}{2} h\nu$$

称为零点能。它说明粒子不可能静止。

22.2 解题思路

本章重点是建立量子物理的基本概念,了解微观粒子运动的基本特征,习题多是代入适当公式的计算,分析比较容易。希望在计算中和得出结果后能定量地结合实际情况体会微观粒子的波粒二象性与经典的粒子或波动的规律的巨大差别。

22.3 思考题选答

22.4 用可见光能产生康普顿效应吗? 能观察到吗?

答 原则上可见光也应该能产生康普顿效应,但由于康普顿效应的波长改变与波长

无关,对可见光来说,由于波长较大,其康普顿散射的波长的相对改变就非常小,在实验上就观察不出来了。如对于 $\lambda=550\text{ nm}$ 的可见光来说,其康普顿散射所产生的最大的波长相对改变为 $4.8\times 10^{-3}/550\approx 10^{-5}$,这就很难观察到了。

22.6 电子显微镜所用电子波长常小于 0.01 nm ,为什么不用这么短的波长的光子来制造显微镜?

答 波长小于 0.01 nm 的光已在 X 射线甚至 γ 射线范围,它们对物质的直接穿透力极强,或者说,各种物质对它们的折射率都是 1,无法制成透镜来改变它们的传播方向,所以不能用它们得到放大的像,也就不能利用它们制造显微镜。再者这种光子的能量很大,容易导致被照射材料的破坏,这也是不能利用它们来做显微镜的一个原因。

22.7 如果普朗克常量 $h\rightarrow 0$,对波粒二象性会有什么影响? 如果光在真空中的速率 $c\rightarrow \infty$,对时间空间的相对性会有什么影响?

答 如果 $h\rightarrow 0$,则粒子的德布罗意波长 $\lambda=h/p\rightarrow 0$,粒子不会显示波动性;而光子的能量 $E=h\nu\rightarrow 0$,质量 $m=E/c^2\rightarrow 0$,光子将不复存在,光将只显示波动性。这就是说, $h\rightarrow 0$ 时,我们周围的世界将完全是“经典性”的,波是波,粒子是粒子,二者截然不同。

如果 $c\rightarrow \infty$,则时间的延缓公式将给出 $\Delta t'=\Delta t/\sqrt{1-u^2/c^2}=\Delta t$,长度缩短公式将给出 $l'=l\sqrt{1-u^2/c^2}=l$,即时间测量和空间测量的相对性都不复存在,时间和空间都将是伽利略-牛顿式的。

22.4 习题解答

22.1 夜间地面降温主要是由于地面的热辐射。如果晴天夜里地面温度为 -5°C ,按黑体辐射计算,每平方米地面失去热量的速率多大?

解 每平方米地面失去热量的速率即地面的辐射出射度

$$M = \sigma T^4 = 5.67 \times 10^{-8} \times 268^4 = 292\text{ W/m}^2$$

22.2 在地球表面,太阳光的强度为 $1.0\times 10^3\text{ W/m}^2$ 。地球轨道半径以 $1.5\times 10^8\text{ km}$ 计,太阳半径以 $7.0\times 10^8\text{ m}$ 计,并视太阳为黑体,试估算太阳表面的温度。

解

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi R_E^2 I}{4\pi R_S^2} = \sigma T^4 \\ T &= \sqrt[4]{\frac{R_E^2 I}{R_S^2 \sigma}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{(1.5 \times 10^{11})^2 \times 1.0 \times 10^3}{(7.0 \times 10^8)^2 \times 5.67 \times 10^{-8}}} \\ &= 5.3 \times 10^3\text{ K} \end{aligned}$$

22.3 太阳的总辐射功率为 $P_s = 3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ 。

(1) 以 r 表示行星绕太阳运行的轨道半径。试根据热平衡的要求证明：行星表面的温度 T 由下式给出：

$$T^4 = \frac{P_s}{16\pi\sigma r^2}$$

其中 σ 为斯特藩-玻耳兹曼常量(行星辐射按黑体计)。

(2) 用上式计算地球和冥王星的表面温度, 已知地球 $r_E = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$, 冥王星 $r_P = 5.9 \times 10^{12} \text{ m}$ 。

解 (1) 以 R 表示行星半径, 则吸热功率为 $P_{ab} = \frac{P_s}{4\pi r^2} \pi R^2$, 放热功率为 $P_{ej} = \sigma T^4 4\pi R^2$ 。热平衡时 $P_{ab} = P_{ej}$, 即 $\frac{P_s}{4\pi r^2} \pi R^2 = \sigma T^4 4\pi R^2$, 由此得

$$T^4 = \frac{P_s}{16\pi\sigma r^2}$$

$$(2) \quad T_E = \left[\frac{3.9 \times 10^{26}}{16\pi \times 5.67 \times 10^{-8} \times (1.5 \times 10^{11})^2} \right]^{1/4} = 279 \text{ K}$$

$$T_P = \left[\frac{3.9 \times 10^{26}}{16\pi \times 5.67 \times 10^{-8} \times (5.9 \times 10^{12})^2} \right]^{1/4} = 45 \text{ K}$$

22.4 Procyon B 星距地球 11 l. y., 它发的光到达地球表面的强度为 $1.7 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$, 该星的表面温度为 6600 K, 求该星的线度。

解 该星距地球的距离 $r = 9.46 \times 10^{15} \times 11 = 1.04 \times 10^{17} \text{ m}$, 以该星发光为黑体辐射计, 有

$$I 4\pi r^2 = \sigma T^4 4\pi R^2$$

该星的直径为

$$D = 2R = 2 \sqrt{\frac{I r^2}{\sigma T^4}} = 2 \times \sqrt{\frac{1.7 \times 10^{-12} \times (1.04 \times 10^{17})^2}{5.67 \times 10^{-8} \times 6600^4}}$$

$$= 2.6 \times 10^7 \text{ m}$$

22.5 宇宙大爆炸遗留在空间的均匀的、各向同性的背景热辐射相当于 3 K 黑体辐射。地球表面接收此辐射的功率是多大?

解 $P = M 4\pi R_E^2 = 4\pi\sigma T^4 R_E^2$

$$= 4\pi \times 5.67 \times 10^{-8} \times 3^4 \times (6.4 \times 10^6)^2 = 2.36 \times 10^9 \text{ W}$$

22.6 铝的逸出功是 4.2 eV, 今用波长为 200 nm 的光照射铝表面, 求:

(1) 光电子的最大动能;

(2) 截止电压;

(3) 铝的红限波长。

$$\begin{aligned}
 \text{解 (1)} \quad E_{k,m} &= h\nu - A = h \frac{c}{\lambda} - A \\
 &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{200 \times 10^{-9} \times 1.6 \times 10^{-19}} - 4.2 = 2.0 \text{ eV} \\
 (2) \quad U_c &= E_{k,m}/e = 2.0/1 = 2.0 \text{ V} \\
 (3) \quad \lambda_0 &= \frac{c}{\nu_0} = \frac{hc}{A} \\
 &= \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{4.2 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 2.96 \times 10^{-7} \text{ m} = 296 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

22.7 银河系间宇宙空间内的星光的能量密度为 10^{-15} J/m^3 , 相应的光子数密度多大? 假定光子的平均波长为 500 nm 。

$$\text{解} \quad N = \frac{w}{h\nu} = \frac{w\lambda}{hc} = \frac{10^{-15} \times 500 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 2.5 \times 10^3 \text{ (个/m}^3\text{)}$$

22.8 入射的 X 射线光子的能量为 0.60 MeV , 被自由电子散射后波长变化了 20% 。求反冲电子的动能。

解 散射后光子波长增大, 所以散射后光子的波长为 $\lambda = 1.2\lambda_0$, 其能量为

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{1.2\lambda_0} = \frac{h\nu_0}{1.2} = \frac{E_0}{1.2}$$

由能量守恒知, 反冲电子的动能为

$$E_e = E_0 - \frac{E_0}{1.2} = \frac{E_0}{6} = \frac{0.60}{6} = 0.10 \text{ MeV}$$

22.9 一个静止电子与一能量为 $4.0 \times 10^3 \text{ eV}$ 的光子碰撞后, 它能获得的最大动能是多少?

解 当光子与电子发生正碰而折回时, 能量损失最大。这时光子的波长为 $\lambda = \lambda_0 + 2h/(m_e c)$, 而能量为

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0 + 2h/(m_e c)} = \frac{hc}{hc/E_0 + 2h/(m_e c)} = \frac{E_0 m_e c^2}{m_e c^2 + 2E_0}$$

此碰撞后, 电子获得的能量最大, 为

$$\begin{aligned}
 E_e &= E_0 - E = E_0 \left(1 - \frac{m_e c^2}{m_e c^2 + 2E_0} \right) \\
 &= 4.0 \times 10^3 \left(1 - \frac{0.511 \times 10^6}{0.511 \times 10^6 + 2 \times 4 \times 10^3} \right) = 62 \text{ eV}
 \end{aligned}$$

22.10 电子和光子各具有波长 0.20 nm , 它们的动量和总能量各是多少?

解 电子和光子的动量都是

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{0.20 \times 10^{-9}} = 3.32 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

电子的总能量为

$$\begin{aligned} E_e &= \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \\ &= \sqrt{(3.32 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^8)^2 + (0.911 \times 10^{-30} \times 9 \times 10^{16})^2} \\ &= 8.19 \times 10^{-14} \text{ J} = 5.12 \times 10^5 \text{ eV} \end{aligned}$$

光子的能量为

$$\begin{aligned} E &= pc = 3.32 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^8 \\ &= 9.9 \times 10^{-16} \text{ J} = 6.19 \times 10^3 \text{ eV} \end{aligned}$$

22.11 一电子显微镜的加速电压为 40 keV, 经过这一电压加速的电子的德布罗意波长是多少?

解 由于 40 keV 比电子的静能 511 keV 小许多, 所以可以不考虑相对论效应而得

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 0.91 \times 10^{-30} \times 4 \times 10^4 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 6.1 \times 10^{-12} \text{ m} \end{aligned}$$

22.12 德布罗意关于玻尔角动量量子化的解释。以 r 表示氢原子中电子绕核运行的轨道半径, 以 λ 表示电子波的波长。氢原子的稳定性要求电子在轨道上运行时电子波应形成整数波长的驻波(原书图 22.25)。试由此并结合德布罗意波长公式(原书式(22.16))导出电子轨道运动的角动量应为

$$L = m_e r v = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

这正是当时已被玻尔提出的电子轨道角动量量子化假设。

解 驻波条件要求

$$2\pi r = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

将 $\lambda = \frac{h}{m_e v}$ 代入, 即可得

$$m_e v r = \frac{n h}{2\pi} = n \hbar$$

由于电子绕核运动的角动量 L 就等于 $m_e v r$, 所以有

$$L = m_e v r = n \hbar$$

22.13 电视机显像管中电子的加速电压为 9 kV, 电子枪枪口直径取 0.50 mm, 枪口离荧光屏的距离为 0.30 m。求荧光屏上一个电子形成的亮斑直径。这样大小的亮斑影响电视图像的清晰度吗?

解 取 $\Delta y = 0.50 \text{ mm}$, 则由不确定关系得

$$\Delta p_y = \frac{\hbar}{2\Delta y}$$

而

$$p_x = \sqrt{2m_e E}$$

荧光屏上亮斑直径为

$$\begin{aligned} d &= \frac{2\Delta p_x l}{p_x} = \frac{\hbar l}{\Delta y p_x} = \frac{\hbar l}{\Delta y \sqrt{2m_e E}} \\ &= \frac{1.05 \times 10^{-34} \times 0.30}{0.5 \times 10^{-3} \times \sqrt{2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times 9 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19}}} \\ &= 1.2 \times 10^{-9} \text{ m} = 1.2 \text{ nm} \end{aligned}$$

此亮斑的大小不会影响当前电视图像的清晰度。

又,亮斑直径也可用波的衍射来求,即

$$\begin{aligned} d &= 2\theta l = 2 \times \frac{1.22\lambda l}{\Delta y} = \frac{2.44\hbar l}{\Delta y p} \\ &= \frac{2.44 \times 2\pi \hbar l}{\Delta y \sqrt{2m_e E}} \approx \frac{\hbar l}{\Delta y \sqrt{2m_e E}} \end{aligned}$$

22.14 卢瑟福的 α 散射实验所用 α 粒子的能量是7.7 MeV。 α 粒子的质量为 6.7×10^{-27} kg。所用 α 粒子的波长是多少?对原子的线度 10^{-10} m来说,这种 α 粒子能像卢瑟福做的那样按经典力学处理吗?(这要求 α 粒子的波长比原子的线度小得多。)

解 α 粒子的静能为

$$E_0 = mc^2 = 6.7 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 3.8 \times 10^4 \text{ MeV}$$

由于 $E \ll E_0$,所以可按经典力学求其动量,而其波长为

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 6.7 \times 10^{-27} \times 7.7 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}} = 5.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$

由于 $\lambda \ll 10^{-10}$ m,所以可以把 α 粒子当做经典粒子处理。

22.15 为了探测质子和中子的内部结构,曾在斯坦福直线加速器中用能量为22 GeV的电子做探测粒子轰击质子。这样的电子的德布罗意波长是多少?质子的线度为 10^{-15} m,这样的电子能用来探测质子内部的情况吗?

解 所用电子能量(22 GeV)大大超过电子的静能(0.51 MeV),所以需用相对论计算其动量, $p = E/c$ 。而其德布罗意波长为

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{22 \times 10^8 \times 1.6 \times 10^{-19}} = 5.7 \times 10^{-17} \text{ m}$$

由于 $\lambda \ll 10^{-15}$ m,所以这种电子可以给出质子内部各处的信息,可以用来探测质子内部的情况。

22.16 一个细胞的线度为 10^{-5} m,其中一粒子质量为 10^{-14} g。按一维无限深方势

阱计算, 这个粒子的 $n_1=100$ 和 $n_2=101$ 的能级和它们的差各是多大?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad E_1 &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n_1^2 = \frac{\pi^2 \times (1.05 \times 10^{-34})^2}{2 \times 10^{-17} \times 10^{-10}} \times 100^2 = 5.4 \times 10^{-37} \text{ J} \\ E_2 &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n_2^2 = \frac{\pi^2 \times (1.05 \times 10^{-34})^2}{2 \times 10^{-17} \times 10^{-10}} \times 101^2 = 5.5 \times 10^{-37} \text{ J} \\ \Delta E &= E_2 - E_1 = (5.5 - 5.4) \times 10^{-37} = 1 \times 10^{-38} \text{ J} \end{aligned}$$

22.17 一个氧分子被封闭在一个盒子内。按一维无限深方势阱计算, 并设势阱宽度为 10 cm。

(1) 该氧分子的基态能量是多大?

(2) 设该分子的能量等于 $T=300 \text{ K}$ 时的平均热运动能量 $\frac{3kT}{2}$, 相应的量子数 n 的值是多少? 这第 n 激发态和第 $n+1$ 激发态的能量差是多少?

解 氧分子的质量为

$$\begin{aligned} m &= \frac{32 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}} = 5.3 \times 10^{-26} \text{ kg} \\ (1) \quad E_1 &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} = \frac{\pi^2 \times (1.05 \times 10^{-34})^2}{2 \times 5.3 \times 10^{-26} \times 0.1^2} = 1.0 \times 10^{-40} \text{ J} \\ (2) \quad \frac{3}{2} kT &= E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 = E_1 n^2 \\ n &= \sqrt{\frac{3kT}{2E_1}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{2 \times 1.0 \times 10^{-40}}} = 7.8 \times 10^9 \\ \Delta E &= E_1 [(n+1)^2 - n^2] = E_1 (2n+1) \\ &= 1.0 \times 10^{-4} \times (2 \times 7.8 \times 10^9 + 1) = 1.6 \times 10^{-30} \text{ J} \end{aligned}$$

22.18 一维无限深方势阱中的粒子的波函数在边界处为零。这种定态物质波相当于两端固定的弦中的驻波, 因而势阱宽度 a 必须等于德布罗意波的半波长的整数倍。由此求出粒子能量的本征值为

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

解 在势阱中粒子德布罗意波长为

$$\lambda_n = \frac{2a}{n}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

粒子的动量

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{hn}{2a} = \frac{\pi \hbar n}{a}$$

其能量为

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$$

原子中的电子

23.1 内容提要

1. 氢原子：氢原子中的电子在库仑势场中运动，薛定谔方程和物理标准条件给出3个量子数：

主量子数 $n=1, 2, 3, \dots$

轨道量子数 $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$

轨道磁量子数 $m_l = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l-1, l$

主量子数 n 决定氢原子的能量

$$E_n = \frac{-m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{2(4\pi\epsilon_0)a_0} \frac{1}{n^2} = -13.6 \frac{1}{n^2} (\text{eV})$$

其中 $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2 = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$, 称为玻尔半径。

氢原子的能量决定于 n , 同一 n 值不同 l 的各量子态的能量相同, 这种状态称为能量的简并态。

轨道量子数 l 决定氢原子的角动量,

$$L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

轨道磁量子数决定轨道角动量沿一定方向, 如磁场方向的投影,

$$L_z = m_l \hbar$$

原子吸收或发出光子时其能量发生变化。光子能量和原子能量变化的关系为

$$h\nu = E_h - E_l$$

式中 E_h 和 E_l 是发射或吸收光子时原子的较高和较低能级的能量。

原子内电子的运动不能用轨道描述, 只能用波函数给出的概率密度描述, 形象化地用电子云图描绘。

径向概率密度 $P(r)$: 在半径为 r 到 $r + dr$ 的球壳薄层体积内电子出现的概率为 $P(r)dr$ 。

较复杂的原子,如钠原子的价电子的能级不但和 n 有关,还较小地和轨道量子数 l 有关。

2. 电子的自旋和自旋轨道耦合

电子自旋角动量是电子的内禀性质。它的大小是

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar$$

其中 s 是自旋量子数。它只有一个值—— $1/2$ 。

电子自旋在空间某一方向,如磁场方向的投影为

$$S_z = m_s \hbar$$

m_s 叫自旋磁量子数,只能取 $+1/2$ (向上)和 $-1/2$ (向下)两个值。

原子中一个电子的轨道角动量 L 和自旋角动量 S 合成(或说耦合)为总角动量 $J = L + S$, J 的大小为

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

其中 j 为总角动量量子数。除了在 $l=0$ 时, $j=s=\frac{1}{2}$ 外,对 l 的其他值,有 $j=l+\frac{1}{2}$ 和 $j=l-\frac{1}{2}$ 。

由于电子带有电量,所以伴随自旋,电子就有磁矩

$$\mu_s = -\frac{e}{m_e} S$$

它在 z 方向的投影为

$$\mu_{s,z} = m_s \hbar = \pm \frac{e \hbar}{2m_e} = \pm \mu_B$$

其中 $\mu_B = \frac{e \hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$, 叫玻尔磁子。

电子自旋在磁场中有两个取向,对应于两个能量

$$E_s = \pm \mu_B B$$

由于这一能量的存在,较复杂原子中电子的由 n, l 所决定的每个能级分裂为 2。这使得原子的光谱出现了精细结构,如钠黄线分成了两条频率很接近的两条谱线。

3. 多电子原子中电子的排布

每个电子的状态由 4 个量子数 n, l, m_l, m_s 确定。 n 相同的状态组成一个壳层,可容纳 $2n^2$ 个电子; l 相同的状态组成一个支壳层,可容纳 $2(2l+1)$ 个电子。

基态原子中电子排布遵守两个规律:

(1) **能量最低原理**,即电子总要进入最低的能级。一般地说, n 越大, l 越大,能量就

越高。

(2) **泡利不相容原理**, 即同一量子态(4个量子数的值都已确定)不可能有多于一个电子存在。

* 4. **X射线**: X射线谱有连续谱和线状谱之分。X射线光子能量比可见光光子能量大得多。

连续谱是入射高能电子与靶原子发生非弹性的但不改变靶原子的结构的情况下发出的X射线形成的(轫致辐射)。截止波长由入射电子的能量 E_k 决定:

$$\lambda_{\text{cut}} = hc/E_k$$

X射线线状谱为靶元素的**特征谱线**。它是当入射电子把靶原子的内层电子击出后, 较外层电子补入时向外发出的。X射线光子的能量等于两壳层能量之差, 所以它比可见光光子能量大得多。以 Z 表示靶元素的原子序数则这些元素的X射线的 K_α 谱线(它是电子从 $n=2$ 的 L 壳层补入 $n=1$ 的 K 壳层时发出的)的频率为

$$\sqrt{\nu_k} = 4.96 \times 10^7 (Z-1)$$

5. **激光**: 激光由原子的受激辐射产生, 还需要在发光材料中造成粒子数布居反转(即高能级上的粒子数大于低能级上的粒子数)状态。

由于受激辐射的特点, 激光是完全相干的。这时光强和原子数的平方成正比, 所以激光光强可以非常大。

激光器两端反射镜之间的距离控制其间驻波的波长, 加之工作稳定, 所以激光的频率很纯, 即单色性极高。

激光器两端的反射镜表面严格与管轴垂直, 使得沿轴输出的激光具有高度的指向性。

* 6. 分子的振动和转动能级

分子的振动能级

$$E_{\text{vib}} = \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

式中 ν 是**振动量子数**。振动能量一般为 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ eV 量级, 振动光谱在红外区。

分子的转动能级

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J(j+1) \hbar^2, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

式中 J 是分子的转动惯量, j 是分子转动量子数。转动能量约为 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ eV 的量级。转动光谱在远红外甚至微波范围。

23.2 解题思路

本章习题没有一般的思路。仍是要仔细审查每题的给定条件和要求, 应用正确的物理概念选择适当的公式求解。

23.3 思考题选答

23.9 1966 年用加速器“制成”了反氢原子,它是由一个反质子和围绕它运动的正电子组成。你认为它的光谱和氢原子的光谱会完全相同吗?

答 反质子和质子的质量一样,正电子和电子的质量一样。反氢原子和氢原子的不同,只是电荷的正负配置相反,核和核外带电粒子的相互作用应和氢原子一样。这样就应该具有同样能级分布,因而也就应有完全相同的光谱。

23.17 为什么在常温下,分子的转动状态可以通过加热而改变,因而分子转动和气体比热有关?为什么振动状态却是“冻结”着而不能改变,因而对气体比热无贡献?电子能级也是“冻结”着吗?

答 分子的转动能级差在 $10^{-3} \sim 10^{-4}$ eV 范围。这能量大约相当于温度为 10 K 的气体分子热运动平均能量。在高于 10 K 的温度下,吸热而使气体温度升高时,它的分子所具有的能量在碰撞过程中很容易改变分子的转动能量而被分子吸收。气体能吸收热量改变转动状态而升高温度,说明分子的转动和气体的比热有关。

分子中原子的振动能级差约在 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ eV 范围,这约相当于几百 K 温度下气体分子的平均热运动能量。因此在常温下分子的热运动能量不能改变分子的振动能量,在热运动中分子发生碰撞时分子就不会吸收热运动能量而改变振动状态。振动状态不能改变,就是振动能量“冻结”了。因此在常温下,分子的振动与气体比热无关。一般到温度为 10^3 K 或以上时,振动状态才会由于吸收热运动能量而改变,振动状态也才会对气体的比热有影响。

电子能级比振动能级差更大,因此,在几百 K 以下,气体分子的电子能级更会被“冻结”而不会影响气体的比热。

23.4 习题解答

23.1 求氢原子光谱莱曼系的最小波长和最大波长。

解 最小波长为

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{ch}{E_{\infty} - E_1} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{0 - (-13.6 \times 1.6 \times 10^{-19})} \\ &= 9.14 \times 10^{-8} \text{ m} = 91.4 \text{ nm}\end{aligned}$$

最大波长为

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{ch}{E_2 - E_1} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{(1/4 - 1) \times (-13.6 \times 1.6 \times 10^{-19})} \\ &= 1.22 \times 10^{-7} \text{ m} = 122 \text{ nm}\end{aligned}$$

23.2 一个被冷却到几乎静止的氢原子从 $n=5$ 的状态跃迁到基态时发出的光子的波长多大? 氢原子反冲的速率多大?

解 以 p 表示氢原子的反冲动量。对整个发射过程, 氢原子和光子能量守恒和动量守恒给出

$$\frac{p^2}{2m_{\text{H}}} + h\nu = E_5 - E_1$$

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

由此可得

$$h\nu \left(\frac{h\nu}{2m_{\text{H}}c^2} + 1 \right) = E_5 - E_1$$

由于 $h\nu$ 不超过 $|E_1| = 13.6 \text{ eV}$, 而 $m_{\text{H}}c^2 = 939 \text{ MeV}$, 所以 $m_{\text{H}}c^2 \gg h\nu$, 所以上式给出 $h\nu = E_5 - E_1$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{E_5 - E_1} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{(1/25 - 1) \times (-13.6 \times 1.6 \times 10^{-19})} \\ &= 0.952 \times 10^{-7} \text{ m} = 95.2 \text{ nm} \end{aligned}$$

而氢原子的反冲速率为

$$\begin{aligned} v &= \frac{p}{m_{\text{H}}} = \frac{h}{m_{\text{H}}\lambda} \\ &= \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1.67 \times 10^{-27} \times 0.952 \times 10^{-7}} = 4.17 \text{ m/s} \end{aligned}$$

23.3 证明: 氢原子的能级公式也可以写成

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \frac{1}{n^2}$$

或

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2}$$

证 由于 $a_0 = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2)$, 所以原能级公式

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{\hbar^2}{2m_e [4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2)]^2} \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

还有

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 [4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (m_e e^2)]} \frac{1}{n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \frac{1}{n^2}$$

23.4 证明 $n=1$ 时, 原书式(23.3)所给出的能量等于经典图像中电子围绕质子做半

径为 a_0 的圆周运动时的总能量。

证 经典图像中电子围绕质子做半径为 a_0 的圆周运动时的动能为 $E_k = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$ 而势能 $E_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$ 。两者相加得总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$$

23.5 1884 年瑞士的一所女子中学的教师巴耳末仔细研究氢原子光谱的各可见光谱线的“波数” $\bar{\nu}$ (即 $1/\lambda$)时,发现它们可以用下式表示

$$\bar{\nu} = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

其中 R 为一常量,叫里德伯常量。试由氢原子的能级公式求里德伯常量的表示式并求其值(现代光谱学给出的数值是 $R = 1.097\,373\,177(83) \times 10^7 \text{ m}^{-1}$)。

解 氢原子的能级公式为

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

氢原子的可见光谱是从 $n \geq 3$ 的态跃迁到 $n=2$ 的态时发的光形成的,根据频率条件可得各谱线的波数应为

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{\Delta E}{ch} = \frac{m_e e^4}{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 c} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

与题给巴耳末公式对比,可得

$$\begin{aligned} R &= \frac{m_e e^4}{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 c} \\ &= \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (1.60 \times 10^{-19})^4}{2\pi(4\pi \times 8.85 \times 10^{-12})^2 (1.05 \times 10^{-34})^3 \times 3.00 \times 10^8} \\ &= 1.11 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

23.6 电子偶素的原子是由一个电子和一个正电子围绕它们的共同质心转动形成的。设想这一系统的总角动量是量子化的,即 $L_n = n\hbar$ 。用经典理论计算这一原子的最小可能圆形轨道的半径多大? 当此原子从 $n=2$ 的轨道跃迁到 $n=1$ 的轨道上时,所发出的光子的频率多大?

解 设正负电子在与其质心相距为 r_n 的轨道上运动,则由经典理论得

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 (2r_n)^2} = m_e \frac{v_n^2}{r_n}$$

再利用角动量量子化条件

$$L_n = 2m_e v_n r_n = n\hbar$$

可得

$$\begin{aligned}
 r_n &= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2 \\
 r_{n,\min} &= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \times 1^2 \\
 &= \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2}{9 \times 10^9 \times 9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^2} \\
 &= 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}
 \end{aligned}$$

系统的能量为

$$\begin{aligned}
 E_n &= E_{k,n} + E_{p,n} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} m_e v_n^2 + \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2r_n} \right) \\
 &= -\frac{m_e e^4}{4(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}
 \end{aligned}$$

当原子从 $n=2$ 跃迁到 $n=1$ 轨道上时,发射光子的频率为

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{E_2 - E_1}{2\pi \hbar} = \frac{m_e e^4}{8\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \\
 &= \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (1.6 \times 10^{-19})^4 \times (9 \times 10^9)^2}{8\pi \times (1.05 \times 10^{-34})^3} \times \frac{3}{4} \\
 &= 1.25 \times 10^{15} \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

23.7 原则上讲,玻尔理论也适用于太阳系:太阳相当于核,万有引力相当于库仑电力,而行星相当于电子,其角动量是量子化的,即 $L_n = n\hbar$,而且其运动服从经典理论。

- (1) 求地球绕太阳运动的可能轨道的半径的公式;
- (2) 地球运行的轨道半径实际上是 $1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 。和此半径对应的量子数是多少?
- (3) 地球实际运行轨道和它的下一个较大的可能轨道的半径相差多少?

解 (1) 不考虑其他行星对地球的引力,则对地球的运动,由经典理论可得

$$G \frac{Mm}{R_n^2} = \frac{mv_n^2}{R_n}$$

由量子化条件

$$mv_n R_n = n\hbar$$

解此二式可得

$$R_n = \frac{\hbar^2}{GMm^2} n^2$$

$$(2) \quad n = \frac{\sqrt{GMm^2 R_n}}{\hbar}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5.98 \times 10^{24} \times \sqrt{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30} \times 1.50 \times 10^{11}}}{1.05 \times 10^{-34}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2.54 \times 10^{74} \\
 (3) \quad \Delta R &= R_{n+1} - R_n \\
 &= \frac{\hbar^2}{GMm^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2}{GMm^2} \times 2n \\
 &= \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2 \times 2 \times 2.54 \times 10^{74}}{6.67 \times 10^{-11} \times 1.99 \times 10^{30} \times (5.98 \times 10^{24})^2} \\
 &= 1.18 \times 10^{-63} \text{ m}
 \end{aligned}$$

23.8 由于自旋轨道耦合效应, 氢原子的 $2P_{3/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 的能级差为 $4.5 \times 10^{-5} \text{ eV}$ 。

(1) 求赖曼系的最小频率的两条精细结构谱线的频率差和波长差。

(2) 氢原子处于 $n=2, l=1$ 的状态时, 其中电子感受到的磁场多大?

解 (1) 由 $h\nu = E_{2p} - E_{1s}$

$$\begin{aligned}
 \Delta\nu &= \frac{\Delta E_{2p} - \Delta E_{1s}}{h} = \frac{\Delta E_{2p} - 0}{h} \\
 &= \frac{4.5 \times 10^{-5} \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.63 \times 10^{-34}} = 1.1 \times 10^{10} \text{ Hz} \\
 |\Delta\lambda| &= \left| \Delta\left(\frac{c}{\nu}\right) \right| = \frac{c}{\nu^2} \Delta\nu = \frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu \\
 &= \frac{(1.22 \times 10^{-7})^2}{3 \times 10^8} \times 1.1 \times 10^{10} \\
 &= 5.4 \times 10^{-13} \text{ m} = 0.54 \text{ pm}
 \end{aligned}$$

(2) 由 $\Delta E_{2p} = 2\mu_B B$, 可得

$$B = \frac{\Delta E_{2p}}{2\mu_B} = \frac{4.5 \times 10^{-5} \times 1.6 \times 10^{-19}}{2 \times 9.27 \times 10^{-24}} = 0.39 \text{ T}$$

23.9 证明: 在原子内

(1) n, l 相同的状态最多可容纳 $2(2l+1)$ 个电子。

(2) n 相同的状态最多可容纳 $2n^2$ 个电子。

证 (1) 由于 n, l 一定时, m_l 可取值为 $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, 共可取 $(2l+1)$ 个值。而每一 m_l 值又可有 $\pm 1/2$ 两个 m_s 值, 所以共有 $2(2l+1)$ 个状态, 根据泡利不相容原理, 就最多可容纳 $2(2l+1)$ 个电子。

(2) n 一定时, l 可取 $0, 1, 2, \dots, n-1$ 诸值。由上一项知, n 一定时最多可容纳的电子数为

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = \frac{2 + 2(2n-2+1)}{2} \times n = 2n^2$$

23.10 写出硼(B, $Z=5$), 氩(Ar, $Z=18$), 铜(Cu, $Z=29$), 溴(Br, $Z=35$) 等原子在基态时的电子排布式。

解 按“常规”从内到外排布为

$$\text{B: } 1s^2 2s^2 2p^1;$$

$$\text{Ar: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6;$$

$$\text{Cu: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1;$$

$$\text{Br: } 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5。$$

23.11 用能量为 30 keV 的电子产生的 X 射线的截止波长为 0.041 nm。试由此计算普朗克常量值。

解 由 $E_k = eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda_{\text{cut}}}$ 可得

$$\begin{aligned} h &= \frac{\lambda_{\text{cut}} eV}{c} \\ &= \frac{0.041 \times 10^{-9} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 30 \times 10^3}{3 \times 10^8} \\ &= 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

23.12 CO_2 激光器发出的激光波长为 $10.6 \mu\text{m}$ 。

(1) 和此波长相应的 CO_2 的能级差是多少?

(2) 温度为 300 K 时,处于热平衡的 CO_2 气体中在相应的高能级上的分子数是低能级上的分子数的百分之几?

* (3) 如果此激光器工作时其中 CO_2 分子在 高能级上的分子数比低能级上的分子数多 1%, 则和此粒子数布居反转对应的热力学温度是多少?

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \Delta E &= h\nu = \frac{ch}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{10.6 \times 10^{-6}} \\ &= 1.88 \times 10^{-20} \text{ J} = 0.117 \text{ eV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad N_2/N_1 &= \exp(-\Delta E/(kT)) \\ &= \exp\left(\frac{-1.88 \times 10^{-20}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300}\right) = 1.07\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad T' &= \frac{-\frac{hc}{\lambda k}}{\ln \frac{N_2}{N_1}} = \frac{-\frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{10.6 \times 10^{-6} \times 1.38 \times 10^{-23}}}{\ln \frac{1.01}{1}} = -1.37 \times 10^5 \text{ K} \end{aligned}$$

23.13 现今激光器可以产生的一个光脉冲的延续时间只有 10 fs ($1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s}$)。这样一个光脉冲中有几个波长? 设光波波长为 500 nm。

$$\text{解} \quad N = \frac{ct}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \times 10^{-15} \times 10}{500 \times 10^{-9}} = 6$$

23.14 一脉冲激光器发出的光的波长为 694.4 nm 的脉冲,延续时间为 12 ps, 能量为 0.150 J。求:

- (1) 该脉冲的长度;
 (2) 该脉冲的功率;
 (3) 一个脉冲中的光子数。

解 (1)
$$l = ct = 3 \times 10^8 \times 12 \times 10^{-12}$$
$$= 3.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 0.36 \text{ mm}$$

(2)
$$P = W/t = 0.150 / (12 \times 10^{-12}) = 1.25 \times 10^{10} \text{ W}$$
$$= 12.5 \text{ GW}$$

(3)
$$N = \frac{W}{h\nu} = \frac{W\lambda}{hc}$$
$$= \frac{0.150 \times 694.4 \times 10^{-9}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 5.2 \times 10^{17}$$

23.15 GaAlAs 半导体激光器的体积可小到 $200 \mu\text{m}^3 (= 2 \times 10^{-7} \text{ mm}^3)$, 但仍能以 5.0 mW 的功率连续发射波长为 $0.80 \mu\text{m}$ 的激光。这一小激光器每秒发射多少光子?

解
$$N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc}$$
$$= \frac{5.0 \times 10^{-3} \times 0.80 \times 10^{-6}}{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = 2.0 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

23.16 一氩离子激光器发射的激光束截面直径为 3.00 mm , 功率为 5.00 W , 波长为 515 nm 。使此束激光沿主轴方向射向一焦距为 3.50 cm 的凸透镜。透过后在一毛玻璃上聚焦, 形成一衍射中心亮斑。

- (1) 入射光束的平均强度多大?
 (2) 衍射中心亮斑的半径多大?
 (3) 衍射中心亮斑占有全部功率的 84% , 此中心亮斑的强度多大?

解 (1) 入射光束的平均强度为

$$I_0 = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{5.00}{\pi \times (1.5 \times 10^{-3})^2} = 7.07 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

(2) 衍射角为

$$\theta = \sin \theta = \frac{1.22\lambda}{d}$$

中央亮斑的半径为

$$R = \theta f = \frac{1.22\lambda f}{d} = \frac{1.22 \times 515 \times 10^{-9} \times 3.50 \times 10^{-2}}{3.00 \times 10^{-3}}$$
$$= 7.33 \times 10^{-6} \text{ m} = 7.33 \mu\text{m}$$

(3) 中心亮斑的强度为

$$I_F = \frac{P \times 84\%}{\pi R^2} = \frac{5.00 \times 0.84}{\pi \times (7.33 \times 10^{-6})^2} = 2.49 \times 10^{10} \text{ W/m}^2$$

固体中的电子

24.1 内容提要

1. 金属中自由电子的量子理论

在金属中可以移动的电子的德布罗意波长比离子的间距大得多时,这些电子可视为自由电子。

在 0 K 时金属中的自由电子可能具有的最高能量叫做费米能量,它的大小为

$$E_F = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e} n^{2/3}$$

费米能量一般是几个 eV 量级。按经典概念,与费米能量相应的金属的温度为 $T_F = E_F/k$,称为费米温度。一般金属的费米温度约为 10^4 K。相应的电子速率称费米速率 $v_F = \sqrt{2E_F/m_e}$ 。

在 0 K,自由电子占满 E_F 以下的所有量子态。常温下,由于泡利不相容原理,自由电子分布和 0 K 时基本相同,只是在 $E=E_F$ 处分布稍有改变。

由于电子热运动平均能量在高到 10^3 K 以内比费米能级小得多,根据泡利不相容原理,由于无规则热运动不可能改变绝大多数电子的状态,即电子不能吸收热能。因此在室温附近自由电子对金属比热贡献甚微。

2. 自由电子导电机制

由于在电场作用下,金属中所有自由电子都要受力而加速,一起改变能量,所以泡利不相容原理并不阻碍自由电子能量的共同增加,因而在金属内可以形成电子的定向运动进行导电。晶体缺陷产生电阻,速率达到费米速率的电子才能发生“倒逆”碰撞。电子平均自由程很大。

3. 能带、导体和绝缘体

N 个原子集聚成晶体时,孤立原子的每一个能态都分裂成 N 个能态,分裂程度随原子间距的减小而增大。在一定间距处同一能级分裂成的 N 个能级的间距很小。这 N 个能级就构成一个能带。

晶体中电子的最上面的而且其中有电子的能带叫价带,它上面相邻的那个空着的能带叫导带。能带间没有可能存在量子态的区域叫禁带。

价带未填满的晶体为导体。价带已填满而且它和其上导带间的宽度甚大的晶体为绝缘体。

4. 半导体

半导体在 0 K 时,价带为电子填满,导带空着,但价带和导带间的禁带宽度较小。在常温下就有电子可以跃入导带而导电。温度升高时,跃入导带的电子增多,这就使得半导体的电导率随温度的升高而明显增大。

除在导带中的电子导电外,在价带中的空穴也导电。纯硅和纯锗中的负载流子(电子)和正载流子(空穴)数目相等,称为本征半导体。

杂质半导体: 纯硅或纯锗(4 价)掺入 5 价原子(如磷,砷)成为 N 型半导体,其中多子是电子;纯硅或纯锗中掺入 3 价原子(如镓,铟)成为 P 型半导体,其中多子是空穴。

5. PN 结

P 型半导体和 N 型半导体相接处的薄层内由于电子和空穴向对方扩散而形成一无电荷的耗尽层,层内存在由 N 侧指向 P 侧的结电场。

PN 结与电源正向联接时,耗尽层变薄,电流畅通;反向联接时,耗尽层变厚,电阻增大,电流极小。因此,PN 结具有单向导电作用,可用作整流二极管。

24.2 解题思路

本章习题没有一般的思路可以介绍。需要仔细审读各题的已知和要求,根据正确的物理概念选择适当的公式求解。

24.3 思考题选答

24.8 根据霍尔效应测磁场时,用杂质半导体片比用金属片更为灵敏,为什么?

答 根据原书式(14.6)的霍尔电压公式

$$U_H = \frac{IB}{nqb}$$

可知,霍尔电压与载流子数密度 n 成反比。半导体的载流子数密度(典型的, 10^{22} m^{-3})比

金属的电子数密度(典型的, 10^{28} m^{-3})小得多,所以在其他条件相同时,用(杂质)半导体所得的霍尔电压大得多,测磁场就更为灵敏。

24.9 水平地放置一片矩形的 N 型半导体,使其长边沿东西方向,再自西向东通入电流。当在片上加以坚直向上的磁场时,片内霍尔电场的方向如何? 如果改用 P 型半导体片,而电流和磁场方向不变,片内霍尔电场的方向又如何?

答 如图 24.1(a)所示,当用 N 型半导体片时,通入向东的电流,其中电子向西运动。电子受到向南的洛伦兹力作用,将偏向南移动,使片的南边缘带负电,北边缘带正电。霍尔电场方向为由北向南。

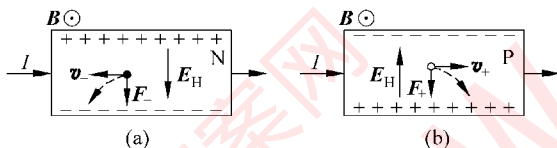


图 24.1 思考题 24.9 答用图

当用 P 型半导体时(图 24.1(b)),载流子应为带正电的空穴。同样用洛伦兹力分析,片的南边缘带正电,北边缘带负电。于是片中的霍尔电场方向就由南向北,与用 N 型半导体时正好相反。

24.4 习题解答

24.1 已知金的密度为 19.3 g/cm^3 , 计算金的费米能量、费米速度和费米温度。具有此费米能量的电子的德布罗意波长是多少?

解 以每一个原子贡献一个自由电子计,

$$\begin{aligned}
 E_F &= (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_e} n^{2/3} \\
 &= (3\pi^2)^{2/3} \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2}{2 \times 9.11 \times 10^{-31}} \left(\frac{19.3 \times 10^3 \times 6.02 \times 10^{23}}{197 \times 10^{-3}} \right)^{2/3} \\
 &= 8.80 \times 10^{-19} \text{ J} = 5.50 \text{ eV} \\
 v_F &= \sqrt{2E_F/m_e} = \sqrt{2 \times 8.80 \times 10^{-19} / (9.11 \times 10^{-31})} \\
 &= 1.39 \times 10^6 \text{ m/s} \\
 T_F &= E_F/k = 8.80 \times 10^{-19} / (1.38 \times 10^{-23}) \\
 &= 6.38 \times 10^4 \text{ K} \\
 \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e E_F}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 8.80 \times 10^{-19}}}
 \end{aligned}$$

$$= 5.24 \times 10^{-10} = 0.524 \text{ nm}$$

24.2 求 0 K 时单位体积内自由电子的总能量和每个电子的平均能量。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad E_{\text{total}} &= \int_0^{E_F} E g(E) dE = \int_0^{E_F} E \frac{(2m_e)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} E^{1/2} dE \\ &= \frac{1}{5} (2m_e)^{3/2} \frac{E_F^{5/2}}{\pi^2 \hbar^3} = \frac{3}{5} n E_F \end{aligned}$$

每个电子的平均能量为

$$\bar{E} = E_{\text{total}}/n = 3E_F/5$$

24.3 中子星由费米中子气组成。典型的中子星密度为 $5 \times 10^{16} \text{ kg/m}^3$ 。试求中子星中子的费米能量和费米速率。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad E_F &= (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_n} n^{2/3} \\ &= (3\pi^2)^{2/3} \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2}{2 \times 1.67 \times 10^{-27}} \times \left(\frac{5 \times 10^{16}}{1.67 \times 10^{-27}} \right)^{2/3} \\ &= 30.5 \times 10^{-13} \text{ J} = 19 \text{ MeV} \\ v_F &= \sqrt{2E_F/m_n} = \sqrt{2 \times 30.5 \times 10^{-13} / (1.67 \times 10^{-27})} \\ &= 6.0 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

24.4 银的密度为 $10.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 电阻率为 $1.6 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ (在室温下)。

- (1) 求其中自由电子的自由飞行时间。
- (2) 求自由电子的经典平均自由程。
- (3) 用费米速率求平均自由程。
- (4) 估算点阵离子间距并和(2)、(3)求出的平均自由程对比。

解 (1) 由于 $\rho = m_e / (ne^2 \tau)$, 而银的自由电子密度为 $n = DN_A / M_{\text{Ag}} = 10.5 \times 10^3 \times 6.023 \times 10^{23} / (108 \times 10^{-3}) = 5.86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$, 所以

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{m_e}{\rho n e^2} = \frac{9.11 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-8} \times 5.86 \times 10^{28} \times (1.6 \times 10^{-19})^2} \\ &= 3.8 \times 10^{-14} \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \bar{\lambda}_{\text{cla}} &= \bar{v} \tau = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}} \tau \\ &= \sqrt{\frac{8 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{\pi \times 9.11 \times 10^{-31}}} \times 3.8 \times 10^{-14} \\ &= 4.09 \times 10^{-9} \text{ m} = 4.09 \text{ nm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \bar{\lambda}_{\text{Fer}} &= v_F \tau = 1.39 \times 10^6 \times 3.8 \times 10^{-14} \\ &= 5.3 \times 10^{-8} \text{ m} = 53 \text{ nm} \end{aligned}$$

$$(4) \quad a = \sqrt[3]{1/n} = (5.86 \times 10^{28})^{-1/3} = 2.6 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.26 \text{ nm}$$

24.5 金刚石的禁带宽度按 5.5 eV 计算。

(1) 禁带上缘和下缘的能级上的电子数的比是多少？设温度为 300 K。

(2) 使电子越过禁带上升到导带需要的光子的最大波长是多少？

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \frac{N_{\text{up}}}{N_{\text{be}}} &= e^{-\Delta E/(kT)} = e^{-5.5 \times 1.6 \times 10^{-19} / (1.38 \times 10^{-23} \times 300)} \\ &= 4.9 \times 10^{-93} \end{aligned}$$

这一结果说明，实际上金刚石的空带就是空的。

$$\begin{aligned} (2) \quad \lambda_{\text{max}} &= \frac{ch}{\Delta E} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{5.5 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 2.26 \times 10^{-7} \text{ m} = 226 \text{ nm} \end{aligned}$$

24.6 纯硅晶体中自由电子数密度 n_0 约为 10^{16} m^{-3} 。如果要用掺磷的方法使其自由电子数密度增大 10^6 倍，则(1)多大比例的硅原子应被磷原子取代？已知硅的密度为 2.33 g/cm^3 。(2) 1.0 g 硅这样掺磷需要多少磷？

解 (1) 掺磷后的自由电子数密度应增加

$$\Delta n = 10^6 n_0 - n_0 = 10^6 n_0 = 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

所以每立方米应掺 10^{22} 个磷原子，即要取代 10^{22} 个硅原子。1 m^3 硅原子数为

$$n_{\text{Si}} = \frac{D_{\text{Si}}}{M_{\text{Si}}} N_A = \frac{2.33 \times 10^3}{28.1 \times 10^{-3}} \times 6.02 \times 10^{23} = 5.00 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

需要取代的硅原子的比例为

$$\frac{\Delta n}{n_{\text{Si}}} = \frac{10^{22}}{5.00 \times 10^{28}} = \frac{1}{5 \times 10^6}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad m_{\text{P}} &= \frac{m_{\text{Si}} \Delta n}{D_{\text{Si}} N_A} M_{\text{P}} = \frac{10^{-3} \times 10^{22} \times 31 \times 10^{-3}}{2.33 \times 10^{-3} \times 6.023 \times 10^{23}} \\ &= 2.2 \times 10^{-10} \text{ kg} = 0.22 \text{ } \mu\text{g} \end{aligned}$$

24.7 硅晶体的禁带宽度为 1.2 eV。适量掺入磷后，施主能级和硅的导带底的能级差为 $\Delta E_D = 0.045 \text{ eV}$ 。试计算此掺杂半导体能吸收的光子的最大波长。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lambda_{\text{max}} &= \frac{ch}{\Delta E_D} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{0.045 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 2.76 \times 10^{-5} \text{ m} = 27.6 \text{ } \mu\text{m} \end{aligned}$$

24.8 已知 CdS 和 PbS 的禁带宽度分别为 2.42 eV 和 0.30 eV。它们的光电导的吸收限波长各多大？各在什么波段？

解 对 CdS，

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \frac{ch}{\Delta E_g} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{2.42 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 5.13 \times 10^{-7} \text{ m} = 513 \text{ nm}\end{aligned}$$

在可见光波段。而对 PbS,

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \frac{ch}{\Delta E_g} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{0.30 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 4.14 \text{ } \mu\text{m}\end{aligned}$$

在红外波段。

24.9 Ga-As-P 半导体发光二极管的禁带宽度是 1.9 eV。它能发出的光的最大波长是多少?

解

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= \frac{ch}{\Delta E_g} = \frac{3 \times 10^8 \times 6.63 \times 10^{-34}}{1.9 \times 1.6 \times 10^{-19}} \\ &= 6.54 \times 10^{-7} \text{ m} = 654 \text{ nm}\end{aligned}$$

24.10 KCl 晶体在已填满的价带之上有一个 7.6 eV 的禁带。对波长为 140 nm 的光来说,此晶体是透明的还是不透明的?

解 波长为 140 nm 的光子能量为

$$\begin{aligned}E &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{140 \times 10^{-9}} \\ &= 14.2 \times 10^{-19} \text{ J} = 8.9 \text{ eV}\end{aligned}$$

此等光子可以被 KCl 晶体吸收,使晶体不透明。

核 物 理

25.1 内容提要

1. 核的一般性质

核由质子和中子组成,二者统称核子(核中没有电子)。中子数 N 和质子数 Z 之和为核的质量数 A 。 A 是和核的质量以原子质量单位 u 表示的数值最接近的整数($1 u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.5 \text{ MeV}/c^2$)。

核的半径

$$R = r_0 A^{1/3}, \quad r_0 = 1.2 \text{ fm}$$

由 R 可得核的体积和 A , 即其中核子总数成正比。这暗示核是由单个核子密集在一起构成的。

核的密度

$$\rho = 2.3 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$$

核有自旋和磁矩,其大小也都是量子化的。

2. 核力: 指将核子聚集在一起的核子之间的作用力。这种力的特点是: 强而力程短,与电荷无关,与核子的自旋取向有关,是一种多体力,不服从叠加原理。核力实际上是核子内部的夸克之间的色相互作用的残余力。

3. 核的结合能: 核的结合能是使其中核子完全分离所需要做的功,也就是其核子由完全分离状态结合成一个核时所释放的能量。它可以由所有核子组成核时的质量亏损乘以 c^2 得出。核子数大于 20 的核的平均结合能(即总结合能除以总核子数)都约为 8 MeV。平均结合能大致相等也表示核是由单个核子密集在一起构成的。

平均结合能以中等核的最大,重核的较小,是裂变释放原子核能的基础。轻核,如 ${}^2\text{H}$, ${}^3\text{H}$ 的平均结合能小于较重的核,如 ${}^4\text{He}$ 核,是聚变释放原子核能的基础。

* 4. 核的液滴模型——核子组成的核可以用水分子组成的液滴作为模型,这个模型能比较好地说明原子核能的释放。

5. 放射性和衰变规律

放射性元素衰变放出粒子完全是概率事件。因而有下述规律

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau}$$

其中 N_0 为开始时样品中的核数, N 为经过时间 t 后尚存的核数, λ 为衰变常量, $\tau=1/\lambda$ 为核的平均寿命。核的半衰期为

$$t_{1/2} = 0.693 \tau$$

单位时间内放射性样品的衰变次数称为该样品的活度。以 A_0 表示 $t=0$ 时样品的活度。经过时间 t 后,样品的活度为

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

活度的单位有 $\text{Bq}(\text{s}^{-1})$ 和居里(Ci),

$$1 \text{ Ci} = 3.70 \times 10^{10} \text{ Bq}$$

6. 三种衰变和三种衰变放射出的粒子

α 衰变是 α 粒子隧穿库仑势垒的过程。逸出的 α 粒子的能量越大,该物质的半衰期越短。

β 衰变包括正、负电子由核射出及核对电子的捕获。它都是核内质子和中子相互转变的结果。

γ 衰变是指核发出 γ 射线。这是因为进行 α 衰变或 β 衰变后,核常处于激发态。它回到稳定的基态时就发出 γ 射线。

7. 核反应: 常指入射粒子进入靶核引起变化的过程。

以 Q 值表示核反应释放的能量。放能反应的 $Q>0$, 吸能反应的 $Q<0$ 。

能引发吸能反应的入射粒子的最小能量称为该反应的阈能 E_{th} , $E_{th} > |Q|$ 。

25.2 解题思路

本章习题一类是利用质量亏损计算能量。要注意两个问题,一是写反应方程应注意电荷守恒和粒子数守恒;再者是要利用核的质量,用原子的质量代替它的核的质量代入计算时,要注意二者之差为核外电子的总质量。

另一类习题是用衰变规律进行计算,这时要注意半衰期和活度的概念。

25.3 思考题选答

25.3 为什么核的由核子间强相互作用决定的结合能和核子数成正比?

答 核的结合能和其中核子数成正比就是说核的平均结合能大致相等。这一事实是

强力的短程性的直接后果。由于一个核子只和与它紧靠的其他核子有相互作用,而在 $A > 20$ 时核内和一个核紧靠的粒子数也基本不变了,所以每一个粒子的结合能也就基本不变了。这就导致了核的结合能和其中的核子数成正比的结果。

25.6 为什么实现吸能核反应的阈能大于该反应的 Q 值的大小? 利用对撞机为什么能大大提高引发核反应的能量利用率?

答 在实验室参考系中,如果靶核是静止的,则入射粒子的总能量等于它和靶核的质心动能和它们在其质心参考系中的动能之和。由于只有它们在其质心参考系中的动能(即内动能)才能提供核反应的能量,而它们的质心动能由于动量守恒而不会改变,所以阈能,也就是入射粒子引发核反应的总能量大于该核反应的 Q 值的大小。

在正反粒子对撞机内,即在实验室参考系内,相互碰撞的正反粒子的质心是静止的,因此质心的动能(即轨道动能)为零,它们的总能量都是两粒子在其质心系中的动能,因而都可以用来引发核反应,所以就能大大提高了能量的利用率。

25.4 习题解答

25.1 一个能量为 6 MeV 的 α 粒子和静止的金核(^{197}Au)发生正碰,它能到达离金核的最近距离是多少? 如果是氮核(^{14}N)呢? 都可以忽略靶核的反冲吗? 此 α 粒子可以到达氮核的核力范围之内吗?

解 由于 6 MeV 比 α 粒子的静能(约 $4 \times 10^3 \text{ MeV}$)小得多,可知 6 MeV 为 α 粒子的动能 E_{ka} 。以 M 表示靶核的质量,则由动量守恒和能量守恒可得

$$E_{\text{ka}} = E'_{\text{ka}} + E'_{\text{KM}} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}} = \frac{1}{2}(m_{\alpha} + M)v'^2 + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}$$

$$m_{\alpha}v = (m_{\alpha} + M)v'$$

此二式给出

$$E_{\text{ka}} = \frac{m_{\alpha}}{m_{\alpha} + M}E_{\text{ka}} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\min}}$$

$$r_{\min} = \frac{m_{\alpha} + M}{ME_{\text{ka}}} \times \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

对金核, $M = 197 \gg m_{\alpha}$, 可忽略金核的反冲, 有

$$r_{\min} = \frac{2Ze^2}{E_{\text{ka}} 4\pi\epsilon_0} = \frac{2 \times 79 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 9 \times 10^9}{6 \times 10^6}$$

$$= 3.8 \times 10^{-14} \text{ m}$$

对氮核, $M = 14$, 不可忽略氮核的反冲, 有

$$r_{\min} = \frac{4 + 14}{14E_{\text{ka}}} \times \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{18 \times 7 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 9 \times 10^9}{7 \times 6 \times 10^6}$$

$$= 4.32 \times 10^{-15} \text{ m}$$

氮核半径为

$$r_N = 1.2 \times A^{1/3} \times 10^{-15} = 2.89 \times 10^{-15} \text{ m}$$

所以还不能说 6 MeV 可到达氮核的核力范围之内。

25.2 ^{16}N , ^{16}O 和 ^{16}F 原子的质量分别是 16.006 099 u, 15.994 915 u 和 16.011 465 u。试计算这些原子的核的结合能。

解 每种原子核的结合能为

$$BE = \Delta Mc^2 = [Zm_p + Nm_n - (M - Zm_e)]c^2$$

将各种原子数据代入可得

$$^{16}\text{N}: \quad BE = 118.0 \text{ MeV}$$

$$^{16}\text{O}: \quad BE = 127.7 \text{ MeV}$$

$$^{16}\text{F}: \quad BE = 111.5 \text{ MeV}$$

25.3 求原子序数为 Z 和质量数为 A 的核内的质子的费米能量(原书式(24.5))和每个质子的平均能量。对 ^{56}Fe 和 ^{238}U 核求这些能量的数值(以 MeV 为单位)。

解 质子的费米能量为

$$\begin{aligned} E_F &= (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_p} n_p^{2/3} = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m_p} \left(\frac{Z \times 3}{4\pi R_0^3 A} \right)^{2/3} \\ &= \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \times \frac{\hbar^2}{2m_p R_0^2} \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3} \\ &= \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \times \frac{1.05 \times 10^{-34}}{2 \times 1.67 \times 10^{-27} \times (1.2 \times 10^{-15})^2 \times 1.6 \times 10^{-13}} \times \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3} \\ &= 53 \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3} \text{ MeV} \end{aligned}$$

每个质子的平均能量为

$$E_{F,1} = \frac{3}{5} E_F = 32 \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3} \text{ MeV}$$

对 ^{25}Fe 核,

$$Z=26, \quad A=56, \quad E_F=32 \text{ MeV}, \quad E_{F,1}=19 \text{ MeV}$$

对 ^{238}U 核,

$$Z=92, \quad A=238, \quad E_F=28 \text{ MeV}, \quad E_{F,1}=17 \text{ MeV}$$

*** 25.4** 假设一个 ^{232}Th 核分裂成相等的两块。试用结合能的半经验公式计算此反应所释放的能量。

解

$$Z=90, \quad A=232$$

$$E = 2BE_{A/2, Z/2} - BE_{A, Z}$$

$$= \left(-4.6A^{2/3} + 0.26 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \right) = 169 \text{ MeV}$$

25.5 天然钾中放射性同位素 ^{40}K 的丰度为 1.2×10^{-4} 。此种同位素的半衰期为 $1.3 \times 10^9 \text{ a}$ 。钾是活细胞的必要成分,约占人体重量的 0.37% 。求每个人体内这种放射源的活度。

解 人体重按 70 kg 计,所求活度为

$$\begin{aligned} A &= \lambda N = \frac{0.693}{t_{1/2}} \frac{mN_A}{M} \\ &= \frac{0.693}{1.3 \times 10^9 \times 3.15 \times 10^7} \times \frac{70 \times 0.0037}{39.1 \times 10^{-3}} \\ &\quad \times 1.2 \times 10^{-4} \times 6.02 \times 10^{23} \\ &= 8.1 \text{ kBq} \end{aligned}$$

25.6 一个病人服用 $30 \mu\text{Ci}$ 的放射性碘 ^{123}I 后 24 小时,测得其甲状腺部位的活度为 $4 \mu\text{Ci}$ 。已知 ^{123}I 的半衰期为 13.1 h 。求在这 24 小时内多大比例的被服用的 ^{123}I 集聚在甲状腺部位了(一般正常人此比例约为 15% 到 40%)。

解 原来总活度 $A_0 = 30 \mu\text{Ci}$,集中到甲状腺的活度 $A_{0,\text{th}} = A_0 p$ 。 24 小时后,甲状腺部位的活度为

$$4\mu = A_{\text{th}} = A_{0,\text{th}} e^{-\lambda t} = A_0 p e^{-\lambda t} = 30\mu p e^{\frac{-0.693 \times 24}{13.1}}$$

解此式可得所求比例为

$$p = 0.48 = 48\%$$

25.7 向一人静脉注射含有放射性 ^{24}Na 而活度为 300 kBq 的食盐水。 10 小时后他的血的每立方厘米的活度是 30 Bq 。求此人全身血液的总体积。已知 ^{24}Na 的半衰期为 14.97 h 。

解 由

$$A_1 V = A_0 e^{-\lambda t}$$

可得

$$V = \frac{A_0}{A_1} e^{-\lambda t} = \frac{300 \times 10^3}{30} e^{\frac{-0.693 \times 10}{14.97}} = 6.29 \times 10^3 \text{ cm}^3 = 6.29 \text{ L}$$

25.8 一年龄待测的古木片在纯氧氛围中燃烧后收集了 0.3 mol 的 CO_2 。此样品由于 ^{14}C 衰变而产生的总活度测得为每分钟 9 次计数。试由此确定古木片的年龄。

解

$$N_0 = 0.3 \times 1.3 \times 10^{-12} \times 6.02 \times 10^{23} = 2.35 \times 10^{11}$$

$$A = 9/60 \text{ s}^{-1}, \quad \tau = 8270 \times 3.15 \times 10^7 \text{ s}$$

由于

$$A = A_0 e^{-t/\tau} = \frac{1}{\tau} N_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = \tau \ln \frac{N_0}{A} = 8270 \times \ln \frac{2.35 \times 10^{11} \times 60}{8270 \times 3.15 \times 10^7 \times 9} = 1.5 \times 10^4 \text{ a}$$

25.9 一块岩石样品中含有 0.3 g 的 ^{238}U 和 0.12 g 的 ^{206}Pb 。假设这些铅全来自 ^{238}U 的衰变,试求这块岩石的地质年龄。

解 由于从 ^{238}U 到 ^{206}Pb 的中间衰变产物的半衰期都比 ^{238}U 半衰期小得多,而 ^{206}Pb 是稳定的,所以可以忽略中间产物的质量而认为目前 ^{238}U 和 ^{206}Pb 两种核的总数就等于最初 ^{238}U 核的数目。即

$$\begin{aligned} N_{\text{U},0} &= N_{\text{U}} + N_{\text{Pb}} = \frac{0.3 \times 6.02 \times 10^{23}}{238} + \frac{0.12 \times 6.02 \times 10^{23}}{206} \\ &= 7.59 \times 10^{20} + 3.51 \times 10^{20} = 1.11 \times 10^{21} \end{aligned}$$

由 $N_{\text{U}} = N_{\text{U},0} e^{-\lambda t}$ 可得

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_{\text{U},0}}{N_{\text{U}}} = \frac{4.46 \times 10^9}{0.693} \ln \frac{1.11 \times 10^{21}}{7.59 \times 10^{20}} = 2.45 \times 10^9 \text{ a}$$

25.10 ^{226}Ra 放射的 α 粒子的动能为 4.7825 MeV。求子核的反冲能量。此 α 衰变放出的总能量是多少?

解 由于 4.7825 MeV 比 α 粒子的静能(约 $4 \times 10^3 \text{ MeV}$)小得多,所以此题可以用经典力学计算。以 m_{α} 和 M_{d} 分别表示 α 粒子和子核的质量,则动量守恒给出

$$m_{\alpha} v_{\alpha} = M_{\text{d}} v_{\text{d}}$$

子核反冲能量为

$$\begin{aligned} E_{\text{kd}} &= \frac{1}{2} M_{\text{d}} v_{\text{d}}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_{\alpha}^2 v_{\alpha}^2}{M_{\text{d}}} = \frac{m_{\alpha}}{M_{\text{d}}} E_{\text{ka}} \\ &= \frac{4}{222} \times 4.7825 = 0.0862 \text{ MeV} \end{aligned}$$

此 α 衰变放出的能量为

$$E = E_{\text{ka}} + E_{\text{kd}} = 4.7825 + 0.0862 = 4.8707 \text{ MeV}$$

25.11 计算下列反应的 Q 值并指出何者吸热,何者放热:

$$^{13}\text{C}(p, \alpha)^{10}\text{B}, \quad ^{13}\text{C}(p, d)^{12}\text{C}, \quad ^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$$

解 对 $^{13}\text{C}(p, \alpha)^{10}\text{B}$ 反应

$$\begin{aligned} Q &= (13.003\,355 + 1.007\,825 - 4.002\,603 - 10.012\,937) \times 931.5 \\ &= -4.06 \text{ MeV} \end{aligned}$$

为吸热反应。

对 $^{13}\text{C}(p, d)^{12}\text{C}$ 反应

$$\begin{aligned} Q &= (13.003\,355 + 1.007\,825 - 2.014\,102 - 12.0000) \times 931.5 \\ &= -2.72 \text{ MeV} \end{aligned}$$

为吸热反应。

对 $^{13}\text{C}(p, \gamma)^{14}\text{N}$ 反应

$$Q = (13.003\,355 + 1.007\,825 - 14.003\,074) \times 931.5 \\ = 7.55 \text{ MeV}$$

为放热反应。

25.12 计算反应 $^{13}\text{C}(p, \alpha)^{10}\text{B}$ 的阈能, 注意, 入射质子必须具有足够大的能量以便进入靶核 ^{13}C 的半径以内(原子质量数据见 25.11 题)。

解 如果没有库仑势垒, 题给反应的阈能为

$$E_1 = Q \left(1 + \frac{m_p}{m_C} \right) = 4.06 \times \left(1 + \frac{1}{13} \right) = 4.37 \text{ MeV}$$

质子克服库仑斥力到达 ^{13}C 核边缘, 二者中心的距离为

$$r = r_c + r_p = r_0 A_c^{1/3} + r_0 \\ = 1.2 \times 10^{-15} (13^{1/3} + 1) = 4.0 \times 10^{-15} \text{ m}$$

质子到达此距离需要能量为

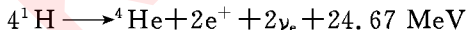
$$E_2 = \frac{6e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{m_p}{m_C} \right) \\ = \frac{6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 9 \times 10^9}{4.0 \times 10^{-15} \times 10^6} \left(1 + \frac{1}{13} \right) = 2.3 \text{ MeV}$$

题给反应所需阈能为

$$E_{\text{th}} = E_1 + E_2 = 4.37 + 2.3 = 6.7 \text{ MeV}$$

25.13 目前太阳内含有约 $1.5 \times 10^{30} \text{ kg}$ 的氢, 而其辐射总功率为 $3.9 \times 10^{26} \text{ W}$ 。按此功率辐射下去, 经多长时间太阳内的氢就烧光了?

解 太阳内氢燃烧的反应是



太阳内的氢原子数

$$N = 1.5 \times 10^{30} / (1.67 \times 10^{-27}) = 0.90 \times 10^{57}$$

这些氢原子全烧尽需要时间为

$$t = \frac{0.90 \times 10^{57} \times 24.67 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{4 \times 3.9 \times 10^{26}} \\ = 2.28 \times 10^{18} \text{ s} = 7.2 \times 10^{10} \text{ a}$$

25.14 在温度比太阳高的恒星内氢的燃烧据信是通过碳循环进行的, 其分过程如下:





(1) 说明此循环并不消耗碳,其总效果和质子-质子循环一样。

(2) 计算此循环中每一反应或衰变所释放的能量。

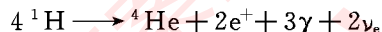
(3) 释放的总能量是多少?

给定一些原子的质量为

$${}^1\text{H}: 1.007\,825\text{u} \quad {}^{13}\text{N}: 13.005\,738\text{u} \quad {}^{14}\text{N}: 14.003\,074\text{u}$$

$${}^{15}\text{N}: 15.000\,109\text{u} \quad {}^{13}\text{C}: 13.003\,355\text{u} \quad {}^{15}\text{O}: 15.003\,065\text{u}$$

解 (1) 将题给碳循环各过程反应方程相加,即可知碳原子收支相抵并未消耗,而总过程为



和质子-质子循环是一样的。

(2) 题中所列各分过程所释放的能量分别为

$$\begin{aligned} E_1 &= (1.007\,825 + 12.000\,000 - 13.005\,738) \times 931.5 \\ &= 1.944\,\text{MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= (13.005\,738 - 13.003\,355) \times 931.5 - 2 \times 0.511 \\ &= 1.198\,\text{MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3 &= (1.007\,825 + 13.003\,355 - 14.003\,074) \times 931.5 \\ &= 7.551\,\text{MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_4 &= (1.007\,825 + 14.003\,074 - 15.003\,065) \times 931.5 \\ &= 7.297\,\text{MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_5 &= (15.003\,065 - 15.000\,109) \times 931.5 - 2 \times 0.511 \\ &= 1.732\,\text{MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_6 &= (1.007\,825 + 15.000\,109 - 12.000\,000 - 4.002\,603) \times 931.5 \\ &= 4.966\,\text{MeV} \end{aligned}$$

(3) 释放的总能量为

$$E = \sum_{i=1}^6 E_i = 24.69\,\text{MeV}$$