中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（乙）

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题(本题满分 40 分，每小题 5 分。请从每个题目所列的四个选项中选择一个适合放在空格中的项，并将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。)

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且导函数连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+2}{3x-\sin x}=1$，则 $f'(0)=($　　　　$)$。

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）-2

(2) 已知 $f(\pi)=2$，$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=5$，则 $f(0)=($　　　$)$。

（A）2　　（B）3　　（C）4　　（D）5

(3) $\int\dfrac{x+2}{x(x+1)^2}dx=($　　　$)$。

(A) $\ln\left|\dfrac{x}{1+x}\right|+\dfrac{1}{x+1}+C$　　(B) $\ln\dfrac{x^2}{|x+1|}+\dfrac{1}{x+1}+C$

(C) $\ln\left|\dfrac{x}{1+x}\right|+\dfrac{2}{x+1}+C$　　(D) $\ln\dfrac{x^2}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{x+1}+C$

(4) 设函数 $F(x,y)$ 关于 x 和 y 有一阶偏导数，且 $F_x(0,0)=1$，$F_y(0,0)=2$，令 $z=F(u-v,ve^u),\ u=\arctan t,\ v=\sin t$，则 $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0}=($　　　$)$。

(A) 1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) -1

(5) 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0\ (x_0\neq 0)$ 则（　　　）。

（A）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　（B）$(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

（C）$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　（D）$f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值

(6) 设闭曲线L：$x^2+(y+1)^2=2$取逆时针方向，则曲线积分$\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+(y+1)^2}$（　　）。

（A）π　　（B）2π　　（C）π^2　　（D）$2\pi^2$

(7) 使得积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}dx(\alpha>0)$收敛的$\alpha$的最大取值范围是（　　）。

（A）$0<\alpha<2$　　（B）$0<\alpha<1$　　（C）$\alpha\ge 2$　　（D）$\alpha\ge 1$

(8) 下列级数收敛的是（　　）。

（A）$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$　　（B）$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\cdots$

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{n})^n$

二、**(本题满分 10 分)** 求微分方程$y''+2y'+2y=4t^2$的通解。

三、**(本题满分 10 分)** 设$D=\{(x,y)|\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2\le 2x\}$，计算二重积分$\iint_D xydxdy$。

四、**(本题满分 10 分)** 设在三维空间中某平面满足：（1）与xy坐标平面垂直，（2）过z轴，（3）与$(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=1$相切，求该平面的方程。

五、**(本题满分 10 分)** 设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，其中$a_n$满足$\frac{1}{a_n+1}=n$。求$\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx$。

六、**(本题满分 10 分)** 计算曲线积分$I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$，其中曲线$L$是定义域内第一象限（含坐标轴）中从点$(2,0)$到$(0,2)$的分段光滑曲线。

七、**(本题满分 10 分)** 设曲面为$\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,z=x^2+y^2(0\le z\le 1)\}$的外侧，求曲面积分$\iint_\Sigma x^2dydz$。

八、**(本题满分 10 分)** 求曲面$xyz=1$上在第一卦限内，距离坐标原点最近的点处的切平面方程。

九、**(本题满分 10 分)** 求微分方程$yy''-(y')^2=y^2\ln y$的通解。

十、**(本题满分 10 分)** 设函数$f(x)$在区间$[A,B]$上连续但不一定可导，$A<a<b<B$。证明：$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx=f(b)-f(a)$。

十一、(本题满分 10 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上有二阶导数。证明：存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f(b)=f''(c)\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$。

十二、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)dx=0$，$\int_a^b xf(x)dx=0$。证明：在 (a,b) 上至少有两点 x_1,x_2，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$。