中国科学院大学
2013年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（乙）

考生须知：

1．本试卷满分为150分，全部考试时间总计180分钟。

2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题（本题满分40分，每小题5分。请从题目所列的选项中选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。）

（1）下列极限中不为0的是（　　　　　）。

（A）$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n!}$　　　　（B）$\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\dfrac{1}{n}\ln(1+\dfrac{1}{n})$

（C）$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\cdot\arctan\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　　　（D）$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}$

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\tan x}{1+\cos 4x}=$（　　　　　）。

（A）0　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）1　　（D）2

（3）　以下关于函数 $y=1+\dfrac{6x}{(x+3)^2}$ 的叙述正确的是（　　　　　）。

（A）函数图像有唯一渐近线

（B）函数在 $(-3,3)$ 上是单调减的

（C）函数图像没有拐点

（D）$\dfrac{3}{2}$ 是函数最大值

（4）　设 L 是由曲线 $y+x=1(0\le x\le 1)$，$y-x=1(-1\le x\le 0)$ 和 $y=0(-1\le x\le 1)$ 依次连接构成的曲线，方向为逆时针。则曲线积分 $\int_L (x^2-y^2)dx+2xydy=$（　　　　　）。

（A）0　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{4}{3}$　　（D）$\dfrac{8}{3}$

（5）设函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}, x\in(-1,1)$，则 $f'(x)=$（　　　　　）。

（A）$\frac{-2x}{1-x^2}$　　（B）$\frac{2x}{1-x^2}$　　（C）$\frac{-2x}{1+x^2}$　　（D）$\frac{2x}{1+x^2}$

（6）设 $f(x)$ 是定义在整个实轴 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，下列说法正确的是（　　　　　）。

（A）　若 $f(x)$ 是一个偶函数，则它的原函数是一个奇函数

（B）　若 $f(x)$ 是一个奇函数，则它的原函数是一个偶函数

（C）　若 $f(x)$ 是一个周期函数，则它的原函数也是一个周期函数

（D）　若 $f(x)$ 是一个单调函数，则它的原函数也是一个单调函数

（7）设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 上包含原点的一个区域，$f(x,y)$ 是定义在 D 上的连续函数。如果极限

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{1+f(x,y)}{1+f^2(x,y)}\right)$ 存在且有限，则 $f(0,0)=$（　　　　）。

（A）-1　　（B）0　　（C）1　　（D）2

（8）过点 $(0,1,0)$，并且与 $(1,0,0)$，$(1,1,0)$，$(-1,0,2)$ 所确定的平面垂直的直线是（　　　）。

（A）$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$　　（B）$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}$

（C）$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$　　（D）$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$

二、（本题满分 10 分） 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，连接点 $A(a,f(a))$ 与点 $B(b,f(b))$ 的线段与曲线 $(x,f(x))$ 相交于点 $C(c,f(c))$，这里 $a<c<b$。证明：在 (a,b) 上存在一点 ξ，满足 $f''(\xi)=0$。

三、（本题满分 10 分） 设函数 $u=f(s(x,y,z),t(x,y,z))$，其中 $s(x,y,z)=x+y+z$，$t(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，并且函数 $f(s,t)$ 存在二阶连续偏导数。证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=3\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}+4(x+y+z)\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}+4(x^2+y^2+z^2)\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+6\frac{\partial f}{\partial t}。$$

四、(本题满分 10 分) 求函数 $f(x,y)=4x+xy^2+y^2$ 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上的最大值和最小值。

五、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上连续的单调非减函数。证明：对 $\forall c\in[a,b]$,

$$\int_a^c xf(x)dx \ge \frac{a+c}{2}\int_a^c f(x)dx \text{。}$$

六、(本题满分 10 分) 计算球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被圆柱面 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 所截部分（即在圆柱面内部的部分）的面积。

七、(本题满分 10 分) 计算线积分 $I=\int_L |x|\,yds$，L 是 $y^2-x^2=1$ 在 $y=0$ 和 $y=2$ 之间的部分。

八、(本题满分 10 分) 求解常微分方程 $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$。

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 是定义在实数 $\mathbf{R}$ 上以 2π 为基本周期的周期函数，且在 $(0,2\pi)$ 上，$f(x)=\dfrac{x}{2}$，应用函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开证明：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\cdots \text{。}$$

十、(本题满分 10 分) 设函数 $f(t)=\ln(2-t)-\ln(t+1)+\dfrac{3}{t+1},\ t\in(-1,2)$。证明：对 $\forall x\in\mathbf{R}$，都存在唯一的 $t\in(-1,2)$，使得 $f(t)=x$。

十一、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上存在二阶连续导数，且满足：$f''(x)=\cos x+f'(x)$，$f'(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的最大值为 2，$f(0)=0$。求 $f(x)$。

十二、(本题满分 10 分) 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$，$f(x,y)$ 是 D 上的连续函数，并且在 $D\setminus\{(0,0)\}$ 上存在连续的一阶偏导数。又设 $g_1(x,y),\ g_2(x,y)$ 是 D 上的连续函数，且满足在 $D\setminus\{(0,0)\}$ 上，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=g_1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=g_2$。证明：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0,y=0}=g_1(0,0),\qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=0,y=0}=g_2(0,0)\text{。}$$