

## 第二章 电介质的损耗

### 第一节 电介质损耗的基本概念

# 一、基本概念

- 电介质在外电场的作用下，将一部分的电能转变成热能的物理过程，称为电介质的损耗。
- 电介质损耗带来的危害：引起线路上的附加衰减，使仪器设备中的元器件发热，工作环境温度上升，破坏设备的正常工作，甚至损害设备。
- 学习目的：了解电介质损耗的来源，它的物理过程以及介质损耗随外部环境（外加交变电场的频率、温度等）的变化规律。

## 二、损耗的来源

### 1、电导损耗

#### ①定义

电介质中一些弱联系的导电载流子在电场作用下作定向漂移，形成传导电流，并以热的形式耗散掉，我们称之为电导损耗。

#### ②在恒定电场作用下的电导损耗

能量损耗功率

$$W = \frac{V^2}{R} = V^2 G$$

$$V = Ed$$

$$G = \frac{1}{R} = \gamma \frac{A}{d}$$

$$W = \gamma E^2 A d$$

$$P = \gamma E^2$$

### ③在交变电场作用下的电导损耗

假设电介质中只有电子、离子的位移极化，这一类极化形式在电场作用下是不会产生能量损耗的，在等效电路图中可以用一理想的电容器来表示

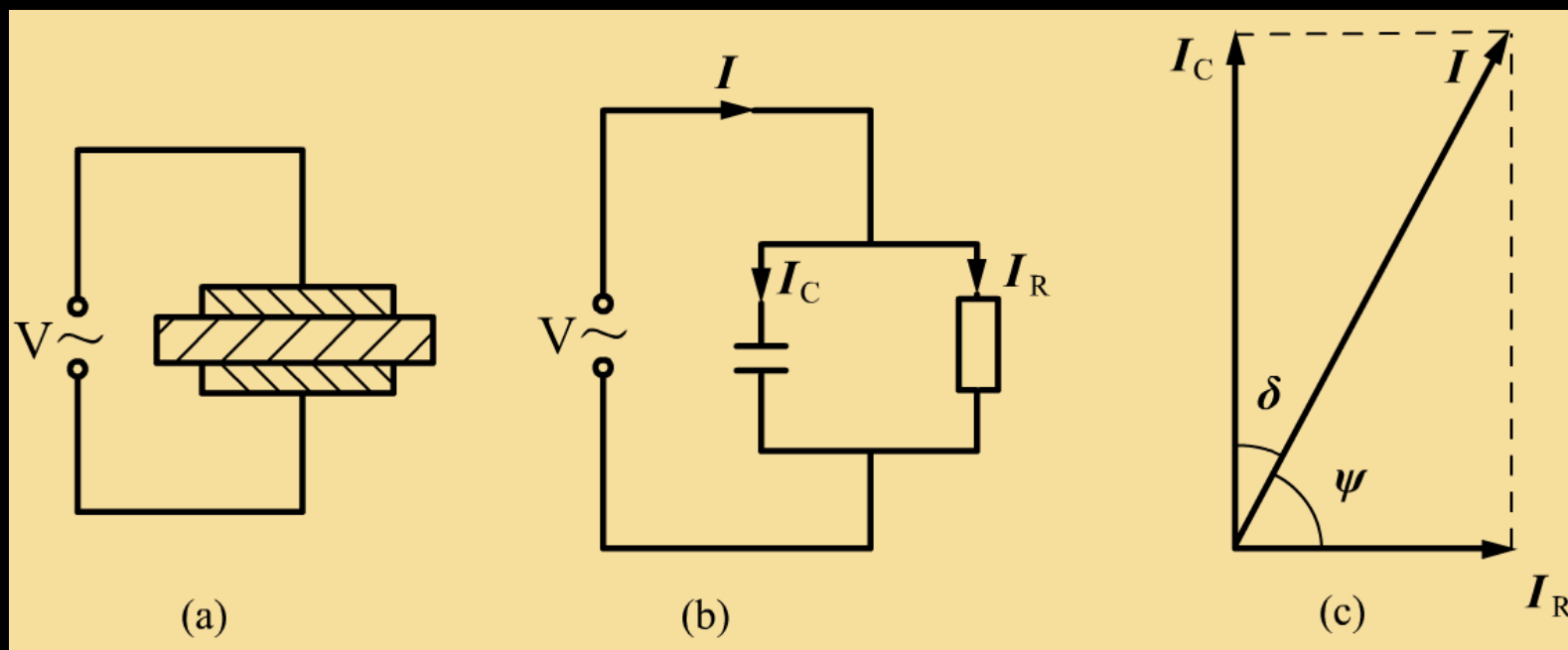
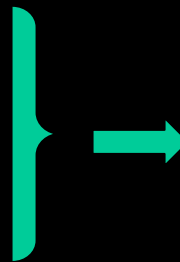


图2-1 电容器只存在电导损耗时的等效电路图和电流矢量图

$$P = \frac{W}{Ad} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega E^2 \tan \delta$$

$$\tan \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{V/R}{\omega CV} = \frac{1}{\omega CR}$$

$$\because C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}, \frac{1}{R} = \gamma \frac{A}{d}$$



$$\tan \delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

用能量损耗功率作为描述介质损耗的参数是不方便的，因为W值与外施电压、材料尺寸等因素有关，不同材料间难以相互比较。而 $\tan \delta$ 仅取决于材料特性而与材料尺寸、形状无关，其值可以直接由实验测定。所以通常用 $\tan \delta$ 而不用W来表征电介质中的介质损耗。

## 2、松弛极化损耗

以极化建立所需要的时间分类，极化可分为：

瞬间位移极化（快极化）：电子位移极化、离子位移极化

松弛极化（缓慢式极化）：热离子松弛极化、偶极子转向极化、界面极化

当外电场的频率比较高，如高频或超高频，偶极子转向极化等慢极化形式就来不及跟上交变电场的周期性的变化，产生松弛现象，致使电介质的 $P$ 滞后于 $E$ ，并且随着外加电场频率的升高，电介质的 $\varepsilon$ 下降。这一过程将消耗部分能量，而且在高频和超高频中，这类损耗将起主要作用，甚至比电导损耗还大，这种在交变电场中由慢极化形式引起的损耗称为松弛损耗。

### 3、谐振损耗(色散与吸收)

#### (1) 谐振损耗的来源

谐振损耗来源于原子、离子、电子在振动或转动时所产生的共振效应，这种效应发生在红外到紫外的光频范围。

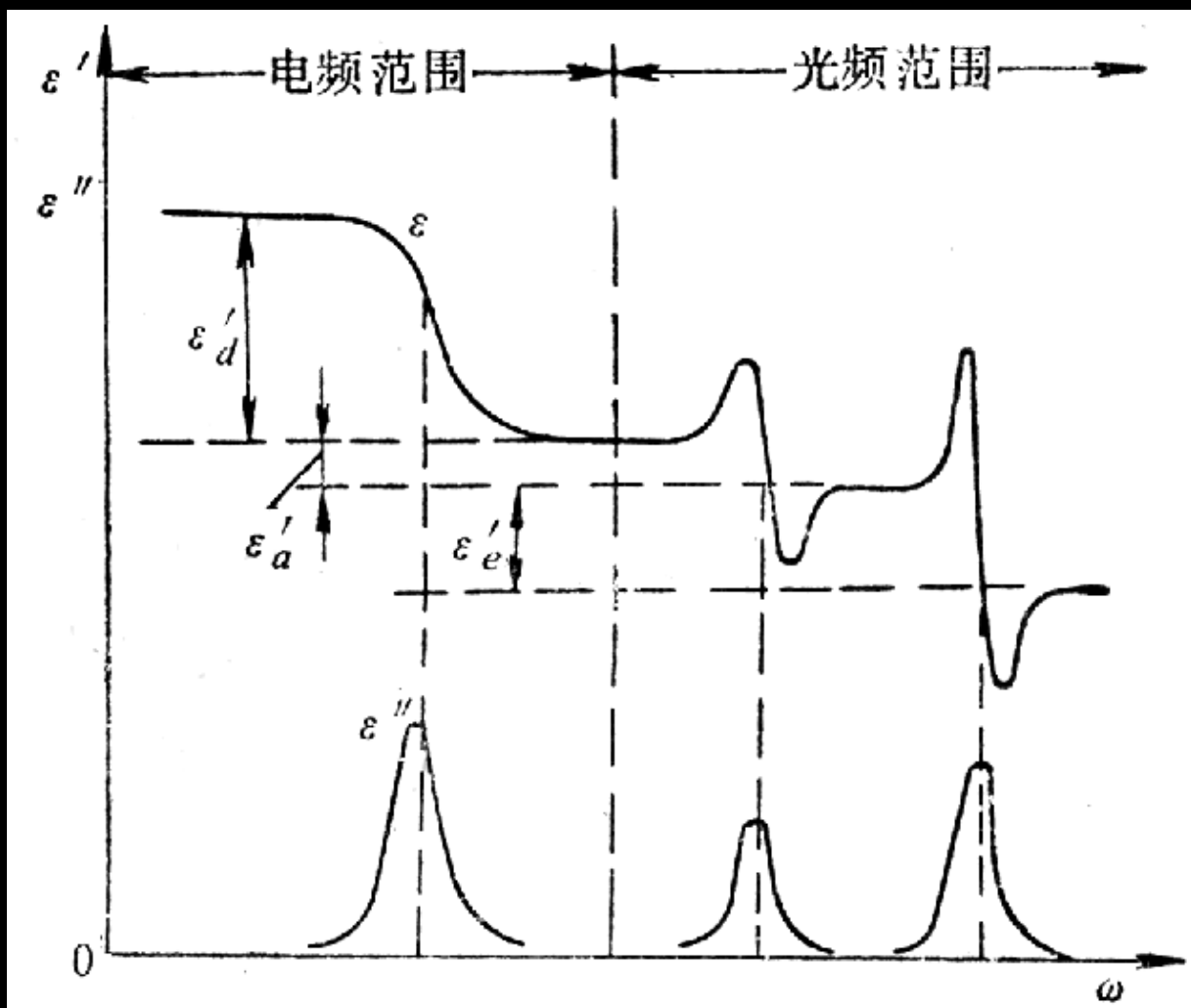
A.  $f > 10^{19} \text{ Hz}$  电磁场不可能在原子内激起任何振动，电介质没有极化， $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ 。

B.  $f < 10^{19} \text{ Hz} \approx$  原子内层电子的谐振频率，内层电子可随电磁场振动，对极化做出贡献， $\varepsilon > 1$ ，同时产生谐振损耗

C.  $f < (3 \sim 30) \times 10^{14} \text{ Hz} \approx$  原子外层电子的谐振频率，外层电子可随电磁场振动，对极化做出贡献，同时产生谐振损耗。

D.  $f < 10^{12} \sim 3 \times 10^{13} \text{ Hz} \approx$  分子和晶体内的原子或离子的谐振频率，出现原子或离子的谐振极化，同时产生谐振损耗。





$\varepsilon_d'$  — 偶极子转向极化对  $\varepsilon'$  的贡献  
 $\varepsilon_a'$  — 原子极化对  $\varepsilon'$  的贡献  
 $\varepsilon_e'$  — 电子极化对  $\varepsilon'$  的贡献  
 $\varepsilon''$  — 损耗因数

图 2-2 介电系数  $\varepsilon'$  和介质损耗  $\varepsilon''$  随频率的变化曲线

## (2) 色散

- 介电系数或折射率随频率变化的现象称为色散。
- 因极化的机理不同，色散发生的频率也不同。电子或原子(离子)的谐振极化在光频范围内的色散现象属于谐振色散，而偶极子转向等松弛极化在电频范围内的色散称为松弛色散。松弛色散，中间不显最大值，谐振色散则出现明显的峰值。
- 随着频率的升高，介电系数从低频侧的较大值向高频侧的较小值过渡。
- 色散现象同时伴随着能量损耗。

### (3) 吸收

- 损耗因数随频率的变化称为吸收，该曲线称为吸收曲线。
- 在介电系数发生色散的频率范围内，无论是电子、原子或离子极化，还是偶极子转向极化等松弛极化，其损耗因数都是明显地变大且出现峰值。

## (4) 折射率n与电磁场频率f的关系

为了讨论电磁场对介质的作用，必须先了解电磁场对一个分子的作用。当电磁波通过一个分子时，它对分子的主要作用是它的电场E对分子中电子的作用。

量子理论指出，在分子内库仑引力作用下运动的电子与电磁波的相互作用，与简谐振子是相似的。当电磁波作用于分子时，分子内的电子作受迫简谐振动，其运动方程为

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + KX = eE_e$$

X为电子平行于电场E方向的位移；  
m、e分别为电子的质量及荷电量；  
-KX为电子受到的准弹性力。

求解此方程  $m \frac{dX}{dt^2} + KX = eE_e$

当入射光电场  $E = E_0 e^{i\omega t}$  时, 方程的解

为  $X = X_0 e^{i\omega t}$

把此解代入方程, 得  $X = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} E_e$

其中,  $\omega_0 = \sqrt{K/m}$  为谐振(吸收)频率

每个电子对极化所贡献的偶极矩

$$\mu = eX = \alpha E_e \longrightarrow \alpha = \frac{eX}{E_e} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\alpha = \frac{eX}{E_e} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

当  $\omega \rightarrow \omega_0$  时,  $\alpha \rightarrow \infty$  这是由于忽略了振子振动阻尼的缘故。

如果谐振子运动有阻尼存在, 且阻尼力与振子的质量和运动速度成正比, 则运动方程为

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + m\gamma \frac{dX}{dt} + KX = eE_e$$

此方程的解为

$$\dot{X} = \frac{e}{m} \frac{E_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$



$$\dot{\alpha} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$\frac{\dot{n}^2 - 1}{\dot{n}^2 + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} N \dot{\alpha} = \frac{1}{3\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

其中

$$\dot{n} = n - ik$$

对于密度不太高的气体,  $\dot{n} + 1 \cong 2, \dot{n}^2 + 2 \cong 3$



$$\dot{n} = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

把上式分子、分母都乘以  $\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega$

于是

$$\dot{n} = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

实部

$$n = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

虚部

$$k = \frac{1}{2\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

讨论：

①当  $\omega \ll \omega_0$  时，折射率与频率无关。

$$n \cong 1 + \frac{N}{2\varepsilon_0} \frac{e^2}{m\omega_0^2}$$

$$k \cong 0$$

②当  $\omega \approx \omega_0$  时，在折射率与频率的关系中出现两个极值。



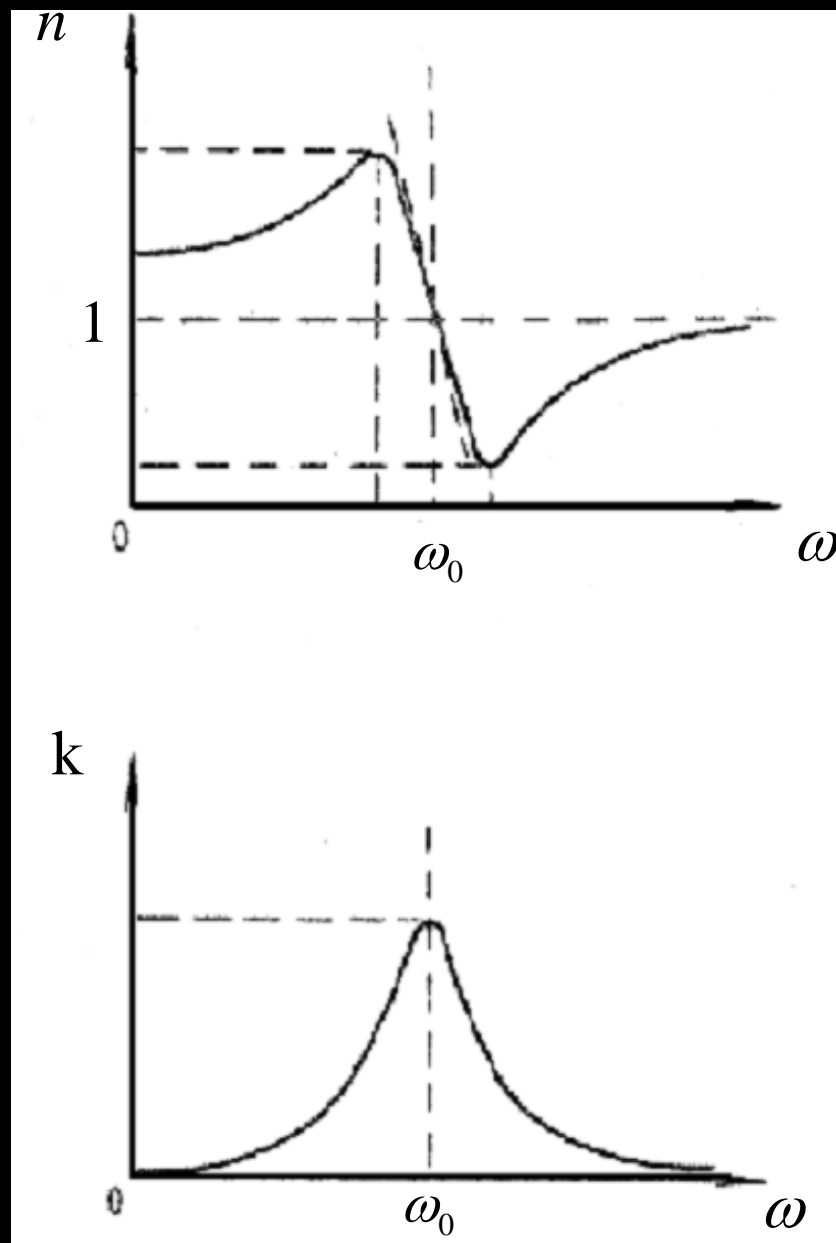


图2-3 阻尼谐振子的 $n$ 和 $k$ 与频率的关系曲线

$$\omega_{m+} = \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma}{\omega_0}\right)^{1/2}$$



$$n_{m+} = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0\gamma - \gamma^2}$$

$$\omega_{m-} = \omega_0 \left(1 + \frac{\gamma}{\omega_0}\right)^{1/2}$$



$$n_{m-} = 1 - \frac{1}{2\varepsilon_0} N \frac{e^2}{m} \frac{1}{2\omega_0\gamma + \gamma^2}$$

在谐振点上:  $\omega = \omega_0$

$$n = 1$$

$$k_m = \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \gamma \omega_0}$$

说明在谐振点附近发生很大的辐射阻尼

③当  $\omega \gg \omega_0$  时,

$$n \approx 1$$

$$k \approx 0$$

谐振子来不及随电场发生振动, 相当于真空的情形。

# 内容小节

- 电介质的损耗的概念和来源
- 电导损耗的定义、在恒定电场和交变电场下的电导损耗功率
- 松弛极化损耗的定义
- 谐振损耗的来源及色散与吸收等相关概念

## 第二节 极化过程的建立和吸收电流

### 一、极化强度的建立

在恒定电场的作用下，电介质中所有的极化形式都有足够的时间得以建立。

$$P(t) = P_{\infty}(t) + P_r(t)$$

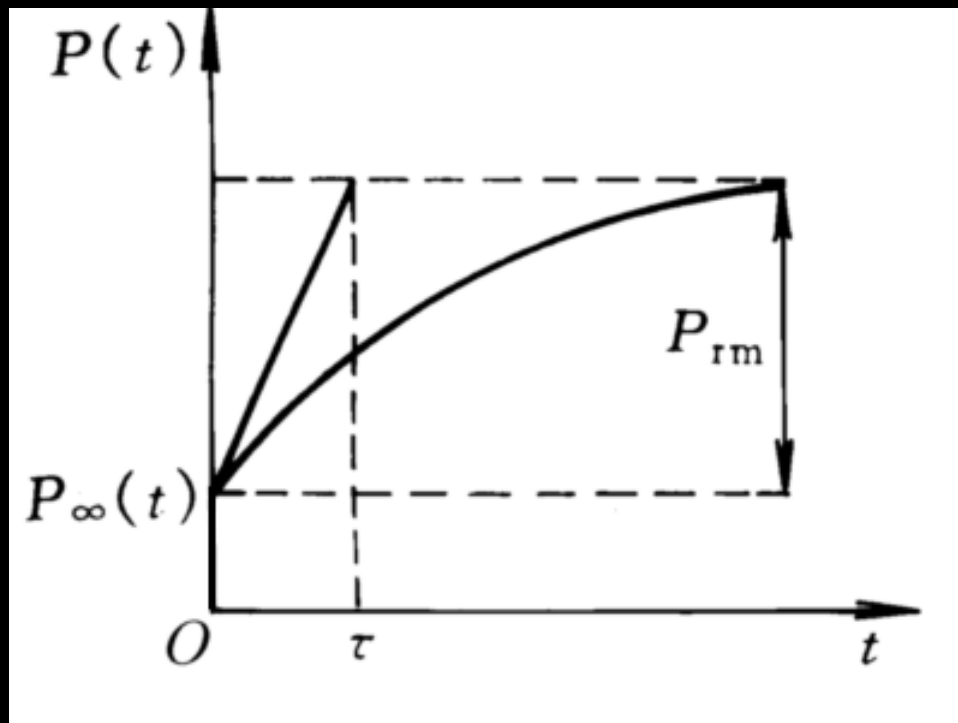
$P_{\infty}(t)$  ——瞬间位移极化或快极化的极化强度

$P_r(t)$  ——松弛极化或缓慢极化的极化强度

加上电场以后，位移极化强度 $P_{\infty}(t)$ 是瞬间建立的，与时间无关。松弛极化强度 $P_r(t)$ 与时间的关系比较复杂。当介质中只有一种松弛极化，松弛极化强度与时间的关系可近似的表示为

$$P_r(t) = P_{rm} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$P_{rm}$ ——稳态时 ( $t \rightarrow \infty$ ) 的松弛极化强度；  
 $t$ ——电场加上以后经过的时间；  
 $\tau$ ——松弛极化的时间常数。



(a) 恒定电场作用

图 2-4 极化强度的建立

当极化达到稳态以后，移去电场， $P_r(t)$  将随时间的增加而指数式的下降，经过相当长的时间之后， $P_r(t)$  实际上降至零。

$$P_r(t) = P_{rm} e^{-t/\tau}$$

当  $t = \tau$  时，
$$P_r = \frac{P_{rm}}{e}$$

如把  $P_r(t)$  对时间  $t$  微分，得：

$$\frac{dP_r}{dt} = -\frac{P_{rm}}{\tau} e^{-t/\tau} = -\frac{P_r(t)}{\tau}$$

当  $t=0$  时，
$$\left. \frac{dP_r}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{P_{rm}}{\tau}$$

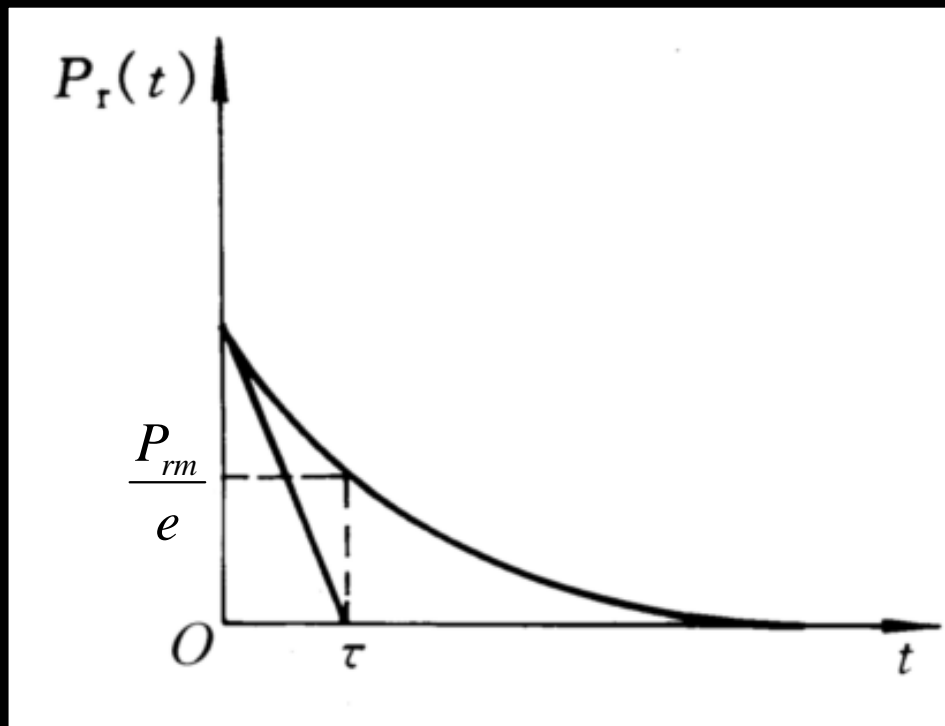


图 2-4 (b) 移去电场后

在恒定电场作用下，极化强度的稳态值为

$$P_m = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - 1) E$$

对于瞬间位移极化有

$$P_\infty = \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) E$$

于是松弛极化强度的稳态值为

$$P_{rm} = P_m - P_\infty = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E$$



## 二、极化电流、吸收电流

- 恒定电场作用
- 设一平行板电容器的极板面积为A；极间距离为d；其间充满静态介电系数为  $\epsilon_s$ 、光频介电系数为  $\epsilon_\infty$  的均匀介质。

电容器的静态电容：

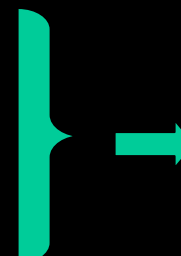
$$C = C_\infty + C_r$$

位移极化电容：

$$C_\infty = \frac{\epsilon_0 \epsilon_\infty A}{d}$$

松弛极化电容：

$$C_r = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_s - \epsilon_\infty) A}{d}$$


$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_s A}{d}$$

位移极化强度  $P_{\infty} = \varepsilon_0 (\varepsilon_{\infty} - 1)E$

松弛极化强度  $P_r = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})E$

总极化强度  $P = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - 1)E$

电容器极板上的电荷密度：

$$\sigma_{\infty} = \varepsilon_0 E + P_{\infty} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} E$$

$$\sigma_r = P_r = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})E$$

$$\sigma = \sigma_{\infty} + \sigma_r = \varepsilon_0 \varepsilon_s E = \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} E + P_r$$

瞬时电荷 $Q_1$ ：在充、放电瞬间突变的电荷

几何电容的充电电荷  
位移极化引起的电荷  
相应的电流称为瞬时电流。

吸收电荷（ $Q_2 - Q_1$ ）：  
充电时随时间增长的电荷，是介质松弛极化引起的电荷 $Q_r$ 。  
相应的电流就叫作松弛极化电流或者吸收电流。

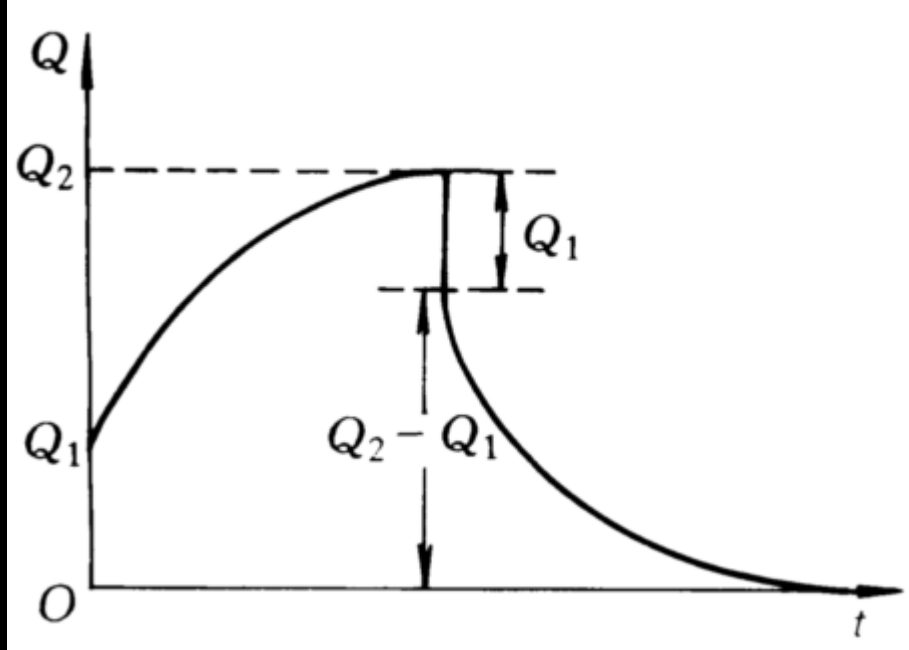


图2-5 在静电场作用下电容器极板上充、放电电荷

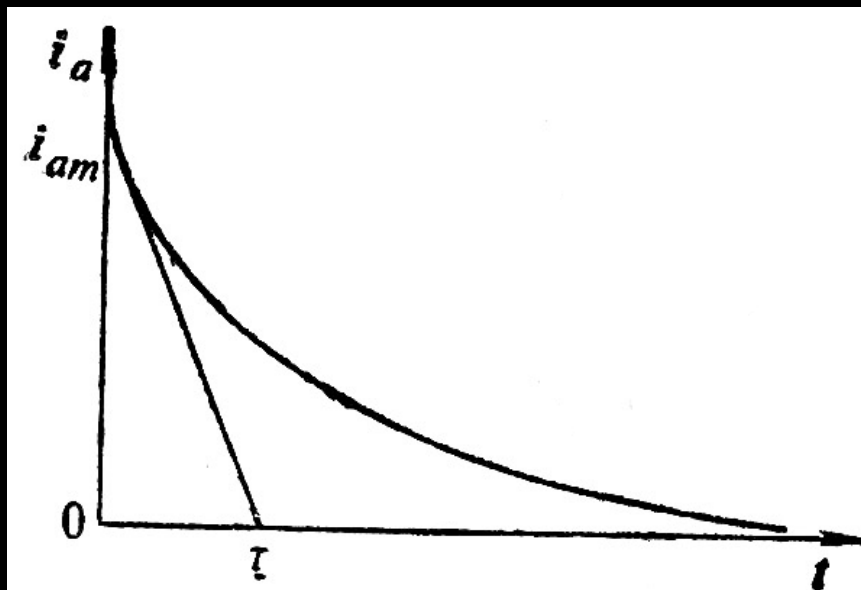


图2-6 极化电流与时间的关系

加电压时:

$$i_a(t) = i_r(t) = \frac{dQ(r)}{dt} = \frac{Ad\sigma_r}{dt} = \frac{AdP_r}{dt}$$

$$= \frac{AP_{rm}}{\tau} e^{-t/\tau} = i_{am} e^{-t/\tau} = i_{rm} e^{-t/\tau}$$

式中

$$i_{am} = i_{rm} = \frac{A\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)E}{\tau} = gAE$$

t=0时的初始电导率

$$g = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\tau}$$

当电容器在恒定电压作用下到达稳态后，移去电压后的吸收电流为

$$i_a = -i_{am} e^{-t/\tau} = -gAE e^{-t/\tau}$$

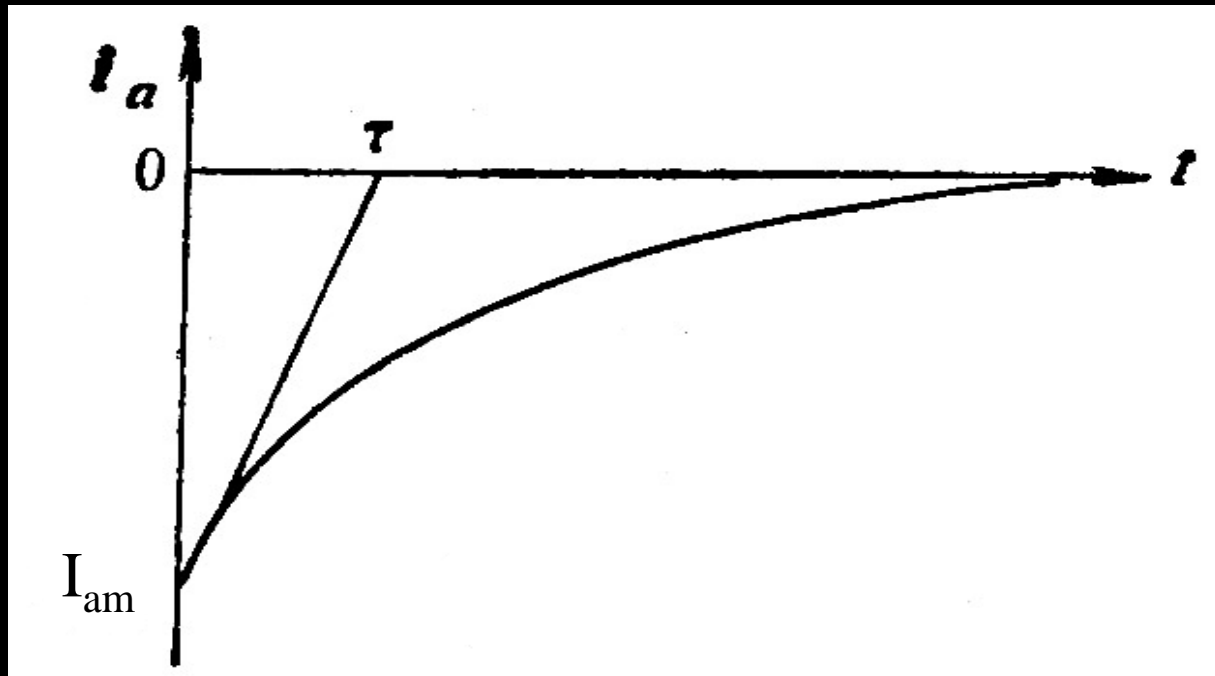


图2-7  $t=0$ 时移去电压后吸收电流与时间的关系

瞬时电流和吸收电流组成介质中极化过渡过程的电流。此外，由于介质并非理想介质，其电导率不等于零，介质中还存在电导电流。

瞬时电流和吸收电流只是在电压发生变化（如加上或移去一恒定电压后一段时间）时才存在的，瞬时电流和时间无关，而吸收电流是时间的函数，随时间的增加逐渐衰减最后降至零。吸收电流是介质在交变电压作用下引起介质损耗的重要来源。电导电流在恒定电压或交变电压作用的整个期间，都一直存在，故也称剩余电流。

# 内容小节

- 恒定电场作用下极化强度的建立  
加上电场

$$P(t) = P_{\infty}(t) + P_r(t) \quad P_r(t) = P_{rm} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

到达稳态后移去电场

$$P_r(t) = P_{rm} e^{-t/\tau}$$

- 恒定电场作用下的吸收电流  
加上电场

$$i_a = i_{am} e^{-t/\tau} = gAE e^{-t/\tau}$$

到达稳态后移去电场

$$i_a = -i_{am} e^{-t/\tau} = -gAE e^{-t/\tau}$$

## 第三节 实际电介质中的介质损耗

### 一、在交变电场作用下介质的极化强度

(1) 介质在恒定电场作用下极化达到稳态后, 降低电场, 极化强度随时间的变化



介质在宏观平均电场强度为E的恒定电场作用相当长时间以后，介质中的位移极化和松弛极化已达到其稳定值，这时若将电场降低  $\Delta E$ ，

则：极化强度降低

$$\Delta P = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - 1) \Delta E$$

其中，位移极化强度降低

$$\Delta P_\infty = \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) \Delta E$$

松弛极化强度降低

$$\Delta P_r = \Delta P_{rm} e^{-t/\tau}$$

$$\Delta P_{rm} = \Delta P - \Delta P_\infty = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \Delta E$$

对于线性电介质来说，可应用电场叠加原理求极化强度随时间的变化关系。

如：在  $t_1$ ， $t_2$ ， $t_3$ ，...，时刻，电场强度的增量为  $\Delta E_1$ ， $\Delta E_2$ ， $\Delta E_3$ ，...，则这些时刻的位移极化强度的增量为

$$\Delta P_{\infty i} = \varepsilon_0 (\varepsilon_{\infty} - 1) \Delta E_i \quad (i=1,2,3,\dots)$$

松弛极化强度随时间的变化为

$$\Delta P_{ri} = \Delta P_{rm1} e^{-(t-t_1)/\tau} + \Delta P_{rm2} e^{-(t-t_2)/\tau} + \Delta P_{rm3} e^{-(t-t_3)/\tau} + \dots$$

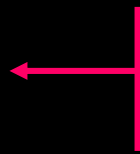
式中的第2，3，...项分别满足条件  $t > t_2$ ， $t > t_3$ ，...时均不等于零，且

$$\Delta P_{rmi} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \Delta E_i$$

## (2) 对于任意波形的电场 $E=E(t)$

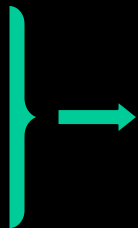
在  $t_1$  时刻,  $E=E(t_1)$ , 在  $E(t_1)$  作用  $dt$  时间后, 松弛极化强度的增量为

$$dP_r = P_{rm} \left( \frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} dt$$



$$\because P_r = P_{rm} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

$$dP_{r1} = \frac{P_{rm1}}{\tau} e^{-t/\tau} dt$$



$$dP_{r1} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E(t_1) e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau}$$

$$P_{rm1} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E(t_1)$$

$$\downarrow t=0$$

$$dP_{r1} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E(t_1) \frac{dt}{\tau}$$

移去电场以后，在 $t_1+dt$ 时刻，松弛极化强度将按下式减少：

由叠加原理：
$$dP_{r1} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E(t_1) e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau}} \frac{dt}{\tau}$$

在时刻 $t_2=t_1+dt$ 移去电场 $E(t_1)$ ，加上电场 $E(t_2)$ ，在时刻 $t_3=t_2+dt$ 移去电场 $E(t_2)$ ，加上电场 $E(t_3)$ ，

...，依次类推表示电场随时间的变化。由于电场随时间而变，则极化强度也随时间而变，在时刻 $t$ ，松弛极化强度为

$$P_r = \int dP_{ri} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_{-\infty}^t E(t_i) e^{-\frac{(t-t_i)}{\tau}} \frac{dt}{\tau}$$

介质中总极化强度

$$P(t) = P_\infty(t) + P_r(t)$$

$$= \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) E(t) + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_{-\infty}^t E(t_i) e^{-\frac{(t-t_i)}{\tau}} \frac{dt}{\tau}$$

### (3) 对于交变电场 $E(t) = E_m \sin \omega t$

$$\begin{aligned} P(t) &= \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) E_m \sin \omega t + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E_m \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(t-t_i)}{\tau}} \sin \omega t_i \frac{dt}{\tau} \\ &= \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) E_m \sin \omega t + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t) \end{aligned}$$

A、 $\omega \tau \ll 1$ ，电场频率不高和松弛时间不大的情况

$$\begin{aligned} P(t) &= \varepsilon_0 (\varepsilon_\infty - 1) E_m \sin \omega t + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) E_m \sin \omega t \\ &= \varepsilon_0 (\varepsilon_s - 1) E_m \sin \omega t = P_m \sin \omega t = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - 1) E(t) \end{aligned}$$

式中

$$P_m = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - 1) E_m$$


总极化强度与时间的变化规律和电场强度的相同。

B、 $\omega \tau \gg 1$ ，含  $\omega \tau$  项不能忽略

$$P(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E_m \sin \omega t + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t)$$

$$P_\infty(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E_m \sin \omega t = P_{\infty m} \sin \omega t$$

$$P_r(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t)$$


$$P_{rr}(t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2 \tau^2} E_m \sin \omega t = P_{rrm} \sin \omega t$$

$$P_{ra}(t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2 \tau^2} \omega \tau E_m \cos \omega t = P_{ram} \cos \omega t$$

$$P_r(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t)$$

可写成

$$P_r(t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} E_m \sin(\omega t - \varphi')$$

$\varphi'$  为松弛极化强度滞后电场强度的相位角

$$\because \tan \varphi' = \omega \tau$$



$$\varphi' = \tan^{-1}(\omega \tau)$$

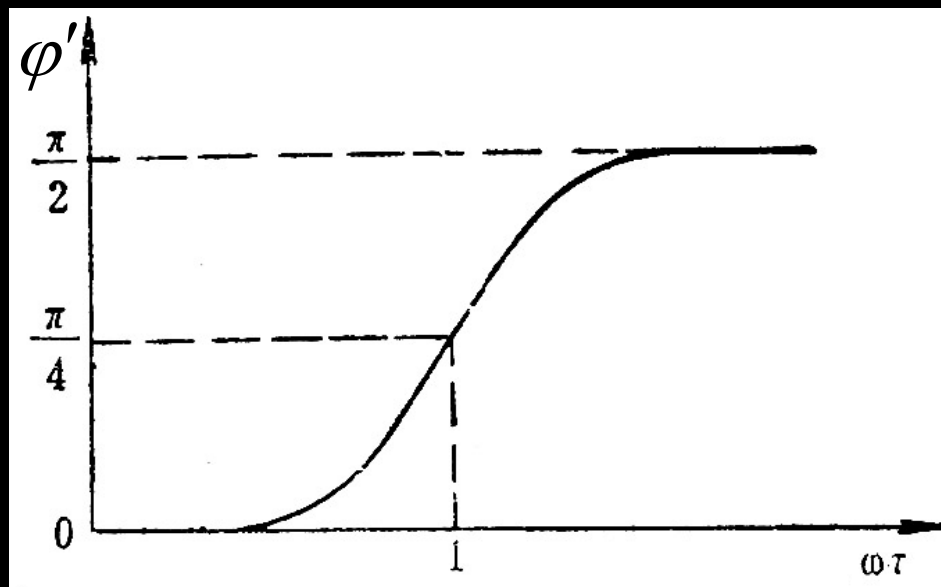


图2-8 松弛极化强度滞后角与频率的关系

## 二、在交变电场作用下介质中的电流

- 以平板电容器为例
- 外加交变电压  $V(t) = V_m \sin \omega t$   
宏观平均场强  $E(t) = E_m \sin \omega t$

根据

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E + P_r$$

$$P_r(t) = \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t)$$

而平板电容器极板上的电荷

$$Q(t) = \sigma(t)A$$



$$\begin{aligned}
 Q(t) &= \sigma(t)A = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty AE + AP_r \\
 &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty A \frac{V_m}{d} \sin \omega t + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) A}{d} V_m \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t) \\
 &= \varepsilon_0 \left[ \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] \frac{A}{d} V_m \sin \omega t - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{A}{d} V_m \omega \tau \cos \omega t \\
 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d} V_m \sin \omega t - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{A}{d} V_m \omega \tau \cos \omega t
 \end{aligned}$$

式中

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

电介质在交变电压  
作用下的介电系数

在交变电压作用下，通过介质电容器的极化电流  $i_p(t)$  由位移极化电流  $i_\infty(t)$  和松弛极化电流  $i_r(t)$  两部分组成

$$\begin{aligned} i_p(t) &= \frac{dQ(t)}{dt} = i_\infty(t) + i_r(t) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty A}{d} V_m \omega \cos \omega t + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{A}{d} V_m (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t) \\ &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon A}{d} V_m \omega \cos \omega t + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) A}{d} \frac{V_m \omega}{1 + \omega^2 \tau^2} \omega \tau \sin \omega t \end{aligned}$$

式中：

$$i_\infty(t) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty A}{d} V_m \omega \cos \omega t = I_{\infty m} \cos \omega t$$

$$I_{\infty m} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\infty A}{d} V_m \omega$$

$$i_r(t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{A}{d} V_m (\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t)$$

$i_r(t)$  可分解成超前电压  $\pi/2$  相位的无功电流  $i_{rr}(t)$  和与电压同相位的有功电流  $i_{ra}(t)$  两个分量

$$i_r(t) = i_{rr}(t) + i_{ra}(t) = I_{rrm} \cos \omega t + I_{ram} \sin \omega t$$

式中：

$$I_{rrm} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)A}{d} \frac{\omega}{1 + \omega^2\tau^2} V_m$$

$$I_{ram} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)A}{d} \frac{\omega^2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} V_m$$

$$P_r(t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} E_m \sin(\omega t - \varphi')$$

$$\begin{aligned} i_r(t) &= \frac{dQ_r}{dt} = A \frac{dP_r}{dt} \\ &= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \frac{A}{d} V_m \cos(\omega t - \varphi') \\ &= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \frac{A}{d} V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi') \end{aligned}$$

介质在交变电压作用下的松弛极化电流  $i_r(t)$  就是介质在恒定电压下的吸收电流，由于松弛极化强度滞后电压  $\varphi'$ ，所以松弛极化电流超前电压  $\frac{\pi}{2} - \varphi'$

如果电容器介质的电导率  $\gamma$  不等于零，将有传导电流  $i_R(t)$  流经介质，这时总的电流为

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_P(t) \\ &= i_R(t) + i_\infty(t) + i_{rr}(t) + i_{ra}(t) \\ &= (I_{Rm} + I_{ram}) \sin \omega t + (I_{\infty m} + I_{rrm}) \cos \omega t \\ &= I_{am} \sin \omega t + I_{rm} \cos \omega t \end{aligned}$$

式中：

$$i_R(t) = \gamma \frac{A}{d} V_m \sin \omega t = I_{Rm} \sin \omega t$$

$$I_{Rm} = \gamma \frac{A}{d} V_m$$

平板电容器介质中有位移极化、松弛极化和贯穿电导时，在交变电压 $V(t) = V_m \sin \omega t$ 的作用下，它的等效电路及各参数的相量图如下：

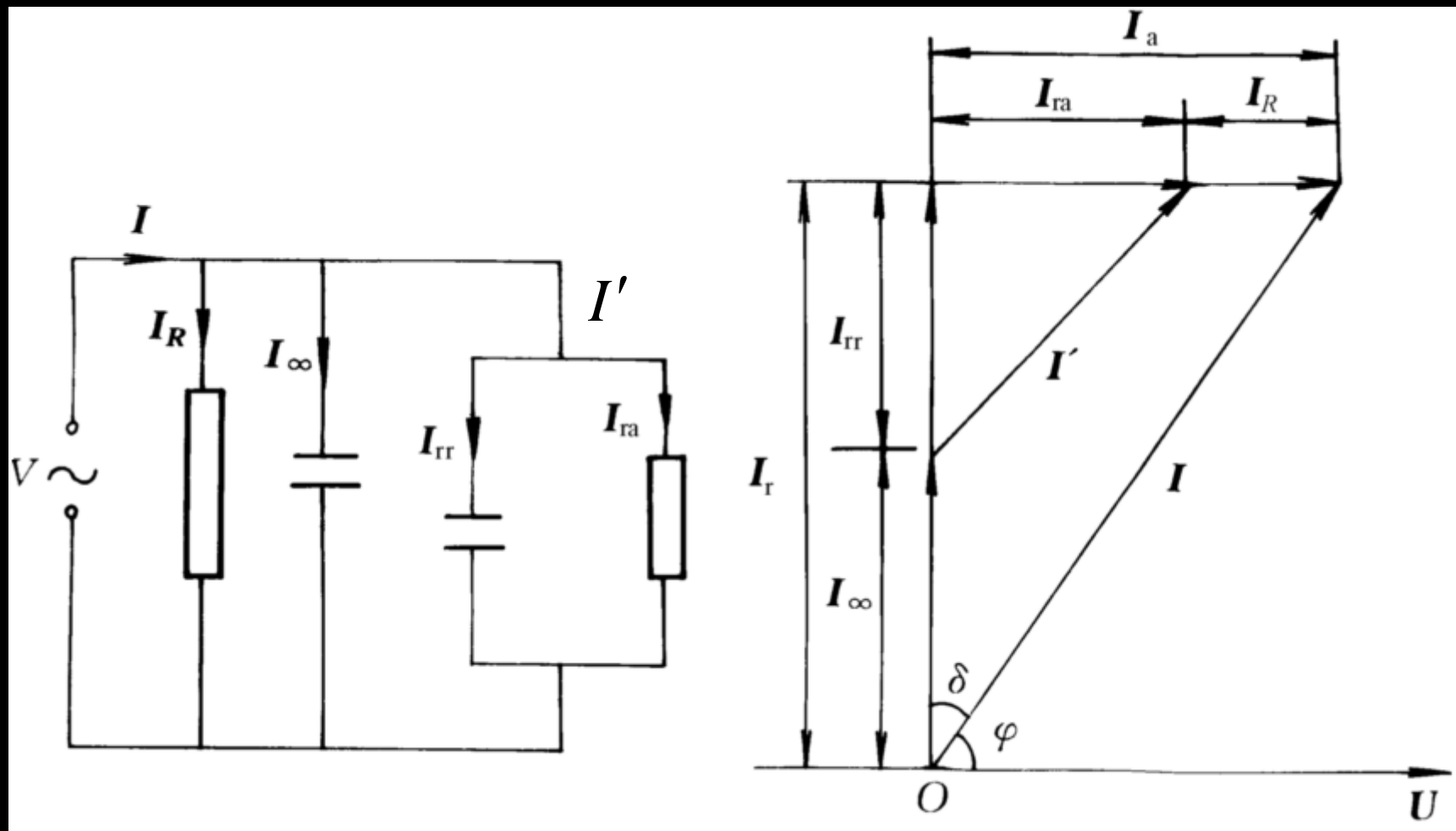


图2-9 (a) 含有各类极化和电导时介质电容器的等效电路

(b) 实际电介质中的电流矢量图

### 三、在交变电场作用下介质中的损耗

单位时间内，电容器介质的能量损耗为

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) V(t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (I_{am} \sin \omega t + I_{rm} \cos \omega t) V_m \sin \omega t dt$$

$$= \frac{I_{am} V_m}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt + \frac{I_{rm} V_m}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt$$

$$= \frac{1}{2} I_{am} V_m + 0$$

$$= \frac{1}{2} I_{Rm} V_m + \frac{1}{2} I_{ram} V_m = W_R + W_r$$

即介质损耗由两部分组成，电导损耗和极化损耗。

电导损耗

$$W_R = \frac{1}{2} I_{Rm} V_m = \gamma \frac{A}{d} V^2 = \frac{V^2}{R}$$

松弛损耗

$$W_r = \frac{1}{2} I_{ram} V_m = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) A}{d} \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} V^2 = g \frac{A}{d} V^2$$

$$g = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

电容器介质在交变电压作用下的等效电导率

在高频区,  $\omega \tau \gg 1$

$$g = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{\tau}$$

在低频区,  $\omega \tau \ll 1$ ,  $W_r$  与  $\omega^2$  成正比;  
在高频区,  $\omega \tau \gg 1$ ,  $W_r$  与频率  $\omega$  无关。



综合电导损耗和松弛损耗，电容器的介质损耗为

$$W = VI_a = \left[ \gamma \frac{A}{d} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) A}{d} \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] V^2$$
$$= (\gamma + g) \frac{A}{d} V^2 = (\gamma + g) A d E^2$$

单位体积中的介质损耗为

$$P = \left[ \gamma + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] E^2 = (\gamma + g) E^2$$

# 介质损耗角正切

$$\begin{aligned}\tan \delta &= \frac{VI_a}{VI_r} = \frac{I_a}{I_r} = \frac{I_{Rm} + I_{ram}}{I_{\infty m} + I_{rrm}} \\&= \left[ \gamma + \varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] / \left[ \omega \varepsilon_0 \left( \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \right] \\&= \frac{\gamma + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \\&= \frac{\gamma + g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}\end{aligned}$$

## 四、介电系数 $\varepsilon$ 、介质损耗W (P)、介质损耗角正切 $\tan \delta$ 与频率的关系

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$W = \left[ \gamma \frac{A}{d} + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) A}{d} \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] V^2 = (\gamma + g) A d E^2$$

$$P = \left[ \gamma + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \right] E^2 = (\gamma + g) E^2$$

$$\tan \delta = \frac{\gamma + \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\gamma + g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}$$

# 松弛时间 $\tau$ 一定

1、当  $\omega \rightarrow 0$ , 类似恒定电场作用

$$g = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega^2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \rightarrow 0$$

$$\varepsilon = \varepsilon_s$$

$$W = \gamma A d E^2, P = \gamma E^2$$

$$\tan \delta = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_s \omega} \rightarrow \infty$$

## 2、低频区, $\omega \tau \ll 1$

$\omega \uparrow$ , 开始出现松弛极化。

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \varepsilon_s$$

$$W = (\gamma + g) A d E^2$$

$$P = (\gamma + g) E^2$$

$$\because g = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \rightarrow g \propto \omega^2$$

W, P随  $\omega \uparrow$  而 $\uparrow$

g与 $\gamma$ 相比可忽略

$$\tan \delta = \frac{\gamma + g}{\varepsilon_0 \varepsilon_s \omega} \approx \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_s \omega}$$

因为  $\omega \uparrow$ , 所以  $\tan \delta$  急剧下降

### 3、反常弥散区, $\omega \tau = 1$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\omega \uparrow, \varepsilon \downarrow$$

$$W = gAdE^2$$

$$\omega \uparrow, W(p) \uparrow, \text{且 } g > \gamma$$

$$P = gE^2$$

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\omega^2} = \frac{\left[ -2\tau^2(1 + \omega^2 \tau^2)^2 + 2(1 + \omega^2 \tau^2)4\omega^2 \tau^4 \right] (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})}{(1 + \omega^2 \tau^2)^4} \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

$$\text{得: } \omega\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1 \text{ 时 } \frac{d\varepsilon}{d\omega} \text{ 有最大值}$$

说明  $\varepsilon$  在  $\omega\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1$  时下降最快

$$\frac{d^2W}{d\omega^2} = \frac{\left[ 2\tau(1+\omega^2\tau^2)^2 - 2(1+\omega^2\tau^2)^2 2\omega^2\tau^3 \right] A}{(1+\omega^2\tau^2)^4 d} \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \stackrel{\text{令}}{=} 0$$

同样得：  $\omega\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1$  时W随 $\omega$ 变化最快

如果忽略电导损耗

$$\tan \delta = \frac{g}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}$$

为松弛极化损耗

令  $\frac{d(\tan \delta)}{d\omega} = 0 \rightarrow \omega\tau = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\infty}} \approx 1$  时tan $\delta$ 有最大值

$$\tan \delta_{\max} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2\sqrt{\varepsilon_s \varepsilon_\infty}}$$

这种由于极化滞后于电场的变化引起  $\epsilon$ 、 $W$  ( $P$ ) 随  $\omega$  迅速变化以及  $\tan \delta$  最大值的出现，是具有松弛极化的电介质的明显特征，它可以作为极性电介质的判断依据。发生这种变化的位置是在  $\omega \tau \approx 1$  处，此区域称为“介质反常弥散区”。

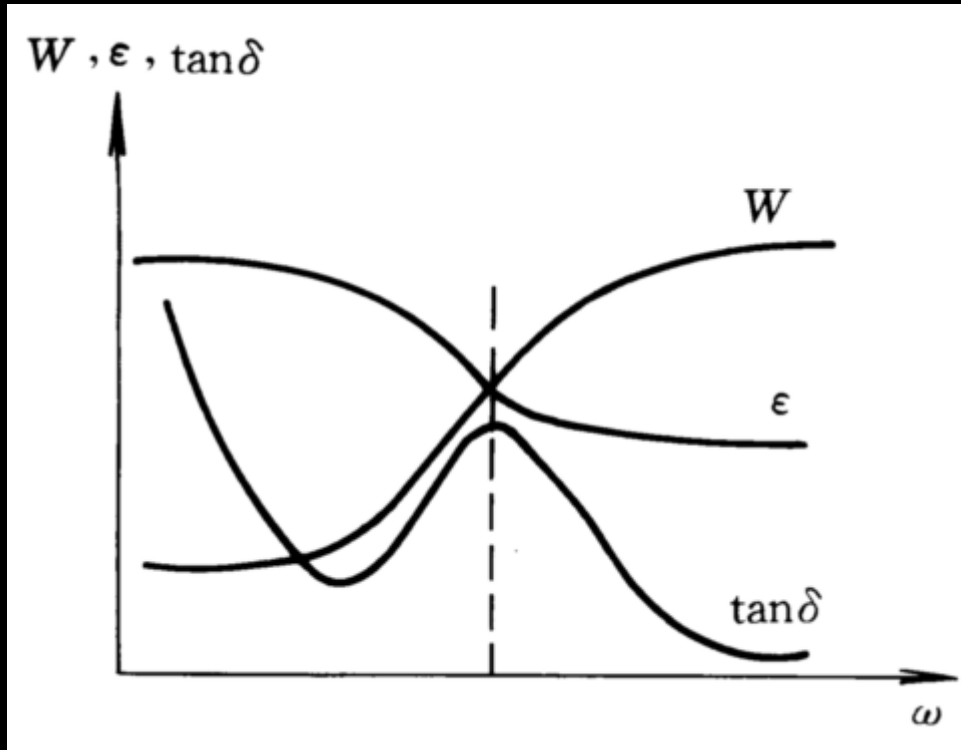


图2-10 具有松弛极化和贯穿电导时介质的频率特性



#### 4、高频区, $\omega \tau \gg 1$ 时

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\infty}$$

$$g = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})}{\tau}$$

为一定值, 与 $\omega$ 无关

$$\left. \begin{aligned} W &= (\gamma + g) A d E^2 \\ P &= (\gamma + g) E^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\because g \gg \gamma} \left\{ \begin{aligned} W &\approx g A d E^2 \\ P &\approx g E^2 \end{aligned} \right.$$

$$\tan \delta = \frac{\gamma + g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} \approx \frac{g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}}$$

$\omega \uparrow, \tan \delta \downarrow \rightarrow 0$

## 不同温度下的频谱特性:

$$\tau = \frac{1}{2\nu} e^{U/kT}$$

对同一介质, 当 $T \uparrow$ 时,  $\tau \downarrow$ ,  
对应出现反常弥散区 $\omega\tau \approx 1$ 的  
频率也越高。

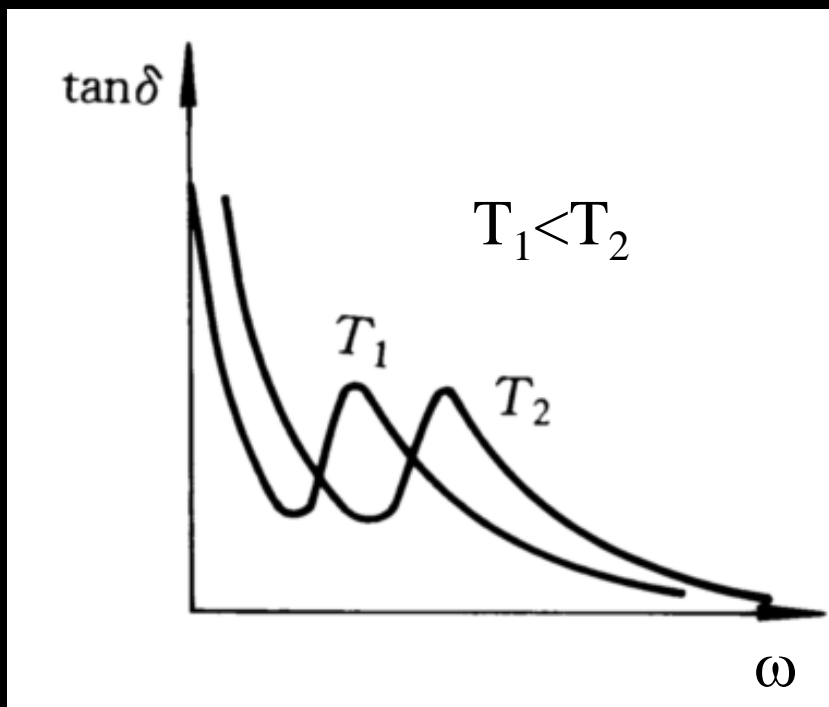


图2-11 不同温度下 $\tan \delta$  的频率特性

## 五、介电系数 $\varepsilon$ 、介质损耗 $W(P)$ 、介质损耗角正切 $\tan \delta$ 与温度的关系

- 频率  $\omega$  为定值
- $\varepsilon$ 、 $W$ 、 $\tan \delta$  都与松弛时间  $\tau$  有关，而  $\tau$  与温度成指数式关系，随温度的上升指数式下降。

$$\tau = \frac{1}{2\nu} e^{U/kT}$$

1、低温区, 即  $\tau$  很大,  $\omega \tau \gg 1$

分子热运动很弱, 松弛极化建立的速度慢

$$\gamma = A e^{-B/T}$$

低温时,  $\gamma$  很小

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\infty}$$

$$W \approx gAdE^2$$

$$P \approx gE^2$$

$$\tan \delta = \frac{g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}}$$

$$g = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})}{\tau}$$

$$\because W \propto g \propto \tau^{-1} \propto e^{-U/kT} \longrightarrow \tau \uparrow, W \uparrow$$

$$\because \tan \delta \propto g \propto \tau^{-1} \propto e^{-U/kT} \longrightarrow \tau \uparrow, \tan \delta \uparrow$$

## 2、中温区, $\omega \tau \approx 1$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$T \uparrow, \quad \tau \downarrow, \quad \varepsilon \uparrow$$

$$W \approx g A d E^2$$

$$P \approx g E^2$$

$$T \uparrow, \quad W \uparrow, \quad \tan \delta \uparrow$$

$$\tan \delta = \frac{g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}}$$

$$\text{令 } \frac{d^2 \varepsilon}{d \tau^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega \tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1 \quad \text{时, } \varepsilon \text{ 随 } T \text{ 上升最快}$$

令  $\frac{dW}{d\tau} = 0 \rightarrow \omega\tau = 1$  时  $W$  有最大值

令  $\frac{d(\tan \delta)}{d\tau} = 0 \rightarrow \omega\tau = \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_\infty}}$  时  $\tan \delta$  有最大值

3、高温区, 即  $\tau$  很小,  $\omega\tau \ll 1$

所有的极化都得以建立, 没有松弛损耗。

$$\epsilon = \epsilon_s$$

此后, 温度的升高将使得分子的热运动加剧, 定向极化发生困难; 同时, 温度升高也使得单位体积中的粒子数减少, 因此在  $\epsilon$  升到最大值以后又缓慢下降。

$$\gamma = Ae^{-B/T}$$

$$W = \gamma AdE^2$$

$$P = \gamma E^2$$

$$\tan \delta = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \varepsilon_s \omega}$$

$$T \uparrow, \quad \gamma \uparrow, \quad W \uparrow, \quad P \uparrow$$

$$T \uparrow, \quad \gamma \uparrow, \quad \tan \delta \uparrow$$

$\tan \delta$  还由于  $T \uparrow$ ,  $\varepsilon$  降低的缘故使无功电流减小, 比  $P$  上升得还要快一些。

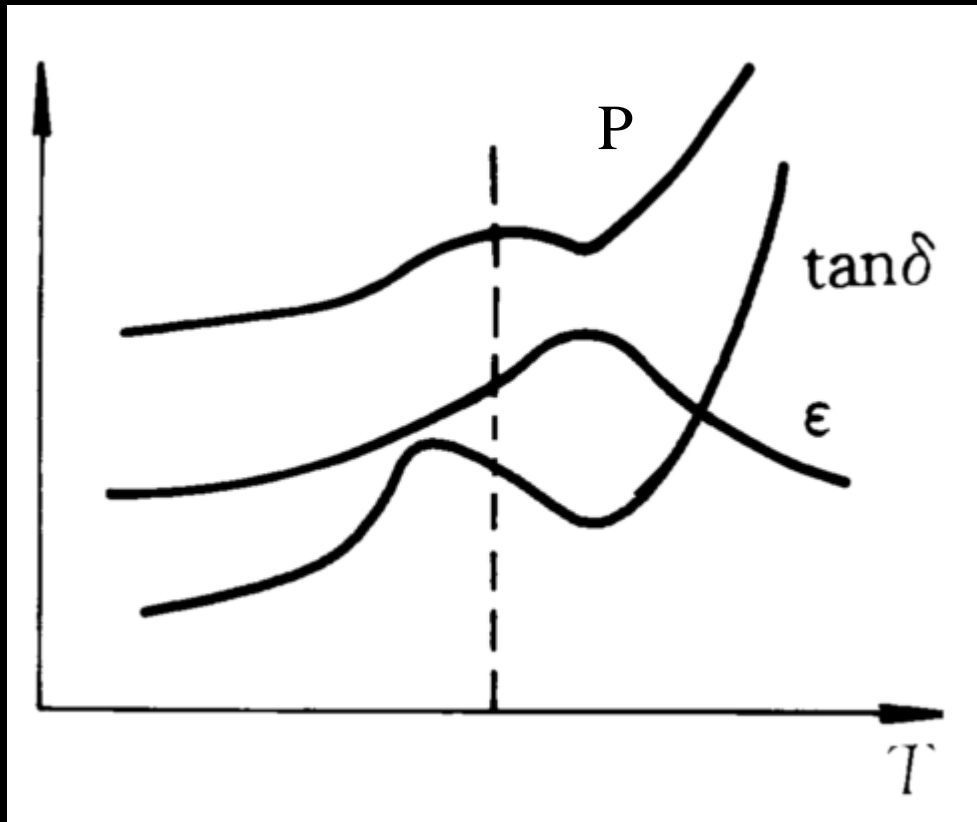


图2-12 具有松弛极化和贯穿电导时介质的温度特性

$$\left. \begin{aligned} P &= (\gamma + g)E^2 \\ \tan \delta &= \frac{\gamma + g}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \end{aligned} \right\} \longrightarrow P = \epsilon_0 \epsilon \omega \tan \delta E^2$$



# 不同频率下的温谱特性: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$

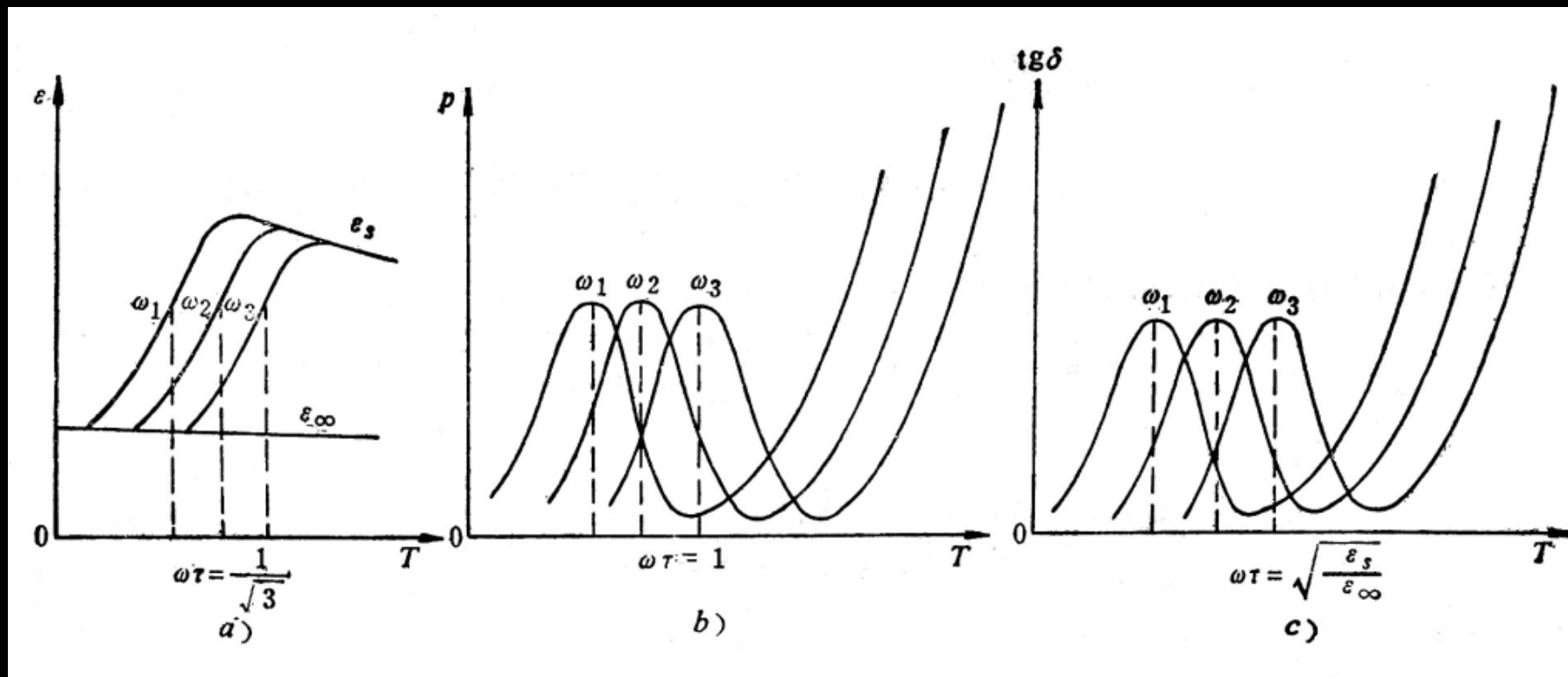
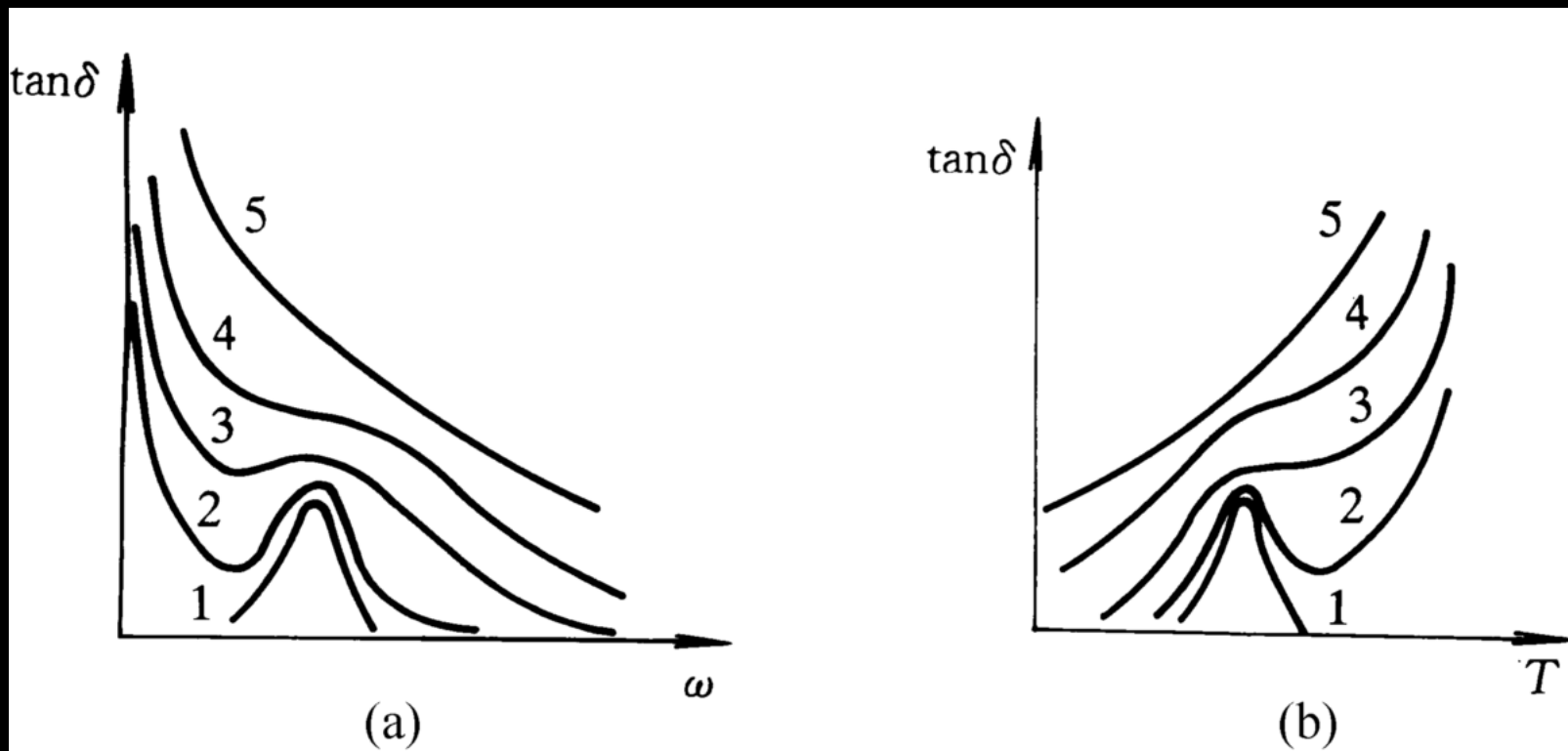


图2-13 不同频率下  $\epsilon$ 、 $P$ 、 $\tan \delta$  的温度特性

对于同一介质，工作频率越高，则对应的反常分散区的温度也越高， $\epsilon$ 、 $P$ 、 $\tan \delta$  最大值随频率升高向高温方向移动。



$$\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 < \gamma_5$$

图2-14 电导率不同的介质的 $\tan \delta$ 和 $\omega$ 、 $T$ 的关系

如果介质中电导损耗比较大，松弛极化损耗相对来说比较小，以致松弛极化的特征可能被电导损耗的特性所掩盖。随着电导损耗的增加， $\tan \delta$ 的频率、温度特性曲线中的峰值将变得平缓，甚至看不到有峰值出现。

# 内容小节

- 在交变电场作用下介质的极化强度

$$P(t) = \varepsilon_0(\varepsilon_\infty - 1)E_m \sin \omega t + \varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{E_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t)$$

- 在交变电场作用下介质中的电流

$$\begin{aligned} i(t) &= i_R(t) + i_\infty(t) + i_{rr}(t) + i_{ra}(t) \\ &= (I_{Rm} + I_{ram}) \sin \omega t + (I_{\infty m} + I_{rrm}) \cos \omega t \\ &= I_{am} \sin \omega t + I_{rm} \cos \omega t \end{aligned}$$

- 在交变电场作用下介质中的损耗

$$W = (\gamma + g)AdE^2$$

$$P = (\gamma + g)E^2$$

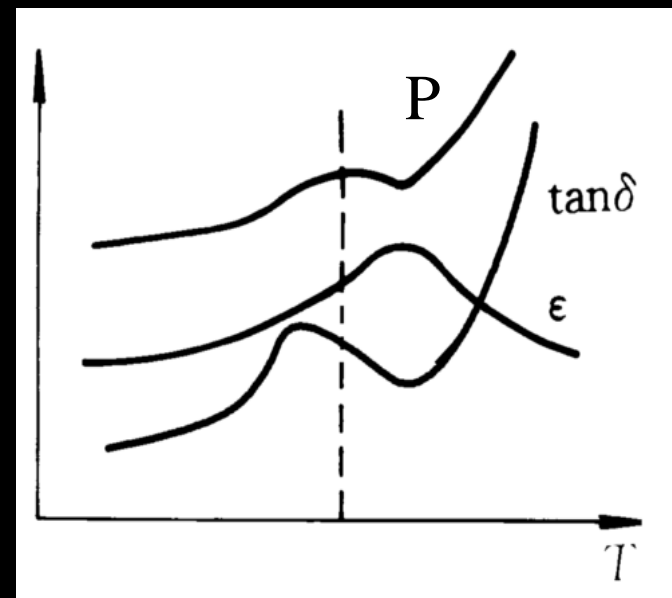
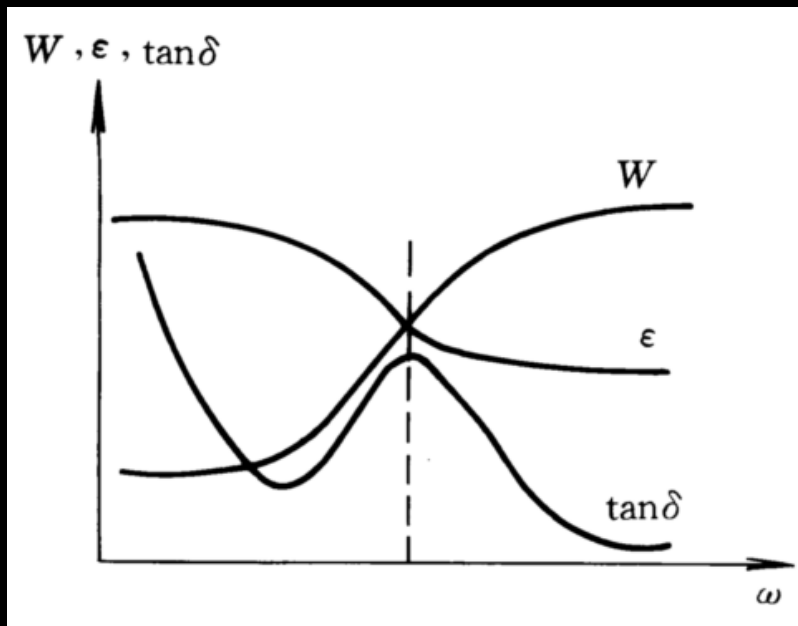
$$\tan \delta = \frac{\gamma + g}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$g = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- 在交变电场作用下介质的介电系数

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

- 介电系数  $\epsilon$ 、介质损耗  $W$  (P)、介质损耗角正切  $\tan \delta$  与频率的关系
- 介电系数  $\epsilon$ 、介质损耗  $W$  (P)、介质损耗角正切  $\tan \delta$  与温度的关系



# 第四节 复介电系数和德拜方程

## 一、复介电系数和德拜方程

### (一) 复介电系数

对平板介质电容器，施加一个交变电压， $\dot{E} = E_0 e^{i\omega t}$

$$D = \sigma$$

$$D = \varepsilon_0 E + P$$


①当介质中只有位移极化时

$$D = \sigma_{\infty}$$

$$D = \varepsilon_0 E + P_{\infty}$$

$$D = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 (\varepsilon_{\infty} - 1) E = \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} E = D_0 e^{i\omega t}$$

D与E同相位，不存在滞后现象。


$$D_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty} E_0$$

## ②当介质中存在松弛极化时

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + P_\infty + P_r$$

$$D \neq \varepsilon_0 \varepsilon_\infty E$$

设D滞后于E $\delta$ 相角，则

$$\dot{D} = D_0 e^{i(\omega t - \delta)}$$

$$\frac{\dot{D}}{\dot{E}} = \frac{D_0 e^{i(\omega t - \delta)}}{E_0 e^{i\omega t}} = \frac{D_0}{E_0} e^{-i\delta} = \varepsilon_0 \varepsilon_r e^{-i\delta} = \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{D}}{\varepsilon_0 \dot{E}}$$

电介质的复  
介电系数

令  $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$

对比  $\dot{\varepsilon} = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} e^{-i\delta} = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} (\cos \delta - i \sin \delta)$

$\varepsilon' = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} \cos \delta$

$\varepsilon'' = \frac{D_0}{\varepsilon_0 E_0} \sin \delta$

$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$



复介电系数  $\dot{\varepsilon}$  可用电容器在交变电压作用下的复电容  $\dot{C}$  来表示

$$\dot{C} = \dot{\varepsilon}C_0 = (\varepsilon' - i\varepsilon'')C_0 = C' - iC''$$

$C_0$  为同样尺寸的真空电容器的电容

$$C' = \varepsilon' C_0$$

$$C'' = \varepsilon'' C_0$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

电容器的导纳  $Y$  为

$$Y = i\omega\dot{C} = i\omega(C' - iC'') = \omega C'' + i\omega C'$$
$$= G + iB$$

电容器的  
有功电导

电容器的  
无功电导

## 流经电容器的有功电流

$$i_a = GV = \omega C''V = \omega \varepsilon'' C_0 V = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon'' A}{d} V$$

## 流经电容器的无功电流

$$i_r = BV = \omega C'V = \omega \varepsilon' C_0 V = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon' A}{d} V$$

复介电系数的实部 $\varepsilon'$ 与无功电流成正比，  
虚部 $\varepsilon''$ 与有功电流成正比。

$$\tan \delta = \frac{i_a}{i_r} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon'' = \varepsilon' \tan \delta$$

损耗因子

## 对比以前的公式

$$i_a = \frac{\gamma A}{d} V + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega^2\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{A}{d} V$$

$$i_a = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon''A}{d} V$$

$$i_r = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\infty\omega A}{d} V + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega}{1 + \omega^2\tau^2} \frac{A}{d} V$$

$$i_r = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon'A}{d} V$$

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon'' = \gamma + g$$

$$\varepsilon'' = \frac{\gamma + g}{\omega\varepsilon_0}$$

$$\varepsilon'' = \frac{g}{\omega\varepsilon_0}$$

高频

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2\tau^2}$$

## (二) 德拜方程

- 不考虑电导电流时

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\varepsilon'' = \frac{g}{\omega \varepsilon_0} = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega \tau}{\varepsilon_s + \varepsilon_{\infty} \omega^2 \tau^2}$$

德拜方程

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + i\omega\tau}$$

假设  $\varepsilon_s$ 、 $\varepsilon_\infty$  是温度的已知函数， $\tau$  也是已知的  
则德拜方程可改写为

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} = \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

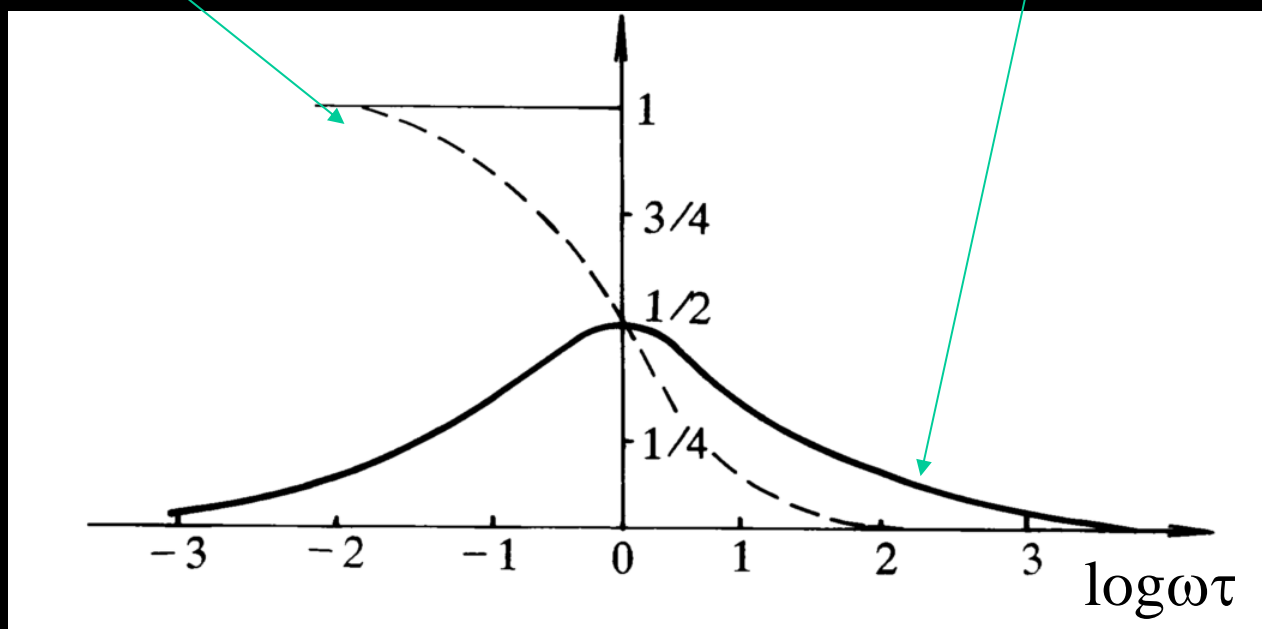


图2-15 德拜函数

## 二、 $\epsilon'$ 和 $\epsilon''$ 与 $\omega$ 和 $T$ 的关系

### 1、 $\epsilon'$ 和 $\epsilon''$ 与 $\omega$ 的关系

(1) 温度恒定,  $\tau(T)$  为一常数

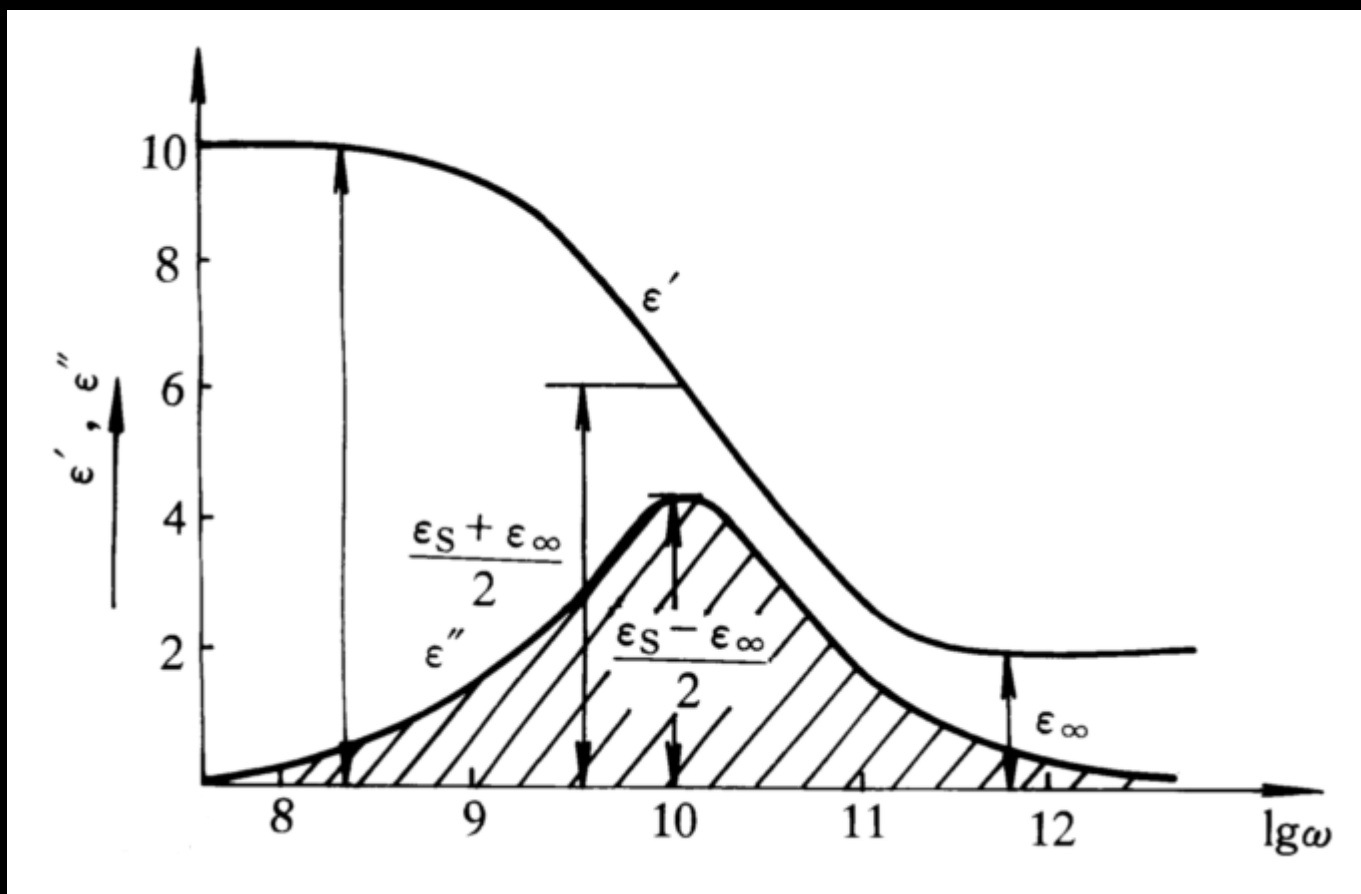


图2-16 (a)  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$  与  $\lg \omega$  的关系曲线

对 $\varepsilon'$ :

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} \text{ 时, } \varepsilon' \rightarrow \varepsilon_s$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\omega \approx \frac{1}{\tau} \text{ 时, 令 } \frac{d^2 \varepsilon'}{d\omega^2} = 0 \text{ 可得}$$

$$\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{3}} \approx \frac{1}{\tau} \text{ 处 } \frac{d\varepsilon'}{d\omega} \text{ 有最大值}$$

说明  $\varepsilon'$  在  $\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{3}} \approx \frac{1}{\tau}$  时下降最快

$$\omega \gg \frac{1}{\tau} \text{ 时, } \varepsilon' \rightarrow \varepsilon_{\infty}$$

对 $\varepsilon''$ :

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

时,  $\varepsilon'' \propto \omega\tau$

$\omega \uparrow, \varepsilon'' \uparrow$

$$\omega \approx \frac{1}{\tau}$$

时,  $\frac{d\varepsilon''}{d\omega} = 0$  可得  $\omega_m = \frac{1}{\tau}$  时 $\varepsilon''$  最大

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_\infty)$$

$$\varepsilon''_{\max} = \frac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)$$

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}$$

$$\omega \gg \frac{1}{\tau}$$

时,  $\varepsilon'' \propto \frac{1}{\omega\tau}$

$\omega \uparrow, \varepsilon'' \downarrow$



对 $\tan\delta$ :

$$\tan \delta = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2}$$

$\omega \ll \frac{1}{\tau}$  时,  $\tan \delta \propto \omega\tau$

$\omega \uparrow, \tan\delta \uparrow$

$\omega \approx \frac{1}{\tau}$  时,  $\frac{d \tan \delta}{d\omega} = 0$  得  $\omega_{m'} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\infty}}$  时 $\tan\delta$ 最大

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{2\varepsilon_s\varepsilon_\infty}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty} \\ \varepsilon'' &= \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty} \sqrt{\varepsilon_s\varepsilon_\infty} \\ \tan \delta_{\max} &= \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2\sqrt{\varepsilon_s\varepsilon_\infty}} \end{aligned} \right.$$

$\omega \gg \frac{1}{\tau}$  时,  $\tan \delta \propto \frac{1}{\omega\tau}$

$\omega \uparrow, \tan\delta \downarrow$

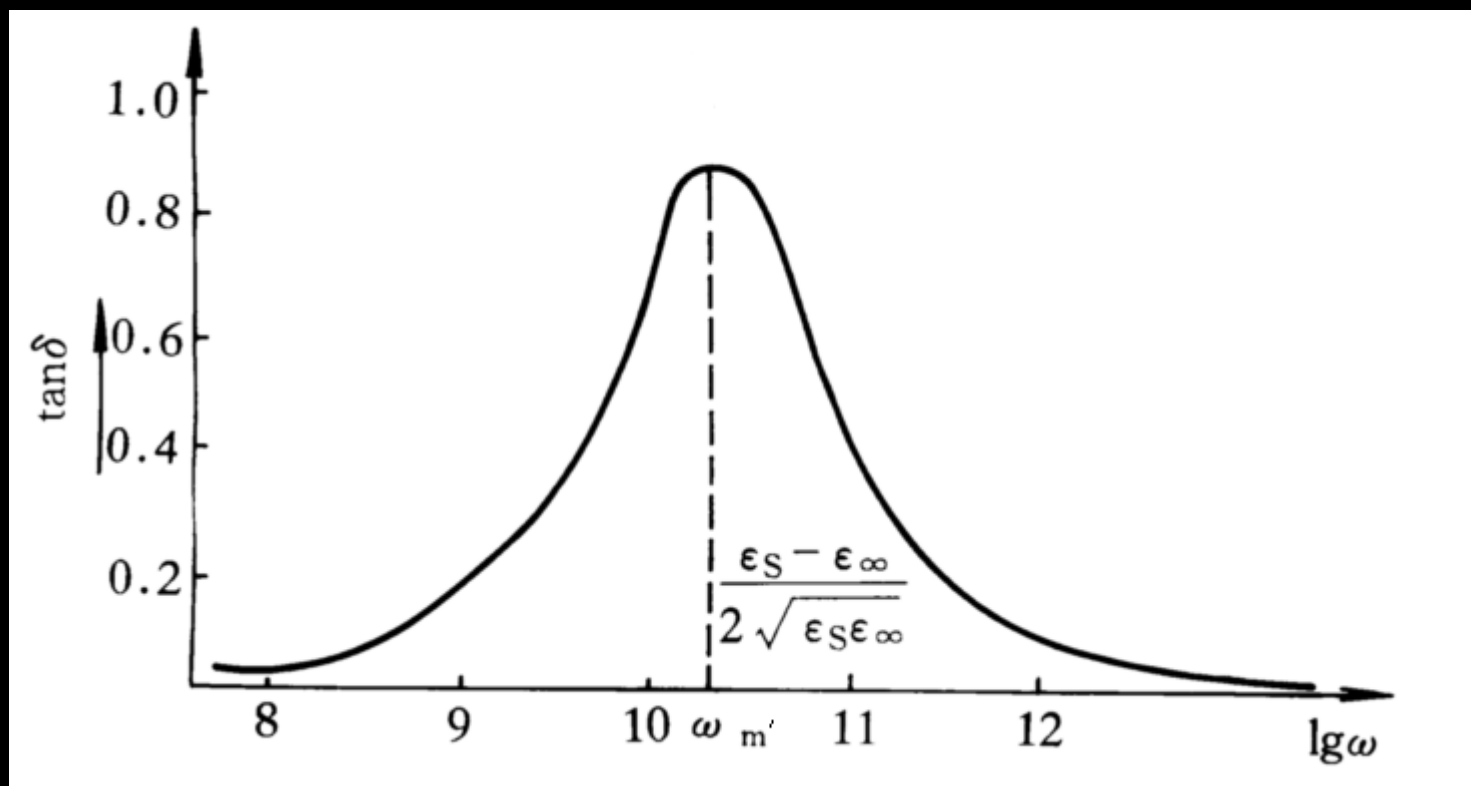
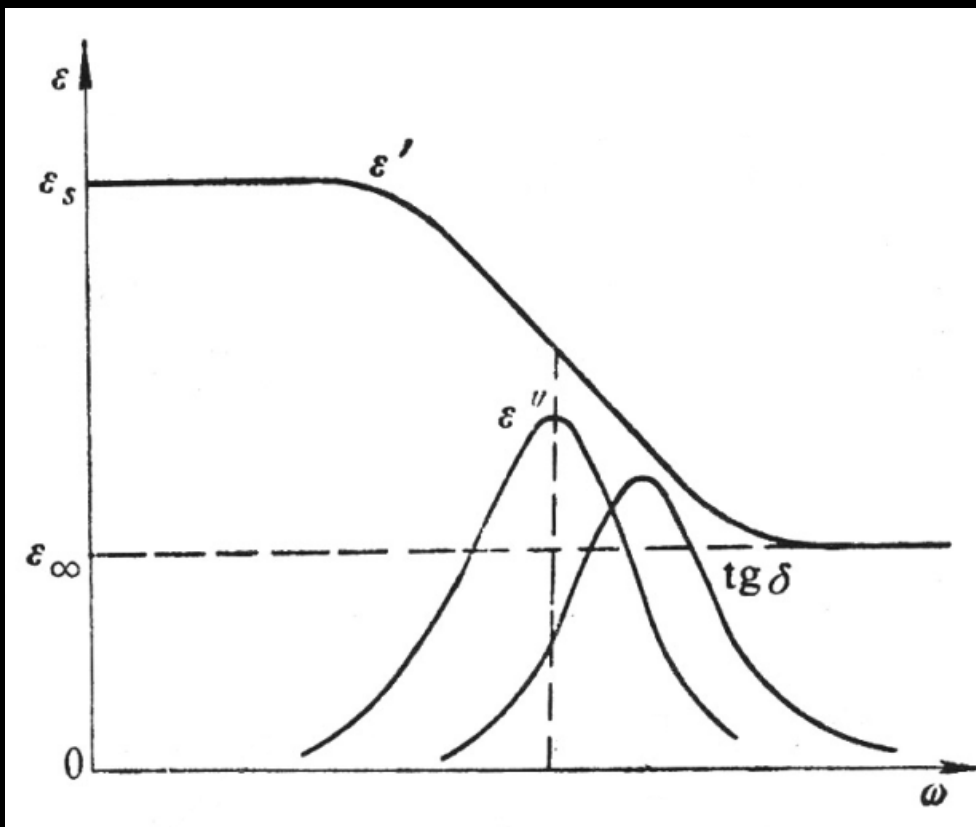


图2-16 (b)  $\tan \delta$  与  $\lg \omega$  的关系曲线



$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

图2-16 (c)  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$ ,  $\tan \delta$   
与  $\lg \omega$  的关系曲线

若知道了整个频率范围的 $\epsilon''$ ，则利用恒等式

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2}$$

即 
$$\int_0^{\infty} \frac{\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} d \ln \omega = \frac{\pi}{2}$$

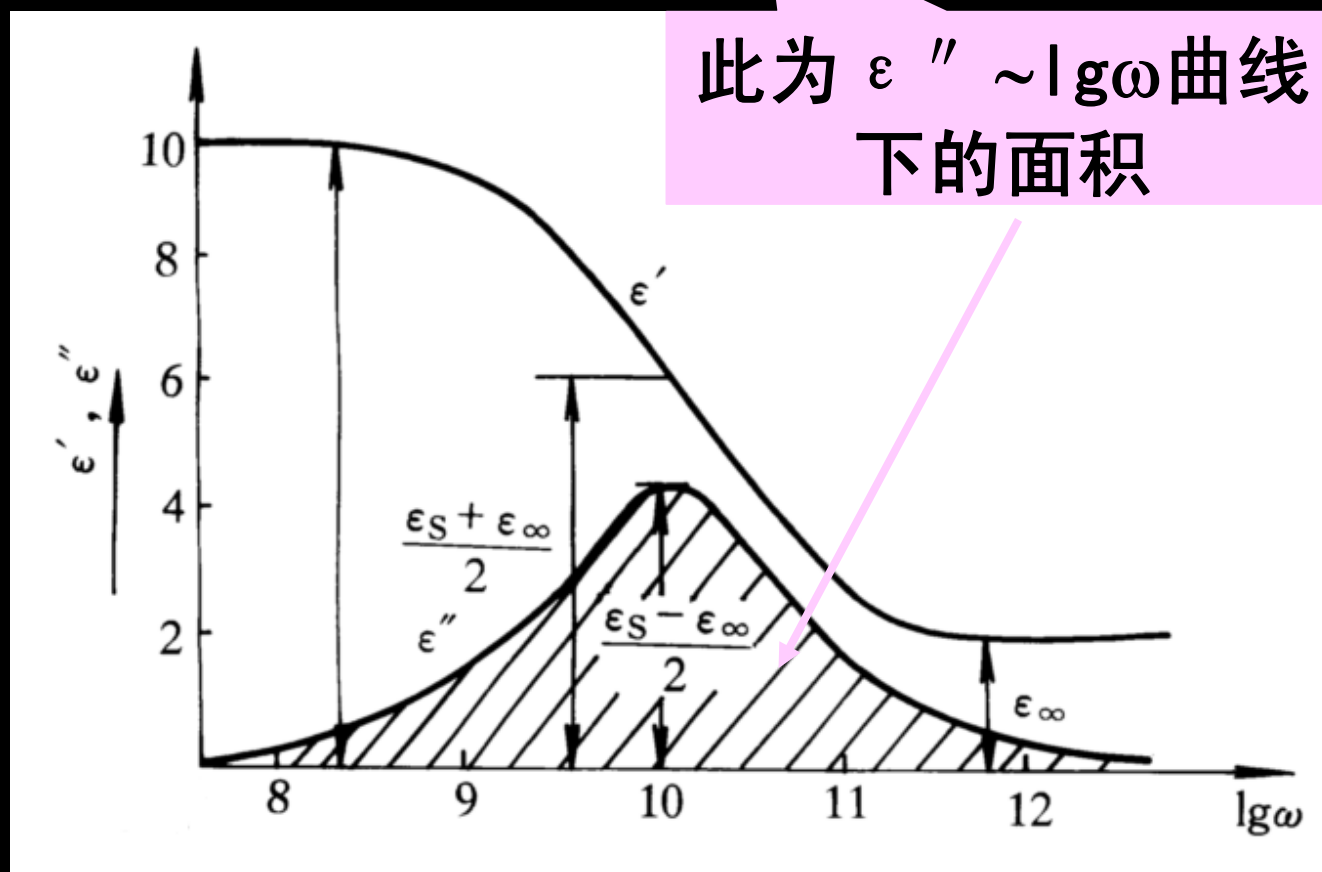
→ 
$$\int_0^{\infty} \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{\infty})\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} d \ln \omega = \frac{\pi}{2}(\epsilon_s - \epsilon_{\infty})$$

→ 
$$\int_0^{\infty} \epsilon'' d \ln \omega = \frac{\pi}{2}(\epsilon_s - \epsilon_{\infty})$$

此为  $\epsilon'' \sim \ln \omega$  曲线下的面积

$$\int_0^{\infty} \varepsilon'' d \lg \omega = \frac{\pi}{2} (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \lg e$$

此为  $\varepsilon'' \sim \lg \omega$  曲线  
下的面积



## (2) 不同温度下, $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$ 的频率特性

当温度升高时,  $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$  同时向高频方向移动, 而  $\varepsilon_s$ 、 $\varepsilon''_{\max}$  值稍有下降。

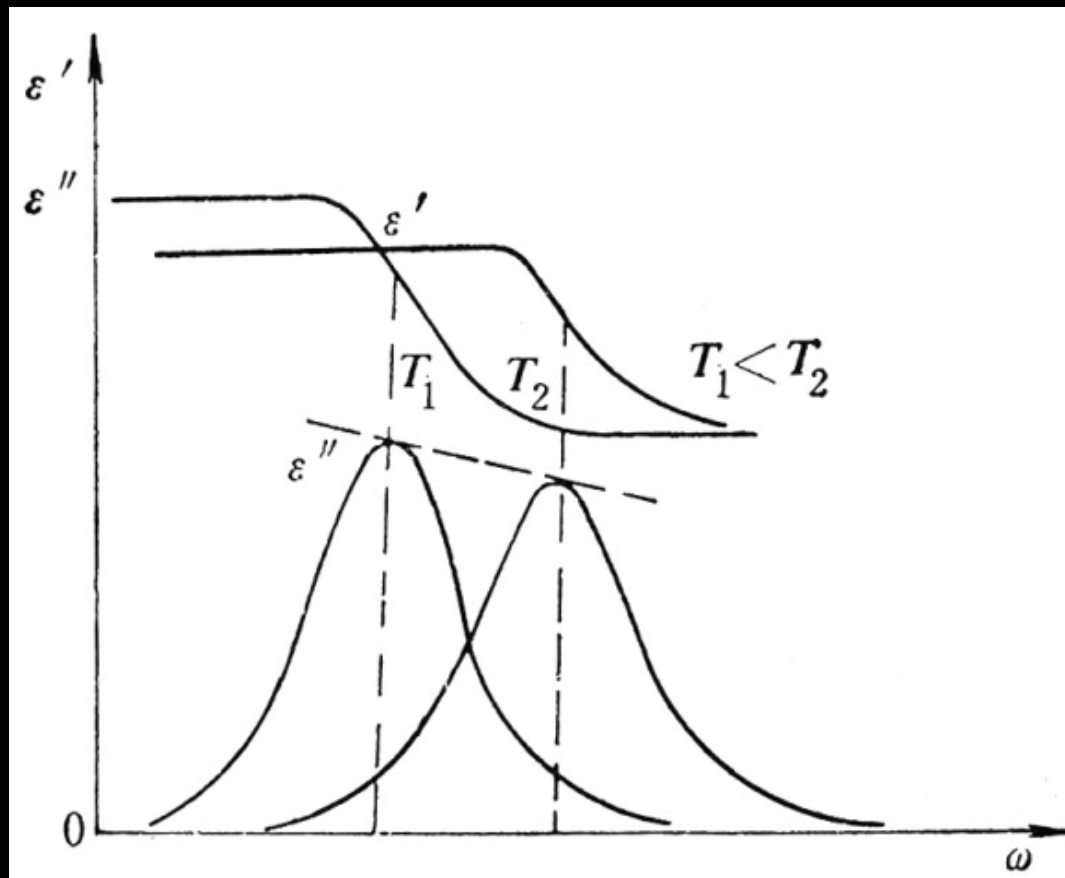


图2-17 不同温度下,  $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$  的频率特性

## 2、 $\varepsilon'$ 和 $\varepsilon''$ 与T的关系

$\varepsilon'$ 和 $\varepsilon''$ 与T的关系是通过  $\varepsilon_s - \varepsilon_\infty$  和  $\tau$  与温度的关系来表现的。

$$\varepsilon_s - \varepsilon_\infty = \frac{N}{3\varepsilon_0} \frac{\mu_0^2}{kT} \frac{E_e}{E}$$

$$\tau = \frac{1}{2\nu} e^{U/kT}$$

## (1) 频率一定时

对 $\varepsilon'$ :

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

低温区,  $\omega \tau \gg 1$  时  $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_{\infty}$

中温区,  $\varepsilon'$  随  $T \uparrow$  而  $\uparrow$ , 在  $\omega \tau = \frac{1}{\sqrt{3}}$  时,  $\varepsilon'$  随  $T$  变化最快。

高温区,  $\omega \tau \ll 1$   $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon_s$

$\varepsilon' = \varepsilon_s$  时达到最大, 此后  $T \uparrow$ ,  $\varepsilon_s \downarrow$



对 $\varepsilon''$  :

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

低温区,  $\omega\tau \gg 1$  时  $\varepsilon'' \propto \tau^{-1} \propto e^{-U/kT}$   $T \uparrow, \varepsilon'' \uparrow$

中温区, 在  $\omega\tau = 1$  时,  $\varepsilon''$  出现峰值。  $\varepsilon''_{\max} = \frac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)$

高温区,  $\omega\tau \ll 1$   $\varepsilon'' \propto \tau \propto e^{U/kT}$   $T \uparrow, \varepsilon'' \downarrow$

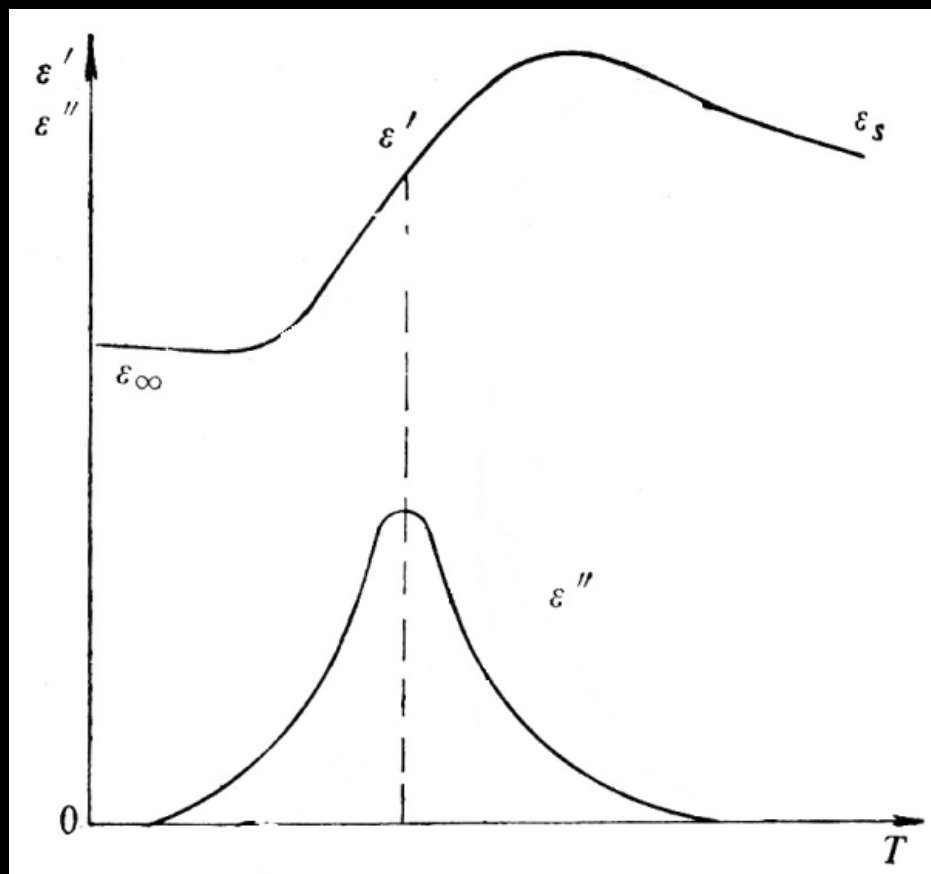


图2-18  $\epsilon'$  ,  $\epsilon''$  与  $T$  的关系曲线

## (2) 不同频率下, $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$ 的温度特性

当频率升高时,  $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$  同时向高温方向移动, 而  $\varepsilon_s$ 、 $\varepsilon''_{\max}$  值稍有下降。

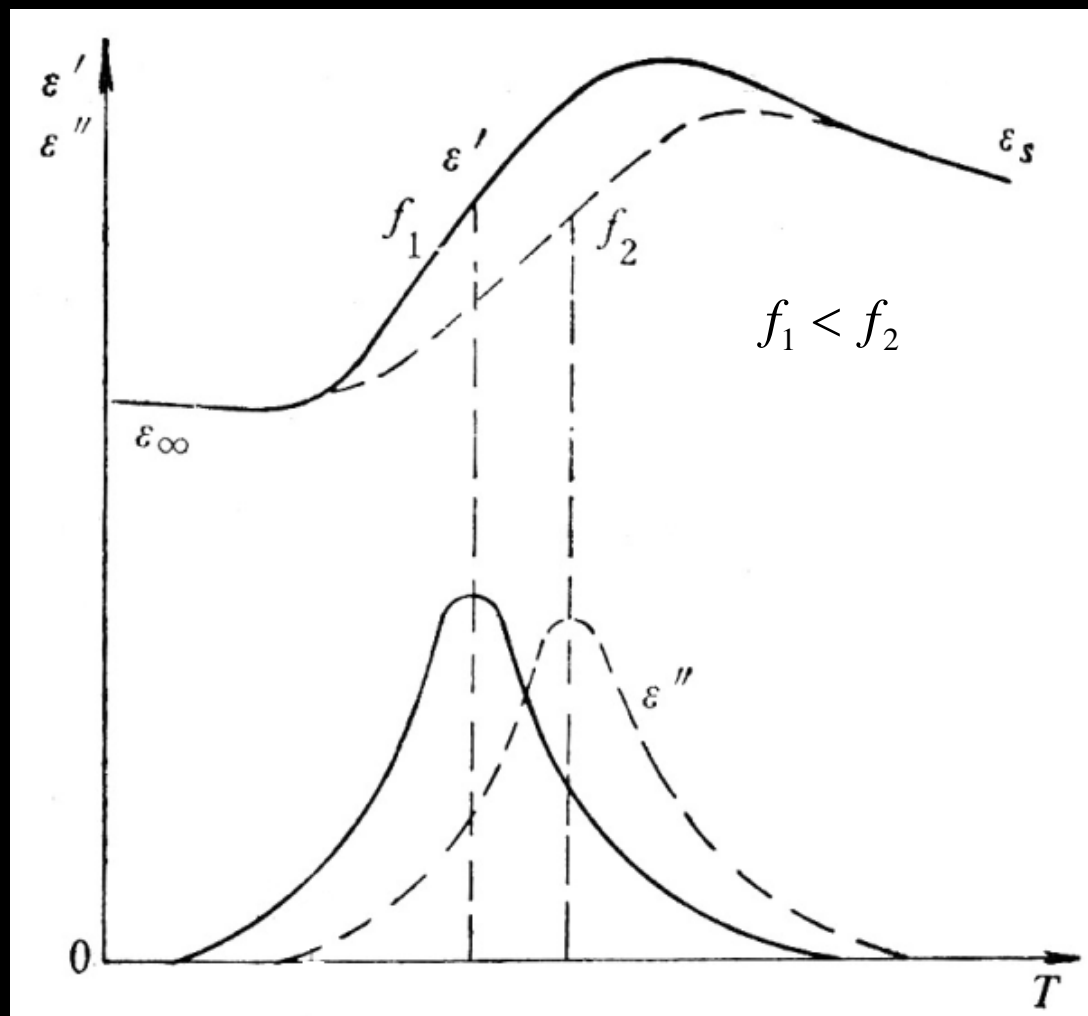


图2-19 不同频率下  $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$  的温度特性

### 3、cole-cole图

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2} \\ \varepsilon'' &= \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty})\omega\tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \end{aligned} \right\}$$



$$\left( \varepsilon' - \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_{\infty}}{2} \right)^2 + \varepsilon''^2 = \left( \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{2} \right)^2$$

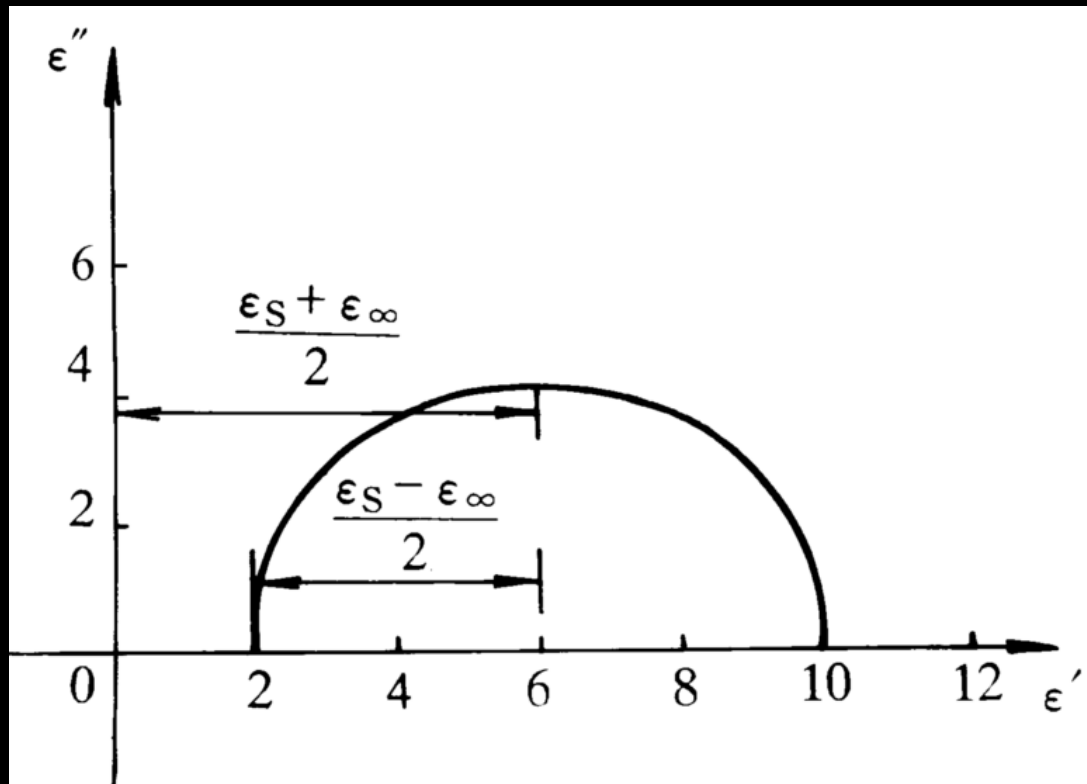


图2-20 Cole-Cole图

# 内容小节:

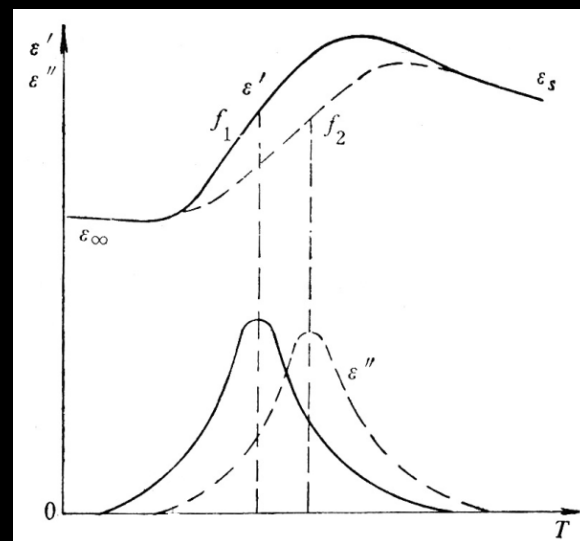
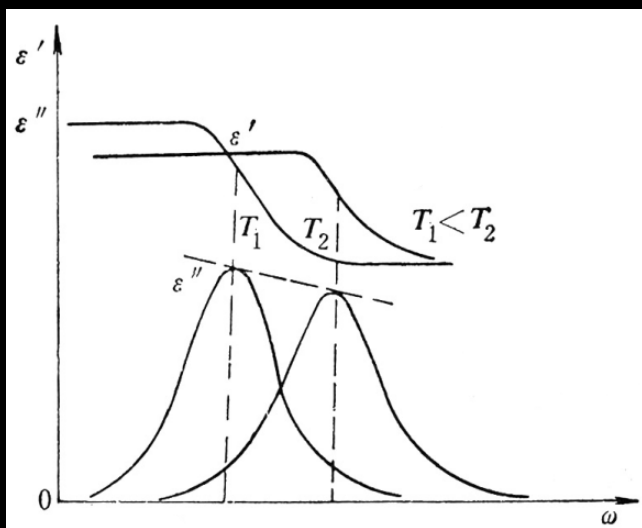
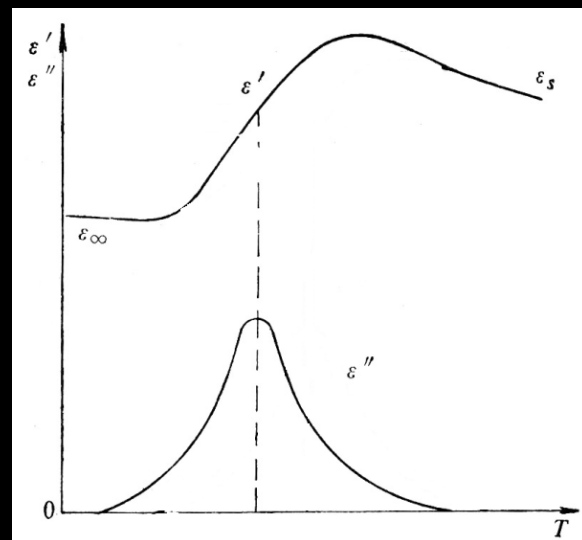
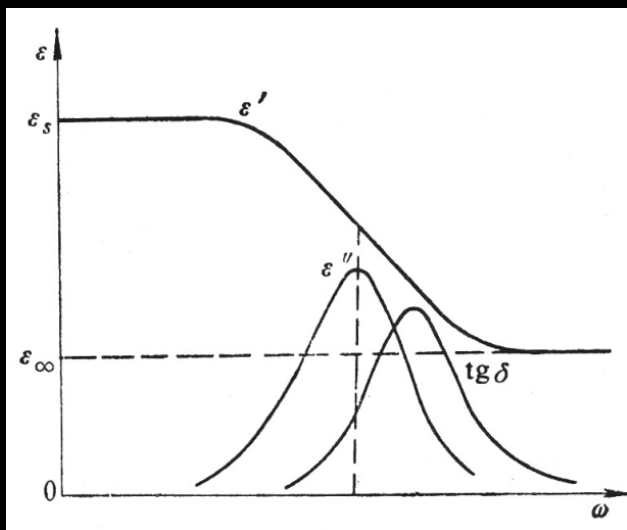
## 1、复介电系数和德拜方程

$$\dot{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' \quad \epsilon' = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{\infty}}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\epsilon'' = \frac{g}{\omega \epsilon_0} = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{\infty})\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

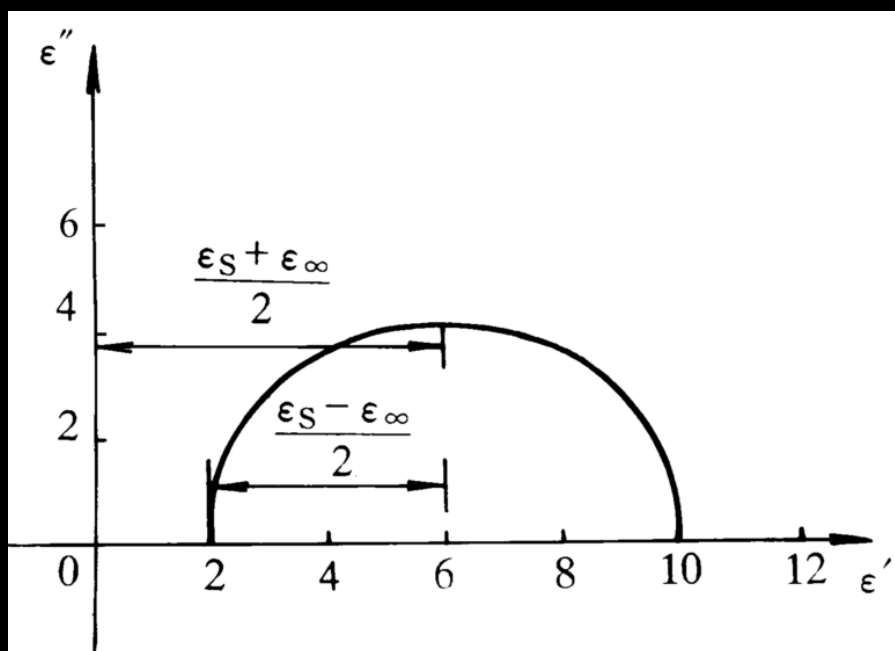
$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_{\infty})\omega \tau}{\epsilon_s + \epsilon_{\infty} \omega^2 \tau^2}$$

## 2、 $\epsilon'$ 和 $\epsilon''$ 与 $\omega$ 和 $T$ 的关系



### 3、cole-cole图

$$\left( \epsilon' - \frac{\epsilon_S + \epsilon_\infty}{2} \right)^2 + \epsilon''^2 = \left( \frac{\epsilon_S - \epsilon_\infty}{2} \right)^2$$



## 第五节 松弛时间的分布

前面所讨论的  $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$ 、 $\tan \delta$  的频率和温度特性中都认为介质中全部分子只有单一的松弛时间，也就是说介质中所有的分子其松弛状态相同。然而，事实是依据物质的结构、分子所处的状态、分子间的相互作用以及热运动的影响等，对于处在物质结构的不同位置 and 不同时间来说，松弛状态是各不相同的。

$$\tau = \frac{1}{2\nu} e^{U/kT}$$

事实上，松弛时间  $\tau$  是围绕其最大几率值的一个分布。



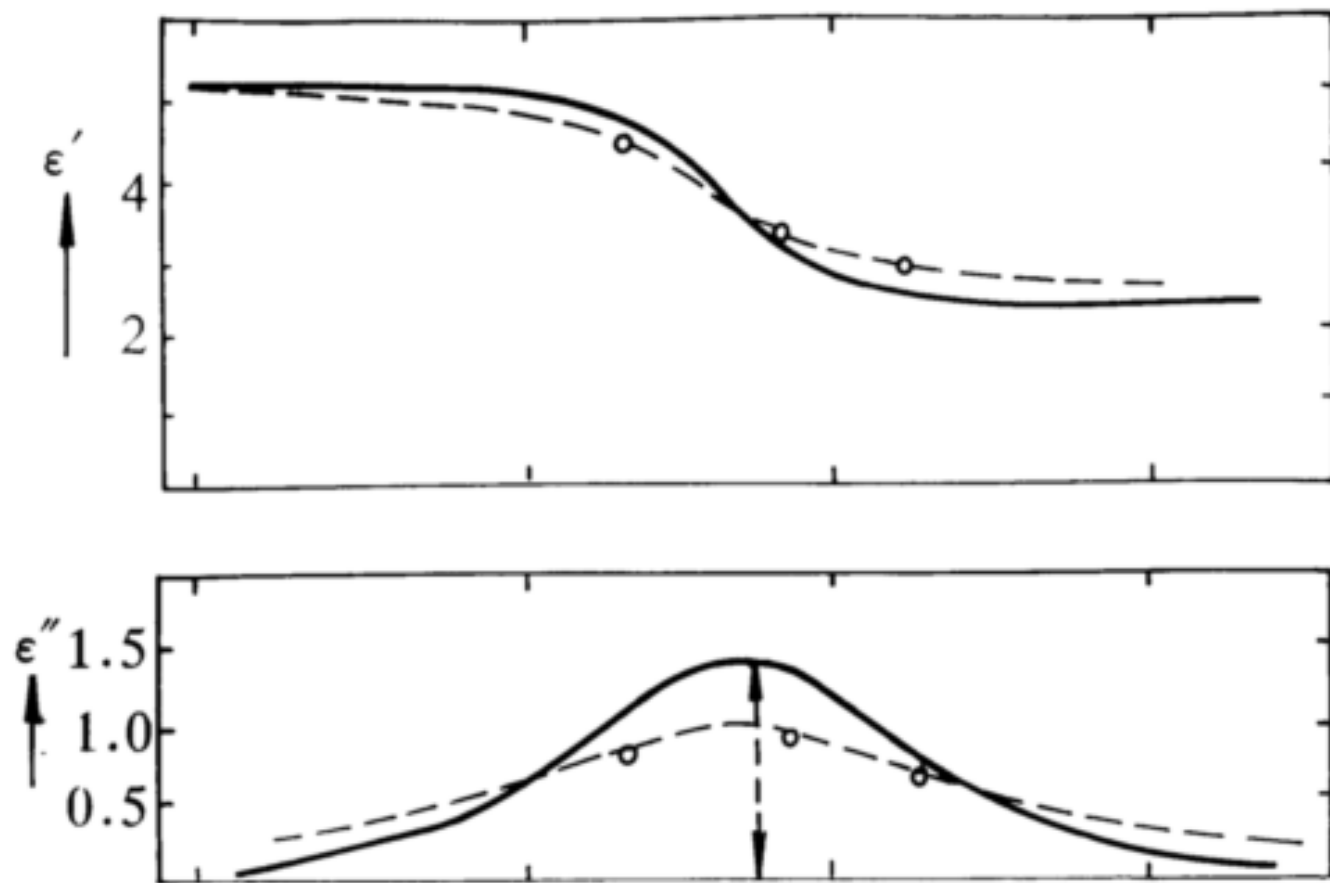


图2-21 (a) 实际介质的  $\epsilon'$ 、 $\epsilon''$  与  $\omega$  的关系

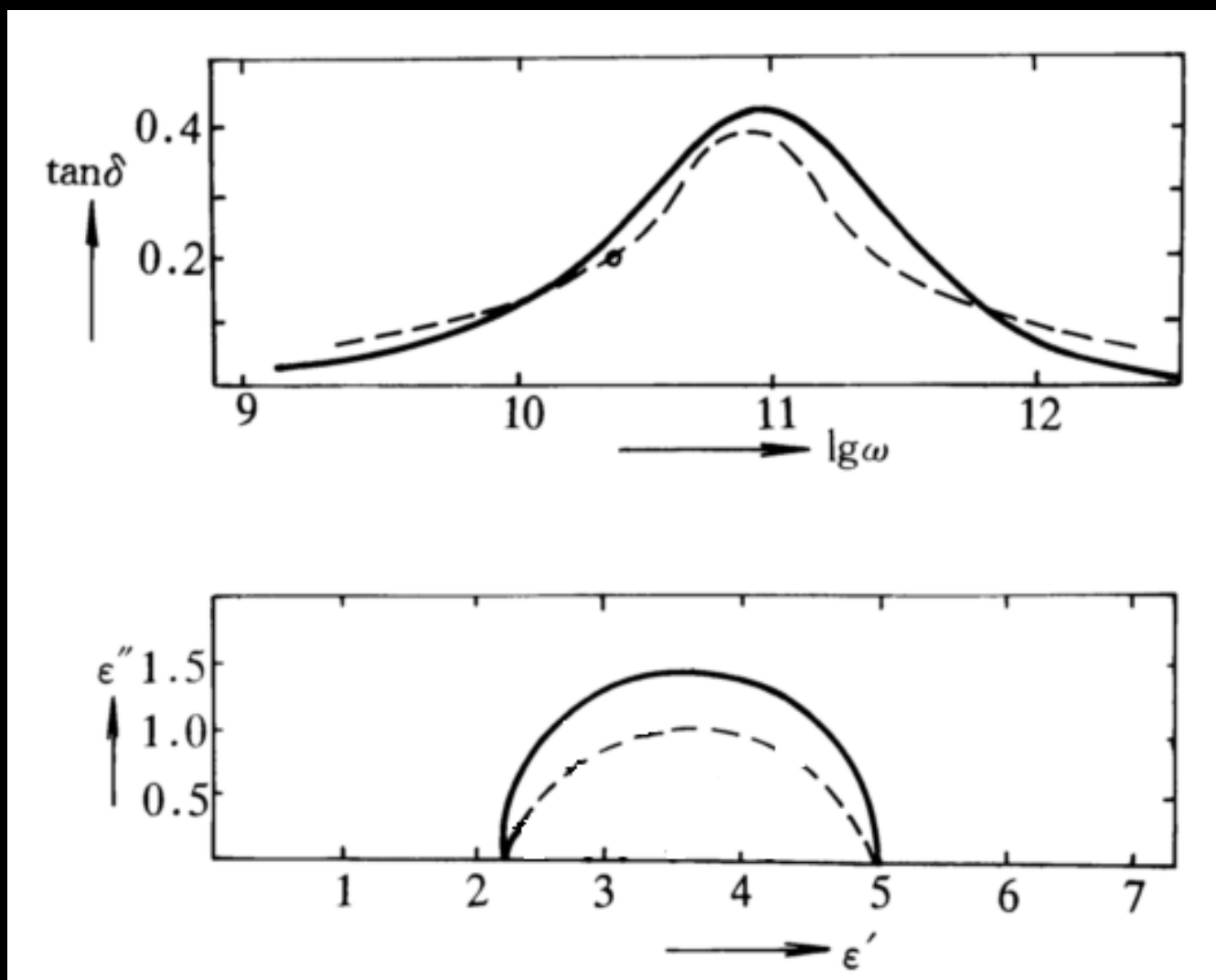


图2-21 (b) 实际介质的 $\tan \delta$  与  $\omega$  的关系以及Cole-Cole图

# 一、具有两个松弛时间的损耗

如果介质是由具有不同松弛时间的两种分子组成，若松弛时间分别为  $\tau_1$  和  $\tau_2$  ( $\tau_1 > \tau_2$ )，则  $\tan \delta$  的频率曲线上能观察到两个最大值，第一个最大值在相对较低的频率  $\omega_1$  处，第二个最大值位于相对较高频率  $\omega_2$  处，

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_n}}$$

$$\tan \delta_{\max 1} = \frac{\epsilon_s - \epsilon_n}{2\epsilon_s} \sqrt{\frac{\epsilon_s}{\epsilon_n}} = \frac{\epsilon_s - \epsilon_n}{2\sqrt{\epsilon_s \epsilon_n}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\tau_2} \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\epsilon_\infty}}$$

$$\tan \delta_{\max 2} = \frac{\epsilon_n - \epsilon_\infty}{2\epsilon_n} \sqrt{\frac{\epsilon_n}{\epsilon_\infty}} = \frac{\epsilon_n - \epsilon_\infty}{2\sqrt{\epsilon_n \epsilon_\infty}}$$

$\epsilon_n$ 是在频率 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 之间的介电系数

$$\epsilon_s > \epsilon_n > \epsilon_\infty$$

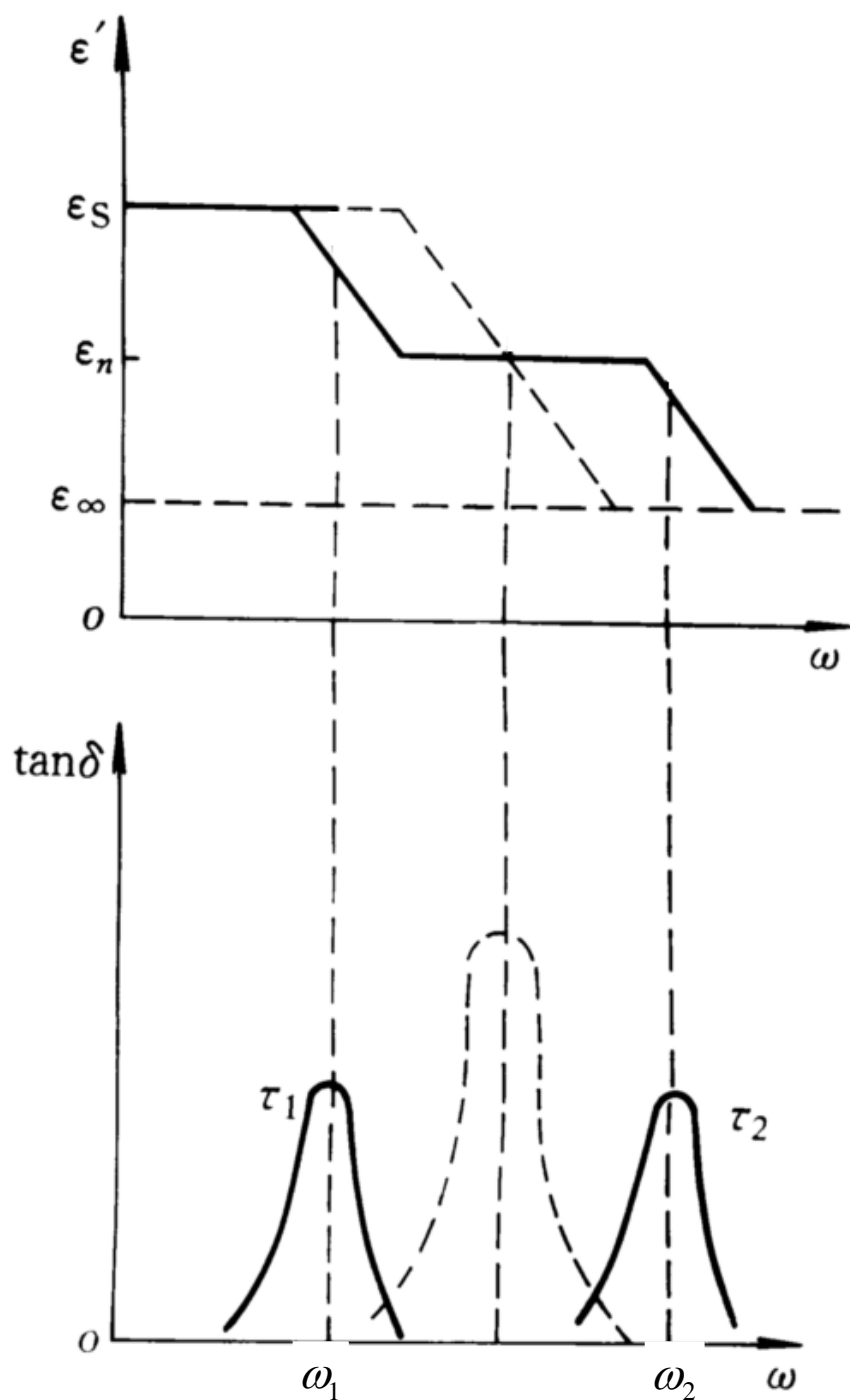


图2-22 两种情况下  $\epsilon'$  和  $\tan \delta$  与频率的关系

虚线——一个松弛时间

实线——两个松弛时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$

在许多介质中，特别是在组合绝缘的介质中，由于介质中有不同类的质点， $\tan \delta$  将出现两个甚至多个峰值。

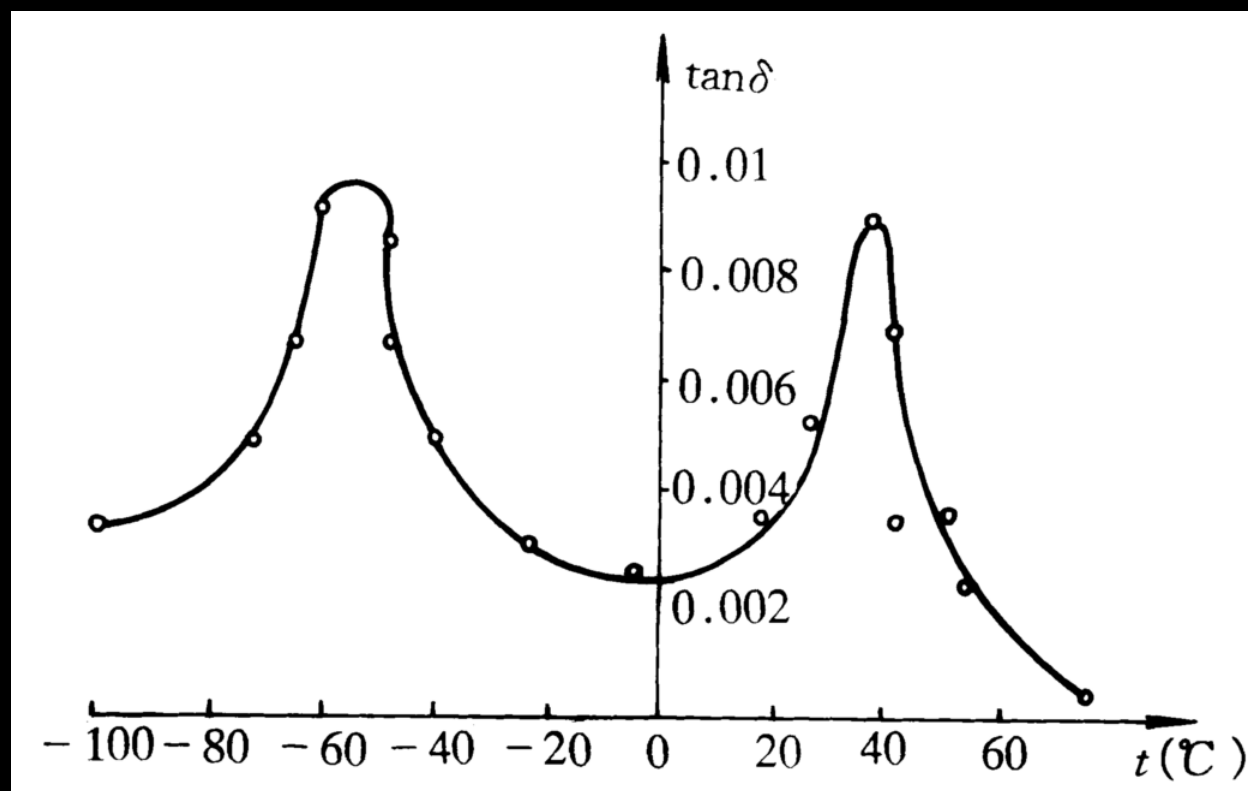


图2-23 变压器油-松香复合浸渍的 $\tan \delta \sim f(T)$  实验曲线

如果介质有一组互相很接近的松弛时间，那么  $\tan \delta$  峰值的包线占据很宽的频率范围，并变得平缓，这就是在具有多个松弛时间的介质中观察到的反常弥散区变宽， $\tan \delta$  峰值不很明显的原因。

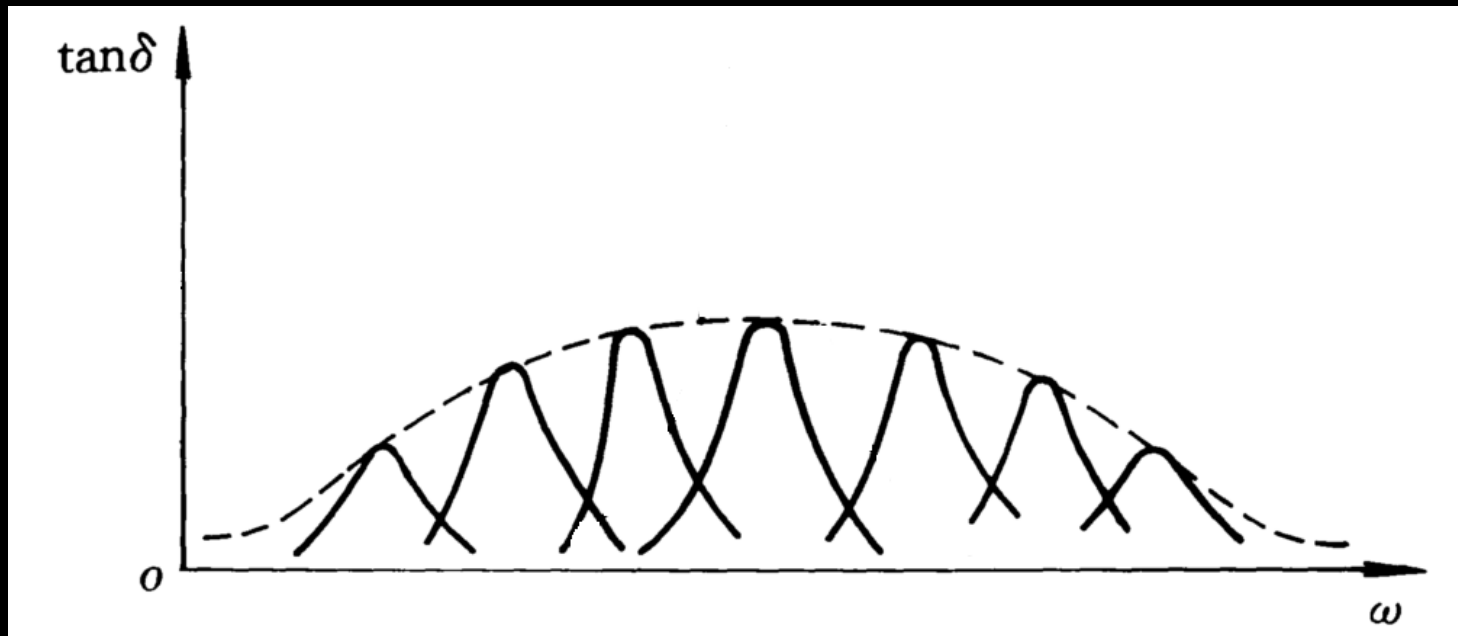


图2-24 有一组松弛时间的介质的 $\tan \delta$  和  $\omega$  的关系

## 二、具有几个松弛时间的介质损耗

设  $f(\tau)$  为松弛时间  $\tau$  的几率分布函数，如所有分子具有相同的松弛时间  $\tau$ ，则  $f(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$ 。  
当介质存在一组分散松弛时间，则  $f(\tau) d\tau$  表示松弛时间  $\tau$  在  $\tau \sim \tau + d\tau$  内的几率，且满足

$$\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau = 1$$

当计及松弛时间的分布，德拜方程改写成

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \int_0^{\infty} \frac{f(\tau) d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\varepsilon'' = (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \int_0^{\infty} \frac{\omega \tau f(\tau) d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

史维特方程

选择分布函数的要求:

①选择的分布函数要使  $\varepsilon'$ 、 $\varepsilon''$  计算值与实验数据相统一。

②在选择分布函数  $f(\tau)$  时, 必须考虑到在  $\varepsilon''$  或  $\tan \delta$  频率曲线上的最大值变宽的同时, 最大值在降低。

经验公式:

① Kirkwood-Fuoss提出的另一种  $\varepsilon''$  的表示式为

$$\varepsilon'' = \frac{\lambda(\varepsilon_S - \varepsilon_\infty)}{(\omega\tau_B)^\lambda + (\omega\tau_B)^{-\lambda}}$$

$$\varepsilon''_{\max} = \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_S - \varepsilon_\infty)$$

$$0 < \lambda < 1$$

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_\infty}{(\omega\tau)^1 + (\omega\tau)^{-1}}$$

$$\varepsilon''_{\max} = \frac{1}{2}(\varepsilon_S - \varepsilon_\infty)$$



## ②cole-cole给出的经验公式

在松弛时间分布的情况下， cole-cole图是一段圆弧，圆心在横轴以下，这表示复介电系数的公式必须进行修正。

$$\dot{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{\infty}}{1 + i\omega\tau}$$



$$\dot{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'' = \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{\infty}}{1 + (i\omega\tau)^{1-a}}$$

$0 < a < 1$ ，表示松弛时间的分散程度。 $a$ 愈大，松弛时间分布愈宽。

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \frac{1 + (\omega\tau)^{1-a} \sin \frac{\pi a}{2}}{1 + 2(\omega\tau)^{1-a} \sin \frac{\pi a}{2} + (\omega\tau)^{2(1-a)}}$$

$$\varepsilon'' = (\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \frac{(\omega\tau)^{1-a} \cos \frac{\pi a}{2}}{1 + 2(\omega\tau)^{1-a} \sin \frac{\pi a}{2} + (\omega\tau)^{2(1-a)}}$$

当  $\omega\tau = 1$  时,  $\varepsilon''_{\max} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{2} \frac{\cos \frac{\pi a}{2}}{1 + \sin \frac{\pi a}{2}}$

$$\left[ \varepsilon' - \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \right]^2 + \left[ \varepsilon'' + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \tan \frac{\pi a}{2} \right]^2 = \left[ \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2} \frac{1}{\cos \frac{\pi a}{2}} \right]^2$$

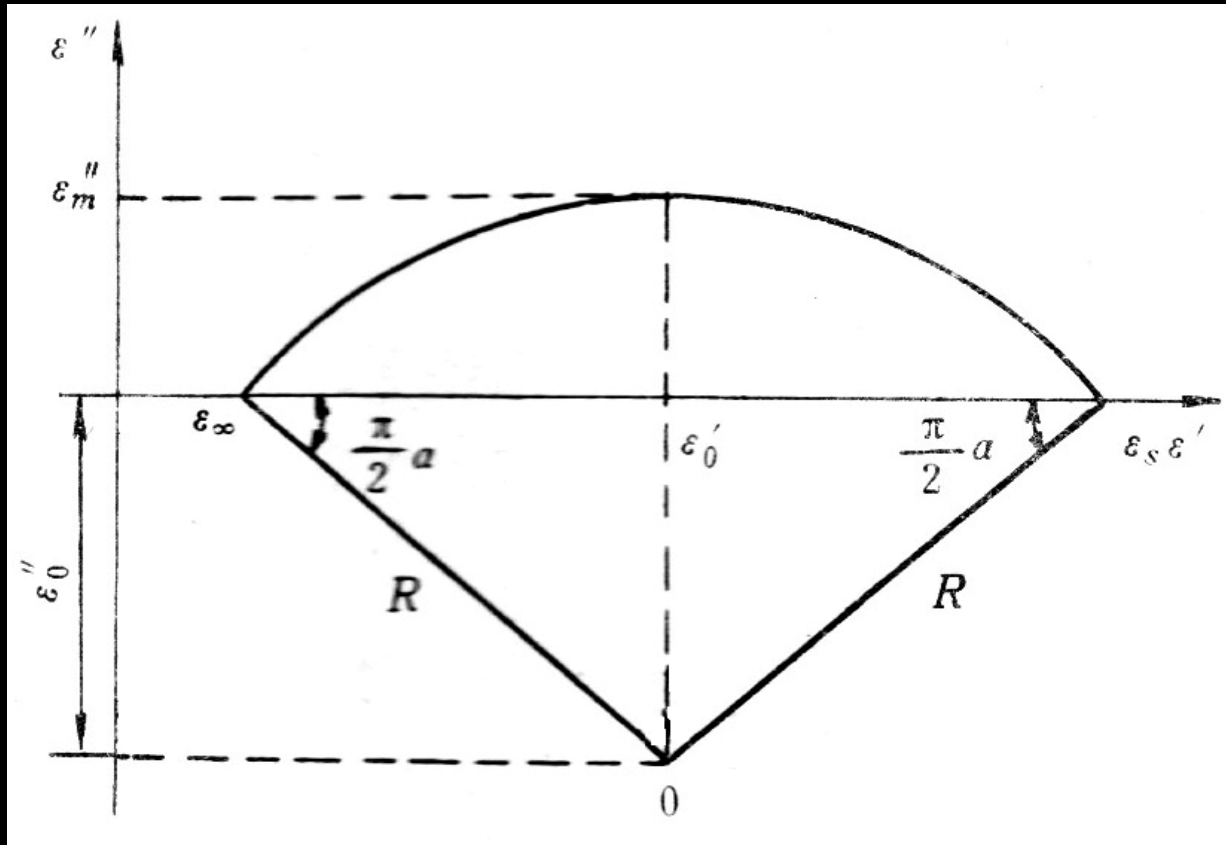


图2-25 一组松弛时间的cole-cole圆弧

## 内容小节:

- 1、 松弛时间分布时介质的 $\epsilon'$ 、 $\epsilon''$ 、 $\tan\delta$ 以及cole-cole图随 $\omega$ 、 $T$ 的变化情况偏离了德拜方程。
- 2、 史维特方程及经验公式。