概率论与数理统计（理工类 第四版）

吴赣昌 主编

课后习题答案

鹤鹤答案工作室

随机事件及其概率

1.1 随机事件

习题 1 试说明随机试验应具有的三个特点.

解答：

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会发生.

习题 2 将一枚均匀的硬币抛两次，事件 A，B，C 分别表示“第一次出现正面”，“两次出现同一面”，“至少有一次出现正面”，试写出样本空间及事件 A，B，C 中的样本点.

解答：

设试验的样本空间为 S，则 S，A，B，C 可表示为

$S=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}$；

$A=\{$(正，正)，(正，反)$\}$；

$B=\{$(正，正)，(反，反)$\}$；

$C=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)$\}$.

习题3

掷一颗骰子的试验，观察其出现的点数，事件 $A=\{$偶数点$\}$，$B=\{$奇数点$\}$，$C=\{$点数小于 5$\}$，$D=\{$点数为小于 5 的偶数$\}$，讨论上述事件的关系.

解答：

易知样本空间

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

则

$$A=\{2, 4, 6\}, \quad B=\{1, 3, 5\},$$

$$C=\{1, 2, 3, 4\}, \quad D=\{2, 4\}.$$

从而

$$D\subset A, \quad D\subset C, \quad \overline{A}=B, \quad B\cap D=\varnothing.$$

习题4

设某人向靶子射击 3 次，用 A_i 表示“第 i 次射击击中靶子”（$i=1, 2, 3$），试用语言描述下列事件：

(1) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；

(2) $\overline{A_1\cup A_2}$；

(3) $(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$.

解答：

(1) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$ 表示 3 次射击至少有一次没击中靶子；

(2) $\overline{A_1\cup A_2}$ 表示前两次都没有击中靶子；

(3) $(A_1A_2\overline{A_3})\cup(\overline{A_1}A_2A_3)$ 表示恰好连续两次击中靶子.

习题5

判断下列各式哪个成立，哪个不成立，说明为什么．

(1)若 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset\overline{A}$；

(2) $(A\cup B)-B=A$；

(3) $A(B-C)=AB-AC$．

解答：

(1)成立．否则 B 不发生不导致 A 不发生，换言之，B 不发生导致 A 发生，即 $\overline{B}\subset A$，又因为 $A\subset B$，则 $\overline{B}\subset B$，矛盾．

(2)利用事件运算的分配律，有

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup\varnothing=A\overline{B}=A-AB\subset A,$$

显然，$A-AB$ 一般不等于 A，故结论 $(A\cup B)-A$ 不一定成立，只当 A，B 互不相容时，等式成立

(3)右边 $=AB\overline{AC}=AB(\overline{A}\cup\overline{C})=\varnothing\cup AB\overline{C}=A(B\overline{C})=A(B-C)=$ 左边，此等式关系是可逆的，所以又可证明左边 $=$ 右边．因此，$A(B-C)=AB-AC$ 是正确的．

习题6

两个事件互不相容与两个事件对立有何区别？举例说明．

解答：

事件 A，B 互不相容，是说事件 A,B 不同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$；事件 A，B 互为对立事件，是说事件 A，B 有且仅有一个发生，即 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$．

因此，对立事件与互不相容事件的区别与联系：

(1)若两事件对立，则必定互不相容，但两事件互不相容未必对立；

(2)互不相容可用于多个事件，而互为对立事件仅用于两个事件；

(3)两个事件互为不相容只是说明两个事件不能同时发生，即至多发生其中一个事件，但可以都不发生，而两事件对立说明两事件有且仅有一个发生．

例如，习题 3 中，B 与 D 互不相容，但不是对立事件；而 B 与 A 既是互不相容又是对立事件．若令 $E=\{6\}$，则事件 B、D、E 互不相容，且 $B\cup D\cup E=S$．

习题7

设 A、B 为两个事件，若 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，问 A 和 B 有什么关系．

解答：

由对偶律知 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，又已知 $AB=\overline{A}\cap\overline{B}$，所以有 $AB=\overline{A\cup B}$，即

$$A,\ B\text{同时发生}\Leftrightarrow A,\ B\text{无一个发生}.$$

又因为 $A\cup B\supset AB$，所以 $AB=\varnothing$，故 $\overline{A\cup B}=\varnothing$，$A\cup B=S$，所以 A 与 B 互为对立事件．

习题8

化简 $\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}$．

解答：

由事件运算和性质，有

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{AB}\cup C)(\overline{AC})}&=\overline{(\overline{AB}\cup C)}\cup AC=\overline{\overline{AB}}\,\overline{C}\cup AC=AB\overline{C}\cup AC\\&=A(B\overline{C}\cup C)=A(B\cup C).\end{aligned}$$

习题9

设 A 和 B 是任意两个事件，化简下列两式：

(1) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})$；

(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}$.

解答：

(1)由事件运算的性质，有

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})=AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B}=A\cup A(\overline{B}\cup B)=A,$$

$$(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{A}\,\overline{A}\cup\overline{A}\,\overline{B}\cup B\overline{A}\cup B\overline{B}=\overline{A}\cup\overline{A}(B\cup\overline{B})=\overline{A},$$

$$(A\cup B)(A\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}=\varnothing.$$

(2)由事件运算的性质，有

$$\begin{aligned}&AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{B}-\overline{AB}\\&=(A\cup\overline{A})B\cup(A\cup\overline{A})\overline{B}-\overline{AB}\\&=B\cup\overline{B}-\overline{AB}=S-\overline{AB}=AB.\end{aligned}$$

习题10

证明：$(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}=A-B$.

解答：

由定义，有 $A-B=A\overline{B}$， 并且

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}\cup\varnothing=A\overline{B},$$

而

$$A-AB=A\overline{AB}=A(\overline{A}\cup\overline{B})=A\overline{A}\cup A\overline{B}=A\overline{B}.$$

所以等式成立.

1.2 随机事件的概率

习题1

设 $P(A)=0.1$， $P(A\cup B)=0.3$，且 A 与 B 互不相容，求 $P(B)$.

解答：

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，有

$$P(B)=P(A\cup B)+P(AB)-P(A)=0.3+0-0.1=0.2.$$

习题2

设事件 A、B、C 两两互不相容，$P(A)=0.2$，$P(B)=0.3$，$P(C)=0.4$，求 $P\big((A\cup B)-C\big)$.

解答：

因为 A、B、C 两两互不相容，所以 $A\subset\overline{C}$，$B\subset\overline{C}$，$P(AB)=0$. 因而

$$\begin{aligned}P\big((A\cup B)-C\big)&=P\big((A\cup B)\cap\overline{C}\big)=P\big((A\overline{C})\cup(B\overline{C})\big)\\&=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P\big(AB\overline{C}\big)\\&=P(A)+P(B)=0.5.\end{aligned}$$

习题3

设 $P(A)=\frac{1}{3}$， $P(B)=\frac{1}{4}$， $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$， 求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解答：

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)\ =1-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]\ =\frac{11}{12}.$$

习题4

已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$， $P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$， $P(AB)=0$，求事件 A， B， C全不发生的概率.

解答：

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\ &=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-\left[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\right]\\&=1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right]=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

习题5

设 A， B是两事件且 $P(A)=0.6$， $P(B)=0.7$. 问：

(1)在什么条件下 $P(AB)$取到最大值，最大值是多少?

(2)在什么条件下 $P(AB)$取到最小值，最小值是多少?

解答：

由 A， B两事件概率看， A， B二事件相容. 利用加法公式有

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

(1)由 $P(B)=0.7$， $P(A)=0.6$，知 $P(B)>P(A)$.

当 $B\supset A$时， $AB=A$， $A\cup B=B$， $P(A\cup B)=P(B)$为最小，此时， $P(AB)$为最大，故

$$P(AB)|_{\max}=P(A)=0.6.$$

(2)因为 $P(B)\le P(A\cup B)\le 1$，故当 $P(A\cup B)=1$时， $P(AB)$最小，且

$$P(AB)|_{\min}=P(A)+P(B)-1\ =0.6+0.7-1=0.3.$$

1.3 古典概型与几何概型

习题1

袋中装有 5个白球， 3个黑球，从中一次任取两个. 求

(1)求取到的两个球颜色不同的概率；

(2)求取到的两个球有黑球的概率.

解答：

(1)设 $A=$ {取到的两个球颜色不同}，则

$$P(A)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}.$$

(2)设 $A_i=$ {取到 i个黑球} $(i=1,2)$， $B=$ {取到黑球}，则由题意有

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)\\&=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}+\frac{C_5^0C_3^2}{C_8^2}=\frac{9}{14}.\end{aligned}$$

习题2

10把钥匙中有3把能打开门，今任取2把，求能打开门的概率.

解答：

解法一 随机试验是从10把钥匙中任取两把，从而样本空间S的样本点总数为

$$n = C_{10}^2 = 45 .$$

要想把门打开，取出的两把钥匙至少有一把从能把门开的三把钥匙中获得，从而“能把门打开”这一事件所包含的样本点数为$m = C_3^2 + C_7^1 C_3^1 = 24$，故所求概率为

$$p = \frac{m}{n} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15} \approx 0.53 .$$

解法二 随机试验是从10把钥匙中任取两把，从而样本空间S的样本点总数为

$$n = C_{10}^2 = 45 .$$

记事件A为“能把门打开”，则$\overline{A}$为“不能把门打开”，从7把不能把门打开的钥匙中任取两把，共有$C_7^2 = 21$种取法，即事件$\overline{A}$共包含21个样本点，从而

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{21}{45} = \frac{24}{45} \approx 0.53 .$$

习题3

两封信随机地投入四个邮筒，求前两个邮筒内没有信的概率及第一个邮筒内只有一封信的概率.

解答：

样本空间的样本点总数为

$$4 \times 4 = 16 .$$

记事件A为“前两个邮筒内没有信”，此时两封信投在后两个邮筒中，从而事件A所包含的样本点数为

$$m_1 = 2 \times 2 = 4 ,$$

于是

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{16} = 0.25 .$$

记事件B为“第一个邮筒内只有一封信”，此时，需将两封信中的一封放入第一个邮筒，共有2种放法，剩下的一封放入其他三个邮筒中的一个“，共有3种放法，从而事件B包含的样本点数为

$$m_2 = 2 \times 3 = 6 ,$$

故

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{6}{16} = 0.375 .$$

习题4

一副扑克牌有52张，不放回抽样，每次一张，连续4张，求四张花色各异的概率.

解答:

这是一个组合的问题.

基本事件总数为 C_{52}^4，而 $A=\{$四张花色各异$\}$的基本事件总数为 $C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1$，则 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1}{C_{52}^4}=\frac{2179}{20825}\approx 0.1055.$$

习题5

袋中有红、黄、黑色球各一个，有放回一抽取三次，求下列事件的概率:

$A=\{$三次都是红球$\}$，　$B=\{$三次未抽到黑球$\}$，

$C=\{$颜色全不相同$\}$，　$D=\{$颜色不全相同$\}$.

解答:

由题意知，基本事件总数为 $P_3^1P_3^1P_3^1=27$. 则

$$P(A)=\frac{1}{27},\quad P(B)=\frac{P_2^1P_2^1P_2^1}{27}=\frac{8}{27},$$

$$P(C)=\frac{P_3^3}{27}=\frac{2}{9},\quad P(D)=1-P(\text{颜色全相同})=1-\frac{3}{27}=\frac{8}{9}.$$

习题6

从0，1，2，…，9中任意选出3个不同的数字，试求下列事件的概率:

$A_1=\{$三个数字中不含0与5$\}$；　$A_2=\{$三个数字中不含0或5$\}$.

解答:

$$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15};$$

$$P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}\text{ 或 }P(A_2)=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

习题7

从一副扑克牌(52张)任取3张(不重复)，计算取出的3张牌至少有2张花色相同的概率.

解答:

$$p=\frac{C_4^1C_{13}^3+C_4^1C_{13}^2C_{39}^1}{C_{52}^3}\approx 0.602\text{或}p=1-\frac{C_4^3C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1}{C_{52}^3}\approx 0.602.$$

习题8

10个人中有一对夫妇，他们随意坐在一张圆桌周围，求该对夫妇正好坐在一起的概率．

解答：

设 A 为“该对夫妇正好坐在一起”．

方法1： 10个人随机坐在一张圆桌周围，共有 9! 种方法．先考虑该对夫妇男左女右坐在一起：把相邻的两个座位看成一个特号座，考虑捆绑法的思路，9个座位有 8! 种排法，同理再考虑男右女左的坐法，所以

$$P(A)=\frac{2\times 8!}{9!}=\frac{2}{9}.$$

方法2： 只考虑夫妇俩人．夫妇俩人随机坐有 P_{10}^{2} 种坐法．把座位按 $1\sim 10$ 排号，夫妇相邻而坐且女于男右侧，则有 10种坐法：男坐 $1,2,3,\cdots,9,10$；女坐 $2,3,\cdots,10,1$；同理再考虑女坐于男左侧，好有 10种坐法，共有 20种坐法，所以

$$P(A)=\frac{20}{P_{10}^{2}}=\frac{2}{9}.$$

方法3： 假设夫妇中一人坐定，考虑另一人（不妨设是女）．此人随机坐，有 9种坐法，若要夫妇相邻，她只能坐在男方的左右两个位置，所以

$$P(A)=\frac{2}{9}.$$

习题9

在 1500个产品中有 400个次品、1100个正品，任取 200个．

(1)求恰有 90个次品的概率；　　(2)求至少有 2个次品的概率．

解答：

(1) $P\{恰有90个次品\}=\dfrac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}.$

(2) $$P\{至少有2个次品\}=1-P\{无次品\}-P\{恰有1个次品\}$$
$$=1-\frac{C_{1100}^{200}}{C_{1500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$$

习题10

从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

解答：

解法一　试验为从5双不同的鞋子中任取4只，若一只接一只取出，总共有 $N=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$ 种取法. 设 A 为{4只鞋中至少有2只配对}. 因为涉及“至少”，为和事件，故可先考虑对立事件的概率，求出 $\bar{A}$ 中的样本点数. 仍一只只取出，第一只可以在10只鞋中任取一只，第二只只能在剩下的与第一只不配对的8只鞋中任取一只，第三只又只能在剩下的与前两只都不配对的6只鞋中任取一只，第4只只有4种取法，所以 $\bar{A}$ 中的样本点总数 $k=10\cdot 8\cdot 6\cdot 4$，得

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

解法二　仍沿用解法一中的记号，不考虑次序，一次取出4只，试验结果总数为 C_{10}^4 种. 有利于 $\bar{A}$ 的样本点数为自5双鞋中取出4双，然后每双任取一只的不同取法共有 $C_5^4\cdot 2^4$ 种，所以

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_5^4\cdot 2^4}{C_{10}^4}=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}.$$

解法三　可以直接求 $P(A)$. 因为 A 是和事件，所以设

$B_1=${取出的4只鞋中恰有2只配成一双}，

$B_2=${取出的4只鞋子恰配成2双}，

于是 $A=B_1\cup B_2$ 且 $B_1B_2=\varnothing$. B_1 中的样本点数为 $C_5^1\cdot C_4^2\cdot 2^2$ 或 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$，而 B_2 中的样本点数为 C_5^2. 因此

$$P(A)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{C_5^1\cdot C_4^2\cdot 2^2}{C_{10}^4}+\frac{C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{4}{7}+\frac{1}{21}=\frac{13}{21}.$$

习题11

打桥牌时，把一副扑克牌(52张)发给4人，求指定的某人没有得到黑桃A或黑桃K的概率.

解答：

设A表示“指定的某人没有得到黑桃A或黑桃K”，$\overline{A}$表示“指定的某人同时得到黑桃A和黑桃K”．把一副扑克牌(52张)发给4人，第1人先从52张中任取13张，第2人再从余下的39张中任取13张，第3人再从余下的26张中任取13张，剩下的13张给第4人，共有$C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}$种分法．指定的某人同时得到黑桃$A$和黑桃$K$：此人先取到黑桃$A$和黑桃$K$，再从其他50张中任取11张；其他3人在将余下39张平均分3份，即有$C_2^2C_{50}^{11}C_{39}^{13}C_{26}^{13}$种方法，则

$$P(\overline{A})=\frac{C_2^2C_{50}^{11}C_{39}^{13}C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}}=\frac{1}{17},$$

所以

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{16}{17}.$$

习题12

50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3个铆钉强度太弱，每个部件用3只铆钉，若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

解答：

将部件自1至10编号，试验E为各部件上装上3只铆钉，设$A_i(i=1,2,\cdots,10)$表示事件“第i号部件强度太弱”．若3只强度太弱的铆钉同时装在第i号部件上去，则A_i发生．从50只铆钉中任取3只装在第i号部件上，共有C_{50}^3种取法，而强度太弱的铆钉只有3只，它们都装在第i号部件上只有C_3^3种取法，所以

$$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3}(i=1,2,\cdots,10).$$

由于A_i间是互斥的，因此，10个部件中有一个强度太弱的概率为

$$p=P(\bigcup_{i=1}^{10}A_i)=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)=10\times\frac{1}{C_{50}^3}=\frac{1}{1960}.$$

$$P(B)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}-\frac{1}{27}-\frac{1}{27}+0=\frac{7}{9}.$$

解法二 考虑B的对立事件$\overline{B}$，因为$\overline{B}=\{$三张都抽到$\}$，且易知

$$P(\overline{B})=\frac{P_3^3}{3^3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9},$$

所以

$$P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{7}{9}.$$

习题13

某专业研究生复试时，有3张考签，3个考生应试，一个人抽一张后立即放回，再另一人抽
如此3人各抽一次，求抽签结束后，至少有一张考签没有被抽到的概率．

解答：

解法一　记 $A_i=\{$第 i张考签没有被抽到$\}$ $(i=1,2,3)$，$B=\{$至少有一张考签没有被抽到
则

$$B=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

但 A_1，A_2，A_3可能相容，故

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3),$$

由题设知

$$P(A_i)=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}\ (i=1,2,3),$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}\ (i\neq j,\ i,j=1,2,3),\qquad P(A_1A_2A_3)=0,$$

所以

$$P(B)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}-\frac{1}{27}-\frac{1}{27}+0=\frac{7}{9}.$$

解法二　考虑 B的对立事件 $\overline{B}$，因为 $\overline{B}=\{$三张都抽到$\}$，且易知

$$P(\overline{B})=\frac{P_3^3}{3^3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9},$$

所以

$$P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{7}{9}.$$

习题14

从1到9的9个整数中有放回地随机取3次，每次取一个数，求取出的3个数之积能被10整除的概率．

分析：

因为只有个位数为0的数才能被10整除，这样取出的3个数中只要有5和偶数，它们的积必能被10整．

解答：

设 A_1表示“取出的3个数中有偶数”；A_2表示“取出的3个数中有5”，则所求概率为

$$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A_1A_2})=1-P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})$$

$$=1-[P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})]$$

$$=1-\left[\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{8}{9}\right)^3-\left(\frac{4}{9}\right)^3\right]\approx 0.214.$$

习题15

甲、乙两人约定在下午1时到2时之间到某站乘公共汽车，又这段时间内有4班公共汽车，它们的开车时刻分别为1:15、1:30、1:45、2:00．如果他们约定最多等一辆车，求甲、乙同乘一车的概率．假定甲、乙两人到达车站的时刻是互相不牵连的，且每人在1时到2时的任何时刻到达车站是等可能的．

解答：

设$x, y(1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2)$分别为甲、乙两人到达的时刻，$p$为甲乙同乘一车的概率，最多等一辆车的情况下，甲乙同乘一车包括3种情况．

(1)见车就上甲乙同乘一车，则见车就乘情况如图(a)所示

$$p_1=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}=\frac{4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2}{(2-1)^2}=\frac{1}{4};$$

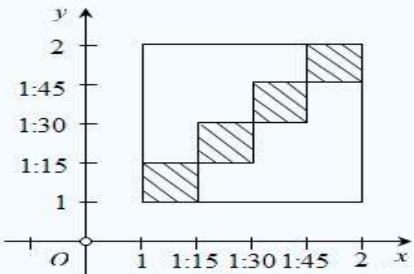
(2)甲先到达等一辆车，与乙同乘一车，如图(b)所示，此时

$$p_2=\frac{3}{16};$$

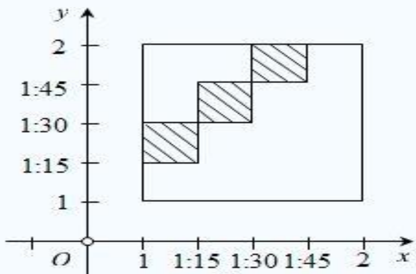
(3)乙先到达等一辆车，与甲同乘一车，图形跟(b)相似，且概率跟p_2相等．

综上述，所求概率为

$$p=p_1+2p_2=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\times 2=\frac{5}{8}.$$



(a)



(b)

1.4 条件概率

习题1

一批产品100件，有80件正品，20件次品，其中甲厂生产的为60件，有50件正品，10件次品，余下的40件均由乙厂生产．现从该批产品中任取一件，记A为“正品”，B为“甲厂生产的产品”，求$P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，$P(B|A)$，$P(A|B)$．

解答：

由题意知

$$P(B)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5},\qquad P(\bar{B})=\frac{40}{100}=\frac{2}{5},$$

$$P(A|B)=\frac{5}{6},\qquad P(A|\bar{B})=\frac{80-50}{40}=\frac{3}{4}.$$

则由全概率公式得

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=\frac{4}{5}=0.8;$$

由乘法公式得

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{2}=0.5;$$

由贝叶斯公式得，

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.5}{0.8}=\frac{5}{8}=0.625.$$

习题2

假设一批产品中一、二、三等品各占60%，30%，10%，从中任取1件，结果不是三等品，求取到的是一等品的概率．

解答：

令 A_i 为“取到的是 i 等品”，$i=1,2,3$，

$$P(A_1|\overline{A_3})=\frac{P(A_1\overline{A_3})}{P(\overline{A_3})}=\frac{P(A_1)}{P(\overline{A_3})}=\frac{0.6}{0.9}=\frac{2}{3}.$$

习题3

已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$．

解答：

有乘法公式有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\quad,$$

又

$$P(AB)=P(B)P(A|B),$$

所以

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6},$$

于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

习题4

设 A，B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(AB)$，$P(B-A)$，$P(\overline{B}|\overline{A})$．

解答：

依题意

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4,$$

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.4=0.1,$$

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(A)}=\frac{2}{3}.$$

注意：$A-B=A\overline{B}=A-AB$．

习题5

设事件 A 与 B 互斥，且 $0<P(B)<1$，试证明：$P(A|\overline{B})=\frac{P(A)}{1-P(B)}$．

解答：

因为 A 与 B 互斥，而 $A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}=A\overline{B}$，所以 $P(A)=P(A\overline{B})$，而

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})},$$

且 $P(\overline{B})=1-P(B)$，所以

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A)}{1-P(B)}.$$

习题6

甲、乙二选手进行乒乓球单打比赛，甲先发球，甲发球成功后，乙回球失误的概率为 0.3；若乙回球成功，甲回球失误的概率为 0.4；若甲回球成功，乙再次回球失误的概率为 0.5．试计算这几个回合中乙输掉 1分的概率．

解答：

设事件 $A=\{$甲选手回球失误$\}$，

$$B_i=\{\text{乙选手第 } i \text{ 次回球失误}\}\ (i=1,2).$$

依题意，已知 $P(B_1)=0.3$，$P(A|\overline{B_1})=0.4$，$P(B_2|\overline{A}\overline{B_1})=0.5$ 所以

$$\begin{aligned}P\{\text{乙输掉 1 分}\}&=P(B_1\cup\overline{B_1}\overline{A}B_2)\\&=P(B_1)+P(\overline{B_1})P(\overline{A}|\overline{B_1})P(B_2|\overline{A}\overline{B_1})\\&=0.3+(1-0.3)\times0.6\times0.5=0.51.\end{aligned}$$

习题7

用3个机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为 0.5、0.3、0.2，各机床加工的零件为合格的概率分别等于 0.94、0.9、0.95，求全部产品中的合格率．

解答：

设事件 A、B、C分别表示三个机床加工的产品，事件 E表示合格品，依题意，

$$P(A)=0.5,\quad P(B)=0.3,\quad P(C)=0.2,$$

$$P(E|A)=0.94,\quad P(E|B)=0.9,\quad P(E|C)=0.95.$$

由全概率公式

$$\begin{aligned}P(E)&=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)\\&=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95=0.93.\end{aligned}$$

习题8

12个乒乓球中有 9个新的，3个旧的，第一次比赛取出了 3个，用完后放回去，第二次比赛又取出 3个，求第二次取到的 3个球中有 2个新球的概率．

解答：

记 A_i 为第一次取出的3个球中有 $i\ (i=0,1,2,3)$ 个新球，　B为第二次取到的 3个球中有 2个新的，则

$$P(A_0)=\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{220},\quad P(B|A_0)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{55};$$

$$P(A_1)=\frac{C_9^1C_3^2}{C_{12}^3}=\frac{27}{220},\quad P(B|A_1)=\frac{C_8^2C_4^1}{C_{12}^3}=\frac{28}{55};$$

$$P(A_2)=\frac{C_9^2C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{27}{55},\quad P(B|A_2)=\frac{C_7^2C_5^1}{C_{12}^3}=\frac{21}{44};$$

$$P(A_3)=\frac{C_9^3}{C_{12}^3}=\frac{21}{55},\quad P(B|A_3)=\frac{C_6^2C_6^1}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}.$$

由全概率公式

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)\\&=\frac{1}{220}\times\frac{27}{55}+\frac{27}{220}\times\frac{28}{55}+\frac{27}{55}\times\frac{21}{44}+\frac{21}{55}\times\frac{9}{22}\approx0.455.\end{aligned}$$

习题9

某仓库有同样规格的产品六箱，其中三箱是甲厂生产的，二箱是乙厂生产的，另一箱是丙厂生产的，且它们的次品率依次为 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{15}$，$\frac{1}{20}$．现从中任取一件产品，试求取得的一件产品是正品的概率．

解答：

设 A_i $(i=1,2,3)$分别表示所取一箱产品是甲，乙，丙厂生产的事件；B为“取得一件产品为正品”．则

$$P(A_1)=\frac{3}{6},\qquad P(B|A_1)=\frac{9}{10},$$
$$P(A_2)=\frac{2}{6},\qquad P(B|A_2)=\frac{14}{15},$$
$$P(A_3)=\frac{1}{6},\qquad P(B|A_3)=\frac{19}{20}.$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{3}{6}\times\frac{9}{10}+\frac{2}{6}\times\frac{14}{15}+\frac{1}{6}\times\frac{19}{20}$$
$$=\frac{162+112+57}{360}=\frac{331}{360}(\approx 0.92).$$

习题10

某人忘记了电话号码最后一个数字，因而他随意地拨号，求他不超过三次而接通所需电话的概率，若已知最后一个数字是奇数，那么此概率是多少？

解答：

解法一　设 $A_i=\{$第 i次接通$\}$ $(i=1,2,3)$，$A=\{$不超过三次而接通电话$\}$，则有

$$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}\overline{A}_2A_3.$$

易知，A_1与$\overline{A}_1A_2$与$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$是互斥的，故有

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}\quad\text{（由乘法公式而得）}$$
$$=\frac{3}{10}.$$

当已知最后一位数字是奇数，所求概率为

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}.$$

解法二　沿用解法一的记号，考虑对立事件 $\overline{A}=\{$拨号三次都接不通$\}$，则

$$1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=1-\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{10}.$$

当已知最后一位是奇数时，所求概率为

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\ P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}.$$

习题11

轰炸机要完成它的使命，驾驶员必须要找到目标，同时投弹员必须要投中目标．设驾驶员甲、乙找到目标的概率分别为 0.9、0.8；投弹员丙、丁在找到目标的条件下投中的概率他别为 0.7、0.6．现在要配备两组轰炸人员，问甲、乙、丙、丁怎样配合才能使完成使命有较大的概率（只要有一架飞机投中目标即完成使命）？求此概率是多少？

解答：

设 A_1为甲找到目标，B_1为丙投中目标，A_2为乙找到目标，B_2为丁投中目标，W为完成任务．

(1)甲丙搭配，乙丁搭配

$$P(W)=P(\text{甲丙机命中})+P(\text{乙丁机命中})-P(\text{两机均命中})$$
$$=P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)+P(A_2)\cdot P(B_2|A_2)-P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(B_2|A_2)$$
$$=0.9\times0.7+0.8\times0.6-0.9\times0.7\times0.8\times0.6=0.8076.$$

注意：“两机均命中”指甲找到目标，丙投中目标而且乙找到目标，丁投中目标．

(2)甲丁搭配，乙丙搭配

$$P(W)=P(\text{甲丁机命中})+P(\text{乙丙机命中})-P(\text{两机均命中})$$
$$=0.9\times0.6+0.8\times0.7-0.9\times0.6\times0.8\times0.7=0.7976$$

所以甲丙搭配，乙丁搭配好，此时命中率为 0.8076．

习题12

甲，乙两个盒子里各装有 10 只螺钉，每个盒子的螺钉中各有一只是次品，其余均为正品，现从甲盒中任取二只螺钉放入乙盒中，再从乙盒中取出两只，问从乙盒中取出的恰好是一只正品，一只次品的概率是多少？

解答：

设 $A_i\ (i=1,2)$ 为"放入乙盒的螺钉中有 i 只正品"，B 为"乙盒中取出的二只螺钉是一只次品，一只正品"．则

$$P(A_1)=\frac{C_1^1C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5},\qquad P(B|A_1)=\frac{C_2^1C_{10}^1}{C_{12}^2}=\frac{10}{33}.$$

$$P(A_2)=\frac{C_9^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{5},\qquad P(B|A_2)=\frac{C_1^1C_{11}^1}{C_{12}^2}=\frac{1}{6}.$$

由全概率公式

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{5}\times\frac{10}{33}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{10+22}{165}=\frac{32}{165}\approx 0.194.$$

1.5 事件的独立性

习题1

设 $P(AB)=0$，则( )．

(A) A 和 B 不相容；　　(B) A 和 B 独立；

(C) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$；　　(D) $P(A-B)=P(A)$．

解答：

应选 (D)．

由概率的性质知，若 $P(AB)=0$，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-0=P(A).$$

习题2

每次试验成功率为 $p(0<p<1)$，进行重复试验，直到第十次试验才取得 4 次成功的概率．

解答：

由于第 10 次试验时才取得第 4 次成功，即表明第 10 次试验出现概率为 p，前 9 次试验中有 3 次成功的概率为

$$C_9^3p^3(1-p)^6,$$

由积事件知，所求概率为

$$C_9^3p^4(1-p)^6.$$

习题3

甲、乙两人射击，甲击中的概率为 0.8，乙击中的概率为 0.7，两人同时射击，并假定中靶与否是独立的，求

(1)两人都中靶的概率；　(2)甲中乙不中的概率；　(3)甲不中乙中的概率．

解答：

记事件 A 为"甲击中目标"，事件 B 为"乙击中目标"，则两人都中靶可以表示为 AB，甲中乙不中可表示为 $A\overline{B}$，甲不中乙中可表示为 $\overline{A}B$，从而

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times 0.7=0.56$；

(2) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.8\times 0.3=0.24$；

(3) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=0.2\times 0.7=0.14$．

习题4

一个自动报警器由雷达和计算机两部分组成，两部分有任何一个失灵，这个报警器就失灵．若使用100小时后，雷达失灵的概率为0.1，计算机失灵的概率为0.3，若两部分失灵与否为独立的，求这个报警器使用100小时而不失灵的概率．

解答：

记事件A为“报警器使用100小时后雷达失灵”，事件B为“报警器使用100小时后计算机失灵”，依题意

$$P(A)=0.1,\qquad P(B)=0.3$$

从而所求概率为

$$p=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.1)\times(1-0.3)=0.63.$$

习题5

制造一种零件可采用两种工艺，第一种工艺有三道工序，每道工序的废品率分别为0.1，0.2，0.3．第二种工艺有两道工序，每道工序的废品率都是0.3．如果用第一种工艺，在合格零件中，一级品率为0.9．而用第二种工艺，合格品中的一级品率只有0.8，试问哪一种工艺能保证得到一级品的概率较大？

解答：

第一种工艺的合格率为

$$P(A_1)=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504,$$

由第一种工艺得到的一级品率为

$$p_1=0.9P(A_1)=0.9\times0.504=0.4536;$$

第二种工艺的合格品率为

$$P(A_2)=(1-0.3)\times(1-0.3)=0.49,$$

由第二种工艺得到的一级品率为

$$p_2=0.8P(A_2)=0.8\times0.49=0.392.$$

由$p_1>p_2$知，第一种工艺能保证得到一级品的概率较大．

习题6

3人独立地去破译一个密码，他们能译出的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$．问能将此密码译出的概率是多少？

解答：

方法一 记事件A、B、C分别表示三人译出密码，则所求的概率

$$\begin{aligned}p&=P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)\\&\quad-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)\\&=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\\&=0.6.\end{aligned}$$

方法二 延续上述事件的假设

$$p=P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=0.6.$$

习题7

甲、乙、丙3部机床独立地工作，由1个人照管．某段时间，它们不需要照管的概率依次是0.9，0.8，0.85．求在这段时间内，机床因无人照管而停工的概率．

解答：

设A，B，C分别表示在这段时间内机床甲、乙、丙需要工人照管，因无人照管而停工即有两台或两台以上机床需要照管，此事件可表示为$AB\cup AC\cup BC$．于是，所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB\cup AC\cup BC)&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)\\&=P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)-2P(A)P(B)P(C)\\&=0.1\times0.2+0.1\times0.15+0.2\times0.15-2(0.1\times0.2\times0.15)\\&=0.059.\end{aligned}$$

习题8

一猎人用猎枪向一只野兔射击，第一枪距离野兔 $200m$ 远，如果未击中，他追到离野兔 $150m$ 远处进行第二次射击，如果仍未击中，他追到距离野兔 $100m$ 处再进行第三次射击，此时击中的概率为 $\frac{1}{2}$．如果这个猎人射击的命中率与他离野兔的距离的平方成反比，求猎人击中野兔的概率．

解答：

设 A_i 为“第 i 次射击击中野兔”（$i=1,2,3$），B 为“猎人击中野兔”，由于

$$P(A_3)=\frac{k}{100^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow k=\frac{100^2}{2},$$

于是

$$P(A_1)=\frac{k}{200^2}=\frac{1}{8},\qquad P(A_2)=\frac{k}{150^2}=\frac{2}{9},$$

又 $B=A_1\cup\overline{A}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，而 A_1，$\overline{A}_1A_2$，$\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 两两互不相容，且 A_1，A_2，A_3 相互独立，所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)+P(\overline{A_2}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=\frac{1}{8}+\frac{7}{8}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{1}{2}\approx 0.66.\end{aligned}$$

习题9

排球竞赛规则规定：发球方赢球时得分，输球时则被对方夺得发球权．甲、乙两个排球队进行比赛，已知当甲队发球时，甲队赢球和输球的概率分别是 0.4 和 0.6；当乙队发球时，甲队赢球和输球的概率都是 0.5，无论哪个队先发球，比赛进行到任一队得分时为止，求当甲队发球时各队得分的概率．

解答：

设 A 为“甲队发球时，甲先得分”，B 为“甲队发球时，乙先得分”，A_i 为“甲第 i 次发球时，甲得分”，B_i 为“乙第 i 次发球时，乙得分”．由已知 $P(A_i)=0.4$，$P(B_i)=0.5$，则

$$A=A_1\cup\overline{A_1}\,\overline{B_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2}A_3\cup\cdots,$$

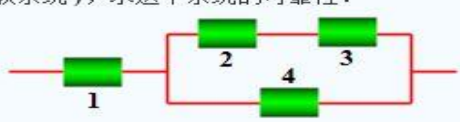
因为上述事件互不相容，由加法公式及独立性，得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(\overline{A_1}\,\overline{B_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_2}A_3)+\cdots\\&=0.4+0.6\times0.5\times0.4+0.6\times0.5\times0.6\times0.5\times0.4+\cdots\\&=0.4\times(1+0.3+0.3^2+\cdots)=0.4\times\frac{1}{1-0.3}=\frac{4}{7},\end{aligned}$$

故 $P(B)=1-P(A)=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$．

习题10

设有 4 个独立工作的元件 1，2，3，4．它们的可靠性分别为 p_1，p_2，p_3，p_4．将它们按图 (a) 方式连接（称为并串连联系统），求这个系统的可靠性．



(a)

解答：

设事件 A，B，C，D 分别表示元件 1，2，3，4 工作正常，$G=\{$系统工作正常$\}$．对图 (a) 串联系统．

$$G=ABC\cup AD,$$

$$\begin{aligned}P(G)&=P(ABC\cup AD)=P(ABC)+P(AD)-P(ABCD)\\&=P(A)P(B)P(C)+P(A)P(D)-P(A)P(B)P(C)P(D)\\&=p_1p_2p_3+p_1p_4-p_1p_2p_3p_4.\end{aligned}$$

习题11

设 A，B，C 三个事件相互独立，证明：$A\cup B$，AB 肯定与 C 相互独立．

解答：

(1) $P[(A\cup B)C]=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$$

$$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\cup B),$$

故 $A\cup B$ 与 C 相互独立．

(2) $P[(AB)C]=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

$$=[(P(A)P(B)]P(C)=P(AB)P(C),$$

故 AB 与 C 相互独立．

习题12

随机地掷一颗骰子，连掷6次．求：

(1)恰有一次出现“6点”的概率；(2)恰有两次出现“6点”的概率；(3)至少出现一次“6点”的概率．

解答：

掷一次骰子看成一次试验，连掷6次骰子就是进行了6次重复独立试验．现在我们关心的是在6次试验中事件“出现6点”恰发生一次、两次及至少发生一次的概率，属于伯努利概率型的概率计算问题．

(1)事件“恰有一次出现6点”的概率为

$$P_6(1)=C_6^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{6-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^5\approx 0.402\,.$$

(2)事件“恰有两次出现6点”的概率为

$$P_6(2)=C_6^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)^{6-2}\approx 0.201\,.$$

(3)事件“至少出现一次6点”的概率为

$$\sum_{k=1}^{6}P_6(k)=1-P_6(0)=1-C_6^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6=1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\approx 0.661\,.$$

注：利用二项概率公式计算的前提是首先分析清楚该试验是否属于伯努利概型，若是，才可用公式；若不是，则需采用别的计算方法．

习题13

设事件 A 在每一次试验中发生的概率为0.3，当 A 发生不少于3次时，指示灯发出信号．

(1)进行了5次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率；

(2)进行了7次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率．

解答：

(1)设 X 表示5次重复独立试验中事件 A 发生的次数，相当于5重伯努利试验．

$$p=P(A)=0.3,$$

$P\{$指示灯发出信号$\}$

$$=P\{X\geq 3\}$$

.

设 Y 表示7次重复独立试验中事件 A 发生的次数，相当于7重伯努利试验．

$P\{$指示灯发出信号$\}$

$$=P\{Y\geq 3\}$$

$$=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}$$

$$=1-C_7^0\cdot(0.7)^7-C_7^1\cdot 0.3\cdot(0.7)^6-C_7^2\cdot 0.3^2\cdot(0.7)^5\approx 0.353\,.$$

习题14

如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性，在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出，如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 的可靠性 即在情况 发生时闭合的概率 ，问这时系统的可靠性 即电路闭合的概率 是多少？如果需要有一个可靠性至少为 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否是相互独立的．

解答：

依题意，当情况 C 发生时，一并联开关系统要形成通路就可发出警报．现有两个并联开关，设闭合时为 A，B 发生．

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ (开关间独立)

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.96+0.96-0.96\times 0.96=0.9984,$$

此即系统的可靠性．

(2)设需要 n 只并联开关．每只开关的可靠性为 0.96，设开关依次编号为 $1,2,\cdots,n$，开关闭合为 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 事件发生，且 $P(A_i)=0.96$，要 $P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\geq 0.9999$，即

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdots\overline{A_n})=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})$$

$$=1-(0.04)^4\geq 0.9999,$$

亦即 $(0.04)^n\leq 0.0001$，解得

$$n\geq\frac{-4}{\lg 0.04}\approx 2.86.$$

取 $n\geq 3$，即至少 3 个开关并联才能保证一个可靠性至少为 0.9999 的系统．

习题15

有一大批产品其验收方案如下一步．先作第一次检验：从中任取 10 件，经检验无次品，则接受这批产品，次品数大于 2，则拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，袋子仅当 5 件中无次品时接受这批产品的次品率为 10%，求：

(1)这批产品经第一次检验就能被接受的概率；

(2)需做第二次检验的概率；

(3)这批产品按第二次检验的标准被接受的概率；

(4)这批产品在第一次检验未能作决定且第二次检验时被通过的概率；

(5)这批产品的被接受的概率．

解答：

设 X 表示第一次检验中的次品数，X 取值 $0,1,\cdots,10$，相当于 10 重伯努利试验．Y 表示第二次检验时的次品数，Y 取值 $0,1,\cdots,5$ 相当于 5 重伯努利试验．

(1) $P\{X=0\}=0.9^{10}\approx 0.349$；

(2) $P\{1\leq X\leq 2\}=C_{10}^{1}\cdot 0.1\cdot 0.9^9+C_{10}^{2}\cdot 0.1^2\cdot 0.9^8\approx 0.581$；

(3) $P\{Y=0\}=0.9^5\approx 0.590$；

(4) $P\{1\leq X\leq 2,Y=0\}=P\{1\leq X\leq 2\}P\{Y=0\}$

$$=0.581\times 0.590\approx 0.343.$$

(5) $P\{X=0\}+P\{1\leq X\leq 2,\ Y=0\}=0.9^{10}+0.581\times 0.590\approx 0.692$.

复习总结与总习题解答

习题1

一批产品有合格品也有废品，从中有放回地抽取(将产品取出一件观察后放回)三件产品，以 A_i $(i=1,2,3)$ 表示第 i 次抽到废品，试以事件的集合表示下列情况：

(1)第一次和第二次抽取至少抽到一件废品；

(2)只有第一次抽到废品；

(3)三次都抽到废品；

(4)至少有一次抽到废品；

(5)只有两次抽到废品．

解答：

(1) $A_1\cup A_2$；

(2) $A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$；

(3) $A_1A_2A_3$；

(4) $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $\overline{A_1A_2A_3}$ (三次都抽到合格的逆事件)；

(5) $\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}$.

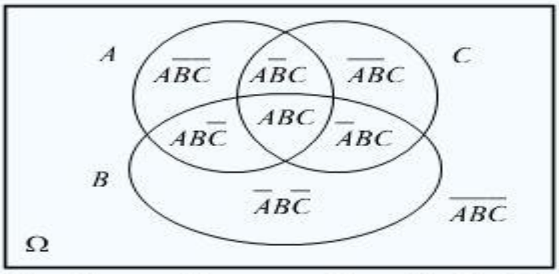
习题2

设事件 A，B，C满足 $ABC\neq\varnothing$，试把下列事件表示为一些互不相容的事件的和：

$$A\cup B\cup C,\quad AB\cup C,\quad B-AC.$$

解答：

如图



$$A\cup B\cup C=A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC+\bar{A}BC+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C;$$

$$AB\cup C=AB\bar{C}+C;$$

$$B-AC=AB\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}BC=B\bar{A}+AB\bar{C}=B\bar{C}+\bar{A}BC.$$

习题 3. 证明下列等式：

(1) $A\cup B=A\cup B\bar{A}$;

解答：

$A\cup B=(A\cup B)\cap S=(A\cup B)\cap(A\cup\bar{A})=A\cup AB\cup B\bar{A}=A\cup B\bar{A}$.

(2) $B-A=\overline{AB}-\overline{\bar{A}B}$；

解答：

$\overline{AB}-\overline{\bar{A}B}=\overline{AB}\cap\bar{A}B=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(\bar{A}B)=\bar{A}B=B-A$.

(3) $(A-B)\cup(B-A)=\overline{AB\cup\bar{A}\,\bar{B}}$.

解答：

$$\begin{aligned}\overline{AB\cup\bar{A}\,\bar{B}}&=\overline{AB}\cap\overline{\bar{A}\,\bar{B}}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(A\cup B)\\&=A\bar{A}\cup\bar{B}A\cup\bar{A}B\cup\bar{B}B=A\bar{B}\cup B\bar{A}\\&=(A-B)\cup(B-A).\end{aligned}$$

习题4

设 A，B，C是三事件，且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\quad P(AB)=P(BC)=0,\quad P(AC)=\frac{1}{8},$$

求 A，B，C至少有一个发生的概率.

解答：

本题求 A，B，C至少有一个发生的概率，这是要用一般的加法公式.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC).$$

因为 $ABC\subset AB$，所以 $P(ABC)\le P(AB)$，而已知 $P(AB)=0$，故知 $P(ABC)=0$，于是

$$P(A\cup B\cup C)=3\times\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-0-0+0=\frac{5}{8}.$$

习题 5.

若 $P(A)=0.5$， $P(B)=0.4$， $P(A-B)=0.3$，求 $P(A\cup B)$ 和 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$．

解答：

解法一 因为 $P(A-B)=0.3>P(A)-P(B)=0.1$，又 $P(A-B)<P(A)$，这说明 A 与 B 既不相互斥，又无包含关系，而是一般的相容关系．因此加法公式，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

又由 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$，故得

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.3=0.2,$$

所以 $P(A\cup B)=0.5+0.4-0.2=0.7$．而

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8.$$

解法二 由于 A 与 B 相容，因此 $A\cup B$ 可写为 $B\cup(A-B)$、 B 与 $A-B$ 互斥，从而

$$P(A\cup B)=P(B\cup(A-B))=P(B)+P(A-B)=0.4+0.3=0.7.$$

$$A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B},$$

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=P(AB)+P(A-B),$$

所以 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.3=0.2$，于是

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.2=0.8.$$

习题 6.

已知三个事件 A_1， A_2， A_3 都满足 $A_i\subset A$ $(i=1,2,3)$，证明：

$$P(A)\geq P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

解答：

因为 $A_i\subset A$ $(i=1,2,3)$，所以 $A_1A_2A_3\subset A$，于是

$$P(A)\geq P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2\cup A_3)$$
$$\geq P(A_1A_2)+P(A_3)-1,$$

同理

$$P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)$$
$$\geq P(A_1)+P(A_2)-1.$$

综上得到

$$P(A)\geq P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

证毕．

另证：

由 $A_i\subset A$ 得 $P(A_i)\leq P(A)$， 又 $P(A_i)\leq 1$，所以

$$P(A)\geq P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

证毕．

习题 7

某教育书店一天售出数学书籍 50本，外语类书籍 50本，理化类书籍 50本，设每位顾客每类至多购一本，其中，只购数学书的占顾客总数的 20%，只购外语书的占 25%，只购理化类书的占 15%，三类书全购的占 10%，问：

(1) 总共有多少顾客购书？

(2) 只购数学书和外语书的人数占顾客总人数的比例？

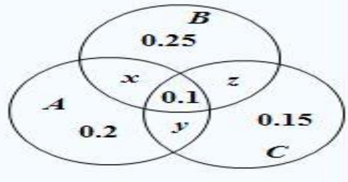
解答：

设 A,B,C 分别为购买数学，外语，理化类书的顾客的集合（如图），则

$$A\cup B\cup C=ABC\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}.$$

由已知条件知

$$P(ABC)=0.1, \qquad P(A\overline{BC})=0.2,$$
$$P(\overline{A}B\overline{C})=0.25, \qquad P(\overline{A}\,\overline{B}C)=0.15.$$



设顾客总人数为 w， $P(AB\overline{C})=x$， $P(A\overline{B}C)=y$， $P(\overline{A}BC)=z$，则由可加性得

$$\begin{cases} w(0.2+x+y+0.1)=50 \\ w(0.15+y+z+0.1)=50 \\ w(0.25+x+z+0.1)=50 \\ x+y+z+0.25+0.2+0.1+0.15=1 \end{cases},$$

容易解得

$$w=100, \quad x=0.05, \quad y=0.15, \quad z=0.10,$$

即顾客人数为 100，只购数学书和外语书的人数占顾客总人数的 5%．

习题 8

设一批产品共100件，其中98件正品，2件次品，从中任意抽取了3件(分三种情况：一次拿3件；每次拿1件，取后放回，拿3次；每次拿1件，取后不放回，拿3次)试求：
(1)取出的3件中恰有1件是次品的概率；　(2)取出的3件中至少有一件是次品的概率.

解答：

一次拿3件：

$$(1)\ P=\frac{C_{98}^2C_2^1}{C_{100}^3}\approx 0.0588,\qquad (2)\ P=\frac{C_2^1C_{98}^2+C_2^2C_{98}^1}{C_{100}^3}\approx 0.0594;$$

每次拿一件，取后放回，拿3次：

$$(1)\ P=C_3^1\frac{2\times 98^2}{100^3}\approx 0.0576,\qquad (2)\ P=1-\frac{98^3}{100^3}\approx 0.0588;$$

每次拿一件，取后不放回，拿3次：

$$(1)\ P=\frac{2\times 98\times 97}{100\times 99\times 98}\times 3\approx 0.0588,\qquad (2)\ P=1-\frac{98\times 97\times 96}{100\times 99\times 98}\approx 0.0594.$$

习题 9

某宾馆一楼有3部电梯，今有5人要乘坐电梯，假定各人选哪部电梯是随机的，求：每部电梯中至少有一人的概率.

解答：

(从对立事件考虑)设A_i表示“第i部电梯内无人”$(i=1,2,3)$，W表示“每部电梯中至少有一人”，$\overline{W}$表示“至少一部电梯中无人”，于是

$$P(A_i)=\left(\frac{2}{3}\right)^5\ (i=1,2,3),$$

$$P(A_iA_j)=\left(\frac{1}{3}\right)^5\ (i,j=1,2,3;\ i\neq j),$$

$$P(A_1A_2A_3)=0,$$

$$\begin{aligned}P(\overline{W})&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)\\&\quad-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+0\approx 0.38,\end{aligned}$$

$$P(W)=1-P(\overline{W})=1-0.38=0.62.$$

习题 10

某教研室共有11名教师，其中男教师7人，现该教研室中要任选3名为优秀教师，问3名优秀教师中至少有1名女教师的概率.

解答：

设A“3名优秀教师中有女教师”，A_i“3名优秀教师中恰有i名女教师”，$i=1,2,3$，则$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，A_1,A_2,A_3两两互斥，由加法公式有

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^1C_7^2}{C_{11}^3}+\frac{C_4^2C_7^1}{C_{11}^3}+\frac{C_4^3C_7^0}{C_{11}^3}\approx 0.788.$$

[另解]

$P(A)=1-P(\overline{A})$，$\overline{A}$为“3个优秀教师全是男的”，所以

$$P(A)=1-\frac{C_7^3}{C_{11}^3}\approx 0.788.$$

习题 11

某地区电话号码是由 8字打头的八个数字组成的 8位数，求
(1)一个电话号码的八个数字全不相同的概率 p；
(2)一个电话号码的八个数字不全相同的概率 q.

解答：

设 A “电话号码的 8个数全不相同”； B “电话号码的 8个数不全相同”．由于第 1个数字固定为 8，故只要确定后 7个数字，从 0, 1, ⋯, 9这十个数字中确定 7个数字，全部等可能的确定方法为 10^7，所求概率为

(1) $p=P(A)=\dfrac{P_9^7}{10^7}=\dfrac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3}{10^7}=0.018144$；

(2) $q=P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{1}{10^7}=0.9999999$.

习题 12

习题11

甲、乙两人先后从 52张牌中各抽取 13张，求甲或乙拿到 4张 A 的概率．
(1)甲抽后不放回，乙再抽； (2)甲抽后将牌放回，乙再抽．

解答：

假设 $A=\{$甲拿到 4张 $A\}$， $B=\{$乙拿到 4张 $A\}$，所求为 $P(A\cup B)$．
(1) A、B互斥

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}+\frac{C_{48}^{13}C_{35}^9}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}}=\frac{2C_{52}^{13}}{C_{52}^{13}}.$$

(2) A、B互容

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}+\frac{C_{48}^9}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{48}^9C_{48}^9}{C_{52}^{13}C_{52}^{13}}=\frac{2C_{48}^9}{C_{52}^{13}}-\frac{C_{48}^9C_{48}^9}{C_{52}^{13}C_{52}^{13}}.$$

习题 13

包括 a和 b二人在内共 n个人排队，问 a, b间恰有 r个人的概率．

解答：

首先 $0\le r\le n-2$， n个人共有 $n!$种排法．设所求概率的事件为 A事件．先考虑 a, b二人间隔 r个人的排法，若 a在前，则有 $n-(r+1)$种站法， a站定位置， b的位置就自然定了．因为间隔 r个人，在考虑 b在前也有 $n-(r+1)$种站法，所以 a, b二人共有 $2[n-(r+1)]$种排法，其余 $n-2$个人共有 $(n-2)!$种排法．所以，其有 $K_A=2[n-(r+1)](n-2)!$种排法，从而

$$P(A)=\frac{2[n-(r+1)](n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

习题 14

随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a为正常)内扔一个点，点落在半圆内任何区域内的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率.

解答:

设 A "原点与投点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$"，样本空间

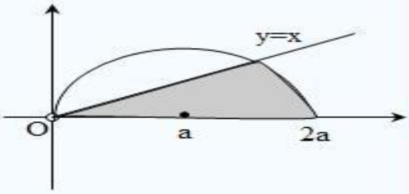
$$S=\{(x,y)|0<y<\sqrt{2ax-x^2}\},$$

其面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$;

$$A=\{(x,y)|(x,y)\in S,\ y<x\},$$

其面积为 $\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2$. 由几何概率计算公式得

$$P(A)=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$



习题 15

在某城市中发行三种报纸 A, B, C 经调查，订阅 A 报的有 45%，订阅 B 报的有 35%，订阅 C 报的有 30%，同时订阅 A 及 B 报的有 10%，同时订阅 A 及 C 报的有 8%，同时订阅 B 及 C 报的有 5%，同时订阅 A, B, C 报的有 试求下列事件的概率:
(1)只订 报的; (2)只订 及 报的; (3)只订一种报纸的; (4)正好订两种报纸的.

解答:

$$\begin{aligned}(1)\ P(A\bar{B}\bar{C})&=P(A-B-C)=P(A-(B\cup C))\\&=P(A-A(B\cup C))=P(A)-P(A(B\cup C))\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+(ABC)\\&=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ P(AB\bar{C})&=P(AB-C)=P(AB-ABC)\\&=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\ P(A\overline{BC})+\bar{A}B\bar{C}+\overline{AB}C)&=P(A\overline{BC})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=0.30+P(B-B(A\cup C))+P(C-C(A\cup B))\\&=0.30+P(B)-P(BA)-P(BC)+P(ABC)+P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.30+0.35-0.10-0.05+0.03+0.30-0.08-0.05+0.03\\&=0.73.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\ P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)&=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)\\&=P(AB)-P(ABC)+P(AC)-P(ABC)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3P(ABC)\\&=0.10+0.08+0.05-3\times0.03=0.14.\end{aligned}$$

习题 16

10个考签中有 4个难签，3人参加抽签考试，不重复地抽取，每人一次，甲先，乙次，丙最后，证明3人抽到难签的概率相等.

解答:

记事件 A、B、C 分别表示甲、乙、丙抽到难签，于是

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},$$

而事件 $B=AB\cup\bar{A}B$，由于 $(AB)(\bar{A}B)=\varnothing$，所以

$$\begin{aligned}P(B)&=P(AB)+P(\bar{A}B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})\\&=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{5},\end{aligned}$$

又因为 $C=ABC\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}\,\bar{B}C$，且 ABC、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}C$、$\bar{A}\bar{B}C$ 两两互斥，所以

$$\begin{aligned}P(C)&=P(ABC)+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}\bar{B}C)\\&=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{2}{5},\end{aligned}$$

显然 $P(A)=P(B)=P(C)$，说明3人抽到难签的概率相等.

习题 17

一批零件共 100 个，次品率为 10%，每次从中任取一个零件，取后不放回，如果取到一个合格品就不再取下去，求在三次内取到合格品的概率．

解答：

设 A_i $(i=1,2,3)$ 表示"第 i 次取到合格品"的事件，A 表示"在三次内取到合格品"的事件，则有

$$A=A_1\cup\overline{A_1}A_2\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3,$$

等号右边三项两两互斥，因此

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A)\\&=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})+P(\overline{A_1})(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=\frac{90}{100}+\frac{10}{100}\times\frac{90}{99}+\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{90}{98}\approx 0.9993.\end{aligned}$$

另解：

从对立事件的角度考虑，我们可以得到另一种更简单的解法．

因为 $\overline{A}$ 表示"三次都取到次品"的事件，即 $\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ ，因此

$$\begin{aligned}P(\overline{A})&=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_3}|\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=\frac{10}{100}\times\frac{9}{99}\times\frac{8}{98}\approx 0.0007,\end{aligned}$$

所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.9993$.

习题 18

有两箱同种类零件，第一箱装了 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品，今从两箱中任挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一只，做不放回抽样，求：

(1)第一次取到的是一等品的概率；

(2)在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率．

解答：

设事件 $A_i=\{$第 i 次取到的零件是一等品$\}$ $(i=1,2)$，

$B_i=\{$零件取自第 i 箱$\}$ $(i=1,2)$，

且知 $P(B_1)=P(B_2)=\dfrac{1}{2}$.

(1)求 $P(A_1)$.

$$A_1=A_1(B_1\cup B_2)=A_1B_1\cup A_1B_2,\quad (A_1B_1)(A_1B_2)=\varnothing,$$

所以

$$\begin{aligned}P(A_1)&=P(A_1B_1)+P(A_1B_2)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)\\&=\frac{1}{2}\times(\frac{10}{50}+\frac{18}{30})=\frac{2}{5}=0.4\end{aligned}$$

(2)求 $P(A_2|A_1)$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)},$$

$$\begin{aligned}P(A_1A_2)&=P(A_1A_2(B_1\cup B_2))=P(A_1A_2B_1\cup A_1A_2B_2)\\&=P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)\\&=\frac{1}{2}\times\left(\frac{10\times 9}{50\times 49}+\frac{18\times 17}{30\times 29}\right)\approx 0.194,\end{aligned}$$

所以 $P(A_2|A_1)=\dfrac{0.194}{0.4}=0.485$.

习题 19

发报台分别以概率 0.6和 0.4发出信号“ ·”及“ ”，由于通信系统受到干扰，当发出信号“ ·”时，收报台分别以概率 0.8及 0.2收到“ ·”及“ ”；又当发出售信号“ ”时，收报台分别以概率 0.9及 0.1收到“ ”及“ ·”，求当收报台收到“ ·”时，发报台确实发出信号“ ·”的概率，以及收到“ ”时，确实发出“ ”的概率．

解答：

A记为发报台发出信号“ ·”，B为收报台收到信号“ ·”，依题意，

$$P(A)=0.6,\quad P(\overline{A})=0.4,$$

$$P(B|A)=0.8,\ P(\overline{B}|A)=0.2,\ P(B|\overline{A})=0.1,\ P(\overline{B}|\overline{A})=0.9,$$

由贝叶斯公式

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.6\times0.8}{0.6\times0.8+0.4\times0.1}\approx0.923,$$

$$P(\overline{A}|\overline{B})=\frac{P(A)P(B|A)}{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})+P(A)P(\overline{B}|A)}=\frac{0.4\times0.9}{0.4\times0.9+0.6\times0.2}\approx0.75.$$

习题 20

设袋中装有 a只红球，b只白球，每次自袋中任取一只球，观察颜色后放回，并同时再放入 m只与所取出的那只同色的球，连续在袋中取球四次，试求第一，二次取到红球且第三次取白球，第四次取红球的概率．

解答：

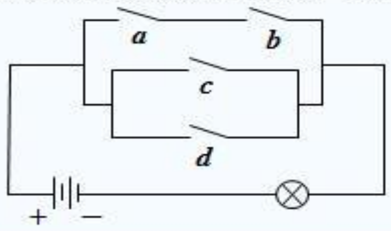
设 A_i“第 i次取到红球”，$\overline{A_i}$“第 i次取到白球”，$i=1,2,3,4$，所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)=P(A_4|A_1A_2\overline{A_3})P(\overline{A_3}|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

$$=\frac{a+2m}{a+b+3m}\cdot\frac{b}{a+b+2m}\cdot\frac{a+m}{a+b+m}\cdot\frac{a}{a+b}.$$

习题 21

一个开关电路如图所示，假设开关 a,b,c,d开或关的概率都是 0.5，且各开关是否关闭相互独立，求灯亮的概率以及如果发现灯亮时，开关 a与 b同时关闭的概率．



解答：

设 A表示开关 a关闭，B表示开关 b关闭，C表示开关 c关闭，D表示开关 d关闭，A,B,C,D相互独立，E表示灯亮，则

$$\begin{aligned}P(E)&=P(AB\cup C\cup D)\\&=P(AB)+P(C)+P(D)-P(ABC)-P(ABD)-P(CD)+P(ABCD)\\&=P(A)P(B)+P(C)+P(D)-P(A)P(B)P(C)-P(A)P(B)P(D)\\&\qquad-P(C)P(D)+P(A)P(B)P(C)P(D)\\&=0.8125,\end{aligned}$$

$$P(AB|E)=\frac{P(AB)}{P(E)}=\frac{0.25}{0.8125}\approx0.31.$$

习题 22

设口袋中装有 $2n-1$ 只白球，$2n$ 只黑球，一次取出 n 只球，如果已知取出的球都是同一种颜色，试计算该颜色是黑色的概率．

解答：

设 A“取出的 n 只球均为白球”，B“取出的 n 只球均为黑色”，C“取出的 n 只球均为同一种颜色”． 显然，A, B 互不相容，且有 $C=A\cup B$，所以

$$P(C)=P(A)+P(B).$$

又因 $B\subset C$，则 $B\cap C=B$，$P(BC)=P(B)$，

$$P(A)=\frac{C_{2n-1}^{n}}{C_{4n-1}^{n}},\quad P(B)=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{4n-1}^{n}},$$

从而

$$P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}=\frac{P(B)}{P(C)}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)}$$
$$=\frac{C_{2n}^{n}}{C_{2n-1}^{n}+C_{2n}^{n}}=\frac{2}{3}.$$

习题 23

某人有两盒火柴，吸烟时从任一盒中取一根火柴，经过若干时间后，发现一盒火柴已用完．如果最初两盒中各有 n 根火柴，求这时另一盒中还有 r 根火柴的概率．

解答：

不妨设甲盒已空而乙盒还有 r 根火柴，因为是随机抽取，可知这时必已取过 $2n-r$ 次，每次取甲，乙盒的概率均为 $\frac{1}{2}$，而在 $2n-r$ 次中必是 n 次取了甲盒的，$n-r$ 次取了乙盒的，最后第 $2n-r+1$ 必定是取甲盒的，否则不知其为空盒，故概率为

$$P_1=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

同理，最后乙盒空而甲盒剩 r 的概率为

$$P_2=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r},$$

故所求概率为

$$P=P_1+P_2=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}.$$

习题 24

甲、乙、丙 3 人同向一飞机射击，设击中飞机的概率分别为 0.4，0.5，0.7．如果只有 1 人击中飞机，则飞机被击落的概率是 0.2；如果有 2 人击中飞机，则飞机被击落的概率是 0.6；如果 3 人都击中飞机，则飞机一定被击落，求飞机被击落的概率．

解答：

设 A_1, A_2, A_3 分别表示甲、乙、丙击中飞机，B_i 表示有 i 个人击中飞机，$i=1,2,3$，则

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$$
$$=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36,$$

$$P(B_2)=P(A_1A_2\overline{A_3})+P(A_1\overline{A_2}A_3)+P(\overline{A_1}A_2A_3)$$
$$=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41,$$

$$P(B_3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14.$$

设 $B=$“飞机被击落”，由全概率公式

$$P(B)=P(B_1)P(B|B_1)+P(B_2)P(B|B_2)+P(B_3)P(B|B_3)$$

.

习题 25

在平常的生活中，人们常常用“水滴石穿”、“只要功夫深，铁杵磨成针”来形容有志者事竟成．但是，也有人认为这些是不可能的．如果从概率的角度来看，就会发现这是很有道理的．这是为什么？

解答：

此问题可转化为考虑下述问题．设在一次实验中，事件 A 发生的概率为 $\varepsilon>0$，独立重复该实验 n 次，求事件 A 至少发生一次的概率．事实上，由题意可知，此题属于伯努利概型．设 $B=$“n 次实验中事件 A 至少发生一次”，因此，B 的对立事件即是 $\overline{B}=$“n 次实验事件中 A 一次都不发生”，则

$$P(A)=\varepsilon，\ P(\overline{A})=1-\varepsilon，$$

有 $P(B)=1-P(\overline{B})=1-(1-\varepsilon)^n$ 所以

$$\lim_{n\to\infty}[1-(1-\varepsilon)^n]=1.$$

由上面的问题可以看出，一件微不足道的小事，只要你坚持做下去就会产生不可思议的结果．这正好印证了中国的一句俗语“锲而不舍，金石可镂”．无数的事实也证实了这一点，爱迪生经历了无数次的失败后终于发明了电灯，经过多年不懈的努力，吴道子终成一代“画圣”．这正如爱因斯坦所说：“成功 $=99\%$ 的汗水 $+1\%$ 的灵感”．

习题 26

现有编号为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的三个口袋，其中Ⅰ号袋内装有两个 1 号球，一个 2 号球与一个 3 号球；Ⅱ号袋内装有两个 1 号球与一个 3 号球；Ⅲ号袋内装有三个 1 号球与两个 2 号球．现在先从Ⅰ号袋内随机地取一个球，放入与球上号数相同的口袋中，第二次从该口袋中任取一个球，计算第二次取到几号球的概率最大，为什么？

解答：

设 A_i 第一次取到 i 号球，$i=1,2,3$，B_i 第二次取到 i 号球，$i=1,2,3$，则 A_1,A_2,A_3 两两互相容，是一个完备事件组，且

$$P(A_1)=\frac{2}{4},\quad P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4},$$

$$P(B_1|A_1)=\frac{2}{4},\quad P(B_1|A_2)=\frac{2}{4},\quad P(B_1|A_3)=\frac{3}{6},$$

$$P(B_2|A_1)=\frac{1}{4},\quad P(B_2|A_2)=\frac{1}{4},\quad P(B_2|A_3)=\frac{2}{6},$$

$$P(B_3|A_1)=\frac{1}{4},\quad P(B_3|A_2)=\frac{1}{4},\quad P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}.$$

由全概率公式，有

$$P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_1|A_i)=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

同理可得

$$P(B_2)=\frac{13}{48},\qquad P(B_3)=\frac{11}{48}.$$

计算可知，第二次取得 1 号球的概率最大．

习题27

某种仪器由三个部件组装而成，假设各部件质量互不影响且它们的优质率分别为 0.8， 0.7与 0.9． 已知：如果三个部件都是优质品，则组装后的仪器一定合格；如果有一个部件不是优质品，则组装后的仪器不合格率为 0.2；如果两件不是优质品，则仪器的不合格率为 0.6；如果三件都不是优质品，则仪器的不合格率为 0.9．

(1)求仪器的不合格率；

(2)如果已发现一台仪器不合格，问它有几个部件不是优质品的概率最大．

解答：

设 B “仪器不合格”， A_i “仪器上有 i 个部件不是优质品”， $i=0, 1, 2, 3$，显然 $A_0, A_1, A_2,$ 构成一个完备事件组，且

$$P(B|A_0)=0,\ P(B|A_1)=0.2,\ P(B|A_2)=0.6,\ P(B|A_3)=0.9$$

$$P(A_0)=0.8\times0.7\times0.9=0.504,$$

$$P(A_1)=0.2\times0.7\times0.9+0.8\times0.3\times0.9+0.8\times0.7\times0.1=0.398,$$

$$P(A_3)=0.2\times0.3\times0.1=0.006,$$

$$P(A_2)=1-P(A_0)-P(A_1)-P(A_3)=0.092.$$

(1)应用全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=0.504\times0+0.398\times0.2+0.092\times0.6+0.006\times0.9=0.1402$$

(2)应用贝叶斯公式，有

$$P(A_0|B)=0,\qquad P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{796}{1402},$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{552}{1402},$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{54}{1402}.$$

从计算结果可知，一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大．

习题28

要验收一批(100台)微机，验收方案如下：自该批微机中随机地取出3台进行测试(设三台微机的测试是相互独立的)，3台中只要有一台在测试中被认为是次品，这批微机就会被拒绝．由于测试条件和水平，将次品的微机误认为正品的概率为 0.05，而将正品的微机误判为次品的概率为 0.01，如果已知这 100台微机恰有4台次品，试问这批微机被接收的概率是多少？

解答：

设 A “这批微机被接收”， B_i “随机抽取出的3台中恰有 i 台次品”， $i=1, 2, 3$ 显然，B_0, B_1, B_2, B_3 是一个完备事件组．

$$P(B_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},\qquad P(B_1)=\frac{C_4^1C_{96}^2}{C_{100}^3},$$

$$P(B_2)=\frac{C_4^2C_{96}^1}{C_{100}^3},\qquad P(B_3)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3}.$$

$$P(A|B_0)=(0.99)^3,\qquad P(A|B_1)=(0.99)^2\times0.05,$$

$$P(A|B_2)=0.99\times(0.05)^2,\qquad P(A|B_3)=(0.05)^3,$$

所以 $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=0.8574+0.0055+0+0=0.8629$.

第二章 随机变量及其分布

2.1 随机变量

习题 1 随机变量的特征是什么？

解答：①随机变量是定义在样本空间上的一个实值函数.

②随机变量的取值是随机的，事先或试验前不知道取哪个值.

③随机变量取特定值的概率大小是确定的.

习题 2 试述随机变量的分类.

解答：①若随机变量 X 的所有可能取值能够一一列举出来，则称 X 为离散型随机变量；否则称为非离散型随机变量.②若 X 的可能值不能一一列出，但可在一段连续区间上取值，则称 X 为连续型随机变量.

习题 3 盒中装有大小相同的球 10 个，编号为 0,1,2,⋯,9， 从中任取 1 个，观察号码是“小于 5”，“等于 5”，“大于 5”的情况，试定义一个随机变量来表达上述随机试验结果，并写出该随机变量取每一个特定值的概率.

解答：分别用 ω1,ω2,ω3 表示试验的三个结果“小于 5”，“等于 5”，“大于 5”，则样本空间 S={ω1,ω2,ω3}， 定义随机变量 X 如下：

X=X(ω)={0, ω=ω11, ω=ω2,2, ω=ω3

则 X 取每个值的概率为

P{X=0}=P{取出球的号码小于 5}=5/10,

P{X=1}=P{取出球的号码等于 5}=1/10,

P{X=2}=P{取出球的号码大于 5}=4/10.

2.2 离散型随机变量及其概率分布

习题 1 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 P{X=1}=P{X=2}， 求 λ.

解答：由 P{X=1}=P{X=2}， 得

λe−λ=λ^2/2e^−λ,解得 λ=2.

习题 2

设随机变量 X 的分布律为 P{X=k}=k15,k=1,2,3,4,5,

试求(1)P{12<X<52; (2)P{1≤X≤3}; (3)P{X>3}.

解答：(1)P{12<X<52=P{X=1}+P{X=2}=115+215=15;

(2)P{≤X≤3}=P{X=1}+P{X=2}+P{X=3}

=115+215+315=25;

(3)P{X>3}=P{X=4}+P{X=5}=415+515=35.

习题 3

已知随机变量 X 只能取-1,0,1,2 四个值，相应概率依次为 12c,34c,58c,716c， 试确定常数 c， 并计算 P{X<1∣X≠0}.

解答：依题意知，12c+34c+58c+716c=1， 即 3716c=1,解得

c=3716=2.3125.

由条件概率知 P{X<1∣X≠0}=P{X<1,X≠0}P{X≠0}=P{X=−1}P{X≠0}

=12c1−34c=24c−3=26.25=0.32.

习题 4

一袋中装有 5 只球，编号为 1,2,3,4,5. 在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律.

解答： 随机变量 X 的可能取值为 3,4,5.

P{X=3}=C22·1C53=110, P{X=4}=C32·1C53=310, P{X=5}=C42·1C53=35,

所以 X 的分布律为

X	3	4	5
pk	1/10	3/10	3/5

习题 5 某加油站替出租车公司代营出租汽车业务，每出租一辆汽车，可从出租公司得到 3 元.因代营业务，每天加油站要多付给职工服务费 60 元，设每天出租汽车数 X 是一个随机变量，它的概率分布如下：

X	10	20	30	40
pi	0.15	0.25	0.45	0.15

求因代营业务得到的收入大于当天的额外支出费用的概率.

解答： 因代营业务得到的收入大于当天的额外支出费用的概率为：

P{3X>60}, 即 P{X>20},

P{X>20}=P{X=30}+P{X=40}=0.6.

就是说，加油站因代营业务得到的收入大于当天的额外支出费用的概率为 0.6.

习题 6 设自动生产线在调整以后出现废品的概率为 p=0.1, 当生产过程中出现废品时立即进行调整，X 代表在两次调整之间生产的合格品数，试求：

(1)X 的概率分布； (2)P{X≥5}；

(3)在两次调整之间能以 0.6 的概率保证生产的合格品数不少于多少?

解答： (1)P{X=k}=(1-p)kp=(0.9)k×0.1,k=0,1,2,⋯;

(2)P{X≥5}=∑k=5∞P{X=k}=∑k=5∞(0.9)k×0.1=(0.9)5;

(3)设以 0.6 的概率保证在两次调整之间生产的合格品不少于 m 件，则 m 应满足

P{X≥m}=0.6,即 P{X≤m-1}=0.4. 由于

P{X≤m-1}=∑k=0m-1(0.9)k(0.1)=1-(0.9)m,

故上式化为 1-0.9m=0.4, 解上式得 m≈4.85≈5,

因此，以 0.6 的概率保证在两次调整之间的合格品数不少于 5.

习题 7 设某运动员投篮命中的概率为 0.6, 求他一次投篮时，投篮命中的概率分布.

解答： 此运动员一次投篮的投中次数是一个随机变量，设为 X, 它可能的值只有两个，即 0 和 1.

X=0 表示未投中，其概率为 p1=P{X=0}=1-0.6=0.4,

X=1 表示投中一次，其概率为 p2=P{X=1}=0.6.

则随机变量的分布律为

X	0	1
P	0.4	0.6

习题 8 某种产品共 10 件，其中有 3 件次品，现从中任取 3 件，求取出的 3 件产品中次品的概率分布.

解答：

设X表示取出3件产品的次品数，则X的所有可能取值为0,1,2,3.　对应概率分布为

P{X=0}=C73C103=35120,　　　　　P{X=1}=C73C31C103=36120,

P{X=2}=C71C32C103=21120,　　　　P{X=3}=C33C103=1120.

X的分布律为

X	0123
P	3512036120211201120

习题9 一批产品共10件，其中有7件正品，3件次品，每次从这批产品中任取一件，取出的产品仍放回去，求直至取到正品为止所需次数X的概率分布.

解答： 由于每次取出的产品仍放回去，各次抽取相互独立，下次抽取时情况与前一次抽取时完全相同，所以X的可能取值是所有正整数1,2,⋯,k,⋯.

设第k次才取到正品(前k-1次都取到次品)，　则随机变量X的分布律为

P{X=k}=310×310×⋯×310×710=(310)k-1×710,k=1,2,⋯.

习题10 设随机变量X∼b(2,p),Y∼b(3,p)，　若P{X⩾1}=59，　求P{Y⩾1}.

解答： 因为X∼b(2,p),

P{X=0}=(1-p)2=1-P{X⩾1}=1-5/9=4/9,所以p=1/3.

因为Y∼b(3,p)，　所以　　　　　　P{Y⩾1}=1-P{Y=0}=1-(2/3)3=19/27.

习题11 纺织厂女工照顾800个纺绽，每一纺锭在某一段时间τ内断头的概率为0.005，　在τ这段时间内断头次数不大于2的概率.

解答： 以X记纺锭断头数，　　n=800,p=0.005,np=4,

应用泊松定理，所求概率为：

P{0⩽X⩽2}=P{∪0⩽xi⩽2{X=xi}=∑k=02b(k;800,0.005)

≈∑k=02P(k;4)=e-4(1+41!+422!)≈0.2381.

习题12 设书籍上每页的印刷错误的个数X服从泊松分布，经统计发现在某本书上，有一个印刷错误与有两个印刷错误的页数相同，求任意检验4页，每页上都没有印刷错误的概率.

解答： \becauseP{X=1}=P{X=2}，　即

λ11!e-λ=λ22!e-λ⇒λ=2,

∴P{X=0}=e-2,

∴p=(e-2)4=e-8.

2.3 随机变量的分布函数

习题1F(X)={0,x<-20.4,-2⩽x<01,x⩾0，　是随机变量X的分布函数，则X是___________型的随机变量.

解答： 离散.

由于F(x)是一个阶梯函数，故知X是一个离散型随机变量.

习题2 设F(x)={0x<0x20⩽1,1x⩾1　问F(x)是否为某随机变量的分布函数.

解答： 首先，因为0⩽F(x)⩽1,∀x∈(-∞,+∞).

其次，F(x)单调不减且右连续，即

F(0+0)=F(0)=0,　　　F(1+0)=F(1)=1,

且　　　　　　　F(-∞)=0,F(+∞)=1,

所以F(x)是随机变量的分布函数.

习题3 已知离散型随机变量X的概率分布为P{X=1}=0.3,P{X=3}=0.5,P{X=5}=0.2,

试写出X的分布函数F(x)，并画出图形.

解答： 由题意知X的分布律为：

X	135
Pk	0.30.50.2

所以其分布函数F(x)=P{X≤x}={0,x<10.3,1≤x<30.8,3≤x<51,x≥5.

F(x)的图形见图.

习题4 设离散型随机变量X的分布函数为 F(x)={0,x<-10.4,-1≤x<10.8,1≤x<31,x≥3,

试求：(1)X的概率分布； (2)P{X<2∣X≠1}.

解答：(1)

X	-113
pk	0.40.40.2

(2)P{X<2∣X≠1}=P{X=-1}P{X≠1}=23.

习题5 设X的分布函数为

F(x)={0,x<0x2,0≤x<1x-12,1≤x<1.51,x≥1.5,

求P{0.4<X≤1.3},P{X>0.5},P{1.7<X≤2}.

解答：P{0.4<X≥1.3}=P{1.3}-F(0.4)=(1.3-0.5)-0.4/2=0.6,

P{X>0.5}=1-P{X≤0.5}=1-F(0.5)=1-0.5/2=0.75,

P{1.7<X≤2}=F(2)-F(1.7)=1-1=0.

习题6 设随机变量X的分布函数为

F(x)=A+Barctanx(-∞<x<+∞),

试求：(1)系数A与B; (2)X落在(-1,1]内的概率.

解答：(1)由于F(-∞)=0,F(+∞)=1, 可知

{A+B(-π2)A+B(π2)=1=0⇒A=12,B=1π,

于是 F(x)=12+1πarctanx, -∞<x<+∞;

(2)P{-1<X≤1}=F(1)-F(-1)

=(12+1πarctan1)-[12+1πarctanx(-1)]

=12+1π⋅π4-12-1π(-π4)=12.

习题7 在区间[0,a]上任意投掷一个质点，以X表示这个质点的坐标.设这个质点落在[0,a]中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例，试求X的分布函数.

解答： F(x)=P{X≤x}={0,x<0xa,0≤x<a.1,x≥a

2.4 连续型随机变量及其概率密度

习题1 设随机变量X的概率密度为

f(x)=12πe-(x+3)24(-∞<x<+∞),则Y=¯∼N(0,1).

解答： 应填3+X2.

由正态分布的概率密度知 μ=-3, σ=2 由 Y=X-μσ~N(0,1), 所以 Y=3+X2~N(0,1).

习题 2 已知 X~f(x)={2x,0<x<10,其它, 求 P{X≤0.5};P{X=0.5};F(x).

解答： P{X≤0.5}=∫-∞0.5f(x)dx=∫-∞00dx+∫00.52xdx=x2|00.5=0.25,

P{X=0.5}=P{X≤0.5}-P{X<0.5}=∫-∞0.5f(x)dx-∫-∞0.5f(x)dx=0.

当 X≤0 时，F(x)=0;

当 0<x<1 时，F(x)=∫-∞xf(t)dt=∫-∞00dt+∫0x2tdt=t2|0x=x2;

当 X≥1 时，F(x)=∫-∞xf(t)dt=∫-∞00dt+∫0x2tdt+∫1x0dt=t2|01=1,故

F(x)={0,x≤0x2,0<x<1.1,x≥1

习题 3 设连续型随机变量 X 的分布函数为

F(x)={A+Be-2x,x>00,x≤0,试求：(1)A,B 的值；(2)P{-1<X<1}； (3)概率密度函数 F(x).

解答： (1)\becauseF(+∞)=limx→+∞(A+Be-2x)=1, ∴A=1;

又 \becauselimx→0+(A+Be-2x)=F(0)=0, ∴B=-1.

(2) P{-1<X<1}=F(1)-F(-1)=1-e-2.

(3)f(x)=F′(x)={2e-x,x>00,x≤0.

习题 4 服从拉普拉斯分布的随机变量 X 的概率密度 f(x)=Ae-|x|, 求系数 A 及分布函数 F(x).

解答： 由概率密度函数的性质知，∫-∞+∞f(x)dx=1, 即

∫-∞+∞Ae-|x|dx=1,

而∫-∞+∞Ae-|x|dx=∫-∞0Aexdx+∫0+∞Ae-xdx

=Aex|-∞0+(-Ae-x|0+∞)=A+A=2A

或 ∫-∞+∞Ae-xdx=2∫0+∞Ae-xdx=-2Ae-x|0+∞=2A, 所以 2A=1, 即 A=1/2.

从而 f(x)=12e-|x|,-∞<x<+∞, 又因为 F(x)=∫-∞xf(t)dt, 所以

当 x<0 时，F(x)=∫-∞x12e-|t|dt=12∫-∞xetdt=12et|-∞x=12ex;

当 x≥0 时，F(x)=∫-∞x12e-|x|dt=∫-∞012etdt+∫0x12e-tdt

=12et|-∞0-12e-t|0x=12-12e-x+12=1-12e-x,

从而 F(x)={12ex,x<01-12e-x,x≥0.

习题 5 某型号电子管，其寿命(以小时计)为一随机变量，概率密度

f(x)={100x2,x≥1000,其它,

某一电子管的使用寿命为 X, 则三个电子管使用 150 小时都不需要更换的概率.

解答： 设电子管的使用寿命为 X, 则电子管使用 150 小时以上的概率为

P{X>150}=∫150+∞f(x)dx=∫150+∞100x2dx

=-100x|150+∞=100150=23,

从而三个电子管在使用 150 小时以上不需要更换的概率为 p=(2/3)3=8/27.

习题 6 设一个汽车站上，某路公共汽车每 5 分钟有一辆车到达，设乘客在 5 分钟内任一时间到达是等可能的，试计算在车站候车的 10 位乘客中只有 1 位等待时间超过 4 分钟的概率.

解答： 设 X 为每位乘客的候车时间，则 X 服从[0,5]上的均匀分布. 设 Y 表示车站上 10 位乘客中等待时间超过 4 分钟的人数. 由于每人到达时间是相互独立的.这是 10 重伯努力概型. Y 服从二项分布，其参数

n=10,p=P{X≥4}=15=0.2,

所以 P{Y=1}=C101×0.2×0.89≈0.268.

习题 7

设 X～N(3,22).(1)确定 C, 使得 P{X>c}=P{X≤c};(2)设 d 满足 P{X>d}≥0.9, 问 d 至多为多少?

解答：因为 X～N(3,22), 所以 X-32=Z～N(0,1).

(1)欲使 P{X>c}=P{X≤c}, 必有 1-P{X≤c}=P{X≤c}, 即 P{X≤c}=1/2,

亦即 Φ(c-32)=12, 所以 c-32=0, 故 c=3.

(2)由 P{X>d}≥0.9 可得 1-P{X≤d}≥0.9, 即 P{X≤d}≤0.1.

于是 Φ(d-32)≤0.1,Φ(3-d2)≥0.9.查表得 3-d2≥1.282, 所以 d≤0.436.

习题 8

设测量误差 X～N(0,102), 先进行 100 次独立测量，求误差的绝对值超过 19.6 的次数不小于 3 的概率.

解答：先求任意误差的绝对值超过 19.6 的概率 p,

p=P{∣X∣>19.6}=1-P{∣X∣≤19.6}

=1-P{∣X10∣≤1.96=1-[Φ(1.96)-Φ(-1.96)]

=1-[2Φ(1.96)-1]=1-[2×0.975-1]=1-0.95=0.05.

设 Y 为 100 次测量中误差绝对值超过 19.6 的次数，则 Y～b(100,0.05).

因为 n 很大，p 很小，可用泊松分布近似，np=5=λ, 所以

P{Y≥3}≈1-50e-50!-51e-51!-52e-52!=1-3722-5≈0.87.

习题 9 某玩具厂装配车间准备实行计件超产奖，为此需对生产定额作出规定. 根据以往记录，各工人每月装配产品数服从正态分布 N(4000,3600).假定车间主任希望 10%的工人获得超产奖，求：工人每月需完成多少件产品才能获奖？

解答：用 X 表示工人每月需装配的产品数，则 X～N(4000,3600).

设工人每月需完成 x 件产品才能获奖，依题意得 P{X≥x}=0.1, 即

1-P{X<x}=0.1,

所以 1-F(x)=0.1, 即 1-Φ(x-400060)=0.1, 所以 Φ(x-400060)=0.9.

查标准正态人分布表得 Φ(1.28)=0.8997, 因此 x-400060≈1.28, 即 x=4077 件，

就是说，想获超产奖的工人，每月必须装配 4077 件以上.

习题 10 某地区 18 岁女青年的血压(收缩压,以 mm-HG 计)服从 N(110,122). 在该地区任选一 18 岁女青年，测量她的血压 X.(1)求 P{X≤105},P{100<X≤120};(2)确定最小的 x, 使 P{X>x}≤0.005.

解答： 已知血压 X～N(110,122).

(1)P{X≤105}=P{X-11012≤-512≈1-Φ(0.42)=0.3372,

P{100<X≤120}=Φ(120-11012)-Φ(100-11012)

=Φ(0.833)-Φ(-0.833)=2Φ(0.833)-1≈0.595.

(2)使 P{X>x}≤0.05, 求 x, 即 1-P{X≤x}≤0.05, 亦即 Φ(x-11012)≥0.95,

查表得 x-10012≥1.645, 从而 x≥129.74.

习题 11 设某城市男子身高 X～N(170,36), 问应如何选择公共汽车车门的高度使男子与车门碰头的机会小于 0.01.

解答：X～N(170,36), 则 X-1706～N(0,1).

设公共汽车门的高度为 xcm，由题意 P{X>x}<0.01， 而

$$P\{X>x\}=1-P\{X\leqslant x\}=1-\Phi(x-1706)<0.01,$$

即 Φ(x-1706)>0.99， 查标准正态表得 x-1706>2.33， 故 x>183.98cm.

因此，车门的高度超过 183.98cm 时，男子与车门碰头的机会小于 0.01.

习题 12 某人去火车站乘车，有两条路可以走. 第一条路程较短，但交通拥挤，所需时间(单位：分钟)服从正态分布 N(40,102)； 第二条路程较长，但意外阻塞较少，所需时间服从正态分布 N(50,42)， 求：

(1)若动身时离开车时间只有 60 分钟，应走哪一条路线？

(2)若动身时离开车时间只有 45 分钟，应走哪一条路线？

解答： 设 X,Y 分别为该人走第一、二条路到达火车站所用时间，则 X～N(40,102),Y～N(50,42).

哪一条路线在开车之前到达火车站的可能性大就走哪一条路线.

(1)因为 P{X<60}=Φ(60-4010)=Φ(2)=0.97725, P{Y<60}=Φ(60-504)=Φ(2.5)=0.99379,

所以有 60 分钟时应走第二条路.

(2)因为 P{X<45}=Φ(45-4010)=Φ(0.5)=0.6915,

P{X<45}=Φ(45-504)=Φ(-1.25)=1-Φ(1.25)=1-0.8925=0.1075

所以只有 45 分钟应走第一条路.

2.5 随机变量函数的分布

习题 1 已知 X 的概率分布为

X	-2	-1	0	1	2	3
pi	2a	1/10	3a	a	a	2a

试求：(1)a;   (2)Y=X2-1 的概率分布.

解答： (1)\because2a+1/10+3a+a+a+2a=1,

∴a=1/10.

(2)

Y	-1	0	3	8
pi	3/10	1/5	3/10	1/5

习题 2 设 X 的分布律为 P{X=k}=12k,k=1,2,…, 求 Y=sinπ2X 的分布律.

解答： 因为 sinxnπ2={1,当 n=4k-10,当 n=2k-1,当 n=4k-3,

所以 Y=sin(π2X)只有三个可能值-1,0,1. 容易求得 P{Y=-1}=215,P{=0}=13,P{Y=1}=815

故 Y 的分布律列表表示为

Y	-101
P	21513815

习题 3

设随机变量 X 服从[a,b]上的均匀分布，令 Y=cX+d(c≠0)， 试求随机变量 Y 的密度函数.

解答： fY(y)={fX(y-dc)·1｜c｜,a≤y-dc≤b0,其它,

当 c>0 时，fY(y)={1c(b-a),ca+d⩽y⩽cb+d0,其它,当 c<0 时，fY(y)={-1c(b-a),cb+d⩽y⩽ca+d0,其它.

习题 4 设随机变量 X 服从[0,1]上的均匀分布，求随机变量函数 Y=eX 的概率密度 fY(y).

解答： f(x)={1,0⩽x⩽10,其它,

f=ex,x∈(0,1)是单调可导函数，y∈(1,e)， 其反函数为 x=lny， 可得

f(x)={fX(lny)∣ln′ y,1<y<e0,其它={1y,1<y<e0,其它.

习题 5 设 X∼N(0,1)，求 Y=2X2+1 的概率密度.

解答： 因 y=2x2+1 是非单调函数，故用分布函数法先求 FY(y).

FY(y)=P{Y⩽y}=P{2X2+1⩽y}(当 y>1 时)

=P{-y-12⩽X⩽y-12=∫-y-12y-1212π e-x2dx,

所以 fY(y)=F′ Y(y)=22π e-12⋅y-12⋅122y-1,y>1， 于是

fY(y)={12π(y-1)e-y-14,y>10,y⩽1.

习题 6 设连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x)， 分布函数为 F(x)， 求下列随机变量 Y 的概率密度：

(1)Y=1X;　　　　(2)Y=∣X∣.

解答： (1)FY(y)=P{Y⩽y}=P{1/X⩽y}.

①当 y>0 时，FY(y)=P{1/X⩽0}+P{0<1/X⩽y}

=P{X⩽0}+P{X⩾1/y}=F(0)+1-F(1/y),

故这时 fY(y)=[-F(1y)]′ =1y2f(1y);;

②当 y<0 时，FY(y)=P{1/y⩽X<0}=F(0)-F(1/y),

故这时 fY(y)=1y2f(1y);

③当 y=0 时，FY(y)=P{1/X⩽0}=P{X<0}=F(0),

故这时取 fY(0)=0， 综上所述

fY(y)={1y2⋅f(1y),y≠00,y=0.

(2)FY(y)=P{Y⩽y}=P{∣X∣⩽y}.

①当 y>0 时，FY(y)=P{-y⩽X⩽y}=F(y)-F(-y)

这时 fY(y)=f(y)+f(-y);

②当 y<0 时，FY(y)=P{∅}=0， 这时 fY(y)=0;

③当 y=0 时，FY(y)=P{Y⩽0}=P{∣X∣⩽0}=P{X=0}=0,

故这时取 FY(y)=0， 综上所述 fY(y)={f(y)+f(-y),y>00,y⩽0.

习题 7 某物体的温度 T(∘F)是一个随机变量， 且有 T∼N(98.6,2)， 已知 θ=5(T-32)/9， 试求 θ(∘F)的概率密度.

解答： 已知 T∼N(98.6,2). θ=59(T-32)， 反函数为 T=59θ+32， 是单调函数，所以

fθ(y)=fT(95y+32)⋅95=12π⋅2e-(95y+32-98.6)24⋅95

=910πe-81100(y-37)2.

习题 8 设随机变量 X 在任一区间[a,b]上的概率均大于 0， 其分布函数为 FY(x)， 又 Y 在[0,1]上服从均匀分布，证明:Z=FX-1(Y)的分布函数与 X 的分布函数相同.

解答： 因 X 在任一有限区间[a,b]上的概率均大于 0， 故 FX(x)是单调增加函数，其反函数 FX-1(y)存在，又 Y 在[0,1]上服从均匀分布，故 Y 的分布函数为

$FY(y)=P\{Y\leq y\}=\{0,y<0y,0\leq y\leq 11,y>0,$

于是，Z 的分布函数为

$FZ(z)=P\{Z\leq z\}=P\{FX-1(Y)\leq z\}=P\{Y\leq FX(z)\}$

$=\{0,FX(z)<0FX(z),0\leq FX(z)\leq 1,1,FX(z)>1$

由于 $FX(z)$ 为 X 的分布函数，故 $0\leq FX(z)\leq 1$.

$FX(z)<0$ 和 $FX(z)>1$ 均匀不可能，故上式仅有 $FZ(z)=FX(z)$， 因此，Z 与 X 的分布函数相同.

总习题解答

习题 1 从 1～20 的整数中取一个数，若取到整数 k 的概率与 k 成正比，求取到偶数的概率.

解答： 设 Ak 为取到整数 k， $P(Ak)=ck$， $k=1,2,\cdots,20$.

因为 $P(\cup K=120Ak)=\sum k=120P(Ak)=c\sum k=120k=1$， 所以 $c=1210$,

$P\{$取到偶数$\}=P\{A2\cup A4\cup\cdots\cup A20\}$ $=1210(2+4+\cdots+20)=1121$.

习题 2 若每次射击中靶的概率为 0.7， 求射击 10 炮,

(1)命中 3 炮的概率;(2)至少命中 3 炮的概率;(3)最可能命中几炮.

解答： 若随机变量 X 表示射击 10 炮中中靶的次数. 由于各炮是否中靶相互独立，所以是一个 10 重伯努利概型，X 服从二项分布，其参数为 $n=10,p=0.7$， 故

(1)$P\{X=3\}=C103(0.7)3(0.3)7\approx 0.009$;

(2)$P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}$

$=1-[C100(0.7)0(0.3)10+C101(0.7)1(0.3)9+C102(0.7)2(0.3)8]$

≈ 0.998;

(3)因 $X\sim b(10,0.7)$， 而 $k0=[(n+1)p]=[(10+1)]\times 0.7=[7.7]=7$,

故最可能命中 7 炮.

习题 3 在保险公司里有 2500 名同一年龄和同社会阶层的人参加了人寿保险，在 1 年中每个人死亡的概率为 0.002，每个参加保险的人在 1 月 1 日须交 120 元保险费，而在死亡时家属可从保险公司里领 20000 元赔偿金，求:(1)保险公司亏本的概率;(2)保险公司获利分别不少于 100000 元，200000 元的概率.

解答： 1)以“年”为单位来考虑，在 1 年的 1 月 1 日，保险公司总收入为

2500×120 元=30000 元.

设 1 年中死亡人数为 X， 则 $X\sim b(2500,0.002)$， 则保险公司在这一年中应付出 200000X(元)，要使保险公司亏本，则必须 $200000X>300000$ 即 $X>15$(人).

因此，$P\{$保险公司亏本$\}=P\{X>15\}$

$=\sum k=162500C2500k(0.002)k\times(0.998)2500-k$

$\approx 1-\sum k=015e-55kk!\approx 0.000069$,

由此可见,在 1 年里保险公司亏本的概率是很小的.

(2)$P\{$保险公司获利不少于 100000 元$\}$

$=P\{300000-200000X\geq 100000\}=P\{X\leq 10\}$

$=\sum k=010C2500k(0.002)\times(0.998)2500-k\approx\sum k=010e-55kk!\approx 0.986305$,

即保险公司获利不少于 100000 元的概率在 98%以上.

P{保险公司获利不少于 200000 元}

=P{300000-200000X⩾200000}=P{X⩽5}

=∑k=05C2500k(0.002)k×(0.998)2500-k≈∑k=05e-55kk!≈0.615961,

即保险公司获利不少于 200000 元的概率接近于 62%.

习题 4 一台总机共有 300 台分机，总机拥有 13 条外线，假设每台分机向总机要外线的概率为 3%, 试求每台分机向总机要外线时，能及时得到满足的概率和同时向总机要外线的分机的最可能台数.

解答：设分机向总机要到外线的台数为 X, 300 台分机可看成 300 次伯努利试验，一次试验是否要到外线. 设要到外线的事件为 A, 则 P(A)=0.03, 显然 X～b(300,0.03), 即

P{X=k}=C300k(0.03)k(0.97)300-k(k=0,1,2,⋯,300),

因 n=300 很大，p=0.03 又很小,

λ=np=300×0.03=9,

可用泊松近似公式计算上面的概率. 因总共只有 13 条外线，要到外线的台数不超过 13，故

P{X⩽13}≈∑k=0139kk!e-9≈0.9265, (查泊松分布表)

且同时向总机要外线的分机的最可能台数

k0=[(n+1)p]=[301×0.03]=9.

习题 5 在长度为 t 的时间间隔内，某急救中心收到紧急呼救的次数 X 服从参数 t2 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关(时间以小时计), 求：

(1)某一天从中午 12 至下午 3 时没有收到紧急呼救的概率；

(2)某一天从中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的概率.

解答：(1)t=3, λ=3/2, P{X=0}=e-3/2≈0.223;(2)t=5, λ=5/2, P{X⩾1}=1-P{X=0}=1-e-5/2≈0.918.

习题 6 设 X 为一离散型随机变量，其分布律为

X	-101
pi	1/21-2qq2

试求：(1)q 的值； (2)X 的分布函数.

解答：(1)\because 离散型随机变量的概率函数 P{X=xi}=pi, 满足∑ipi=1, 且 0⩽pi⩽1,

∴ {1/2+1-2q+q2=10⩽1-2q⩽1q2⩽1,

解得 q=1-1/2. 从而 X 的分布律为下表所示：

X	-101
pi	1/22-13/2-2

(2)由 F(x)=P{X⩽x}计算 X 的分布函数

F(x)={0,1/2,2-1/2,1,x<-1-1⩽x<00⩽x<0x⩾1.

习题 7 设随机变量 X 的分布函数 F(x)为

F(x)={0,x<0Asinx,0⩽x⩽π/2,1,x>π/2

则 A=¯,P{∣X∣<π/6}=¯.

解答：应填 1;1/2.

由分布函数 F(x)的右连续性，有 F(π2+0)=F(π2)⇒A=1.

因 F(x)在 x=π6 处连续，故 P{X=π6=12， 于是有

P{|X|<π6=P{-π6<X<π6

=P{-π6<X≤π6=F(π6)-F(-π6)=12..

习题 8
使用了 x 小时的电子管，在以后的 Δx 小时内损坏的概率等于 λΔx+o(Δx)， 其中 λ>0 是常数，求电子管在损坏前已使用时数 X 的分布函数 F(x)，并求电子管在 T 小时内损坏的概率.

解答：因 X 的可能取值充满区间(0,+∞)， 故应分段求 F(x)=P{X≤x}.

当 x≤0 时，F(x)=P{X≤x}=P(∅)=0;

当 x>0 时，由题设知 P{x<X≤x+Δx/X}=λΔx+o(Δx)， 而

P{x<X≤x+Δx/X}=P{x<X≤x+Δx,X>x}P{X>x}

=P{x<X≤x+Δx}1-P{X≤x}=F(x+Δx)-F(x)1-F(x)，

故 F(X+Δx)-F(x)1-F(x)=λΔx+o(Δx)， 即

F(x+Δx)-F(x)Δx=[1-F(x)][λ+o(Δx)Δx]，

令 o(Δx)→0， 得 F′(x)=λ[1-F(x)].

这是关于 F(x)的变量可分离微分方程，分离变量 dF(x)1-F(x)=λdx， 积分之得通解为

C[1-F(x)]=e-λx(C 为任意常数).

注意到初始条件 F(0)=0， 故 C=1.

于是 F(x)=1-e-λx,x>0,λ>0， 故 X 的分布函数为

F(x)={0,x≤01-e-λx,x>0(λ>0)，

从而电子管在 T 小时内损坏的概率为

P{X≤T}=F(T)=1-e-λT.

习题 9 设连续型随机变量 X 的分布密度为

f(x)={x,0<x≤12-x,1<x≤20,其它,

求其分布函数 F(x).

解答：当 x≤0 时，F(x)=∫-∞x0dt=0;

当 0<x≤1 时，F(x)=∫-∞xf(t)dt=∫-∞00tdt+∫0xtdt=12x2;

当 1<x≤2 时，

F(x)=∫-∞xf(t)dt=∫-∞00dt+∫01tdt+∫1x(2-t)dt

=0+12+(2t-12t2)|1x=-1+2x-x22;

当 x>2 时，F(x)=∫-∞00dt+∫01tdt+∫12(2-t)dt+∫2x0dt=1， 故

F(x)={0,x≤212x2,0<x≤1-1+2x-x22,1<x≤21,x>2.

习题 10 某城市饮用水的日消费量 X(单位：百万升)是随机变量，其密度函数为：

f(x)={19xe-x3,x>00,其它,

试求：(1)该城市的水日消费量不低于 600 万升的概率；(2)水日消费量介于 600 万升到 900 万升的概率.

解答：先求 X 的分布函数 F(x). 显然，当 x<0 时，F(x)=0， 当 x≥0 时有

F(x)=∫0x19te-t3dt=1-(1+x3)e-x3

故 F(x)={1-(1+x3)e-x3,x≥00,x<0， 所以

P{X≥6}=1-P{X<6}=1-P(X≤6)=1-F(6)

=1-[1-(1+x3)e-x3]x=6=3e-2,

P{6<X≤9}=F(9)-F(6)=(1-4e-3)-(1-3e-2)=3e-2-4e-3.

习题 11

已知 X～f(x)={cλe-λx,x>a0,其它(λ>0)， 求常数 c 及 P{a-1<X≤a+1}.

解答： 由概率密度函数的性质知∫-∞+∞f(x)dx=1， 而

∫-∞+∞f(x)dx=∫-∞a0dx+∫a+∞cλe-λxdx

=c∫a+∞e-λxd(λx)=-ce-λx\vlinea+∞=ce-λa,

所以 ce-λa=1， 从而 c=eλa. 于是

P{a-1<X≤a+1}=∫a-1a+1f(x)dx=∫a-1a0dx+∫aa+1λeλae-λxdx

=-eλae-λx\vlineaa+1=-eλa(e-λ(a+1)-e-λa)=1-e-λ.

注意，a-1<a， 而当 x<a 时，f(x)=0.

习题 12 已知 X～f(x)={12x2-12x+3,0<x<10,其它， 计算 P{X≤0.2∣0.1<X≤0.5}.

解答： 根据条件概率;有

P{X≤0.2∣0.1<X≤0.5}=P{X≤0.2,0.1<X≤0.5}P{0.1<X≤0.5}

=P{0.1<X≤0.2}P{0.1<X≤0.5}=∫0.10.2(12x2-12x+2)dx∫0.10.5(12x2-12x+3)dx

=(4x3-6x2+3x)∣0.10.2(4x3-6x2+3x)∣0.10.5=0.1480.256=0.578125.

习题 13 若 F1(x),F2(x)为分布函数，

(1)判断 F1(x)+F2(x)是不是分布函数，为什么？

(2)若 a1,a2 是正常数，且 a1+a2=1. 证明：a1F1(x)+a2F2(x)是分布函数.

解答： (1)F(+∞)=limx→+∞F(x)=limx→+∞F1(x)+limx→+∞F2(x)=1+1=2≠1

故 F(x)不是分布函数.

(2)由 F1(x),F2(x)单调非减，右连续，且 F1(-∞)=F2(-∞)=0,F1(+∞)=F2(+∞)=1,

可知 a1F1(x)+a2F2(x)单调非减，右连续，且 a1F1(-∞)+a2F2(-∞)=0,a1F1(+∞)+a2F2(+∞)=1.

从而 a1F1(x)+a2F2(x)是分布函数.

习题 14 设随机变量 X 的概率密度 ϕ(x)为偶函数，试证对任意的 a>0， 分布函数 F(x)满足：

(1)F(-a)=1-F(a)； (2)P{∣X∣>a}=2[1-F(a)].

解答： (1)F(-a)=∫-∞-aϕ(x)dx=∫a+∞ϕ(-t)dt=∫a+∞ϕ(x)dx

=1-∫-∞aϕ(x)dx=1-F(a).

(2)P{∣X∣>a}=P{X<-a}+P{X>a}=F(-a)+P{X≥a}

F(-a)+1-F(a)=2[1-F(a)].

习题 15 设 K 在(0,5)上服从均匀分布，求 x 的方程 4x2+4Kx+K+2=0 有实根的概率.

解答： 因为 K～U(0,5)， 所以 fK(k)={1/5,0<k<50,其它,

方程 4x2+4Kx+K+2=0 有实根的充要条件为(4K)2-4⋅4(K+2)≥0， 即 K2-K-2≥0,

亦即$(k-2)(K+1)\geq 0$，解得$K\geq 2$($K\leq -1$舍去)，所以P{方程有实根}=$P\{K\geq 2\}=\int 2515dx=35$.

习题 16 某单位招聘 155 人，按考试成绩录用，共有 526 人报名，假设报名者考试成绩$X\sim N(\mu,\sigma 2)$，已知 90 分以上 12 人，60 分以下 83 人，若从高分到低分依次录取，某人成绩为 78 分，问此人是否能被录取？

解答：要解决此问题首先确定$\mu,\sigma 2$，因为考试人数很多，可用频率近似概率.根据已知条件

$P\{X>90\}=12/526\approx 0.0228$,

$P\{X\leq 90\}=1-P\{X>90\}\approx 1-0.0228\}=0.9772$;

又因为$P\{X\leq 90\}=P\{X-\mu\sigma\leq 90-\mu\sigma$，所以有$\Phi(90-\mu\sigma)=0.9772$，反查标准正态表得

$90-\mu\sigma=2$ ①

同理：$P\{X\leq 60\}=83/526\approx 0.1578$；又因为$P\{X\leq 60\}=P\{X-\mu\sigma\leq 60-\mu\sigma$,

故$\Phi(60-\mu\sigma)\approx 0.1578$.

因为$0.1578<0.5$,所以$60-\mu\sigma<0$，故$\Phi(\mu-60\sigma)\approx 1-0.1578=0.8422$，反查标准正态表得

$\mu-60\sigma\approx 1.0$ ②

联立①，②解得$\sigma=10$, $\mu=70$，所以，$X\sim N(70,100)$.

某人是否能被录取，关键看录取率. 已知录取率为$155526\approx 0.2947$，看某人是否能被录取，解法有两种：

方法 1：

$P\{X>78\}=1-P\{X\leq 78\}=1-P\{x-7010\leq 78-7010$

$=1-\Phi(0.8)\approx 1-0.7881=0.2119$,

因为$0.2119<0.2947$(录取率)，所以此人能被录取.

方法 2：看录取分数线. 设录取者最低分为 x0，则$P\{X\geq x0\}=0.2947$(录取率)，

$P\{X\leq x0\}=1-P\{X\geq x0\}=1-0.2947=0.7053$,

$P\{X\leq x0\}=P\{x-7010\leq x0-7010=\Phi\{x0-7010=0.7053$,

反查标准正态表得$x0-7010\approx 0.54$，解得$x0\approx 75$. 此人成绩 78 分高于最低分，所以可以录取.

习题 17

假设某地在任何长为 t(年)的时间间隔内发生地震的次数 N(t)服从参数为$\lambda=0.1t$的泊松分布，X 表示连续两次地震之间间隔的时间(单位：年).

(1)证明 X 服从指数分布并求出 X 的分布函数；(2)求今后 3 年内再次发生地震的概率；

(3)求今后 3 年到 5 年内再次发生地震的概率.

解答：(1)当$t\geq 0$时，$P\{X>t\}=P\{N(t)=0\}=e-0.1t$,

$\therefore F(t)=P\{X\leq t\}=1-P\{X>t\}=1-e-0.1t$;

当$t<0$时，$F(t)=0$,

$\therefore$ $F(x)=\{1-e-0.1t,x\geq 00,x<0$,

X 服从指数分布($\lambda=0.1$)；

(2)$F(3)=1-e-0.1\times 3\approx 0.26$;

(3)$F(5)-F(3)\approx 0.13$.

习题 18100 件产品中，90 个一等品，10 个二等品，随机取 2 个安装在一台设备上，若一台设备中有 i 个(i=0,1,2)二等品，则此设备的使用寿命服从参数为$\lambda=i+1$的指数分布.

(1)试求设备寿命超过 1 的概率 ；

(2)已知设备寿命超过 1，求安装在设备上的两个零件都是一等品的概率 .

解答：(1)设 X 表示设备寿命. A 表示“设备寿命超过 1”，Bi 表示“取出 i 个二等品”(i=0,1,2)，则 X 的密度函数为

$fX(x)=\{\lambda e-\lambda x,x>00,x\leq 0$ $(\lambda=i+1,i=0,1,2)$,

P(B0)=C902C1002,　　　P(B1)=C901C102C1002,　　　P(B2)=C102C1002,

P(A∣B0)=∫1+∞e-xdx=e-1, P(A∣B1)=∫1+∞2e-2xdx=e-2,

P(A∣B2)=∫1+∞3e-3xdx=e-3,

由全概率公式：P(A)=∑i=02P(Bi)P(A∣Bi)≈0.32.

(2)由贝叶斯公式：P(B0∣A)=P(B0)P(A∣B0)P(A)≈0.93.

习题 19 设随机变量 X 的分布律为

X	-2-1013
pi	1/51/61/51/1511/30

试求 Y=X2 的分布律.**解答：**

pi	1/51/61/51/1511/30
X	-2-1013
X2	41019

所以

X2	0149
pi	1/57/301/511/30

注：随机变量的值相同时要合并，对应的概率为它们概率之和.

习题 20 设随机变量 X 的密度为

fX(x)={0,x<02x3e-x2,x≥0,求 Y=2X+3 的密度函数.

解答： 由 Y=2X+3, 有　　　y=2x+3,x=y-32,x′=12,

由定理即得　　　fY(x)={0,y<3(y-32)3e-(y-32),y≥3.

习题 21 设随机变量 X 的概率密度

fX(x)={e-x,x>00,其它,

求 Y=eX 的概率密度.

解答：因为α=min{y(0),y(+∞)}=min{1,+∞}=1,

β=max{y(0),y(+∞)}=max{1,+∞}=+∞.

类似上题可得

fY(y)={fX[h(y)]∣h′(y)∣,1<y<+∞0,其它

={1/y2,1<y<+∞0,其它.

习题 22 设随便机变量 X 的密度函数为　　fX(x)={1-∣x∣,-1<x<10,其它,

求随机变量 Y=X2+1 的分布函数与密度函数.

解答： X 的取值范围为(-1,1), 则 Y 的取值范围为[1,2). 当 1≤y<2 时,

FY(y)=P{Y≤y}=P{X2+1≤y}

=P{-Y-1≤x≤y-1}=∫-y-1y-1(1-∣x∣)dx

=2∫0y-1(1-x)dx=1-(1-y-1)2,

从而 Y 的分布函数为　　FY(y)={0,y<11-(1-y-1)2,1≤y<2,1,其它

Y 的概率密度为

fY(y)={1y-1-1,1<y<20,其它.

第三章 多维随机变量及其分布

3.1 二维随机变量及其分布

习题 1 设(X,Y)的分布律为

X\Y	123
1	1/61/91/18
2	1/3a1/9

求 a.

解答： 由分布律性质∑i·jPij=1, 可知 1/6+1/9+1/18+1/3+a+1/9=1,

解得 a=2/9.

习题 2(1)2.设(X,Y)的分布函数为 F(x,y)，试用 F(x,y)表示：

(1)P{a<X≤b,Y≤c};**解答：** P{a<X≤b,Y≤c}=F(b,c)-F(a,c).

习题 2(2)2.设(X,Y)的分布函数为 F(x,y)，试用 F(x,y)表示： (2)P{0<Y≤b};

解答： P{0<Y≤b}=F(+∞,b)-F(+∞,0).

习题 2(3)2.设(X,Y)的分布函数为 F(x,y)，试用 F(x,y)表示： (3)P{X>a,Y≤b}.

解答： P{X>a,Y≤b}=F(+∞,b)-F(a,b).

习题 3(1)3.设二维离散型随机变量的联合分布如下表：

试求： (1)P{12<X<32,0<Y<4;

解答： P{12<X<23,0<Y<4

P{X=1,Y=1}+P{X=1,Y=2}+P{X=1,Y=3}=P{X=1,Y=1}+P{X=1,Y=2}+P{X=1,Y=3}

=14+0+0=14.

习题 3(2)3.设二维离散型随机变量的联合分布如下表：

试求： (2)P{1≤X≤2,3≤Y≤4};

解答： P{1≤X≤2,3≤Y≤4}=P{X=1,Y=3}+P{X=1,Y=4}+P{X=2,Y=3}+P{X=2,Y=4}=0+116+0+14=516.

习题 3(3)3.设二维离散型随机变量的联合分布如下表：试求： (3)F(2,3).

解答： F(2,3)=P(1,1)+P(1,2)+P(1,3)+P(2,1)+P(2,2)+P(2,3)=14+0+0+116+14+0=916.

习题 4 设 X,Y 为随机变量，且 P{X≥0,Y≥0}=37, P{X≥0}=P{Y≥0}=47,求 P{max{X,Y}≥0}.

解答： P{max{X,Y}≥0}=P{X,Y 至少一个大于等于 0} =P{X≥0}+P{Y≥0}-P{X≥0,Y≥0}

=47+47-37=57.

习题 5(X,Y)只取下列数值中的值： (0,0),(-1,1),(-1,13),(2,0)

且相应概率依次为 16,13,112,512, 请列出(X,Y)的概率分布表，并写出关于 Y 的边缘分布.

解答： (1)因为所给的一组概率实数显然均大于零，且有 16+13+112+512=1, 故所给的一组实数必是某二维随机变量(X,Y)的联合概率分布. 因(X,Y)只取上述四组可能值，故事件：

{X=-1,Y=0}, {X=0,Y=13, {X=0,Y=1},{X=2,Y=13,{X=2,Y=1}

均为不可能事件，其概率必为零. 因而得到下表：

X\Y	01/31
-1	01/121/3

0	1/600
2	5/1200

(2)P{Y=0}=P{X=-1,Y=0}+P{X=0,Y=0}+P{X=2,Y=0} =0+16+512=712,

同样可求得 P{Y=13=112,P{Y=1}=13,

关于的 Y 边缘分布见下表：

Y	01/31
pk	7/121/121/3

习题 6 设随机向量(X,Y)服从二维正态分布 N(0,0,102,102,0), 其概率密度为 f(x,y)=1200πex2+y2200,

求 P{X≤Y}.

解答： 由于 P{X≤Y}+P{X>Y}=1，且由正态分布图形的对称性，知

P{X≤Y}=P{X>Y}, 故 P{X≤Y}=12.

习题 7 设随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={k(6-x-y),0<x<2,2<y<40,其它,

(1)确定常数 k; (2)求 P{X<1,Y<3}; (3)求 P{X<1.5}; (4)求 P{X+Y≤4}.

解答： 如图所示(1)由∫-∞+∞∫-∞+∞f(x,y)dxdy=1, 确定常数 k.∫02∫24k(6-x-y)dydx=k∫02(6-2x)dx=8k=1,

所以 k=18.(2)P{X<1,Y<3}=∫01dx∫2318(6-x-y)dy=38.(3)P{X<1.5}=∫01.5dx∫2418(6-x-y)dy=2732.

(4)P{X+Y≤4}=∫02dx∫24-x18(6-x-y)dy=23.

习题 8 已知 X 和 Y 的联合密度为 f(x,y)={cxy,0≤x≤1,0≤y≤10,其它,

试求：(1)常数 c; (2)X 和 Y 的联合分布函数 F(x,y).

解答： (1)由于 1=∫-∞+∞∫-∞+∞f(x,y)dxdy=c∫01∫01xydxdy=c4,c=4.

(2)当 x≤0 或 y≤0 时，显然 F(x,y)=0;当 x≥1,y≥1 时，显然 F(x,y)=1;

设 0≤x≤1,0≤y≤1, 有 F(x,y)=∫-∞x∫-∞yf(u,v)dudv=4∫0xudu∫0yvdv=x2y2.

设 0≤x≤1,y>1, 有 F(x,y)=P{X≤1,Y≤y}=4∫0xudu∫01ydy=x2.

最后，设 x>1,0≤y≤1, 有 F(x,y)=P{X≤1,Y≤y}=4∫01xdx∫0yvdv=y2.

函数 F(x,y)在平面各区域的表达式 F(x,y)={0,x≤0 或 y≤0x2,0≤x≤1,y>1x2y2,0≤x≤1,0≤y≤1.y2,x>

习题 9 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={4.8y(2-x),0≤x≤1,x≤y≤10,其它,

求边缘概率密度 fY(y).

解答： fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy={∫0x4.8y(2-x)dy,0≤x≤10,其它={2.4x2(2-x),0≤x≤10,其它.

fY(y)=∫-∞+∞f(x,y)dx ={∫0y4.8y(2-x)dx,0≤y≤10,其它={2.4y(4y-y2),0≤y≤10,其它.

习题 10 设(X,Y)在曲线 y=x2,y=x 所围成的区域 G 里服从均匀分布，求联合分布密度和边缘分布密度.

解答： 区域 G 的面积 A=∫01(x-x2)dx=16, 由题设知(X,Y)的联合分布密度为

f(x,y)={6,0≤x≤1,x2≤y≤x0,其它,从而 fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy=6∫x2xdy=6(x-x2),0≤x≤1, 即

fX(x)={6(x-x2),0≤x≤10,其它 fY(y)=∫-∞+∞f(x,y)dx=6∫yydx=6(y-y),0≤y≤1,

即 fY(y)={6(y-y),0≤y≤10,其它.

3.2 条件分布与随机变量的独立性

习题 1 二维随机变量(X,Y)的分布律为

X\Y	01
01	7/157/307/301/15

(1)求 Y 的边缘分布律；(2)求 P{Y=0∣X=0},P{Y=1∣X=0};

(3)判定 X 与 Y 是否独立?

解答：(1)由(x,y)的分布律知，y 只取 0 及 1 两个值.

P{y=0}=P{x=0,y=0}+P{x=1,y=0}=715+730=0.7 P{y=1}=∑i=01P{x=i,y=1}=130+115=0.3.

(2)P{y=0∣x=0}=P{x=0,y=0}P{x=0}=23, P{y=1∣x=0}=13.

(3)已知 P{x=0,y=0}=715, 由(1)知 P{y=0}=0.7, 类似可得 P{x=0}=0.7.

因为 P{x=0,y=0}≠P{x=0}⋅P{y=0}, 所以 x 与 y 不独立.

习题 2 将某一医药公司 9 月份和 8 份的青霉素针剂的订货单分别记为 X 与 Y. 据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

X\Y	5152535455
5152535455	0.060.050.050.010.010.070.050.010.010.010.050.100.100.050.050.050.020.010.010.030.050.060.050.010.03

(1)求边缘分布律;(2)求 8 月份的订单数为 51 时，9 月份订单数的条件分布律.

解答：(1)边缘分布律为

X	5152535455
pk	0.180.150.350.120.20

对应 X 的值,将每行的概率相加,可得 P{X=i}.对应 Y 的值(最上边的一行), 将每列的概率相加，可得 P{Y=j}.

Y	5152535455
pk	0.280.280.220.090.13

(2)当 Y=51 时,X 的条件分布律为 P{X=k∣Y=51}=P{X=k,y=51}P{Y=51}=pk,510.28, k=51,52,53,54,55.

列表如下:

k	5152535455
P{X=k∣Y=51}	6/287/285/285/285/28

习题 3 已知(X,Y)的分布律如下表所示，试求：(1)在 Y=1 的条件下,X 的条件分布律;

(2)在 X=2 的条件下,Y 的条件分布律.

X\Y	012
012	1/41/8001/301/601/8

解答： 由联合分布律得关于 X,Y 的两个边缘分布律为

X	012
pk	3/81/37/24

Y	012
pk	5/1211/241/8

故(1)在 Y=1 条件下，X 的条件分布律为

X｜(Y=1)	012
pk	3/118/110

(2)在 X=2 的条件下，Y 的条件分布律为

Y｜(X=2)	012
pk	4/703/7

习题 4 已知(X,Y)的概率密度函数为 f(x,y)={3x,0<x<1,0<y<x0,其它, 求：

(1)边缘概率密度函数；(2)条件概率密度函数.

解答：(1)fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy={3x2,0<x<10,其它,

fY(y)=∫-∞+∞f(x,y)dx={32(1-y2),0<y<10,其它.

(2)对∀y∈(0,1), fX｜Y(x｜y)=f(x,y)fY(y)={2x1-y2,y<x<1,0,其它,

对∀x∈(0,1), fY｜X(y｜x)=f(x,y)fX(x)={1x,0<y<x0,其它.

习题 5X 与 Y 相互独立，其概率分布如表(a)及表(b)所示，求(X,Y)的联合概率分布，P{X+Y=1}, P{X+Y≠0}.

X	-2-101/2
pi	1/41/31/121/3

表(a)

Y	-1/213
pi	1/21/41/4

表(b)

解答： 由 X 与 Y 相互独立知 P{X=xi,Y=yi}=P{X=xi}P{Y=yj),

从而(X,Y)的联合概率分布为

X\Y	-1/2	1	3
-2-101/2	P{X=-2}P{Y=-1/2}P{X=-1}P{Y=-1/2}P{X=0}P{Y=-1/2}P{X=1/2}P{Y=-1/2}	P{X=-2}P{Y=1}P{X=-1}P{Y=1}P{X=0}P{Y=1}P{X=1/2}P{Y=1}	P{X=-2}P{Y=3}P{X=-1}P{Y=3}P{X=0}P{Y=3}P{X=1/2}P{Y=3}

亦即表

X\Y	-1/213
-2-101/2	1/81/161/161/61/121/121/241/481/481/61/121/12

P{X+y=1}=P{X=-2,y=3}+P{X=0,Y=1}=116+148=112,

P{X+Y≠0}=1-P{X+Y=0}

=1-P{X=-1,Y=1}-P{X=12,Y=-12

=1-112-16=34.

习题 6 某旅客到达火车站的时间 X 均匀分布在早上 7:55～8:00, 而火车这段时间开出的时间 Y 的密度 fY(y)={2(5-y)25,0≤y≤50,其它,

求此人能及时上火车站的概率.

解答： 由题意知 X 的密度函数为

fX(x)={15,0≤x≤50,其它, 因为 X 与 Y 相互独立，所以 X 与 Y 的联合密度为：

fXY(x,y)={2(5-y)125,0≤y≤5,0≤x≤50,其它,故此人能及时上火车的概率为

P{Y>X}=∫05∫x52(5-y)125dydx=13.

习题 7 设随机变量 X 与 Y 都服从 N(0,1)分布，且 X 与 Y 相互独立，求(X,Y)的联合概率密度函数.

解答： 由题意知，随机变量 X,Y 的概率密度函数分别是 fX(x)=12πe-x22， fY(y)=12πe-y22

因为 X 与 Y 相互独立，所以(X,Y)的联合概率密度函数是 f(x,y)=12πe-12(x+y)2.

习题 8 设随机变量 X 的概率密度 f(x)=12e-∣x∣(-∞<x<+∞),

问：X 与∣X∣是否相互独立？

解答： 若 X 与∣X∣相互独立，则∀a>0, 各有 P{X≤a,∣X∣≤a}=P{X≤a}⋅P{∣X∣≤a},

而事件{∣X∣≤a}⊂{X≤a}, 故由上式有 P{∣X∣≤a}==P{X≤a}⋅P{∣X∣≤a},

⇒P{∣X∣≤a}(1-P{X≤a})=0

⇒P{∣X≤a∣}=0 或 1=P{X≤a}⋅(∀a>0)但当 a>0 时，两者均不成立，出现矛盾，故 X 与∣X∣不独立.

习题 9 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在(0,1)上服从均匀分布，Y 的概率密度为

fY(y)={12e-y2,y>00,y≤0,

(1)求 X 与 Y 的联合概率密度；(2)设有 a 的二次方程 a2+2Xa+Y=0, 求它有实根的概率.

解答： (1)由题设易知 fX(x)={1,0<x<10,其它,

又 X,Y 相互独立，故 X 与 Y 的联合概率密度为 f(x,y)=fX(x)⋅fY(y)={12e-y2,0<x<1,y>00,其它;

(2)因{a 有实根}={判别式 Δ2=4X2-4Y≥0}={X2≥Y},

故如图所示得到： P{a 有实根}=P{X2≥Y}=∬x2>yf(x,y)dxdy=∫01dx∫0x212e-y2dy

=-∫01e-x22dx=1-[∫-∞1e-x22dx-∫-∞0e-x22dx] =1-2π[12π∫-∞1e-x22dx-12π∫-∞0e-x22dx]

=1-2π[Φ(1)-Φ(0),

又 Φ(1)=0.8413, Φ(0)=0.5, 于是 Φ(1)-Φ(0)=0.3413, 所以 P{a 有实根}=1-2π[Φ(1)-Φ(0)]≈1-2.51×0.3413=0.1433.

3.3 二维随机变量函数的分布

习题 1 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都等可能地取 1,2,3 为值，求随机变量 U=max{X,Y}和 V=min{X,Y}的联合分布.

解答： 由于 U≥V, 可见 P{U=i,V=j}=0(i<j).此外，有 P{U=V=i}=P{X=Y=i}=1/9(i=1,2,3),

P{U=i,V=j}=P{X=i,Y=j}+P{X=j,Y=i}=2/9(i>j),于是，随机变量 U 和 V 的联合概率分布为

V\概率\U	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

习题 2 设(X,Y)的分布律为

X\Y	-112
-12	1/101/53/101/51/101/10

试求：(1)Z=X+Y; (2)Z=XY; (3)Z=X/Y; (4)Z=max{X,Y}的分布律.

解答：

与一维离散型随机变量函数的分布律的计算类型，本质上是利用事件及其概率的运算法则.注意，Z 的相同值的概率要合并.

概率	1/101/53/101/51/101/10
(X,Y)X+YXYX/Ymax{x,Y}	(-1,-1)(-1,1)(-1,2)(2,-1)(2,1)(2,2)-2011341-1-2-2241-1-1/2-2211122 22

于是

(1)

X+Y	-20134
pi	1/101/51/21/101/10

(2)

XY	-20134
pi	1/21/51/101/101/10

(3)

X/Y	-2-1-1/212
pi	1/51/53/101/51/10

(4)

max{X,Y}	-112
pi	1/101/57/10

习题 3 设二维随机向量(X,Y)服从矩形区域 D={(x,y∣0≤x≤2,0≤y≤1}的均匀分布，且

U={0,X≤Y1,X>Y, V={0,X≤2Y1,X>2Y,求 U 与 V 的联合概率分布.

解答： 依题(U,V)的概率分布为 P{U=0,V=0}=P{X≤Y,X≤2Y}=P{X≤Y}

=∫01dx∫x112dy=14,

P{U=0,V=1}=P{X≤Y,X>2Y}=0,

P{U=1,V=0}=P{X>Y,X≤2Y}=P{Y<X≤2Y} =∫01dy∫y2y12dx=14,

P{U=1,V=1}=1-P{U=0,V=0}-P{U=0,V=1}-P{U=1,V=0}=1/2,

即

U\V	01
01	1/401/41/2

习题 4 设(X,Y)的联合分布密度为 f(x,y)=12πe-x2+y22,Z=X2+Y2,求 Z 的分布密度.

解: FZ(z)=P{Z≤z}=P{X2+Y2≤z}.

当 z<0 时，FZ(z)=P(∅)=0;当 z≥0 时， FZ(z)=P{X2+Y2≤z2}=∬x2+y2≤z2f(x,y)dxdy

=12π∬x2+y2≤z2e-x2+y22dxdy=12π∫02πdθ∫0ze-ρ22ρdρ =∫0ze-ρ22ρdρ=1-e-z22.

故 Z 的分布函数为 FZ(z)={1-e-z22,z≥00,z<0.

Z 的分布密度为 fZ(z)={ze-z22,z>00,z≤0.

习题 5 设随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={12(x+y)e-(x+y),x>0,y>00,其它,

(1)问 X 和 Y 是否相互独立？(2)求 Z=X+Y 的概率密度.

解答： (1)fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy

={∫0+∞12(x+y)e-(x+y)dy,x>00,x≤0

\under2line 令 x+y=t{∫x+∞12te-tdt=12(x+1)e-x,x>00,x≤0,

由对称性知 fY(y)={12(y+1)e-y,y>00,y≤0, 显然 f(x,y)≠fX(x)fY(y),x>0,y>0,

所以 X 与 Y 不独立.

(2)用卷积公式求 fZ(z)=∫-∞+∞f(x,z-x)dx.

当{x>0z-x>0 即 {x>0x<z 时，f(x,z-x)≠0, 所以

当 z≤0 时，fZ(z)=0;当 z>0 时，fZ(z)=∫0z12xe-xdx=12z2e-z.

于是，Z=X+Y 的概率密度为　　fZ(z)={12z2e-z,z>00,z≤0.

习题 6 设随机变量 X,Y 相互独立，若 X 服从(0,1)上的均匀分布，Y 服从参数 1 的指数分布，求随机变量 Z=X+Y 的概率密度.

解答： 据题意，X,Y 的概率密度分布为　　fX(x)={1,0<x<10,其它, fY(y)={e-y,y≥00,y<0,

由卷积公式得 Z=X+Y 的概率密度为 fZ(z)=∫-∞+∞fX(x)fY(z-x)dx=∫-∞+∞fX(z-y)fY(y)dy

=∫0+∞fX(z-y)e-ydy.

由 0<z-y<1 得 z-1<y<z,可见：当 z≤0 时，有 fX(z-y)=0, 故 fZ(z)=∫0+∞0⋅e-ydy=0;

当 z>0 时，　fZ(z)=∫0+∞fX(z-y)e-ydy=∫max(0,z-1)ze-ydy=e-max(0,z-1)-e-z,

即　fZ(z)={0,z≤01-e-z,0<z≤1e1-z-e-z,z>1.

习题 7 设随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={be-(x+y),0<x<1,0<y<+∞,0,其它.

（1）试确定常数 b；（2）求边缘概率密度 fX(x),fY(y)；（3）求函数 U=max{X,Y}的分布函数.

解答：（1）由∫-∞+∞∫-∞+∞f(x,y)dxdy=1，确定常数 b.　　∫01dx∫0+∞be-xe-ydy=b(1-e-1)=1，

所以 b=11-e-1，从而　　f(x,y)={11-e-1e-(x+y),0<x<1,0<y<+∞,0,其它.

（2）由边缘概率密度的定义得　　fX(x)={∫0+∞11-e-1e-(x+y)dy=e-x1-e-x,0<x<1,0,其它，

fY(x)={∫0111-e-1e-(x+y)dx=e-y,0<y<+∞,0,其它

（3）因为 f(x,y)=fX(x)fY(y)，所以 X 与 Y 独立，故　　FU(u)=P{max{X,Y}≤u}=P{X≤u,Y≤u}=FX(u)FY(u)，

其中　FX(x)=∫0xe-t1-e-1dt=1-e-x1-e-1,0<x<1，所以　　FX(x)={0,x≤0,1-e-x1-e-1,0<x<1,1,x≥1.

同理 FY(y)={∫0ye-tdt=1-e-y,0<y<+∞,0,y≤0，因此　FU(u)={0,u<0,(1-e-u)21-e-1,0≤u<1,1-e-u,u≥1.

习题 8 设系统 L 是由两个相互独立的子系统 L1 和 L2 以串联方式联接而成，L1 和 L2 的寿命分别为 X 与 Y, 其概率密度分别为　ϕ1(x)={αe-αx,x>00,x≤0, ϕ2(y)={βe-βy,y>00,y≤0,

其中 α>0,β>0,α≠β, 试求系统 L 的寿命 Z 的概率密度.

解答： 设 Z=min{X,Y}, 则 F(z)=P{Z≥z}=P{min(X,Y)≤z}

=1-P{min(X,Y)>z}=1-P{X≥z,Y≥z}　=1-[1P{X<z}][1-P{Y<z}]=1-[1-F1{z}][1-F2{z}]

由于 F1(z)={∫0zαe-αxdx=1-e-αz,z≥00,z<0, F2(z)={1-e-βz,z≥00,z<0,

故　F(z)={1-e-(α+β)z,z≥00,z<0,

从而　ϕ(z)={(α+β)e-(α+β)z,z>00,z≤0.

习题 9 设随机变量 X,Y 相互独立，且服从同一分布，试明： P{a<min{X,Y}≤b}=[P{X>a}]2-[P{X>b}]2.

解答： 设 min{X,Y}=Z,则 P{a<min{X,Y}≤b}=FZ(b)-FZ(a),

FZ(z)=P{min{X,Y}≤z}=1-P{min{X,Y}>z} =1-P{X>z,Y>z}=1-P{X>z}P{Y>z} =1-[P{X>z}]2,

代入得 P{a<min{X,Y}≤b}=1-[P{X>b}]2-(1-[P{X>a}]2)

=[P{X>a}]2-[P{X>b}]2.证毕.

复习总结与总习题解答

习题 1 在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，考虑两种试验：(1)放回抽样；(2)不放回抽样.我们定义随机变量 X,Y 如下：

X={0,若第一次取出的是正品 1,若第一次取出的是次品,　　Y={0,若第二次取出的是正品 1,若第二次取出的

是次品,试分别就(1),(2)两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律.

解答：(1)有放回抽样，(X,Y)分布律如下：

P{X=0,Y=0}=10×1012×12=2536;　　　P{X=1,Y=0}=2×1012×12=536,

P{X=0,Y=1}=10×212×12=536,　　　P{X=1,Y=1}=2×212×12=136,

(2)不放回抽样，(X,Y)的分布律如下：

P{X=0,Y=0}=10×912×11=4566,　　　P{X=0,Y=1}=10×212×11=1066,

P{X=1,Y=0}=2×1012×11=1066,　　　P{X=1,Y=1}=2×112×11=166,

Y\ X	01
01	45/6610/6610/661/66

习题 2 假设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，随机变量 Xk={0,若 Y≤k1,若 Y>k(k=1,2),求(X1,X2)的联合分布率与边缘分布率.

解答：因为 Y 服从参数为 1 的指数分布，X1={0,若 Y≤11,若 Y>1, 所以有

P{X1=1}=P{Y>1}=∫1+∞e-ydy=e-1, P{X1=0}=1-e-1,

同理 P{X2=1}=P{Y>2}=∫2+∞e-ydy=e-2, P{X2=0}=1-e-2,

因为　P{X1=1,X2=1}=P{Y>2}=e-2，

P{X1=1,X2=0}=P{X1=1}-P{X1=1,X2=1}=e-1-e-2,

P{X1=0,X2=0}=P{Y≤1}=1-e-1,

P{X1=0,X2=1}=P{X1=0}-P{X1=0,X2=0}=0,

故(X1,X2)联合分布率与边缘分布率如下表所示：

X1\slashX2	0	1	P{X1=i}
0	1-e-1	0	1-e-1
1	e-1-e-2	e-2	e-1
P{X2=j}	1-e-2	e-2	

习题 3 在元旦茶话会上，每人发给一袋水果，内装 3 只橘子，2 只苹果，3 只香蕉. 今从袋中随机抽出 4 只，以 X 记橘子数，Y 记苹果数，求(X,Y)的联合分布.

解答：X 可取值为 0,1,2,3,Y 可取值 0,1,2.

P{X=0,Y=0}=P{∅}=0,　　　P{X=0,Y=1}=C30C21C33/C84=2/70,

P{X=0,Y=2}=C30C22C32/C84=3/70,　　　P{X=1,Y=0}=C31C20C33/C84=3/70,

P{X=1,Y=1}=C31C21C32/C84=18/70 ,　　　P{X=1,Y=2}=C31C22C31/C84=9/70,

P{X=2,Y=0}=C32C20C32/C84=9/70,　　　P{X=2,Y=1}=C32C21C31/C84=18/70,

P{X=2,Y=2}=C32C22C30/C84=3/70,　　　P{X=3,Y=0}=C33C20C31/C84=3/70,

P{X=3,Y=1}=C33C21C30/C84=2/70,　　　P{X=3,Y=2}=P{∅}=0,

所以，(X,Y)的联合分布如下：

X\Y	0123
012	03/709/703/702/7018/7018/702/703/709/703/700

习题 4 设随机变量 X 与 Y 相互独立，下表列出了二维随机变量(X,Y)的联合分布律及关于 X 与 Y 的边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中的空白处：

X\Y	y1	y2	y3	pi·
x1		1/8		

x2	1/8			
p·j	1/6			1

解答： 由题设 X 与 Y 相互独立，即有 pij=pi·p·j(i=1,2;j=1,2,3), p·1-p21=p11=16-18=124,

又由独立性，有 p11=p1·p·1=p1·16

故 p1·=14.从而 p13=14-124-18, 又由 p12=p1·p·2, 即 18=14·p·2.

从而 p·2=12. 类似的有 p·3=13,p13=14,p2·=34.

将上述数值填入表中有

X\Y	y1	y2	y3	pi·
x1	1/24	1/8	1/12	1/4
x2	1/8	3/8	1/4	3/4
p·j	1/6	1/2	1/3	1

习题 5 设随机变量(X,Y)的联合分布如下表：

求：(1)a 值；(2)(X,Y)的联合分布函数 F(x,y)；(3)(X,Y)关于 X,Y 的边缘分布函数 FX(x)与 FY(y).

解答： (1)\because 由分布律的性质可知∑i·jPij=1, 故 14+14+16+a=1,

∴a=13.(2)因 F(x,y)=P{X≤x,Y≤y}

①当 x<1 或 y<-1 时，F(x,y)=0;②当 1≤x<2,-1≤y<0 时，F(x,y)=P{X=1,Y=-1}=1/4;

③当 x≥2,-1≤y<0 时， F(x,y)=P{X=1,Y=-1}+P{X=2,Y=-1}=5/12;

④当 1≤x<2,y>0 时， F(x,y)=P{X=1,Y=-1}+P{X=1,Y=0}=1/2;

⑤当 x≥2,y≥0 时， F(x,y)=P{X=1,Y=-1}+P{X=2,Y=-1} +P{X=1,Y=0}+P{X=2,Y=0} =1;

综上所述，得(X,Y)联合分布函数为

F(x,y)={0,x<1 或 y<-11/4,1≤x<2,-1≤y<05/12,x≥2,-1≤y<01/2,1≤x<2,y≥01,x≥2,y≥0.

(3)由 FX(x)=P{X≤x,Y<+∞}=∑xi<x∑j=1+∞pij, 得(X,Y)关于 X 的边缘分布函数为：

FX(x)={0,x<114+14,1≤x<214+14+16+13,x≥2={0,x<11/2,1≤x<21,x≥2,

同理，由 FY(y)=P{X<+∞,Y≤y}=∑yi≤y∑i=1+∞Pij, 得(X,Y)关于 Y 的边缘分布函数为

FY(y)={0,y<-12/12,-1≤y<01,y≥0.

习题 6 设随机变量(X,Y)的联合概率密度为 f(x,y)={c(R-x2+y2),x2+y2<R0,x2+y2≥R,

求：(1)常数 c; (2)P{X2+Y2≤r2}(r<R).

解答： (1)因为 1=∫-∞+∞ ∫-∞+∞f(x,y)dydx=∫ ∫x2+y2<Rc(R-x2+y)dxdy

=∫02π ∫0Rc(R-ρ)ρdρdθ=cπR33,

所以有 c=3πR3.

(2)P{X2+Y2≤r2}=∫ ∫x2+y2<r23πR3[R-x2+y2]dxdy

=∫02π ∫0r3πR3(R-ρ)ρdρdθ=3r2R2(1-2r3R).

习题 7 设 f(x,y)={1,0≤x≤2,max(0,x-1)≤y≤min(1,x)0,其它,

求 fX(x)和 fY(y).

解答： max(0,x-1)={0,x<1x-1,x≥1, min(1,x)={x,x<11,x≥1,

所以，f(x,y)有意义的区域(如图)可分为 {0≤x≤1,0≤y≤x},{1≤x≤2,1-x≤y≤1},

即 f(x,y)={1,0≤x≤1,0≤y≤x1,1≤x≤2,x-1≤y≤1,0,其它 所以

fX(x)={∫0xdy=x,0≤x<1∫x-11dy=2-x,1≤x≤20,其它,

fY(y)={∫yy+1dx=1,0≤y≤10,其它.

习题 8 若(X,Y)的分布律为则α,β应满足的条件是¯, 若 X 与 Y 独立，则α=¯,β=¯.

解答： 应填α+β=13;29;19.

由分布律的性质可知∑i·jpij=1, 故 16+19+118+13+α+β=1,即α+β=13.

又因 X 与 Y 相互独立，故 P{X=i,Y=j}=P{X=i}P{Y=j}, 从而 α=P{X=2,Y=2}=P{X=i}P{Y=j},

=(19+α)(14+α+β)=(19+α)(13+13)=29, β=P{X=3,Y=2}=P{X=3}P{Y=2}

=(118+β)(13+α+β)=(118+β)(13+13)，∴ β=19.

习题 9 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为 f(x,y)={ce-(2x+y),x>0,y>00,其它,

(1)确定常数 c; (2)求 X,Y 的边缘概率密度函数；(3)求联合分布函数 F(x,y); (4)求 P{Y≤X};

(5)求条件概率密度函数 fX∣Y(x∣y); (6)求 P{X<2∣Y<1}.

解答：(1)由∫-∞+∞∫-∞+∞f(x,y)dxdy=1 求常数 c.

∫0+∞∫0+∞ce-(2x+y)dxdy=c⋅(-12e-2x)\vline0+∞⋅(-e-y)∣0+∞=c2=1,所以 c=2.

(2)fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy={∫0+∞2e-2xe-ydy,x>00,x≤0={2e-2x,x>00,x≤0,

fY(y)=∫-∞+∞f(x,y)dx={∫0+∞2e-2xe-ydx,y>00,其它={e-y,y>00,y≤0.

(3)F(x,y)=∫-∞x∫-∞yf(u,v)dvdu

={∫0x∫0y2e-2ue-vdvdu,x>0,y>00,其它 ={(1-e-2x)(1-e-y),x>0,y>00,其它.

(4)P{Y≤X}=∫0+∞dx∫0x2e-2xe-ydy=∫0+∞2e-2x(1-e-x)dx=13.

(5)当 y>0 时，fX∣Y(x∣y)=f(x,y)fY(y)={2e-2xe-ye-y,x>00,x≤0={2e-2x,x>00,x≤0.

(6)P{X<2∣Y<1}=P{X<2,Y<1}P{Y<1}

=F(2,1)∫01e-ydy=(1-e-1)(1-e-4)1-e-1=1-e-4.

习题 10 设随机变量 X 以概率 1 取值为 0, 而 Y 是任意的随机变量，证明 X 与 Y 相互独立.

解答: 因为 X 的分布函数为 F(x)={0,当 x<0 时 1,当 x≥0 时，设 Y 的分布函数为 FY(y),(X,Y)的分布函数为 F(x,y)，则当 x<0 时，对任意 y, 有 F(x,y)=P{X≤x,Y≤y}=P{(X≤x)∩(Y≤y)}

=P{∅∩(Y≤y)}=P{∅}=0=FX(x)FY(y);

当 x≥0 时，对任意 y, 有 F(x,y)=P{X≤x,Y≤y}=P{(X≤x)∩(Y≤y)}

=P{S∩(Y≤y)}=P{Y≤y}=Fy(y)=FX(x)FY(y),依定义，由 F(x,y)=FX(x)FY(y)知，X 与 Y 独立.

习题 11 设连续型随机变量(X,Y)的两个分量 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，试证 P{X≤Y}=1/2.

解答： 因为 X,Y 独立，所以 f(x,y)=fX(x)fY(y).

P{X≤Y}=∫∫x≤yf(x,y)dxdy=∫∫x≤yfX(x)fY(y)dxdy

=∫-∞+∞[fY(y)∫-∞yfX(x)dx]dy=∫-∞+∞[fY(y)FY(y)]dy

=∫-∞+∞FY(y)dFY(y)=F2(y)2∣-∞+∞=12,

也可以利用对称性来证，因为 X,Y 独立同分布，所以有 P{X≤Y}=P{Y≤X},

而 P{X≤Y}+P{X≥Y}=1, 故 P{X≤Y}=1/12.

习题 12 设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为若 X 与 Y 相互独立，求参数 a,b,c 的值.

解答： 关于 X 的边缘分布为

X	x1x2x3
pk	a+1/9b+1/9c+1/3

关于 Y 的边缘分布为

Y	y1y2
pk	1/9+a+c4/9+b

由于 X 与 Y 独立，则有 p22=p2⋅p⋅2 得 b=(b+19)(b+49) ①

p12=p1⋅p⋅2 得 19=(a+19)(b+49) ②

由式①得 b=29, 代入式②得 a=118. 由分布律的性质，有

a+b+c+19+19+13=1,代入 a=118,b=29, 得 c=16.

易验证，所求 a,b,c 的值，对任意的 i 和 j 均满足 pij=pi⋅×p⋅j.

因此，所求 a,b,c 的值为 a=118,b=29,c=16.

习题 13 已知随机变量 X1 和 X2 的概率分布为

且 P{X1X2=0}=1.(1)求 X1 和 X2 的联合分布律；　(2)问 X1 和 X2 是否独立？

解答：(1)本题是已知了 X1 与 X2 的边缘分布律，再根据条件 P{X1X2=0}=1, 求出联合分布. 列表如下：

X2\X1	-101	P{X2=j}
01	1/401/401/20	1/21/2
P{X1=i}	1/41/21/4	1

由已知 P{X1X2=0}=1, 即等价于 P{X1X2≠0}=0, 可知 P{X1=1,X2=1}=0,P{X1=-1,X2=1}=0.

再由 p⋅1=p-11+p11+p01, 得 p01=12, p-10=p-1⋅=p-11=14,p10=p1⋅-p11=14,

从而得 p00=0.

(2)由于 p-10=14≠p-1⋅⋅p⋅0=14⋅12=18, 所以知 X1 与 X2 不独立.

习题 14 设(X,Y)的联合密度函数为 f(x,y)={1πR2,x2+y2≤R20,其它,

(1)求 X 与 Y 的边缘概率密度；(2)求条件概率密度，并问 X 与 Y 是否独立？

解答：(1)当 x<-R 或 x>R 时，fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy=∫-∞+∞0dy=0;

当-R≤x≤R 时，fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy=1πR2∫-R2-x2R2-x2dy=2πR2R2-x2.

于是 fX(x)={2R2-x2πR2,-R≤x≤R0,其它.

由于 X 和 Y 的地位平等，同法可得 Y 的边缘概率密度是：fY(y)={2R2-y2πR2,-R≤y≤R0,其它.

(2)fX∣Y(x∣y)=f(x,y)fY(y)

注意在 y 处 x 值位于∣x∣≤R2-y2 这个范围内，f(x,y)才有非零值，故在此范围内，有

fX∣Y(x∣y)=1πR22πR2⋅R2-y2=12R2-y2,即 Y=y 时 X 的条件概率密度为

fX∣Y(x∣y)={12R2-y2,∣x∣≤R2-y20,其它. 同法可得 X=x 时 Y 的条件概率密度为

fY∣X(y∣x)={12R2-x2,∣y∣≤R2-x20,其它.

由于条件概率密度与边缘概率密度不相等，所以 X 与 Y 不独立.

习题 15 设(X,Y)的分布律如下表所示

X\Y　-112　-12　1/102/103/102/101/101/10

求：(1)Z=X+Y;　(2)Z=max{X,Y}的分布律.

解答：与一维离散型随机变量函数的分布律的计算类似，本质上是利用事件及其概率的运算法则. 注意，Z 的相同值的概率要合并.概率　　(X,Y)X+YXYX/Ymax{X,Y}

1/102/103/102/101/101/10　(-1,-1)(-1,1)(-1,2)(2,-1)(2,1)(2,2)-2011341-1-2-2241-1-1/2-221-112222

于是(1)

X+Y	-20134
pi	1/102/105/101/101/10

(2)

max{X, Y}	-112
pi	1/102/107/10

习题 16 设(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={1,0<x<1,0<y<2(1-x)0,其他，求 Z=X+Y 的概率密度.

解答：先求 Z 的分布函数 Fz(z)，再求概率密度 fz(z)=dFz(z)dz.

如右图所示.当 z<0 时，Fz(z)=P{X+Y≤z}=0;

当 0≤z<1 时，　Fz(z)=P{X+Y≤z}=∫∫x+y≤zf(x,y)dxdy

=∫0zdx∫0z-x1dy=∫0z(z-x)dx=z2-12x2∣0z=12z2;

当 1≤z<2 时，　Fz(z)=∫02-zdx∫0z-xdy+∫2-z1dx∫02(1-x)dy

=z(2-z)-12(2-z)2+(z-1)2;

当 z≥2 时，∫∫Df(x,y)dxdy=∫01dx∫02(1-x)dy=1.

综上所述 Fz(z)={0,z<012z2,0≤z<1z(2-z)-12(2-z)2+(z-1)2,1≤z<21,z≥2，

故 fz(z)={z,0≤z<12-z,1≤z<20,其它.

习题 17 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={2e-(x+2y),x>0,y>00,其它,

求随机变量 Z=X+2Y 的分布函数.

解答： 按　FZ(Z)=P{x+2y≤z},

当 z≤0 时，FZ(Z)=∫∫x+2y≤zf(x,y)dxdy=∫∫x+2y≤z0dxdy=0.

当 z>0 时，FZ(Z)=∫∫x+2y≤zf(x,y)dxdy=∫0zdx∫0(z-x)/22e-(x+2y)dy

=∫0ze-x⋅(1-ex-z)dx=∫0z(e-x-e-z)dx

=[-e-x]∣0z-ze-z=1-e-z-ze-z,

故分布函数为　FZ(Z)={0,z≤01-e-z-ze-z,z>0.

习题 18 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度函数分别为 fX(x)={1,0≤x≤10,其它, fY(y)={Ae-y,y>00,y≤0,

求：(1)常数 A;　(2)随机变量 Z=2X+Y 的概率密度函数.

解答： (1)1=∫-∞+∞fY(y)dy=∫0+∞A⋅e-ydy=A.

(2)因 X 与 Y 相互独立，故(X,Y)的联合概率密度为

f(x,y)={e-y,0≤x≤1,y>00,其它.于是当 z<0 时，有

F(z)=P{Z≤z}=P{2X+Y≤z}=0;当 0≤z≤2 时，有

F(z)=P{2X+Y≤z}=∫0z/2dx∫0z-2xe-ydy=∫0z/2(1-e2x-z)dx;

当 z>2 时，有 F(z)=P{2X+Y≤2}=∫01dx∫0z-2xe-ydy=∫01(1-e2x-z)dx.

利用分布函数法求得 Z=2X+Y 的概率密度函数为

fZ(z)={0,z<0(1-e-z)/2,0≤z<2(e2-1)e-z/2,z≥2.

习题 19 设随机变量 X,Y 相互独立，若 X 与 Y 分别服从区间(0,1)与(0,2)上的均匀分布，求

U=max{X,Y}与 V=min{X,Y}的概率密度.

解答： 由题设知，X 与 Y 的概率密度分别为 fX(x)={1,0<x<10,其它, fY(y)={1/2,0<y<20,其它,

于是，①X 与 Y 的分布函数分别为 FX(x)={0,x≤0x,0≤x<11,x≥1, FY(y)={0,y<0y/2,0≤y<21,y≥2,

从而 U=max{X,Y}的分布函数为 FU(u)=FX(u)FY(u)={0,u<0u2/2,0≤u<1u/2,1≤u<21,u≥2,

故 U=max{X,Y}的概率密度为 fU(u)={u,0<u<11/2,1≤u<20,其它.

②同理，由 FV(v)=1-[1-FX(v)][1-FY)]

=FX(v)+FY(v)-FX(v)FY(v)=FX(v)+FY(v)-FU(v),

得 V=min{X,Y}的分布函数为 FV(v)={0,v<0v2(3-v),0≤v<11,v≥1,

故 V=min{X,Y}的概率密度为 fV(v)={32-v,0<v<10,其它.

注：(1)用卷积公式，主要的困难在于 X 与 Y 的概率密度为分段函数，故卷积需要分段计算；(2)先分别求出 X,Y 的分布函数 FX(x)与 FY(y), 然后求出 FU(u)，再求导得 fU(u); 同理先求出 FV(v), 求导即得 fV(v).

第四章　随机变量的数字特征

4.1 数学期望　　习题 1

设随机变量 X 服从参数为 p 的 0-1 分布，求 E(X).

解答： 依题意，X 的分布律为

X	0	1
P	1-p	p

由 E(X)=∑i=1∞xipi,　有 E(X)=0⋅(1-p)+1⋅p=p.

习题 2 袋中有 n 张卡片，记有号码 1, 2, ⋯, n. 现从中有放回抽出 k 张卡片来，求号码之和 X 的期望.

解答： 设 Xi 表示第 i 次取得的号码，则 X=∑i=1kXi, 且 P{Xi=m}=1n,

其中 m=1, 2, ⋯, n, i=1, 2, ⋯, k,　故 E(Xi)=1n(1+2+⋯+n)=n+12, i=1, 2, ⋯, k,

从而 E(X)=∑i=1kE(Xi)=k(n+1)2.

习题 3

某产品的次品率为 0.1, 检验员每天检验 4 次. 每次随机地抽取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1,就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数,试求 E(X)(设诸产品是否为次品是相互独立的).

解答： X 的可能取值为 0,1,2,3,4, 且知 X～b(4,p), 其中 p=P{调整设

备}=1-C101×0.1×0.99-0.910≈0.2639,所以 E(X)=4×p=4×0.2639=1.0556.

习题 4

据统计，一位 60 岁的健康(一般体检未发生病症)者，在 5 年之内仍然活着和自杀死亡的概率为 p(0<p<1,p 为已知), 在 5 年之内非自杀死亡的概率为 1-p, 保险公司开办 5 年人寿保险，条件是参加者需交纳人寿保险费 a 元(a 已知), 若 5 年内非自杀死亡,公司赔偿 b 元(b>a), 应如何确定 b 才能使公司可期望获益，若有 m 人参加保险，公司可期望从中收益多少？

解答： 令 X=“从一个参保人身上所得的收益”，由 X 的概率分布为

X	aa-b
pk	p1-p

∴E(X)=ap+(a-b)(1-p)=a-b(1-p)>0, 即 a<b<a1-p.

对于 m 个人，有 E(mX)=mE(X)=ma-mb(1-p).

习题 5

对任意随机变量 X, 若 E(X)存在，则 E{E[E(X)]}等于¯.

解答： 由数学期望的性质 1 及 E(X)为一常数知 E{E[E(X)]}=E[E(X)]=E(X).

习题 6

设随机变量 X 的分布律为

X	-202
pi	0.40.30.3

求 E(X),E(X2),E(3X2+5).

解答：

E(X)=-2×0.4+2×0.3=-0.2,E(X2)=(-2)2×0.4+22×0.3=2.8,

E(3X2+5)=[3×(-2)2+5]×0.4+(3×02+5)×0.3+(3×22+5)×0.3=13.4.

习题 7

设连续型随机变量 X 的概率密度为 f(x)={kxa,0<x<10,其它,

其中 k,a>0, 又已知 E(X)=0.75, 求 k,a 的值.

解答： \because∫-∞+∞f(x)dx=1,∫-∞+∞xf(x)dx=0.75,

∴∫01kxadx=1,∫01x⋅kxadx=0.75, 即 ka+1xa+1∣01=1,ka+2xa+2∣01=0.75,

即{ka+1=1ka+2=0.75,∴k=3,a=2.

习题 8

设随机变量 X 的概率密度为 f(x)={1-∣1-x∣,0<x<20,其它,求 E(X).

解答： f(x)={x,0<x<12-x,1≤x<20,其

它,E(X)=∫01x⋅xdx+∫12x(2-x)dx=∫01x2dx+∫12(2x-x2)dx=13+23=1.

习题 9

一年之内一工厂生产的某种设备的寿命 X(以年计)服从指数分布，概率密度为 f(x)={14e-x4,x>00,x≤0,

工厂规定，出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备赢利 100 元，调换一台设备厂方需花 300 元，试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

解答： 先求出利润函数 L(X).L(X)={100,X≥1-300+100=-200,X<1,E(L)=100×P{X≥1}-200×P{X<1}

=100×∫1+∞14e-x4dx-200×∫0114e-x4dx

=100×e-14+200×e-14-200≈33.64(元).

习题 10

设随机变量 X 的概率密度为 f(x)={e-x,x>00,x≤0,求：(1)Y=2X 的数学期望；(2)Y=e-2X 的数学期望.

解答：(1)E(Y)=E(2X)=∫-∞+∞2xf(x)dx=∫0+∞2xe-xdx=2.

(2)E(e2X)=∫-∞+∞e-2xf(x)dx=∫0+∞e-3xdx=13.

习题 11

设(X,Y)的分布律为

Y\X	123
-101	0.20.10.00.10.00.30.10.10.1

(1)求 E(X),E(Y)； (2)设 Z=Y/X， 求 E(Z)； (3)设 Z=(X-Y)2， 求 E(Z).

解答：(1)先求 X 与 Y 的边缘分布律，然后求 E(X),E(Y).

X	1	2	3
pk	0.4	0.2	0.4

Y	-1	0	1
pk	0.3	0.4	0.3

所以 E(X)=1×0.4+2×0.2+3×0.4=2.0,E(Y)=-1×0.3+0×0.4+1×0.3=0.

(2)可以利用 X,Y 的联合分布先求出 Z 的分布律，然后求 E(Z)， 也可以利用定理直接求 E(Z)， 下面采取直接求法.E(Z)=E(YX)=∑i∑jyjxipij

=(-1×0.2+1×0.1)+(-12×0.1+12×0.1)+(-13×0+13×0.1) =-115.

(3)E(Z)=E[(X-Y)2]=∑i∑j(xi-yj)2pij

=(1-(-1))2×0.2+(1-0)2×0.1+(1-1)2×0.1

+32×0.1+22×0.0+12×0.1+42×0.0+32×0.3+22×0.1 =5.

也可以利用期望的性质求 E(Z)， 得 E[(X-Y)2]=E(X2-2XY+Y2)

=E(X2)-2E(XY)+E(Y2) =(12×0.4+22×0.2+32×0.4)-2[-1×0.2 +1×0.1+(-2)×0.1+2×0.1+(-3)×0.0+3×0.1]+(-1)2×0.3+12×0.3 =5.

习题 12

设(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={12y2,0≤y≤x≤10,其它,求 E(X),E(Y),E(XY),E(X2+Y2).

解答：如右图所示.

E(X)=∫-∞+∞ ∫-∞+∞xf(x,y)dxdy=∫01dx∫0xx·12y2dy=45,

E(Y)=∫-∞+∞ ∫-∞+∞yf(x,y)dxdy=∫01dx∫0xy·12y2dy=35,

E(XY)=∫-∞+∞ ∫-∞+∞xyf(x,y)dxdy=∫01dx∫0xxy·12y2dy=12,

E(X2+Y2)=∫-∞+∞ ∫-∞+∞(x2+y2)f(x,y)dxdy=∫01dx∫0x(x2+y2)·12y2dy=23+615=1615.

习题 13 设 X 和 Y 相互独立，概率密度分别为 ϕ1(x)={2x,0≤x≤10,其它,ϕ2(y)={e-(y-5),y>50,其它,求 E(XY).

解答： 解法一　　由独立性. E(XY)=E(X)·E(Y)=∫01x·2xdx∫0+∞ye-(y-5)dy=23×6=4.

解法二　　令 z=y-5,　则 E(XY)=E(X)·E(Y)=∫01x·2xdx·E(z+5)=23×(1+5)=4.

4.2 方差

习题 1 设随机变量 X 服从泊松分布，且 P(X=1)=P(X=2),　求 E(X),D(X).

解答： 由题设知，X 的分布律为 P{X=k}=λkk!e-λ(λ>0) 由 P{X=1}=P{X=2},　得 λ11!e-λ=λ22!e-λ,

即 λ=0(舍去),　λ=2.所以 E(X)=2,D(X)=2.

习题 2 下列命题中错误的是().

(A)若 X～p(λ),　则 E(X)=D(X)=λ;(B)若 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 E(X)=D(X)=1λ;

(C)若 X～b(1, θ),则 E(X)=θ,D(X)=θ(1-θ);(D)若 X 服从区间[a,b]上的均匀分布,则 E(X2)=a2+ab+b23.

解答： 应选(B).E(X)=1λ,D(X)=1λ2.

习题 3 设 X1,X2,⋯,Xn 是相互独立的随机变量，且都服从正态分布 N(μ, σ2)(σ>0),　则 ξ¯=1n∑i=1nξi 服从的分布是¯.

解答：

由多维随机变量函数的分布知：有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，且

E(X¯)=μ,D(X¯)=σ2n.

习题 4

若 Xi～N(μi, σi2)(i=1,2,⋯,n),　且 X1,X2,⋯,Xn 相互独立，则 Y=∑i=1n(aiXi+bi)服从的分布是__________________________.

解答： 应填 N(∑i=1n(aiμi+bi),∑i=1nai2σi2).

由多维随机变量函数的分布知：有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布，且 E(Y)=∑i=1n(aiμi+bi),D(Y)=∑i=1nai2σi2.

习题 5

设随机变量 X 服从泊松分布，且 3P{X=1}+2P{X=2}=4P{X=0},求 X 的期望与方差.

解答：

X 的分布律为 P{X=k}=λkk!e-λ,　k=0,1,2,⋯,

于是由已知条件得 3×λ11!e-λ+2×λ22!e-λ=4×λ00!e-λ,

即 λ2+3λ-4=0,　解之得 λ=-4(舍),　λ=1,　故 E(X)=λ=1,　D(X)=λ=1.

习题 6

设甲，乙两家灯泡厂生产的寿命(单位：小时)X 和 Y 的分布律分别为

X	900	1000	1100
pi	0.1	0.8	0.1

Y	950	1000	1050
pi	0.3	0.4	0.3

试问哪家工厂生产的灯泡质量较好？

解答：

哪家工厂的灯泡寿命期望值大，哪家的灯泡质量就好.由期望的定义有

E(X)=900×0.1+1000×0.8+1100×0.1=1000,

E(Y)=950×0.3+1000×0.4+1050×0.3=1000.

今两厂灯泡的期望值相等：E(X)=E(Y)=1000,

即甲，乙两厂的生产水平相当. 这就需要进一步考察哪家工厂灯泡的质量比较稳定，即看哪家工厂的灯泡寿命取值更集中一些，这就需要比较其方差.方差小的，寿命值较稳定，灯泡质量较好，则方差的定义式得

D(X)=(900-1000)2×0.1+(1000-1000)2×0.8+(1100-1000)2×0.1=2200,

D(Y)=(950-1000)2×0.3+(1000-1000)2×0.4+(1050-1000)2×0.3=1500.

因 D(X)>D(Y), 故乙厂生产的灯泡质量较甲厂稳定.

习题 7

已知 X～b(n,p), 且 E(X)=3,D(X)=2, 试求 X 的全部可能取值，并计算 P{X≤8}.

解答：\becauseE(X)=np,D(X)=np(1-p), ∴{np=3np(1-p)=2, 即{n=9p=13,

∴X 的取值为：0,1,2,⋯,9, P{X≤8}=1-P{X=9}=1-(13)9.

习题 8

设 X～N(1,2), Y 服从参数为 3 的(泊松)分布，且 X 与 Y 独立，求 D(XY).

解答：

\becauseD(XY)=E(XY)2-E2(XY)=E(X2Y2)-E2(X)2(Y)又

\becauseE(X2Y2)=∫-∞+∞ ∫-∞+∞x2y2f(x,y)dxdy=∫-∞+∞x2fX(x)dx∫-∞+∞y2fY(y)dy

=E(X2)E(Y2),

∴D(XY)=E(X2)E(Y2)-E2(X)E2(Y)

=[D(X)+E2(X)][D(Y)+E2(Y)]-E2(X)E2(Y)

=D(X)D(Y)+D(X)E2(Y)+D(Y)E2(X)

=2×3+2×32+3×12=27.

习题 9

设随机变量 X1,X2,X3,X4 相互独立，且有 E(Xi)=i,D(Xi)=5-i,i=1,2,3,4,

又设 Y=2X1-X2+3X3-12X4, 求 E(Y),D(Y).

解答：E(Y)=E(2X1-X2+3X3-12X4)=2E(X1)-E(X2)+3E(X3)-12E(X4)

=2×1-2+3×3-12×4=7,

D(Y)=4D(X1)+D(X2)+9D(X3)+14D(X4)=4×4+3+9×2+14×1=37.25.

习题 10

5 家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量(以 kg 计)分别为 X1,X2, X3, X4,X5. 已知

X1～N(200,225), X2～N(240,240), X3～N(180,225),

X4～N(260,265), X5～N(320,270),

X1,X2,X3,X4,X5 相互独立.(1)求 5 家商店两周的总销售量的均值和方差；

(2)商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存该产品多少千克？

解答：(1)设总销售量为 X,由题设条件知 X=X1+X2+X3+X4+X5,

于是 E(X)=∑i=15E(Xi)=200+240+180+260+320=1200,

D(X)=∑i=15D(Xi)=225+240+225+265+270=1225.

(2)设商店的仓库应至少储存 y 千克该产品，为使 P{X≤y}>0.99,

求 y. 由(1)易知，X～N(1200,1225),P{X≤y}=P{X-12001225≤y-12001225=Φ(y-12001225)>0.99.

查标准正态分布表得 y-12001225=2.33,y=2.33×1225+1200≈1282(kg).

习题 11

设随机变量 X1,X2,⋯,Xn 相互独立，且都服从数学期望为 1 的指数分布，求 Z=min{X1,X2,⋯,Xn}的数学期望和方差.

解答：Xi(i=1,2,⋯,n)的分布函数为 F(x)={1-e-x,x>00,其它,

Z=min{X1,X2,⋯,Xn}的分布函数为 FZ(z)=1-[1-F(z)]n={1-e-nz,z>00,其它,

于是 E(Z)=∫0∞zne-nzdz=-ze-nz∣0∞+e-nzdz=1n, 而 E(Z2)=∫0∞z2ne-nzdz=2n2,

于是 D(Z)=E(Z2)-(E(Z))2=1n2.

4.3 协方差与相关系数

习题 1

设(X,Y)服从二维正态分布，则下列条件中不是 X,Y 相互独立的充分必要条件是().

(A)X,Y 不相关； (B)E(XY)=E(X)E(Y)；

(C)cov(X,Y)=0； (D)E(X)=E(Y)=0.

解答：

应选（D）。当(X,Y)服从二维正态分布时，不相关性⇔独立性

若(X,Y)服从一般的分布，则 X,Y 相互独立⇒X,Y 不相关

反之未必.

习题 2 设 X 服从参数为 2 的泊松分布，Y=3X-2， 试求 E(Y),D(Y),cov(X,Y)及 ρXY.

解答：E(Y)=E(3X-2)=3E(X)-2=3×2-2=4

D(Y)=D(3X-2)=9D(X)=9×2=18,cov(X,Y)=cov(X,3X-2)=3D(X)=6,

ρXY=cov(X,Y)D(X)D(Y)=62⋅18=1.

习题 3

设随机变量 X 的方差 D(X)=16， 随机变量 Y 的方差 D(Y)=25， 又 X 与 Y 的相关系数 ρXY=0.5， 求 D(X+Y)与 D(X-Y).

解答：D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2cov(X,Y)=D(X)+D(Y)+2D(X)D(Y)ρXY

=16+25+2×4×5×0.5=61,

D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2cov(X,Y)=D(X)+D(Y)-2D(X)D(Y)ρXY

=16+25-2×4×5×0.5=21.

习题 4

设(X,Y)服从单位圆域 G:x2+y2≤1 上的均匀分布，证明 X,Y 不相关.

解答： E(XY)=∫∫x2+y2≤11πxydxdy =1π∫-11dxdy∫-1-x21-x2ydy=0,

又 E(X)=∫∫x2+y2≤11πxdxdy=1π∫-11xdx∫-1-x21-x2dy=1π∫-112x1-x2dx=0,

同理，E(Y)=0,　故 cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0,

即 X,Y 不相关.

习题 5

设 100 件产品中的一，二，三等品率分别为 0.8,0.1 和 0.1.　现从中随机地取 1 件，并记

Xi={1,取得 i 等品 0,其它(i=1,2,3),求 ρX1X2.

解答：

首先求(X1,X2)的联合分布 P{X1=0,X2=0}=P{X3=1}=0.1,　P{X1=0,X2=1}=P{X2=1}=0.1,

P{X1=1,X2=0}=P{X1=1}=0.8,　P{X1=1,X2=1}=P(∅)=0.关于 X1 和 X2 的边缘分布律为

P{X1=1}=0.8,　　P{X1=0}=0.2,P{X2=1}=0.1,　　P{X2=0}=0.9.

于是 E(X1)=0.8,　D(X1)=0.16;　E(X2)=0.1,　D(X2)=0.09.

从而 ρX1X2=cov(X1,X2)D(X1)D(X2)=E(X1X2)-E(X1)E(X2)D(X1)D(X2)

=1×0+0×0.8+0×0.1+0×0.1-0.080.4×0.3=-23.

习题 6

设 X～N(μ,σ2),Y～N(μ,σ2),　且 X,Y 相互独立,试求 Z1=αX+βY 和 Z2=αX-βY 的相关系数(其中 α,β 是不为零的常数).

解答： cov(Z1,Z2)=cov(αX+βY,αX-βY)=α2cov(X,X)-β2cov(Y,Y)

=α2D(X)-β2D(Y)=(α2-β2)σ2,

D(Z1)=D(αX+βY)=α2D(X)+β2D(Y)+2αβcov(X,Y),

D(Z2)=D(αX-βY)=α2D(X)+β2D(Y)-2αβcov(X,Y).

因为 X,Y 相互独立，所以 cov(X,Y)=0,　故 D(Z1)=(α2+β2)σ2,D(Z2)=(α2+β2)σ2,

相关系数 ρ=cov(Z1,Z2)D(Z1)D(Z2)=α2-β2α2+β2.

习题 7

设随机变量(X,Y)具有概率密度 f(x,y)={18(x+y),0≤x≤2,0≤y≤20,其它,

求 E(X),E(Y),cov(X,Y),ρXY,D(X+Y).

解答： E(X)=∫-∞+∞∫-∞+∞xf(x,y)dydx=∫02∫02x·18(x+y)dydx=76.

由对称性知，E(Y)=76,E(XY)=∫-∞+∞∫-∞+∞xyf(x,y)dxdy=∫02∫02xy·18(x+y)dxdy

=∫0218(83y+2y2)dy=43,

于是 cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=43-76×76=-136，E(X2)=∫02∫02x2·18(x+y)dydx=14∫02(x3+x2)dx=53.

由对称性知，E(Y2)=53,　故 D(X)=E(X2)-[E(X)]2=53-(76)2=1136,D(Y)=1136,

ρXY=cov(X,Y)D(X)D(Y)=-1361136=-111,

D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2cov(X,Y)=1136+1136-2×136=59.

习题 8

设随机变(X,Y)的分布律为

Y\X	-101
-101	1/81/81/81/801/81/81/81/8

验证 X 和 Y 是不相关的，且 X 和 Y 不相互独立.

解答： 先求 X,Y 的边缘分布律

X	-101		Y	-101
pk	3/82/83/8		pk	3/82/83/8

因为 p00≠p0·p·0，　所以 X 与 Y 不是独立的，又 E(X)=-1×38+1×38=0,E(Y)=-1×38+1×38=0,

E(XY)=(-1)×(-1)×18+(-1)×1×18+1×(-1)×18+1×1×18=0，于是 cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0，　即 ρXY=0.　因此，X 与 Y 是不相关的.

习题 9 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 f(x,y)={1/π,x2+y2≤10,其它,

试验证 X 和 Y 是不相关的，且 X 和 Y 不相互独立.**解答：** 首先求 fX(x)和 fY(y).fX(x)=∫-∞+∞f(x,y)dy={∫-1-x21-x21πdy=2π1-x2,-1≤x≤10,其它,

fY(y)=∫-∞+∞f(x,y)dx={∫-1-y21-y21πdx=2π1-y2,-1≤y≤10,其它,E(X)=∫-∞+∞fX(x)dx=∫-11x·2π1-x2dx=0,

同理可得 E(Y)=0,E(XY)=∫-∞+∞∫-∞+∞xyf(x,y)dxdy=∫∫x2+y2≤11πxydxdy=0.

因此 cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0，　即 ρXY=0,

故 X 与 Y 是不相互独立的.又因为 f(x,y)≠fX(x)fY(y)，　故 X 与 Y 不是相互独立的.

习题 10

设(X,Y)服从二维正态分布，且 X～N(0,3),Y～N(0,4)，　相关系数 ρXY=-1/4，　试写出 X 与 Y 的联合概率密度.**解答：** 依题意知，二维正态分布 5 个参数分别为 μ1=0, μ2=0, σ12=3, σ22=4, ρXY=-14,

故 X,Y 的联合概率密度为 f(x,y)=12π·325e-115/8[x23-2(-14)x3·y2+y24]=135πe-815(x23+xy43+y24).

习题 11

设(X,Y)服从二维正态分布，且有 D(X)=σX2,D(Y)=σY2.　证明：当 a2=σX2σY2 时随机变量 W=X-aY 与 V=X+aY 相互独立.

解答： 根据多维正态分布的性质可知，由于(X,Y)服从二维正态分布，故 W 与 V 的联合分布也是二维正态分布. 又知，二维正态分布二分量间相互独立与不相关是等价的，因此，欲证明 W 与 V 相互独立，也就是要证 cov(W,V)=0，　为此求 cov(W,V).cov(W,V)=cov(X-aY,X+aY)=D(X)-a2D(Y)=σX2-a2σY2.

令 cov(W,V)=0，　即 σX2-a2σY2=0，　则得 a2=σX2σY2，　故证得当 a2=σX2σY2 时，随机变量 W 与 V 相互独立，其中 W=X+aY,V=X+aY.

习题 12

设随机变量 X 的概率密度为 f(x)={0.5x,0<x<20,其它,

求随机变量 X 的 1 至 4 阶原点矩和中心矩.

解答： 由公式 vk=E(Xk)=∫-∞+∞xkf(x)dx=∫02xk(0.5x)dx,

求原点矩 v1=∫02x(0.5)dx=12∫02x2dx=12×13x3∣02=43,

v2=∫02x2(0.5x)dx=12∫02x3dx=12×14x4∣02=2,

v3=∫02x3(0.5x)dx=12×15x5∣02=3.2,

v4=∫02x4(0.5x)dx=12×16x6|02=163;

求中心矩：任何变量的一阶中心距均为 0，　即 μ1=0，　由中心矩与原矩的关系有

μ2=v2-v12=2-(43)2=29,

μ3=v3-3v2v1+2v13=3.2-3×2×43+2×(43)3=-8135,

μ4=v4-4v3v1+612v2-3v14=16135.

习题 13

设随机变量 X 服从拉普拉斯分布，其概率密度为

f(x)=12λe-|x| λ,-∞<x<+∞,

其中λ>0 为常数，求 X 的 k 阶中心矩.

解答： 由于 E(X)=∫-∞+∞xf(x)dx=12λ∫-∞+∞xe-|x| λdx=0, 所以

μk=E([X-E(X)]k)=E(Xk)=12λ∫-∞+∞xke-|x| λdx.

因此，当 k 为奇数时，可得μk=0.

当 k 为偶数时，有μk=12λ∫0+∞xke-xλdx+12λ∫-∞0xkexλdx=1λ∫0+∞xke-xλdx

=λk∫0+∞tke-tdt=λkΓ(k+1)=λk·k!,

故　　μk={0,k 为奇数时λkk!,k 为偶数时.

4.4 大数定理与中心极限定理

习题 1

一颗骰子连续掷 4 次，点数总和记为 X，　估计 P{10<X<18}.

解答： 记 Xi(i=1,2,3,4)为第 i 次掷骰子出现的点数，则 Xi 的分布为

Xi	1	2	3	4	5	6
pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

E(Xi)=16(1+2+3+4+5+6)=72,E(Xi2)=16(1+4+9+16+25+36)=916,

D(Xi)=E(Xi2)-[E(Xi)]2=916-494=3512,一颗骰子连续掷 4 次，点数总和

X=∑i=14Xi,E(X)=∑i=14E(Xi)=4×72=14,D(X)=∑i=14D(Xi)=4×3512=353,

于是 P{10<X<18}=P{10-14<X-14<18-14}　={|X-14|<4}≥1-116×353≈0.271.

习题 2 设随机变量 X 与 Y 的数学期望分别为-2 和 2,方差分别为 1 和 4，而相关系数为-0.5，根据切比雪夫不等式估计 P{|X+Y|≥6}.

解答： E(X)=-2，E(Y)=2,D(X)=1，　D(Y)=4，　ρX,Y=-0.5，　∴　E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0,

D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2ρX,YD(X)D(Y)=1+4+2×(-0,5)×1×2=3,

∴　P{|X+Y|≥6}≤362=112.

习题 3 设 X1,X2,⋯,Xn 为随机变量序列，a 为常数，则{Xn}依概率收敛于 a 是指________________.

解答： 应填：∀ε>0,limn→∞P(|Xn-a|≥ε)=0.由依概率收敛定义即可得到结果.

习题 4

设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，X1,X2,⋯,Xn 为来自总体 X 的一个样本，则当 n→∞，　Yn=1n∑i=1nXi2 依概率收敛于________________.

解答： 应填：1/2.由题设，可知 Xi～e(2)，　因此 E(Xi2)=D(Xi)+E(Xi2)=1λ2+1λ2=2λ2=12.

根据切比雪夫大数定律的推广：若 X1,X2,⋯具有相同的数学期望 E(Xi)=μ，　则对于任意的正数ε，　有

limx→∞P(∣1n∑i=1nXi-μ∣<ε)=1.因此，本题有 limx→∞P(∣1n∑i=1nXi2-12∣<ε)=1. 即当 n→∞时，依概率收敛于 12.

习题 5

从某厂产品中任取 200 件，检查结果发现其中有 4 件废品，我们能否相信该产品的废品率不超过 0.005?

解答：若该工厂的废品率不大于 0.005, 则检查 200 件产品中发现 4 件废品的概率应该不大于

p=C2004×0.0054×0.995196,

用泊松定理作近似计算 λ=200×0.005=1,

即 p≈14e-14!≈0.0153.这一概率很小，根据实际推断原理，这一小概率事件实际上不太会发生，故不能相信该工厂的废品率不超过 0.005.

习题 6

有一批建筑房屋用的木柱，其中 80%的长度不小于 3m.现从这批木柱中随机地取出 100 根，问其中至少有 30 根短于 3m 的概率是多少?

解答：把抽一根木柱测其长度是否短于 3m 看做一次试验. 设事件 A 为"抽到的木柱长度短于 3m"，则由已知条件知 P(A)=20100=0.2=p.由于木柱数量很大,可把 100 次抽取看做是 100 重伯努利试验.记抽出的 100 根木柱中短于 3m 的木柱数为 X, 则 X～b(100,0.2). 由题意和棣莫佛—拉普拉斯定理，

有 P{X≥30}=1-P{X<30}=1-P{X-100×0.2100×0.2×0.98<30-100×0.2100×0.2×0.98

≈1-Φ(2.5)=0.0062.

习题 7

一部件包括 10 部分,每部分的长度是一个随机变量,它们相互独立,服从同一分布,其数学期望为 2mm, 均方差为 0.05mm, 规定总长度为(20±0.1)mm 时产品合格，试求产品合格的概率.

解答： 设各部分长度为 Xi(i=1,2,⋯,10), 总长度 Z=∑i=110Xi.

已知 E(Xi)=2,D(Xi)=(0.05)2, 则依题意可知，并用林德伯格—勒维极限定理得产品合格的概率为

P{20-0.1≤Z≤20+0.1} =P{-0.10.0510≤Z-2×100.0510≤0.10.0510≈Φ(0.63)-Φ(-0.63)

=2Φ(0.63)-1=2×0.7357-1=0.4714.

习题 8

据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布. 现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的，求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率.

解答：设 Xi 表示第 i 只电器元件的寿命，i=1,2,⋯,16. Xi(i=1,2,⋯,16)间独立同指数分布，E(Xi)=100 小时，D(Xi)=100 小时，n=16, 所求概率为 P{∑i=116Xi>1920=P{∑i=116Xi-16×100400>1920-1600400

≈1-Φ(320400)=1-Φ(0.8)=1-0.7881=0.2119.

习题 9 检验员逐个地检查某种产品，每次花 10 秒钟检查一个，但也可能有的产品需要重复检查一次再用去 10 秒钟，假定每个产品需要重复检查的概率为 12,求在 8 小时内检验员检查的产品多于 1900 个的概率是多少?

解答：换言之，即求检查 1900 个产品所花的时间不超过 8 小时的概率. 设 Xi 为检查第 i 个产品所需的时间，则 X1,X2,⋯,X1900 为独立同分布的随机变量，S=∑i=11900Xi 为检查 1900 个产品所需的总时间. 由题设，有 Xi={10,第 i 个产品没有重复检验 20,第 i 个产品重复检验,

且 P{Xi=10}=P{Xi=20}=12,i=1,2,⋯, 于是 μ=E(Xi)=10×12+20×12=15, E(Xi2)=102×12+202×12=250(i=1,2,…),

σ2=D(Xi)=E(Xi2)-[E(Xi)]2=25.

由独立同分布中心极限定理，有 S～近似 N(1900×15,1900×25)=N(28500,47500),

故所求之概率为 P{S≤8×3600}=近似 P{S≤28800}≈Φ(28800-2850047500)

=Φ(3005019)=Φ(619)=0.9162.

习题 10 某车间有同型号机床 200 部，每部开动的概率为 0.7, 假定各机床开关是独立的，开动时每部要消耗电能 15 个单位，问电厂最少要供应这个车间多少电能，才能以 95%的概率保证不致于因供电不足而影响生产.

解答： 记 200 部机床中开动的机床部数为 X, 则 X～b(200,0.7),

由中心极限定理，P{X≤k}≈Φ(k-200×0.7200×0.7×0.3)≥0.95,

查表得 k-14042=1.65, 解得 k≈151, 所需电量 151×15=2265 个单位.

习题 11 某电视机厂每月生产一万台电视机，但它的显像管车间的正品率为 0.8,为了以 0.997 的概率保证出厂的电视机都装上正品的显像管，问该车间每月生产多少只显像管？

解答： 设每月生产 n 只显像管，这 n 只显像管中正品的只数为 X, 则 X～b(n,0.8). 本题即求满足 P{X≥10000}≥0.997 的最小的 n. 由棣莫佛—拉普拉斯定理，有 X～近似

N(0.8n,0.8×0.2n)=N(0.8n,0.16n),

于是 P{X≥10000}=1-P{0≤X<10000}

≈[Φ(10000-0.8n0.16n)-Φ(0-0.8n0.16n)]≈1-Φ(10000-0.8n0.4n)≥0.997,

即 Φ(0.8n-100000.4n)≥0.997.查表可得 0.8n-100000.4n≥2.75, 解之得 n≥12654.68, 所以取 n=12655 即可满足要求.

习题 12(1)一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成. 在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10,为了使整个系统起作用，必须至少有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率.

(2)一复杂的系统由 n 个相互独立起作用的部件所组成，每个部件的可靠性为 0.90, 且必须至少有 80%的部件工作才能使整个系统工作，问 n 至少为多大才能使系统的可靠性不低于 0.95?

解答：(1)设 Xi={1,第 i 个部件在整个运行期间正常工作 0,第 i 个部件在运行期间损坏, (i=1,2,…,100).

由已知条件，X1,…,X100 相互独立且同分布，P{Xi=1}=0.9=p,P{Xi=0}=0.1=q.记 X=∑i=1100Xi, 它表示在整个运行期间工作着的部件数，可知，X～b(10,0.9). 依题意，所求概率为 P{X>85}=1-P{X≤85}

=1-P{X-100×0.9100×0.9×0.1≤85-100×0.9100×0.9×0.1≈1-Φ(-53)=Φ(53)=0.9525,

即整个系统起作用的概率为 0.9525.

(2)与(1)中的假设相同，只是这里 X～b(n,0.9). 依题，要

P{X≥0.8n}=0.95, P{X-0.9nn×0.9×0.1≥0.8n-0.9nn×0.9×0.1=0.95,

亦即 P{X-0.9nn×0.9×0.1≥-n3=0.95, 近似地有 Φ(n3)=0.95.

查表得 n3=1.645, 解得 n=24.35, 于是,要求 n=25, 即至少有 25 个部件才能使系统可靠性不低于 0.95.

习题 13 抽样检查产品质量时，如果发现有多于 10 个的次品，则拒绝接受这批产品.设某批产品的次品率为 10%, 问至少应抽取多少个产品检查，才能保证拒绝接受该产品的概率达到 0.9?

解答： 令 X=“发现的次品数”，则 X～b(n,0.1),

∴P{X>10}=0.9,　即 1-P{X≤10}=1-Φ(10-0.1nn×0.1×0.9)=0.9,

即 Φ(10-0.1nn×0.1×0.9)=0.1, ∴10-0.1nn×0.1×0.9=-1.28,

解以上方程：n≈147.

总习题解答

习题 110 个人随机地进入 15 个房间，每个房间容纳的人数不限，设 X 表示有人的房间数，求 E(X)(设每个人进入每个房间是等可能的，且各人是否进入房间相互独立).

解答：设随机变量 Xi={1,第 i 个房间有人 0,第 i 个房间无人(i=1,2,⋯,15),

则 X=∑i=115Xi,　且 Xi 都服从同一分布，于是 P{Xi=0}=(1415)10,　P{Xi=1}=1-P{Xi=0}=1-(1415)10

于是 Xi 服从 0-1 分布

Xi	01
p	(1415)101-(1415)10

故

E(Xi)=1-(1415)10≈0.498　(i=1,2,⋯,15),E(X)=∑i=115E(Xi)=15×0.498=7.47.

习题 2 某城市一天内发生严重刑事案件数 Y 服从以 1/3 为参数的泊松分布，以 X 记一年未发生严重刑事案件的天数，求 X 的数学期望.

解答：引入随机变量 Xi={1,第 i 天未发生严重刑事案件 0,否则,i=1,2,⋯,365

则 X=X1+X2+⋯+X365.由于 P{Xi=1}=P{Y=0}=(1/3)0e-1/30!=e-1/3,　知 Xi 的分布律为

Xi	01
pk	1-e-1/3e-1/3

于是 E(Xi)=e-1/3,　即得 X 的数学期望为 E(X)=∑i=1365e-1/3=365×e-1/3≈262(天).

习题 3 将 n 只球(1～n 号)随机一放进 n 只盒子(1～n 号)中去，一只盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对，记 X 为总的配对数，求 E(X).

解答：因为每只球都有两种可能，故引入随机变量 Xi={1,第 i 号球进入第 i 号盒 0,反之(i=1,2,⋯,n),

因而，总配对数 X=∑i=1nXi,　于是 E(X)=∑i=1nE(Xi),E(Xi)=1·P{Xi=1}=1n(i=1,2,⋯,n),

故 E(X)=∑i=1n1n=n·1n=1.

习题 4 某车间生产的圆盘其直径在区间(a,b)服从均匀分布，试求圆盘面积的数学期望.

解答：设已知直径 d～U(a,b),　密度为 f(x)={1b-a,a<x<b0,其它,

圆盘面积 S(d)=π·d24,E(S)=∫-∞∞π4x2·f(x)dx=∫abπ4x2·1b-adx=π12(a2+ab+b2).

习题 5 设 X 和 Y 是相互独立且均服从标准正态分布 N(0,12)的随机变量，求∣X-Y∣的数学期望.

解答：解 设 Z=X-Y，由正态分布的性质知，Z～N(0,1)，于是 E(∣X-Y∣)=E(∣Z∣)=∫-∞+∞∣z∣·12πe-z22dz

=2π∫0+∞ze-z22dz=2π(-e-z22)∣0+∞　=2π.

题 6 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从标准正态分布，求 Z=X2+Y2 的数学期望.

解答： X～N(0,1),Y～N(0,1)， X 和 Y 相互独立，X 和 Y 的联合概率密度为 f(x,y)=12πe-x2/2·

12πe-y2/2=12πe-(x2+y2)/2,

于是 E(Z)=E(X2+Y2)=12π∫-∞+∞∫-∞+∞x2+y2e-x2+y22dxdy,

利用极坐标来计算，令

x=rcosθ,y=rsinθ， 得 E(Z)=12π∫02π∫0+∞r2e-r22drdθ=2π2π∫0+∞r2e-r22dr

=-re-r22∣0+∞+∫0+∞e-r22dr=π2(因 12π∫-∞+∞e-r22dr=1).

习题 7 甲、乙两人相约于某地在 12:00～13:00 会面，设 X,Y 分别是甲、乙到达的时间，且设 X 和 Y 相互独立，已知 X,Y 的概率密度分别为 fX(x)={3x2,0<x<10,其它, fY(y)={2y,0<y<10,其它,

求先到达者需要等待的时间的数学期望.

解答： X 和 Y 的联合概率密度为 f(x,y)={6x2y,0<x<1,0<y<10,其它.

按题意需要求的是∣X-Y∣的数学期望，即有 E(∣X-Y∣)=∫01∫01∣x-y∣

6x2ydxdy=∫∫D1[-(x-y)6x2y]dxdy+∫∫D2(x-y)6x2ydxdy

=112+16=14(小时)(D1,D2 如图)

习题 8 设某厂生产的某种产品不合格率为 10%,假设生产一件不合格品，要亏损 2 元，每生产一件合格品，由获利 10 元，求每件产品的平均利润.

解答： X 表示每件产品的利润，则 X 取-2,10, 求每件产品的平均利润，即 X 的数学期望.E(X)=-2×0.1+10×0.9=8.8.

习题 9 投篮测试规则为每人最多投三次，投中为止，且第 i 次投中得分为(4-i)分，i=1,2,3. 若三次均未投中不得分，假设某人投篮测试的平均次数为 1.56 次.(1)求该投篮的命中率； (2)求该人投篮的平均得分.

解答： (1)设该投篮人投篮次数为 X,投篮得分为 Y;每次投篮命中率为 p(0<p<1),没有命中为 q=1-p 则 X 的概率分布为

X	123
pi	p pq q2

E(X)=p+2pq+3q2 =p2-3p+3,

依题意 p2-3p+3=1.56, 即 p2-3p+1.44=0, 解得 p=0.6(p=2.4 舍去).

(2)Y 可能取 0,1,2,3 四个可能值，且

P{Y=0}=q3=0.43=0.064, P{Y=1}=pq2=0.6×0.42=0.096,

P{Y=2}=pq=0.6×0.4=0.24, P{Y=3}=p=0.6,

E(Y)=∑i=03iP{Y=i}=2.376(分).

习题 10 一台设备由三大部件构成，在设备运转中部件需调整概率为 0.1,0.2,0.3, 假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的期望与方差.

解答： 解法一 设 X 是同时需要调整的部件数，可能值为 0,1,2,3,记 pi=P{X=i}, i=0,1,2,3, 有

p0=0.9×0.8×0.7=0.504, p1=0.1×0.8×0.7+0.9×0.2×0.7+0.9×0.8×0.3=0.398,

p2=0.1×0.2×0.7+0.1×0.8×0.3+0.9×0.2×0.3=0.092,p3=0.1×0.2×0.3=0.006,

故 X 的分布列为

X	0123
pk	0.5040.3980.0920.006

E(X)=0×0.504+1×0.398+2×0.092+3×0.006=0.6,　E(X2)=02×0.504+12×0.398+22×0.092+32×0.006=0.82,　D(X)=0.82-0.62=0.46.

解法二　　X 的取值为调整的部件数，显然为非负整数，又每一部件是否需调整只有两种可能结果(调整与不调整)，　于是可引入随机变量 Xi:Xi={1,第 i 部件需调整 0,第 i 个部件不要调整,i=1,2,3,

则 X=X1+X2+X3,　且 X1,X2,X3 相互独立，而 Xi(i=1,2,3)服从两点分布，其分布律分别为

X1	1	0
pk	0.1	0.9

X2	1	0
pk	0.2	0.8

X3	1	0
pk	0.3	0.7

故 E(X1)=0.1,D(X1)=0.09;

E(X2)=0.2,D(X2)=0.16;

E(X3)=0.3,D(X3)=0.21,

于是 E(X)=E(X1)+E(X2)+E(X3)=0.1+0.2+0.3=0.6;

D(X)=D(X1)+D(X2)+D(X3)=0.09+0.16+0.21=0.46.

习题 11 设随机变量 X 的概率密度为 f(x)={ax2+bx+c,0<x<10,其它,

并已知 E(X)=0.5,D(X)=0.15,　求系数 a,b,c.

解答： 由概率密度性质有 1=∫-∞+∞f(x)dx=∫01(ax2+bx+c)dx=a3+b2+c,

即 13a+b2+c=1.　　①

又 E(X)=∫-∞+∞xf(x)dx=∫01x(ax2+bx+c)dx=a4+b3+c2,

所以 14a+13b+12c=0.5.　　②

又 E(X2)=D(x)+E2(x)=0.15+0.25=0.4,

E(X2)=∫-∞+∞x2f(x)dx==∫01x2(ax2+bx+c)dx=15a+14b+13c,

所以 15a+14b+13c=0.4.　　③

解由式①，②，③联立而成的方程组得 a=12,b=-12,c=3

习题 12 卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X(以 kg 计)服从 N(50,2.52),问最多装多少水泥使总重量超过 2000kg 的概率不大于 0.05?

解答： 设最多装 n 袋水泥.由题设，每袋水泥重量 Xi～N(50,2.52),i=1,2,⋯,n,

且 X1,X2,⋯,Xn 相互独立. 总重量Σi=1nXi,　要求 P{Σi=1nXi>2000⩽0.05,　求 n?

Σi=1nXi～N(50n,n⋅2.52),　所以

P{Σi=1nXi>2000=P{Σi=1nXi-50n2.5n>2000-50n2.5n

=1-Φ(2000-50n2.5n)⩽0.05,

即 Φ(4000-100n5n)⩾0.95,查标准正态分布表得 4000-100n5n=1.645.

由方程 400n2-32002.706n+800=0 解得 n≈39.483(袋),　故最多装 n=39 袋才能使总重量超过 2000kg 的概率不大于 0.05.

习题 13 设随机变量 X1,X2,X3 相互独立，其中 X1 在[0,6]上服从均匀分布，X2 服从参数 λ=1/2 的指数分布，X3 服从参数 λ=3 的泊松分布，记 Y=X1-2X2+3X3， 求 D(Y).

解答： 因 X1 在[0,6]上服从均匀分布，故 D(X1)=(6-0)212=3;

又因 X2～e(1/2),X3～P(3)， 故 D(X2)=1/(1/2)2=4,D(X3)=3.

因 X1、X2、X3 相互独立，根据方差的性质

得 D(Y)=D(X1-2X2+3X3)=D(X1)+4D(X2)+9D(X3) =3+4×4+9×3=46.

习题 14 设 X 服从参数为 1 的指数分布，且 Y=X+e-2X， 求 E(Y)与 D(Y).

解答： 由于 X 服从 λ=1 的指数分布，因此 E(X)=1,D(X)=1,

E(X2)=D(X)+(E(X))2=2,

E(Y)=E(X+e-2X)=E(X)+E(e-2X)=1+∫0+∞e-2xe-xdx =1+1/3=4/3,

E(Y2)=E((X)+e-2X)2)=E(X2+2Xe-2X+e-4X),

E(Xe-2X)=∫0+∞xe-2xe-xdx=∫0+∞xe-3xdx=19,

E(e-4X)=∫0+∞e-4xe-xdx=∫0+∞e-5xdx=15,

E(X2)+2E(Xe-2X)+E(e-4X)=2+2/9+1/5=109/45,

D(Y)=E(Y2)-(E(Y))2=109/45-16/9=29/45.

习题 15 已知 X～N(1,32),Y～N(0,42),ρXY=-12， 设 Z=X3+Y2， 求 Z 的期望与方差及 X 与 Z 的相关系数.

解答： 由已知，E(X)=1,D(X)=32,E(Y)=0,D(Y)=42， 所以

E(Z)=E(X3+Y2)=13E(X)+12E(Y)=13,

D(Z)=D(X3+Y2)=132D(X)+14D(Y)+2×13×12Cov(X,Y)

=1+4+13×ρXY×D(X)D(Y)=5+13×(-12)×3×4=3,

ρXZ=cov(X,Z)D(X)D(Z)=cov(X,13X+12Y)D(X)D(Y)=13D(X)+12cov(X,Y)D(X)D(Z)

=D(X)3D(Z)+ρXY·D(Y)2D(Z)=333-443=0.

习题 16 设 X,Y 的概率密度为 f(x,y)={1,∣y∣≤x,0≤x≤10,其它,

(1)求关于 X,Y 的边缘概率密度；(2)求 E(X),E(Y)及 D(X),D(Y)； (3)求 cov(X,Y).

解答： (1)当 0≤x≤1 时，fX(x)=∫-xx1dy=2x， 故 fX(x)={2x,0≤x≤10,其它；

当 0≤y≤1 时，fY(y)=∫y11dx=1-y；当-1≤y≤0 时，fY(y)=∫-y11dx=1+y，故

fY(y)={1+y,-1≤y≤01-y,0≤y≥10,其它={1-∣y∣,当-1≤y≤10,其它.

(2)先画出 f(x,y)不为 0 的区域 GE(X)=∫01x·2xdx=23,E(X2)=∫01x2·2xdx=12， 故

D(X)=12-(23)2=118， E(Y)=∫-11y(1-∣y∣)dy=0,

E(Y2)=∫-11y2(1-∣y∣)dy=2∫01y2(1-y)dy=16,故 D(Y)=16.

(3)E(XY)=∫∫Gxydy=∫01dx∫-xxxydy=0， 故 cov(X,Y)=0.

习题 17 设随机变量 X～U(0,1),Y～U(1,3)， X 与 Y 相互独立，求 E(XY)与 D(XY).

解答： 因为 fX(x)={1,0<x<10,其它， fY(y)={1/2,1<y<30,其它， 所以 f(x,y)={1/2,0<x<1,1<y<30,其它,

则 E(XY)=∫01xdx∫1312ydy=12×2=1， E(X2Y2)=∫01x2dx∫1312y2dy=13×133=139,

故 D(XY)=E(X2Y2)-[E(XY)]2=139-1=49.

习题 18 设 E(X)=2, E(Y)=4, D(X)=4, D(Y)=9, ρXY=0.5, 求：

(1)U=3X2-2XY+Y2-3 的数学期望； (2)V=3X-Y+5 的方差.

解答： (1)E(U)=E(3X2-2XY+Y2-3)=3E(X2)-2E(XY)+E(Y2)-3

=3[D(X)+(E(X))2]-2[E(X)E(Y)+ρXYD(X)⋅D(Y)]+[D(Y)+(E(Y))2]-3=24;

(2) D(V)=D(3X-Y+5)=9D(X)+D(Y)-6cov(X,Y) =45-6ρXYD(X)⋅D(Y)=27.

习题 19 设 W=(aX+3Y)2, E(X)=E(Y)=0, D(X)=4, D(Y)=16, ρXY=-0.5. 求常数 a, 使 E(W)为最小,并求 E(W)的最小值.

解答： E(W)=E(aX+3Y)2=E(a2X2+9Y2+6aXY)=a2E(X2)+9E(Y2)+6aE(XY)

=a2{D(X)+[E(X)]2}+9{D(Y)+[E(Y)]2+6a[ρD(X)D(Y)+E(X)E(Y)] =4a2+144-24a=4[(a-3)2+27],

易见，当 a=3 时，E(W)达到最小，且 E(W)min=4×27=108. 注：求 E(W)最小时的 a, 也可利用求导法.

dEda=8(a-3), 令 dEda=0, 得 a=3 是唯一驻点. 又因 d2Eda2=8>0, 故 a=3 为极小点，也是最小点，所以，当 a=3 时 E(W)最小，且最小 E(W)值为 108.

习题 20 某班有学生 n 名，开新年联欢会，每人带一份礼物互赠，礼物集中放在一起，并将礼物编了号，当交换礼物时，每人随机地拿到一个号码，并以此去领取礼物，试求恰好拿到自己准备的礼物的人数 X 的期望和方差.

解答： 设随机变量 Xi={1,若第 i 人拿到自己准备的礼物 0,若第 i 个人未拿到自己准备的礼物(i=1,2,⋯,n),

显然有 X=∑i=1nXi, 易知 P{Xi=1}=1n, P{Xi=0}=1-1n, i=1,2,⋯,n, E(X)=1,

由于 X1,X2,⋯,Xn 不相互独立，因此 D(X)=∑i=1nD(Xi)+2∑1≤i≤j≤n∑cov(Xi,Xj),

而 D(Xi)=E(Xi2)-[E(Xi)]2=P{Xi2=1}-(1n)2=1n-1n2=1n(1-1n),

cov(Xi,Xj)=E(XiXj)-E(Xi)E(Xj),

XiXj 取值为 0,1, 定义：P{XiXj=1}=P{Xi=1,Xj=1}=P{Xi=1}P{Xj=1 ∣ Xi=1}=1n⋅1n-1,

于是 E(XiXj)=1⋅P{XiXj=1}=1n(n-1), 因而 cov(Xi,Xj)=1n(n-1)-1n2=1n2(n-1),

所以 D(X)=n⋅1n(1-1n)+2Cn2⋅1n2(n-1)=n-1n+1n=1.

习题 21 设 A 和 B 是随机试验 E 上的两事件，且 P(A)>0, P(B)>0, 定义随机变量 X,Y 为={1,若 A 发生 0,若 A 不发生, Y={1,若 B 发生 0,若 B 不发生,

证明：若 ρXY=0, 则 X 和 Y 必定相互独立.

解答： X,Y 的分布律分别为

X	1	0
pi	P(A)	P(A¯)

Y	1	0
pi	P(B)	P(B¯)

XY	1	0

pi	P(AB)	1-P(AB)

于是 E(X)=P(A),E(Y)=P(B),E(XY)=P(AB),

0=ρXY=cov(X,Y)D(X)D(Y)=E(XY)-E(X)E(Y)D(X)D(Y) ⇒E(XY)=E(X)E(Y),

即 P(AB)=P(A)P(B),故 A 与 B 相互独立，由事件独立的性质可知 A 与 B¯， A¯与 B， A¯与 B¯也相互独立，于是

P{X=1,Y=1}=P(AB)=P(A)P(B)=P{X=1}P{Y=1},P{X=0,Y=0}=P(AB¯)=P(A)P(B¯)=P{X=1}P{Y=0},

P{X=0,Y=1}=P(A¯B)=P(A¯)P(B)=P{X=0}P{Y=1}, P{X=0,Y=0}=P(A¯B¯)=P(A¯)P(B¯)=P{X=0}P{Y=0},

故 X 与 Y 相互独立.

习题 22 设二维随机变量(X,Y)～N(0,0,σ12,σ22,ρ)， 其中 σ12≠σ22. 又设

X1=Xcosa+Ysina,X2=-Xsina+Ycosa,问何时 X1 与 X2 不相关，X1 与 X2 独立?

解答： 因为(X1,X2)是(X,Y)的线性变换，所以(X1,X2)仍然是二维正态随机变量，若 X1 与 X2 不相关，X1 与 X2 必然独立 E(X1)=E(X2)=0, cov(X1,X2)=E[(Xcosa+Ysina)(-Xsina+Ycosa)]-0

=E[-X2sinacosa+Y2sinacosa+XY(cos2a-sin2a)] =(σ22-σ12)sinacosa+ρσ1σ2(cos2a-sin2a).

若 X1 与 X2 不相关，则 cov(X1,X2)=0, 从而有 tan2a=2sinacosacos2a-sin2a=2ρσ1σ2σ12-σ22,

此时，X1 与 X2 不相关，且 X1 与 X2 独立.

习题 23 在每次试验中，事件 A 发生的概率为 0.5, 利用切比雪夫不等式估计，在 1000 次独立重复试验中，事件 A 发生的次数在 400～600 之间的概率.

解答： 设 X 表示在 1000 次独立事件重复试验中，事件 A 发生的次数，则 X～b(1000,0.5),

E(X)=nP=1000×0.5=500,

D(X)=nP(1-P)=1000×0.5×0.5=250,

400<X<600⇒400-500<X-E(X)<600-500⇔∣X-E(X)∣<100,

于是取ε=100,有 P{400<X<600}=P{∣X-500∣<100}⩾1-D(X)ε2=1-2501002=3940.

习题 24 设在某种重复试验中，每次试验事件 A 发生的概率为 14, 问能以 0.9997 的概率保证在 1000 次试验中 A 发生的频率与 14 相差多少? 此时 A 发生的次数在哪个范围之内?

解答： 已知 n=1000,p=14,β=0.9997. 要求的是ε, 使 P{∣nAn-p∣⩽ε=0.9997(=β).

因为 P{∣nAn-p∣⩽ε≈2Φ(εnp(1-p))-1=0.9997, 故 Φ(εnp(1-p))=0.9997.

查表得εnp(1-p)=3.62, 故ε=3.62×p(1-p)n=3.62×0.25×0.751000≈0.0496,

即在 1000 次试验中，能以 0.9997 的概率保证 A 发生的频率与 14 相差约为 0.0496. 此时 nA 满足

∣nAn-14∣⩽0.0496,故 200.4⩽nA⩽299.6.

习题 25 利用仪器测量已知量 a 时，所发生的随机误差的分布在独立试验的过程中保持不变，设 X1,X2,⋯,Xn,⋯是各次测量的结果，可否用 1n∑i=1n(Xi-a)2 作为仪器误差的方差的近似值(设仪器无系统偏差)?

解答： 题目问的是：当独立重复试验次数 n 无限增大时，1n∑i=1n(Xi-a)2 与仪器误差的方差有一定偏差的可能性是否可以任意小? 故考虑用大数定律.

因为 X1,X2,⋯,Xn,⋯是各次测量的结果，视为独立同分布的随机变量列，有 E(X1)=E(X2)=⋯=E(Xn)=设为 μ, D(X1)=D(X2)=⋯=D(Xn)=设为 σ2,

则仪器误差的期望和方差分别为 E(Xi-a)=E(Xi)-a=μ-a, D(Xi-a)=D(Xi)=σ2(i=1,2,⋯,n)

现在考虑随机变量 Yi=(Xi-a)2(i=1,2,⋯,n)，　显然 Y1,Y2,⋯,Yn,⋯也是独立的，并且服从同一分布，计算 Yi 的数学期望：　　E(Yi)=E(Xi-a)2=E(Xi2)-2aE(Xi)+a2=D(Xi)+[E(Xi)]2-2aE(Xi)+a2

=σ2+(μ-a)2(i=1,2,⋯,n,⋯)所以，如果仪器没有系统错误，即 E(Xi-a)=μ-a=0,　则 E(Yi)=σ2(i=1,2,⋯)

于是，按切比雪夫定理的推论，得 limn→∞P{∣1n∑i=1nYi-σ2∣<ε=1,　limn→∞P{∣14∑i=1n(Xi-a)2-σ2∣<ε=1.这就是说，当 n→∞时，14∑i=1n(Xi-a)2 依概率收敛于 σ2.　因此，当 n 充分大时，14∑i=1n(Xi-a)2 可以作为 σ2 的近似值.

习题 26 一保险公司有 10000 人投保，每人每年付 12 元保险费，已知一年内投保人死亡率为 0.006,　如死亡，公司付给死者家属 1000 元，求：(1)保险公司年利润为 0 的概率；(2)保险公司年利润不少于 60000 元的概率.

解答： 令 X=“一年内死亡的人数”，则 X～b(10000,0.006),　公司利润为 L=10000×12-1000X.

(1)P{L=0}=P{10000×12-1000X=0}=P{X=120}≈0.(2)P{L≥60000}=P{10000×12-1000X≥60000}

=P{X≤60}≈Φ(60-10000×0.00610000×0.006×0.994)=0.5.

习题 27 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5kg,　均方差为 0.1kg,　问 50000 只零件的总重量超过 2510kg 的概率是多少？

解答： 设各零件的重量为 Xi(i=1,2,⋯,50000),已知 μ=E(Xi)=0.5kg,　　　D(Xi)=σ=0.1kg,

总重量 Z=∑i=15000Xi,　故所求概率为　P{Z>2510}=P{Z-5000×0.50.15000>2510-5000×0.50.15000

≈1-Φ(100.15000)=1-Φ(1.414)=1-0.9214=0.0787.

习题 28 一个供电网内共有 10000 盏功率相同的灯，夜晚每一盏灯开着的概率都是 0.7.假设各盏灯开、关彼此独立，求夜晚同时开着的灯数在 6800 到 7200 之间的概率.

解答： 记 X 表示夜晚同时开着的灯的数目，依题意，X 服从 n=10000,p=0.7 的二项分布，且

E(X)=7000,　D(X)=2100.如果准确计算，应该用伯努利公式

P{6800<X<7200}=∑k=68017199C10000k0.7k0.310000-k.这样的计算只能借助计算机才能完成，如果近似计算，则有下面两种方法：

方法一　　用切比雪夫不等式估计.P{6800<X<7200}=P{∣X-7000∣<200}≥1-21002002=0.9457.

方法二　　用棣莫弗—拉普拉斯中心极限近似计算. 由于二项分布中参数 n 相当大，根据中心极限定理，X 近似服从 N(7000,2100).P{6800<X<7200}=P{∣X-70002100∣<2002100≈2Φ(4.36)-1=0.99999.

注：尽管切比雪夫不等式与中心极限定理都可以对概率 P{6800<X<7200}.给出估计，但是前者远不如后者的结果准确.

习题 29 假设一条自动生产的产品合格率是 0.8.　要使一批产品的合格率达到在 76%与 84%之间的概率不小于 90%,　问这批产品至少要生产多少件？

解答： 假设至少要生产 n 件产品，记 X 表示 n 件产品的合格品数目. 易见 X 服从参数为 n,0.8 的二项分布，依题意，应该确定生产产品数 n 使其满足下面的概率不等式 P{0.76<Xn<0.84≥0.90.

依题意，E(X)=0.8n,　D(X)=0.16n.

方法一　　应用切比雪夫不等式.P{0.76<Xn<0.84=P{∣X-0.8n∣<0.04n}≥1-0.16n(0.04n)2=1-100n.

如果 1-100n≥0.90,　即 n≥1000,　则一定可以保证不等式 P{0.76<Xn<0.84≥0.90

成立.

方法二　应用棣莫佛—拉普拉斯定理. 当 n 比较大时，X 近似服从正态分布 N(0.8n,0.16n).

P{0.76<X/n<0.84}=P{|X-0.8n0.4n|<0.040.4n≈2Φ(0.1n)-1⩾0.90,

Φ(0.1n)⩾0.95.查表得 0.1n⩾1.64,　解此不等式可得 n⩾268.96.　因此 n 至少为 269.

注意：尽管切比雪夫不等式与中心极限定理都可以对概率 P{0.76<X/n<0.84}给出估计，但是前者远不如后者的结果准确.

习题 30 用棣莫佛—拉普拉斯中心极限定理证明，在伯努利试验中，若 0<p<1,　则不论 k 如何，总有

P{|μn-np|<k}→0(n→∞).

解答：　P{|μn-np|<k}=P{np-k<μn<np+k}=P{-knpq<μn-npnpq<knpq≈Φ(knpq)-Φ(-knpq),

其中 Φ(x)=12π∫-∞xe-t2/2dt.

\becauselimn→∞[Φ(knpq)-Φ(-knpq)]=0,　故

P{|μn-np|<k}→0(n→∞).

习题 31 设 X1,X2,⋯,Xn,⋯为独立同分布的随机变量序列，已知 E(Xi)=μ,　D(Xi)=σ2(σ≠0),　证明：当 n 充分大时，算术平均 X¯n=1n∑i=1nXi 近似服从正态分布，并指出分布中的参数.

解答： 由独立同分布中心极限定理，得

limn→∞P{∑i=1nXi-nμnσ⩽x=∫-∞x12πe-t2/2dt,

即 limn→∞P{1n∑i=1nXi-μσ2n⩽x=∫-∞x12πe-t2/2dt,

亦即 limn→∞P{Xn¯-μσ2n⩽x=∫-∞x12πe-t2/2dt.

于是，当 n 充分大时，有 Xn¯-μσ2n∼·N(0,1),　而

E(Xn¯)=μ,D(Xn¯)=μ,D(Xn¯)=σ2n,

故 Xn¯∼·N(μ,σ2n)(n 充分大时).