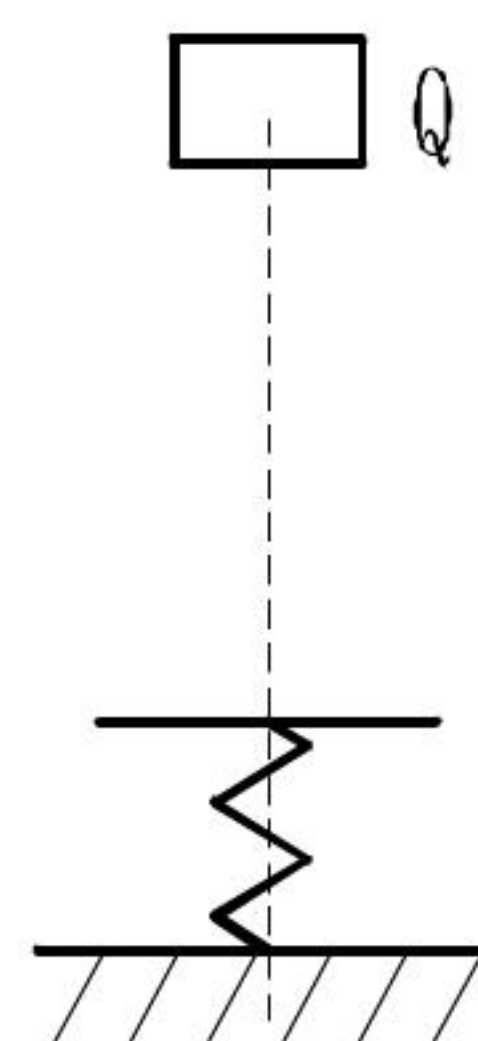


材料力学模拟试题（一）解答

一、一、 填空题（每小题 5 分，共 10 分）

1、 如图，若弹簧在 Q 作用下的静位移 $\Delta_{st} = 20mm$ ，在 Q 自由下落冲击时的最大动位移 $\Delta_d = 60mm$ ，则弹簧所受的最大冲击力 P_d 为： $3Q$ 。

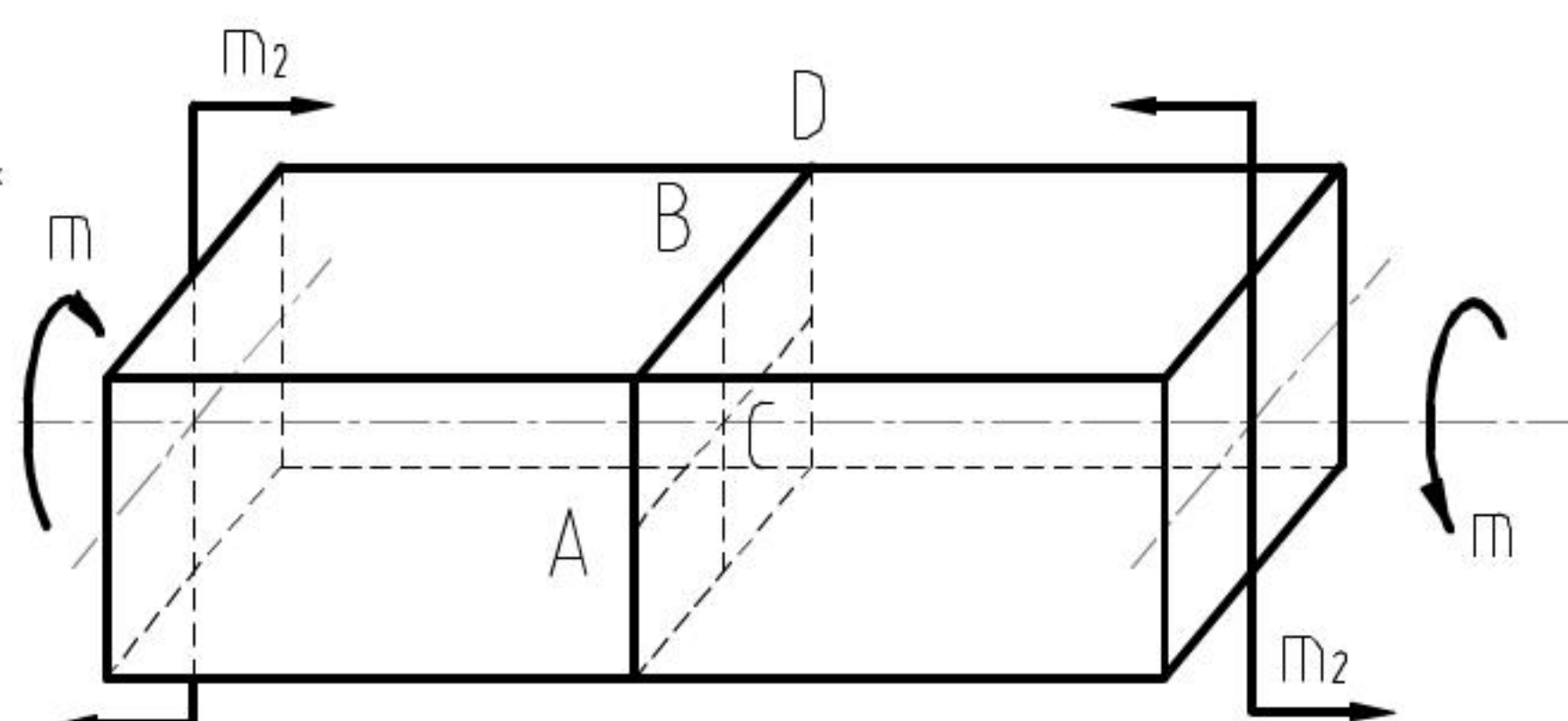
2、 在其它条件相同的情况下，用内直径为 d 的实心轴代替直径 d 的实心轴，若要使轴的刚度不变（单位长度的扭转角 φ 相同），则实心轴的外径 $D = \underline{\sqrt[4]{2}d}$ 。



二、二、 选择题（每小题 5 分，共 10 分）

1、 图示正方形截面杆承受弯扭组合变形，在进行强度计算时，其任一截面的危险点位置有四种答案：

- (A) 截面形心； (B) 竖边中点 A 点；
(C) 横边中点 B； (D) 横截面的角点 D 点。
正确答案是：C



2、 若压杆在两个方向上的约束情况相同；且 $\mu_y > \mu_z$ 。那么该正压杆的合理截面应满足的条件有四种答案：

- (A) $I_y = I_z$ ； (A) $I_y > I_z$ ； (A) $I_y < I_z$ ； (A) $\lambda_z = \lambda_y$ 。正确答案是：D

三、三、 计算题（共 80 分）

1、 (15 分) 图示拐轴受铅垂载荷 P 作用。试按第三强度理论确定 AB 轴的直径 d 。已知：
 $P=20kN$, $[\sigma]=160MPa$ 。

解：AB 梁受力如图：

$$M_n = 20000 \times 0.14 = 2800(Nm)$$

AB 梁内力如图：

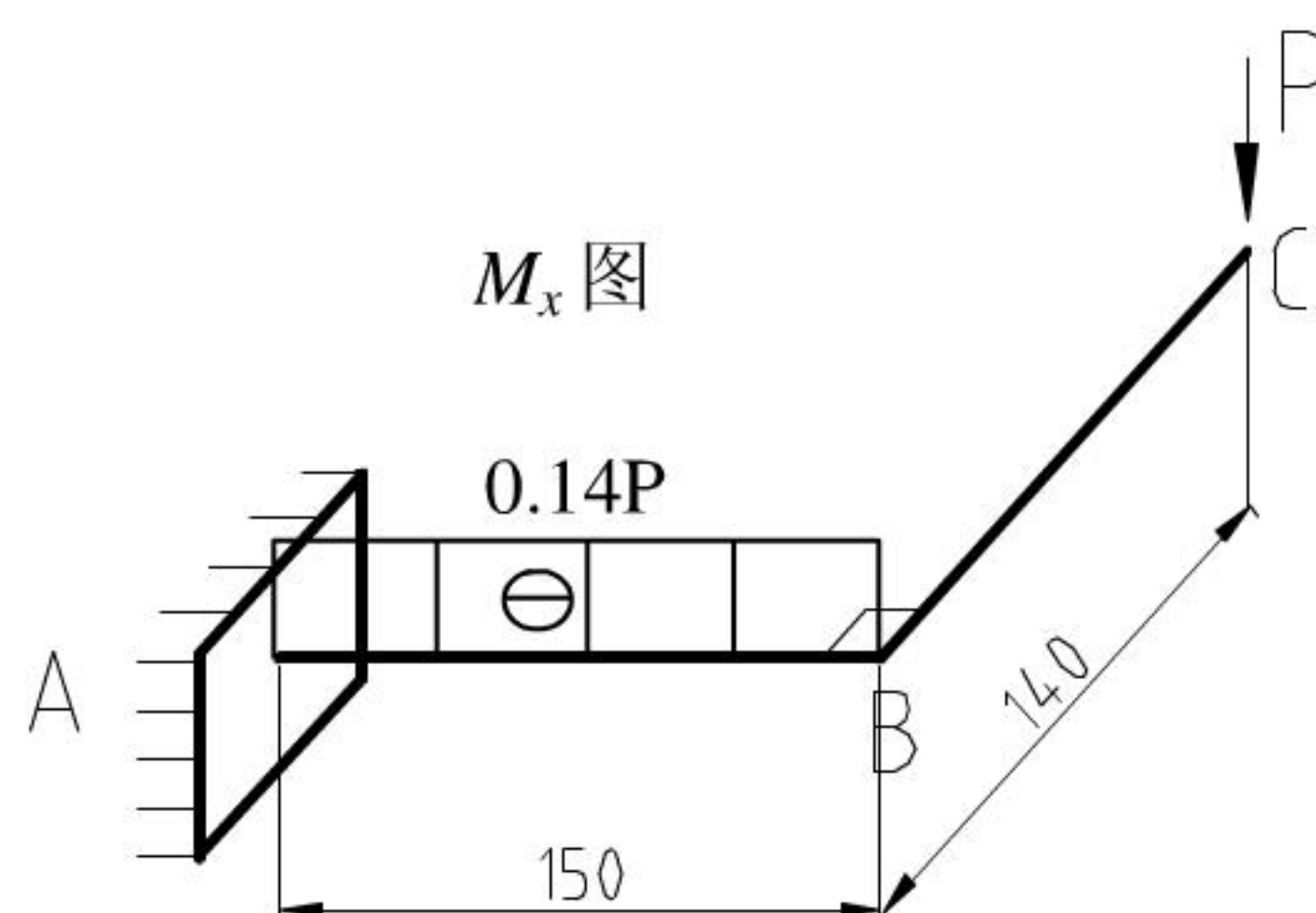
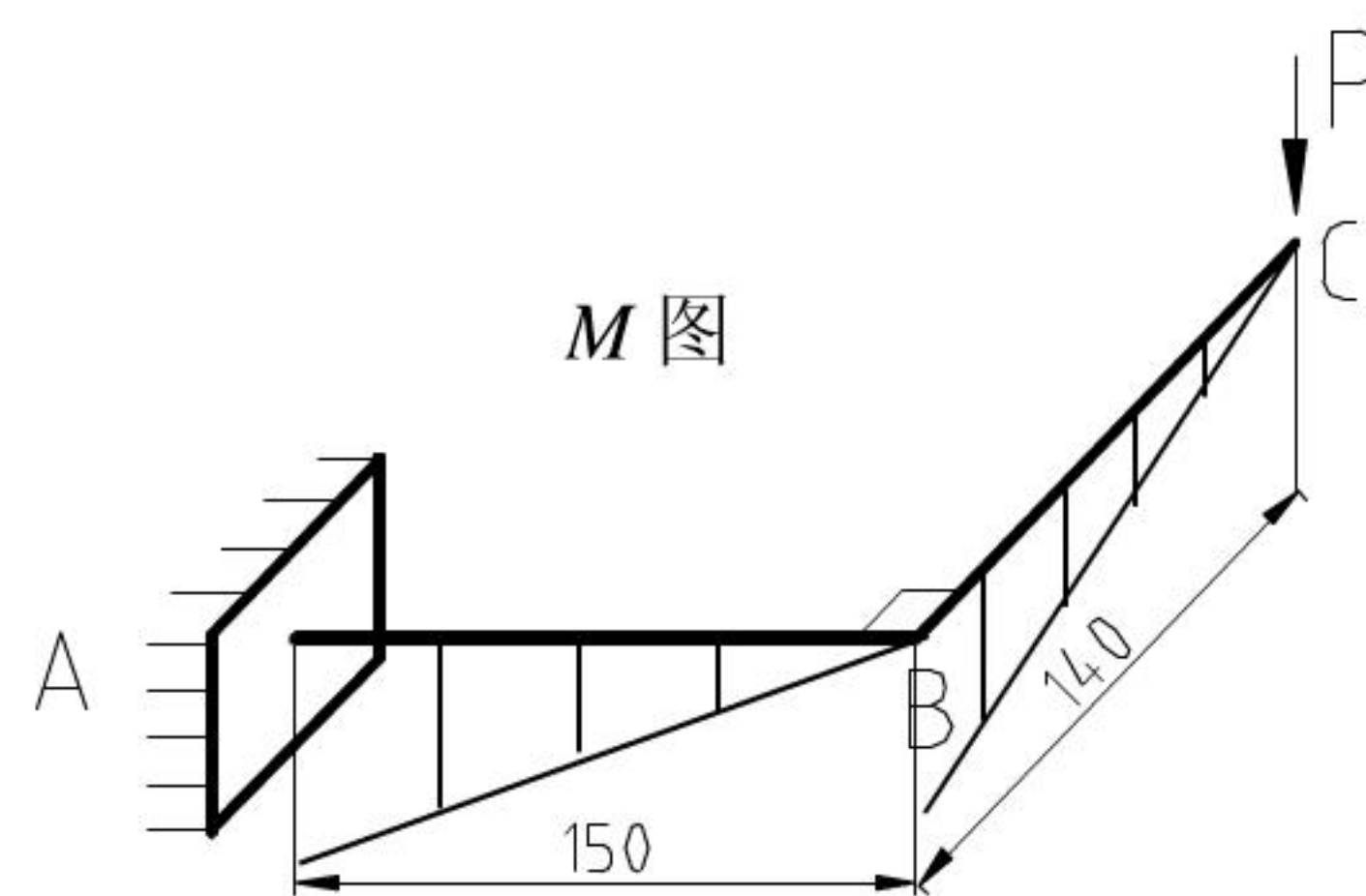
$$M_{max} = 20000 \times 0.15 = 3000(Nm)$$

危险点在 A 截面的上下两点

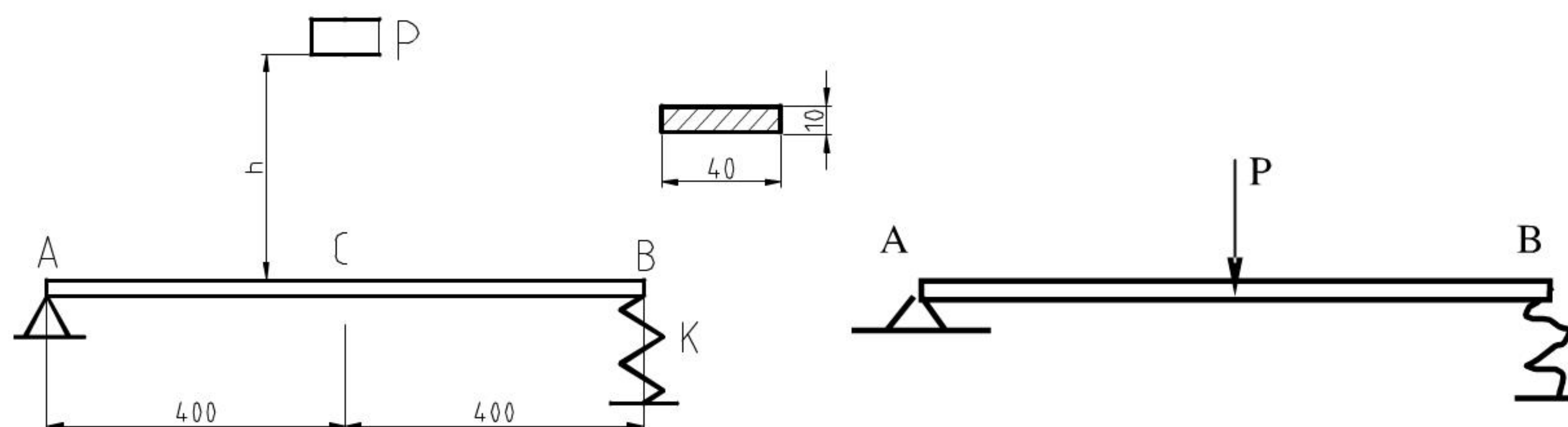
由圆轴弯扭组合第三强度理论的强度条件：

$$\frac{\sqrt{M^2 + M_n^2}}{W} = \frac{\sqrt{3000^2 + 2800^2}}{\pi d^3 / 32} \leq [\sigma] = 160 \times 10^6$$

$$\therefore d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times 4.1 \times 10^3}{3.14 \times 160 \times 10^6}} = 0.0639(m) = 64(mm)$$



2、图示矩形截面钢梁，A 端是固定铰支座，B 端为弹簧支承。在该梁的中点 C 处受到的重量为 $P=40\text{N}$ 的重物，自高度 $h=60\text{mm}$ 处自由落下冲击到梁上。已知弹簧刚度 $K=25.32\text{N/mm}$ ，钢的 $E=210\text{GPa}$ ，求梁内最大冲击应力（不计梁的自重）。（15 分）



解：（1）求 δ_{st} 、 $\sigma_{st\max}$ 。

将重力 P 按静载方式沿铅垂方向加在梁中心 C 处，点 C 的挠度为 δ_{st} 、静应力为 $\sigma_{st\max}$ ，

$$\text{惯性矩 } I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.04 \times 0.016^3}{12} (\text{m}^4)$$

由挠度公式 $\delta_{st} = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{1}{2} \left(\frac{P}{2K} \right)$ 得，

$$\begin{aligned} \delta_{st} &= \frac{40 \times 0.8^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times \frac{40 \times 10^{-3} \times (10^{-3})^3}{12}} 1.365 \times 10^{-8} \\ &+ \frac{1}{2} \times \frac{40}{2 \times 25.32 \times 10^3} = 0.001\text{m} = 1\text{mm} \\ &= 0.001\text{m} = 1\text{mm} \end{aligned}$$

根据弯曲应力公式 $\sigma_{st\max} = \frac{M}{W_z}$ 得，其中 $M = \frac{Pl}{4}$ ， $W_z = \frac{bh^2}{6}$ 代入 $\sigma_{st\max}$ 得，

$$\sigma_{st\max} = \frac{Pl/4}{bh^2/6} = \frac{40 \times 0.8 \times 6}{0.04 \times 0.01^2 \times 4} = 12\text{MPa}$$

（2）动荷因数 K_d

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 60}{1}} = 12$$

（3）梁内最大冲击应力

$$\sigma_d = K_d \sigma_{st\max} = 12 \times 12 = 144\text{MPa}$$

3、（10 分）图中的 1、2 杆材料相同，均为园截面压杆，若使两杆在大柔度时的临界应力相等，试求两杆的直径之比 d_1/d_2 ，以及临界力之比 $(P_{cr})_1/(P_{cr})_2$ 。并指出哪根杆的稳定性较好。

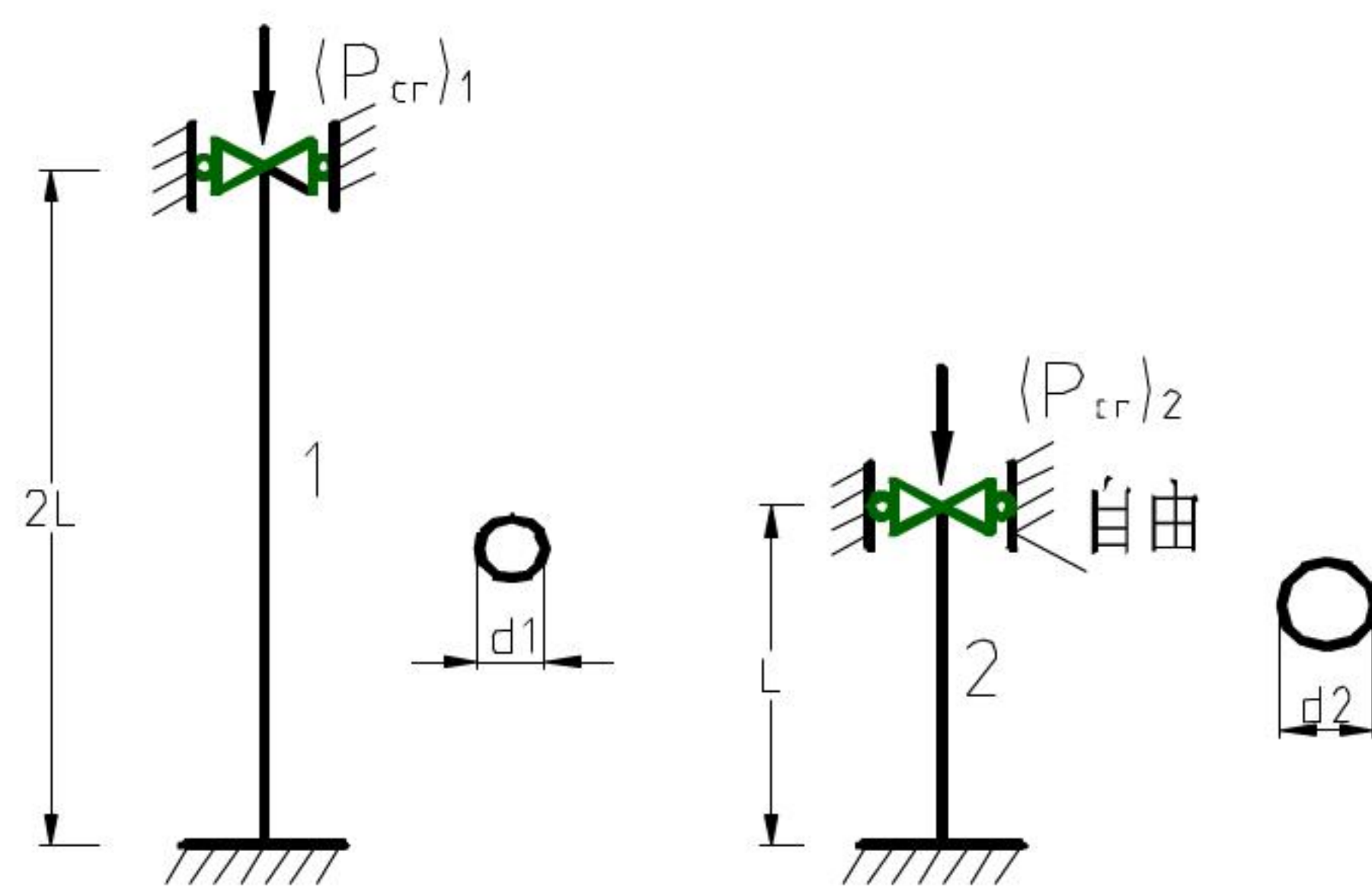
解：由 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_1^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_2^2}$

即： $\lambda_1 = \frac{\mu_1 l_1}{i_1} = \lambda_2 = \frac{\mu_2 l_2}{i_2}$ ；

$$\frac{0.7 \times 2l}{d_1/4} = \frac{2 \times l}{d_2/4}$$

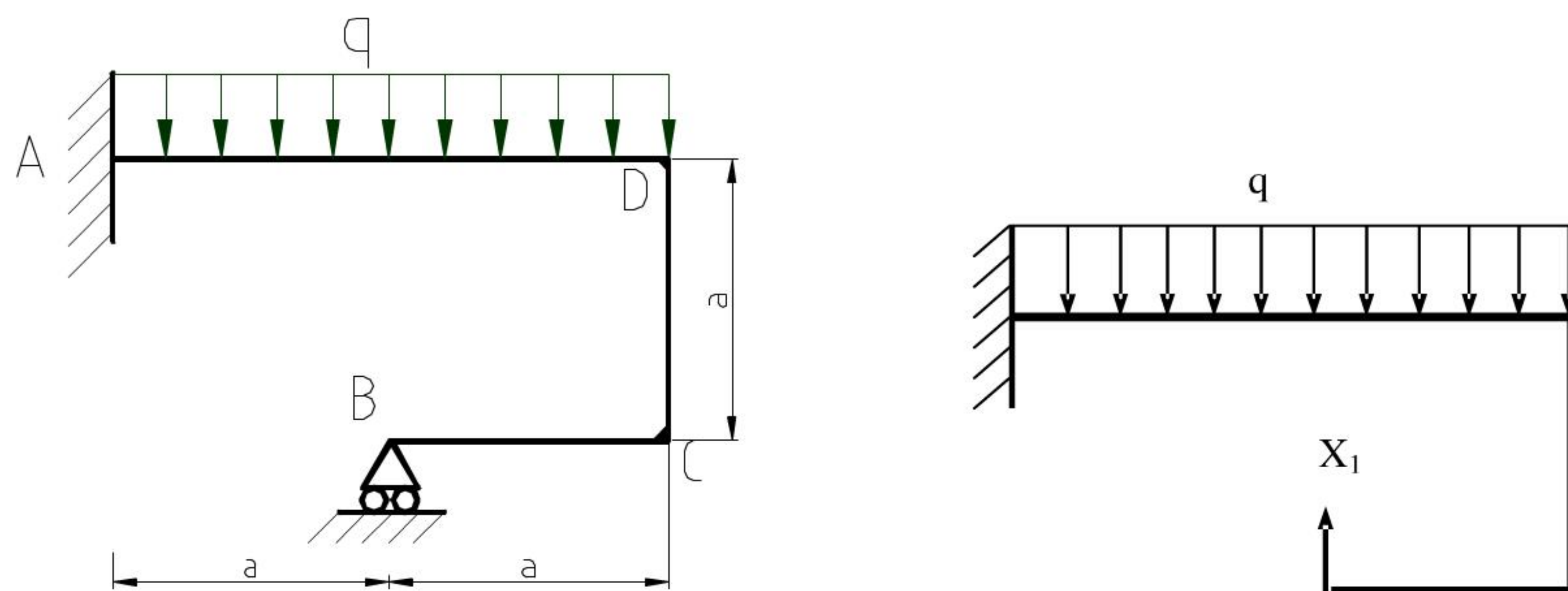
$$\therefore \frac{d_1}{d_2} = 0.7$$

$$\text{又: } \frac{(p_{cr})_1}{(p_{cr})_2} = \frac{\sigma_{cr1} A_1}{\sigma_{cr1} A_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = 0.49$$



4、(15 分) 等截面钢架如图所示，各杆段的抗弯刚度 EI 相同。试求钢架横截面上的最大弯矩，并说明发生在何处。

解：一次超静定问题，解除多余约束 B。作当基本静定系上只有外载荷 q 时，he 和 B 点沿 X_1



方向作用一单位力时，钢架各段的弯矩如图（忽略剪力和轴力的影响）

基本静定系。多余的约束反力为 X_1 。

$$\text{由 } \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

应用图乘法求系数：

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} a \times a \times \frac{2}{3a} \times 3 \right) + (a \times a) \times a \right] = \frac{2a^3}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \times 2qa^2 \times 2a \right) \times \frac{1}{2} a \right] = -\frac{2qa^4}{3EI}$$

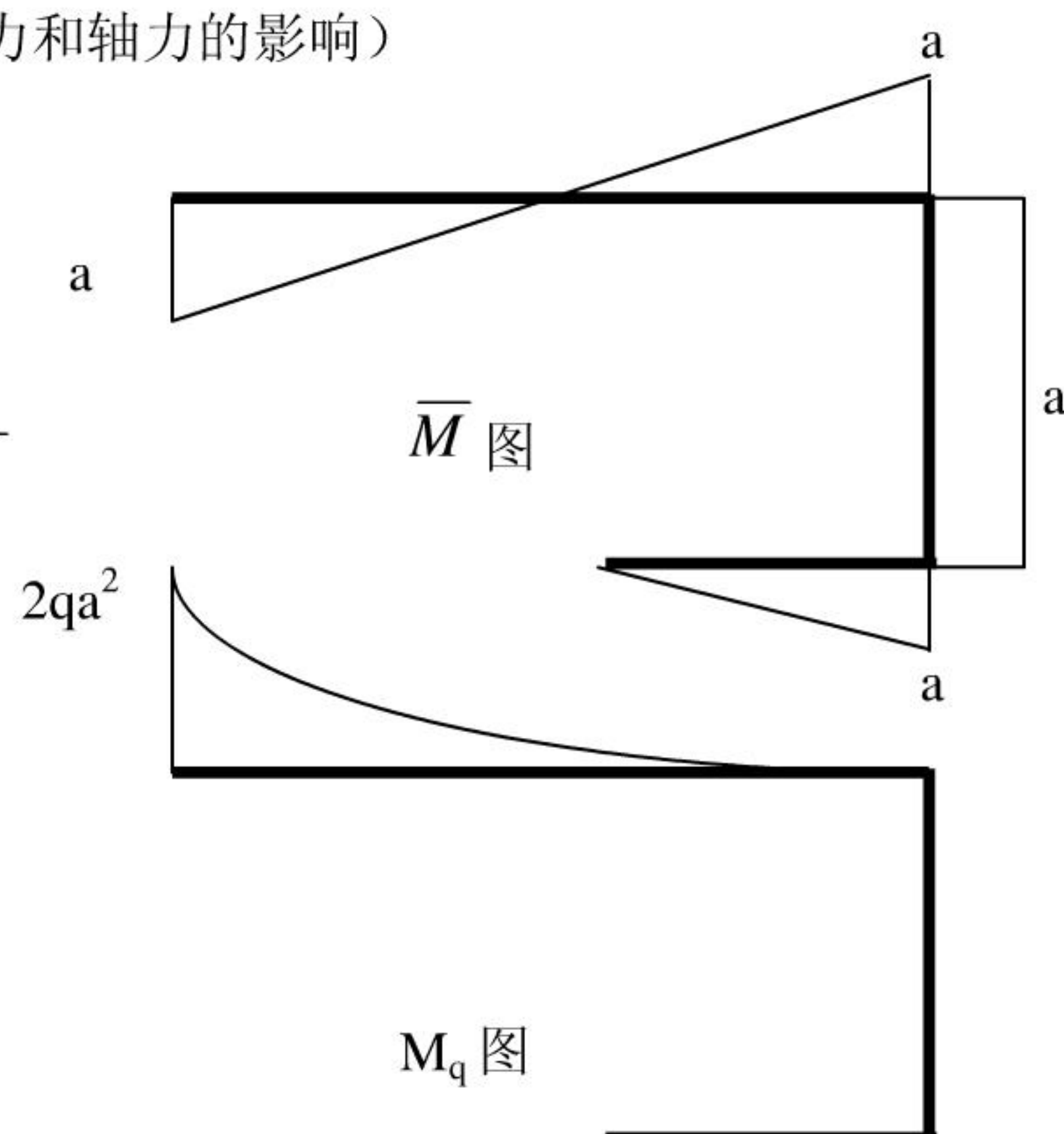
将计算结果代入方程： $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$ ；得：

$$\frac{2a^3}{EI} X_1 - \frac{2qa^4}{3EI} = 0$$

因此解得：

$$X_1 = \frac{1}{3} qa$$

将计算结果代入方程： $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$ 得：



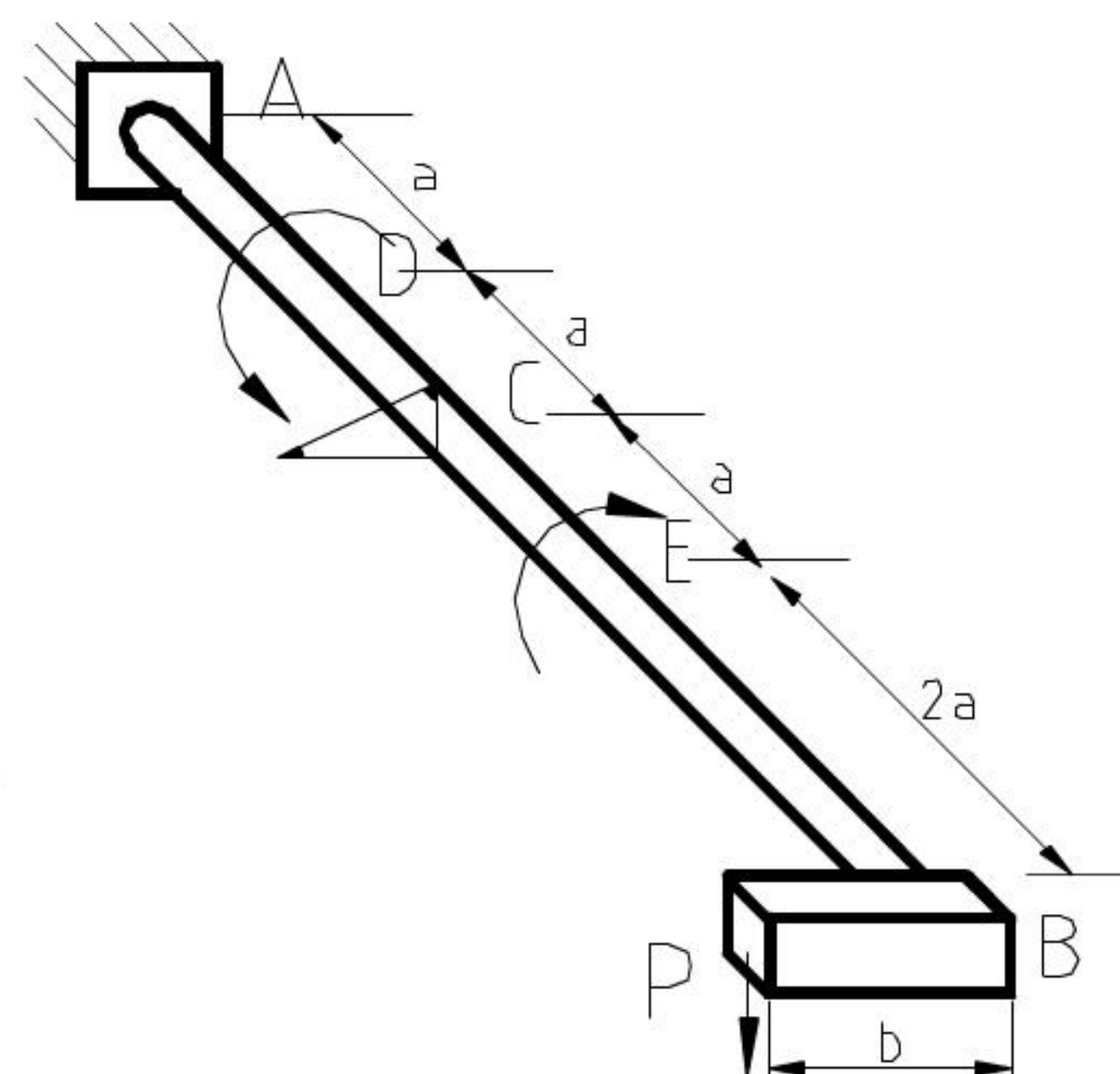
$$\frac{2a^3}{EI} X_1 - \frac{2qa^4}{EI} = 0;$$

因此解得:

$$X_1 = \frac{1}{3} qa$$

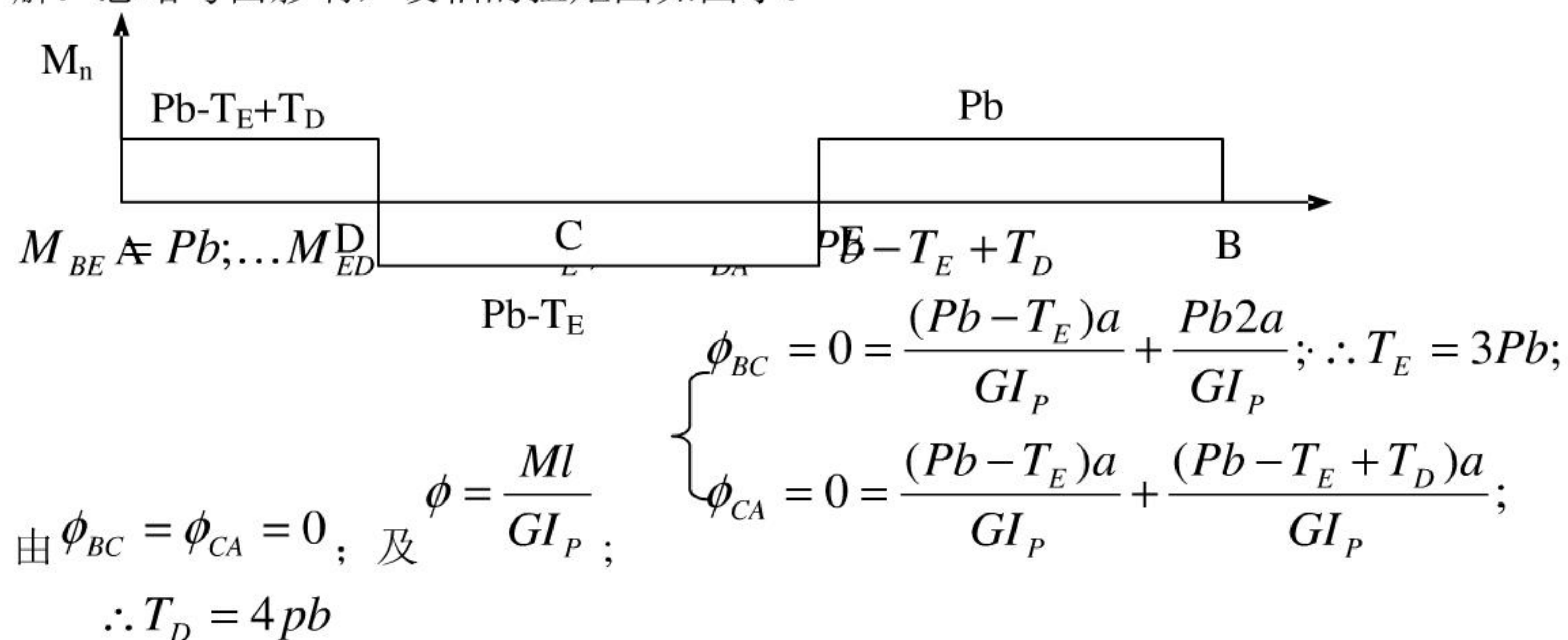
如图: 最大弯矩为 qa^2 在 AD 段的 A 截面无限右侧处。

$$M_{\max} = \left| \frac{q(2a)^2}{2} - \frac{qa^2}{3} \right| = \frac{5qa^2}{3}$$



5、(15 分) 一根在 A 端固定的园截面杆 AB 如图所示, 图中的 a、b 及此杆的抗扭刚度 GI_p 均为已知: 杆在 B 端有一不计自重的刚性臂, 在 C 截面处有一固定指针。当杆未受载荷时, 刚性臂及指针均处于水平位置。如在刚性臂端部加一向下的载荷 P, 同时在 D、E 处作用有扭转力偶矩 T_D 和 T_E , 当刚性臂与指针仍保持水平时, 试确定此时的 T_D 和 T_E 。

解: 忽略弯曲影响, 设轴的扭矩图如图示:



6、(10 分) 构件上的某点应力状态如图所示。试求该点的主应力及最大剪应力之值, 并画出三向应力状态的应力圆。

解: 求主应力, 如图画应力圆:

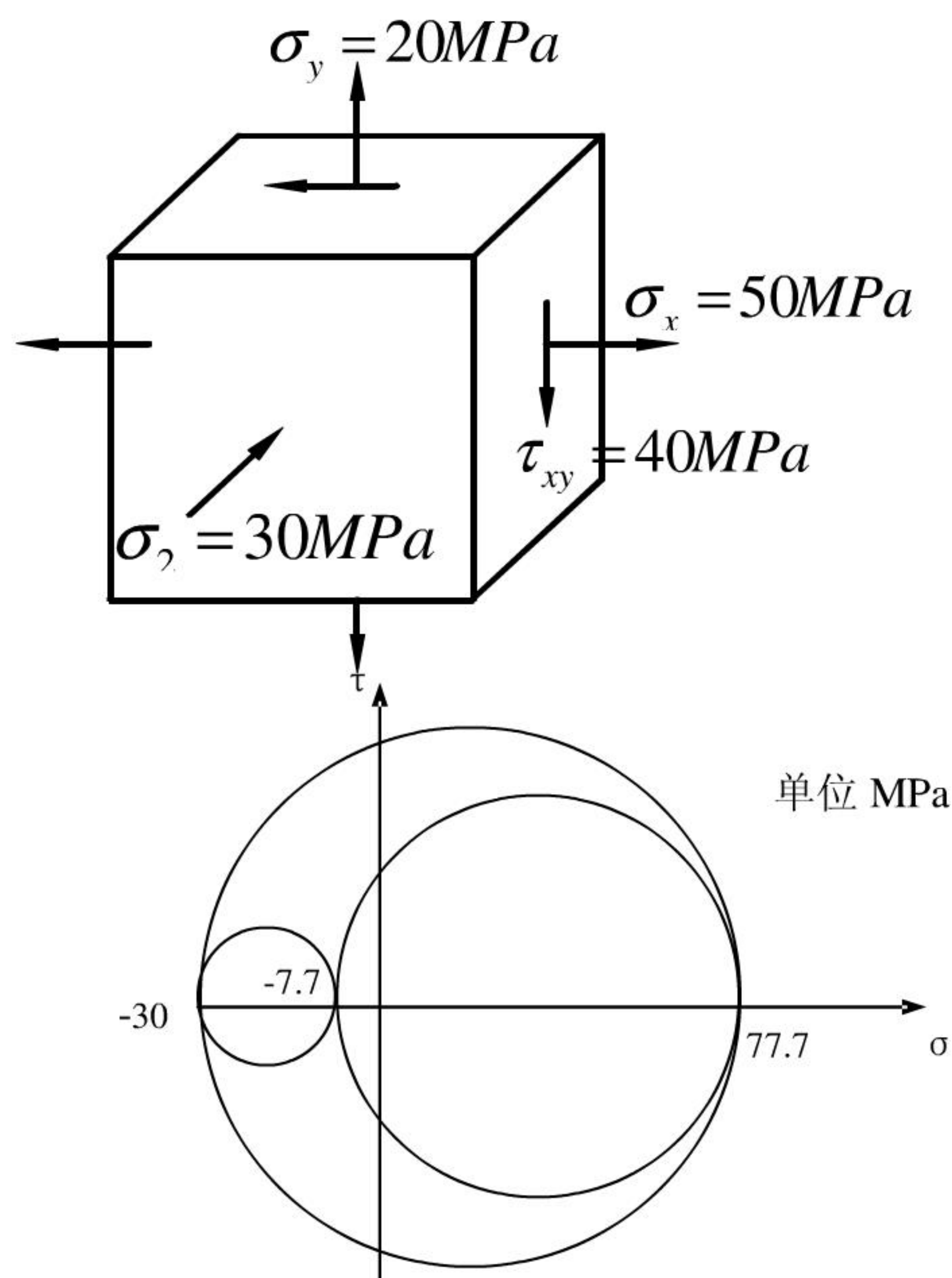
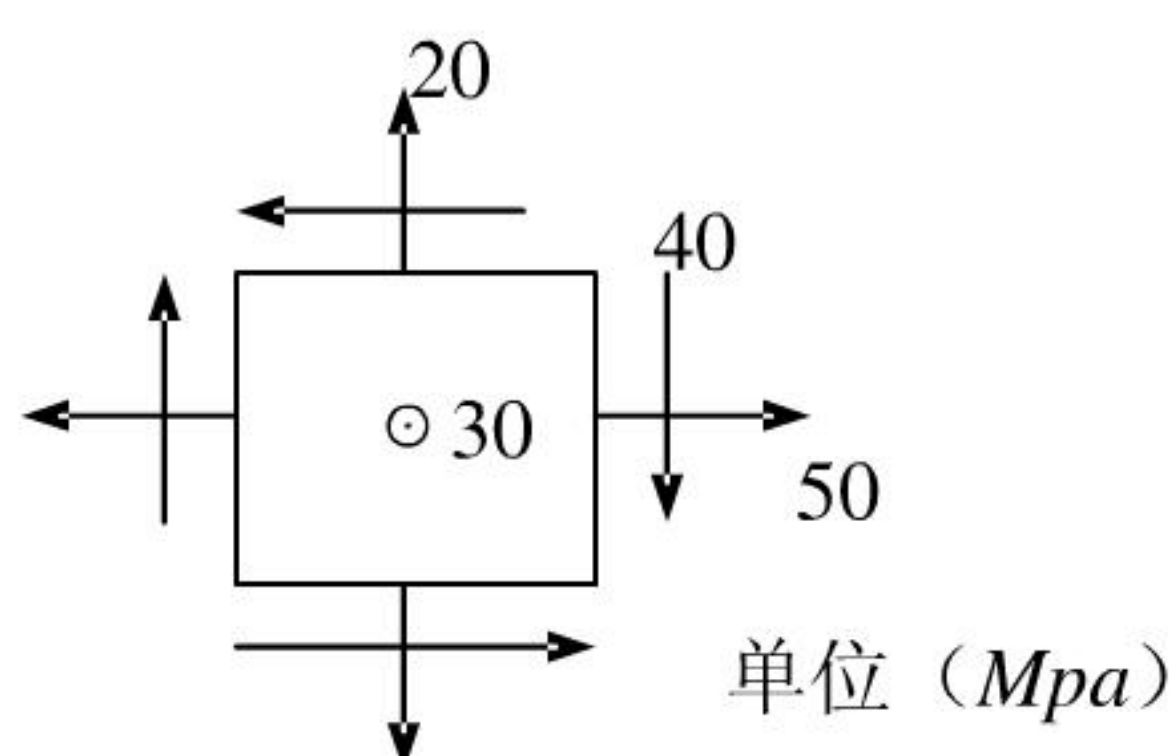
$$R = \sqrt{15^2 + 40^2} = 42.72(MPa);$$

$$\sigma_1 = 35 + R = 77.72(MPa);$$

$$\sigma_2 = 35 - R = -7.72(MPa);$$

$$\sigma_3 = -30(MPa);$$

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2 = 53.86(MPa);$$



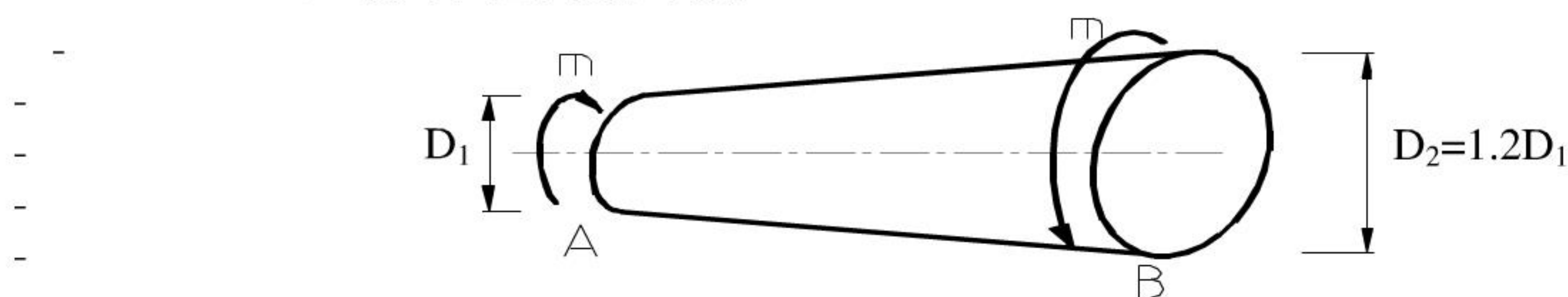
材料力学模拟试题（二）解答

一、一、填空题（共 15 分）

1、 1、 （5 分）一般钢材的弹性模量 $E = \underline{210}$ GPa；吕材的弹性模量 $E = \underline{70}$ GPa

2、 2、 （10 分）图示实心圆锥杆受扭转外力偶作用，材料的剪切弹性模量为 G ，该杆的

$$\tau_{\max} = \frac{16m}{\pi D_1^3}, \text{ 最大单位长度扭转角 } \varphi_{\max} = \frac{32m}{\pi G D_1^4}。$$



二、二、选择题（每小题 5 分，共 10 分）

1、 （5 分） $G = E/[2(1+\nu)]$ 适用于：

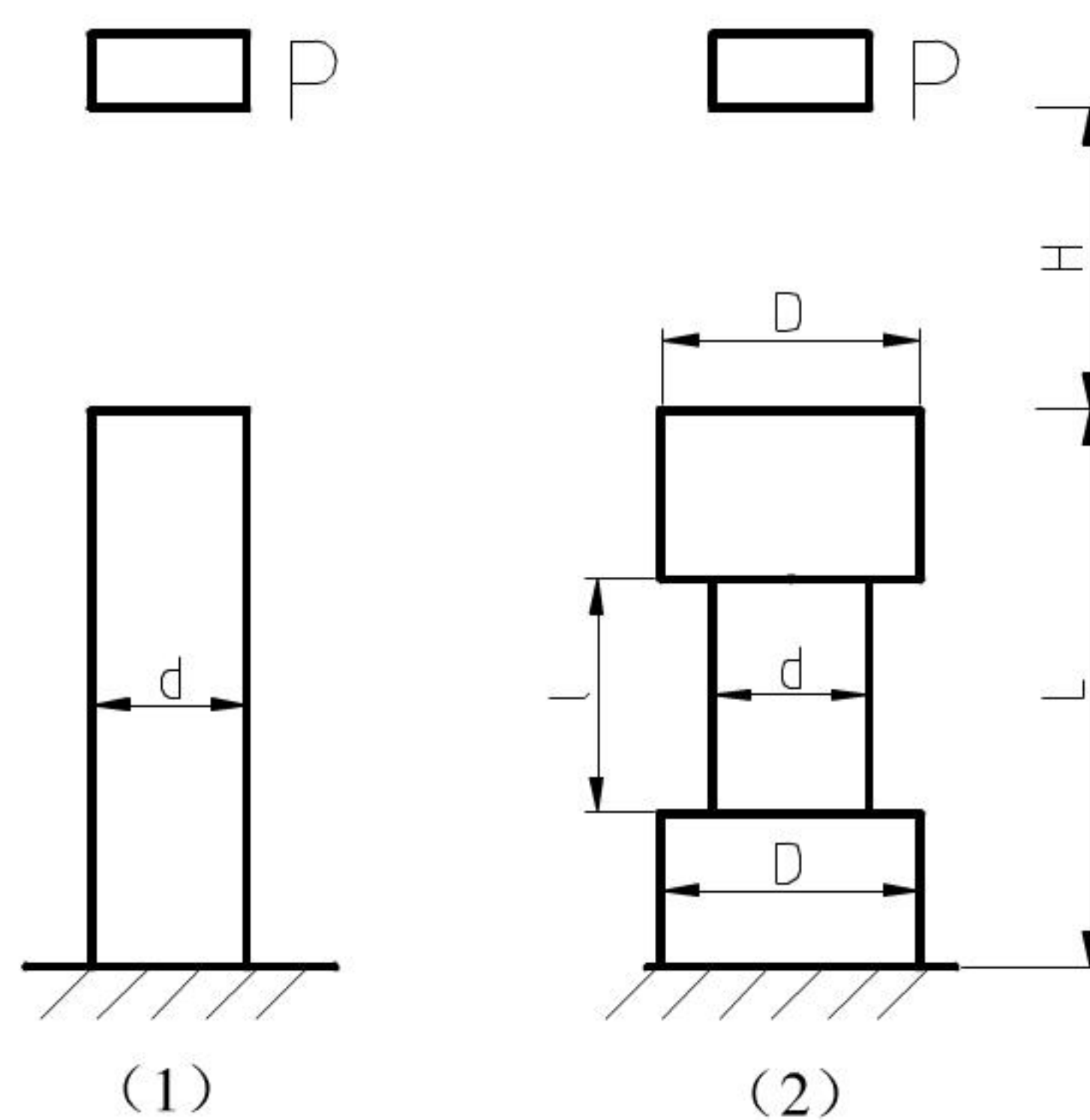
- (A) 各向同性材料；(B) 各向异性材料；
(C) 各向同性材料和各向异性材料。(D) 正交各向异性。

正确答案是 A。

2、 （5 分）边长为 d 的正方形截面杆（1）和（2），杆（1）是等截面，杆（2）为变截面，如图。两杆受同样的冲击载荷作用。对于这两种情况的动荷系数 k_d 和杆内最大动荷应力 $\sigma_{d\max}$ ，有下列结论：

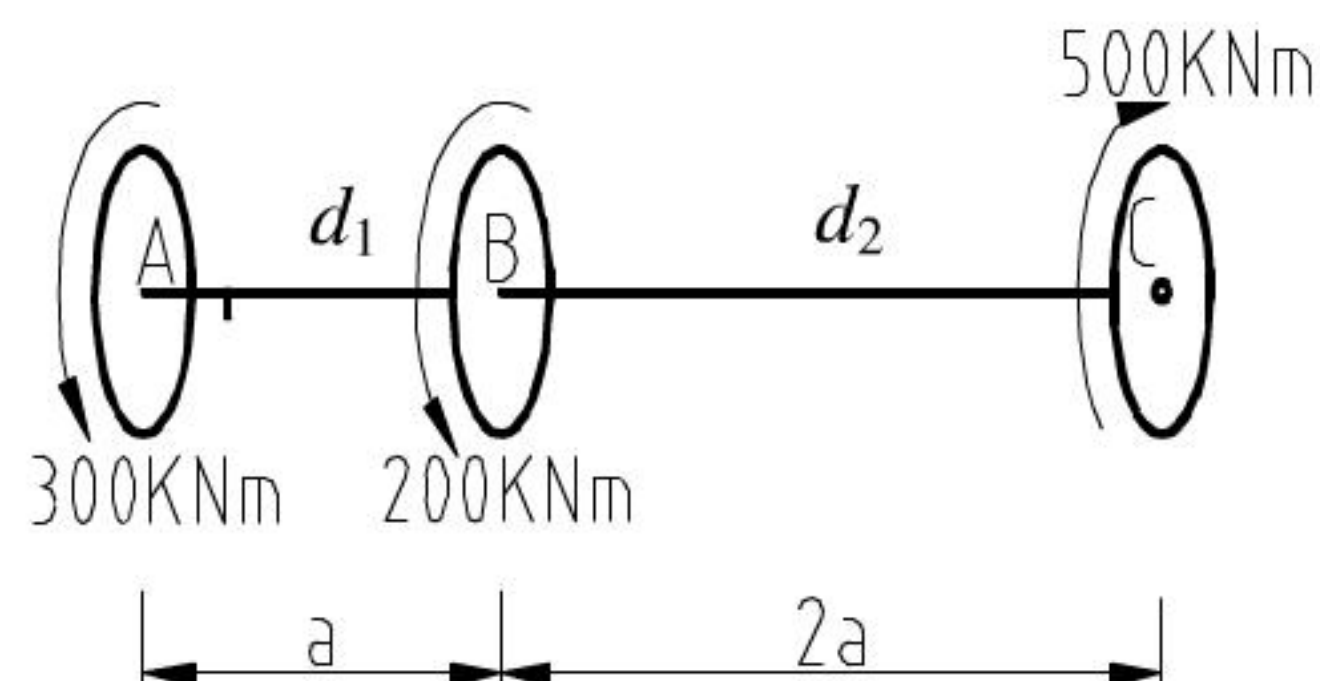
- (A) $(k_d)_1 < (k_d)_2, (\sigma_{d\max})_1 < (\sigma_{d\max})_2$;
(B) $(k_d)_1 < (k_d)_2, (\sigma_{d\max})_1 > (\sigma_{d\max})_2$;
(C) $(k_d)_1 > (k_d)_2, (\sigma_{d\max})_1 < (\sigma_{d\max})_2$;
(D) $(k_d)_1 > (k_d)_2, (\sigma_{d\max})_1 > (\sigma_{d\max})_2$ 。

正确答案是 A。



三、三、计算题（共 75 分）

1、 （10 分）图示转动轴，已知两段轴的最大剪应力相等，求：（1）直径比 d_1/d_2 ；（2）扭转角比 ϕ_{AB}/ϕ_{BC} 。



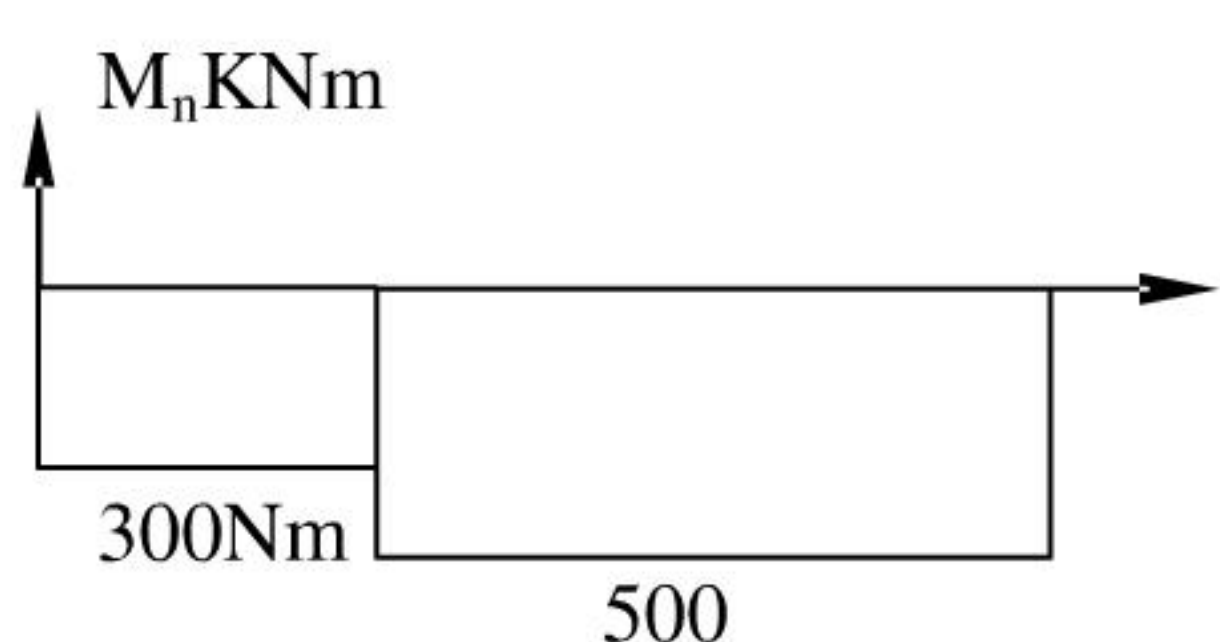
解：AC 轴的内力图：

$$M_{AB} = 3 \times 10^5 \text{ (Nm)}; M_{BC} = 5 \times 10^5 \text{ (Nm)}$$

由最大剪应力相等：

$$\tau_{\max} = \frac{M_n}{W_n} = \frac{300 \times 10^3}{\pi d_1^3 / 16} = \frac{500 \times 10^3}{\pi d_2^3 / 16};$$

$$d_1 / d_2 = \sqrt[3]{3/5} = 0.8434$$



$$\phi = \frac{M_n l}{GI_p}; \Rightarrow \therefore \frac{\phi_{AB}}{\phi_{BC}} = \frac{32 M_{n1} a}{G \pi d_1^4} \cdot \frac{G \pi d_2^4}{32 M_{n2}} = \frac{M_{n1}}{M_{n2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = 0.594$$

2、(15 分) 直径为 d 的圆截面钢杆处于水平面内, AB 垂直与 CD, 铅垂作用力 $P_1=2\text{KN}$, $P_2=6\text{KN}$, 如图。已知 $d=7\text{cm}$, 材料 $[\sigma]=110\text{MPa}$ 。试用第三强度理论校核该杆的强度。

解: 1. 作内力图, 确定危险截面

杆 AB 的 A 截面的弯矩和扭矩都最大, 截面 A 为危险截面, 由内力图知: 截面 A 上扭矩和弯矩分别为

$$M_n = P_2 \times 0.3 = 1800(\text{Nm})$$

$$M_A = 2000 \times 0.6 + 6000 \times 0.3 = 3000(\text{Nm})$$

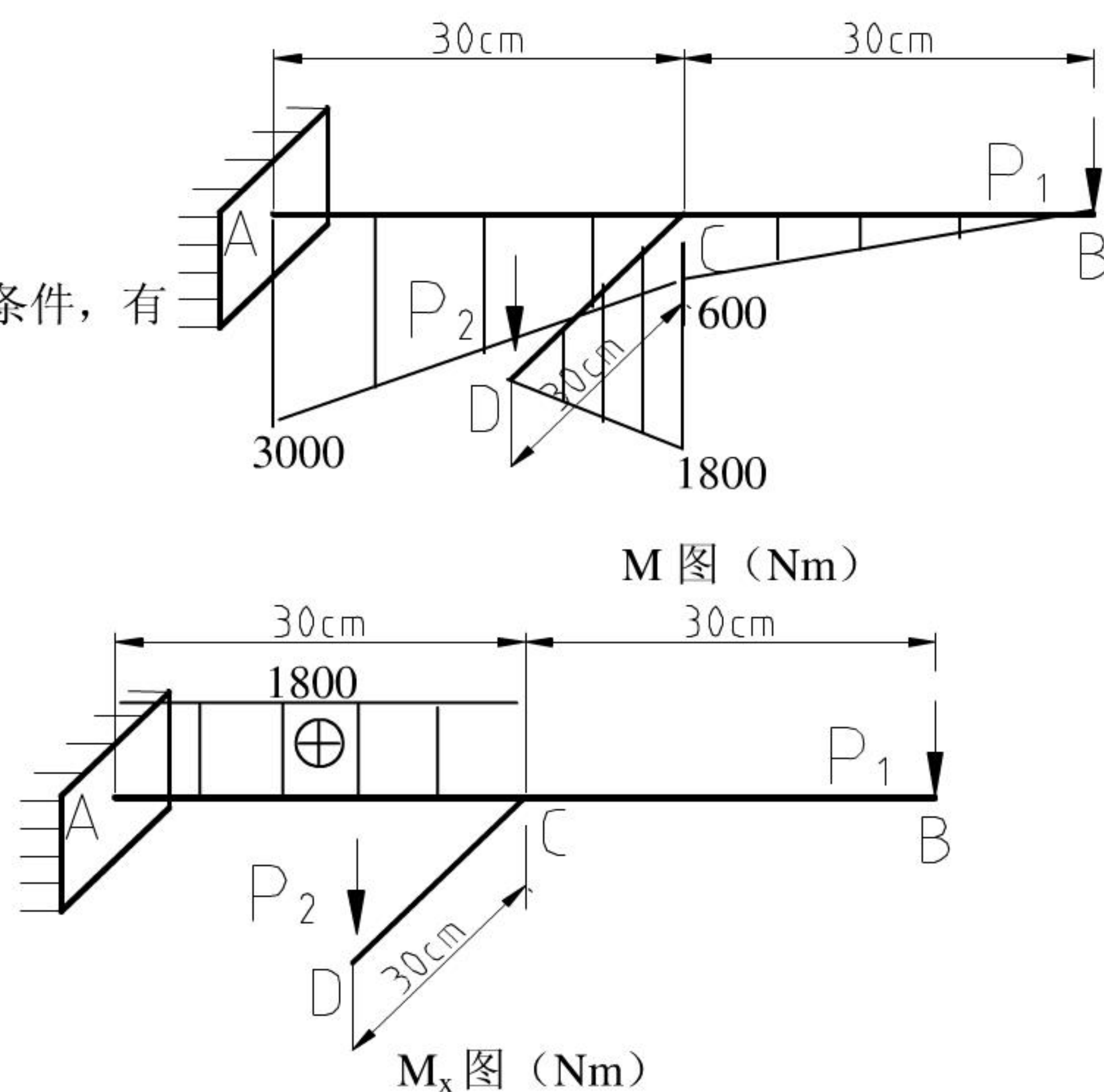
2. 强度计算

由圆轴弯扭组合变形的第三强度理论强度条件, 有

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + M_n^2}}{W} = \frac{\sqrt{3000^2 + 1800^2}}{\pi 0.07^3 / 32}$$

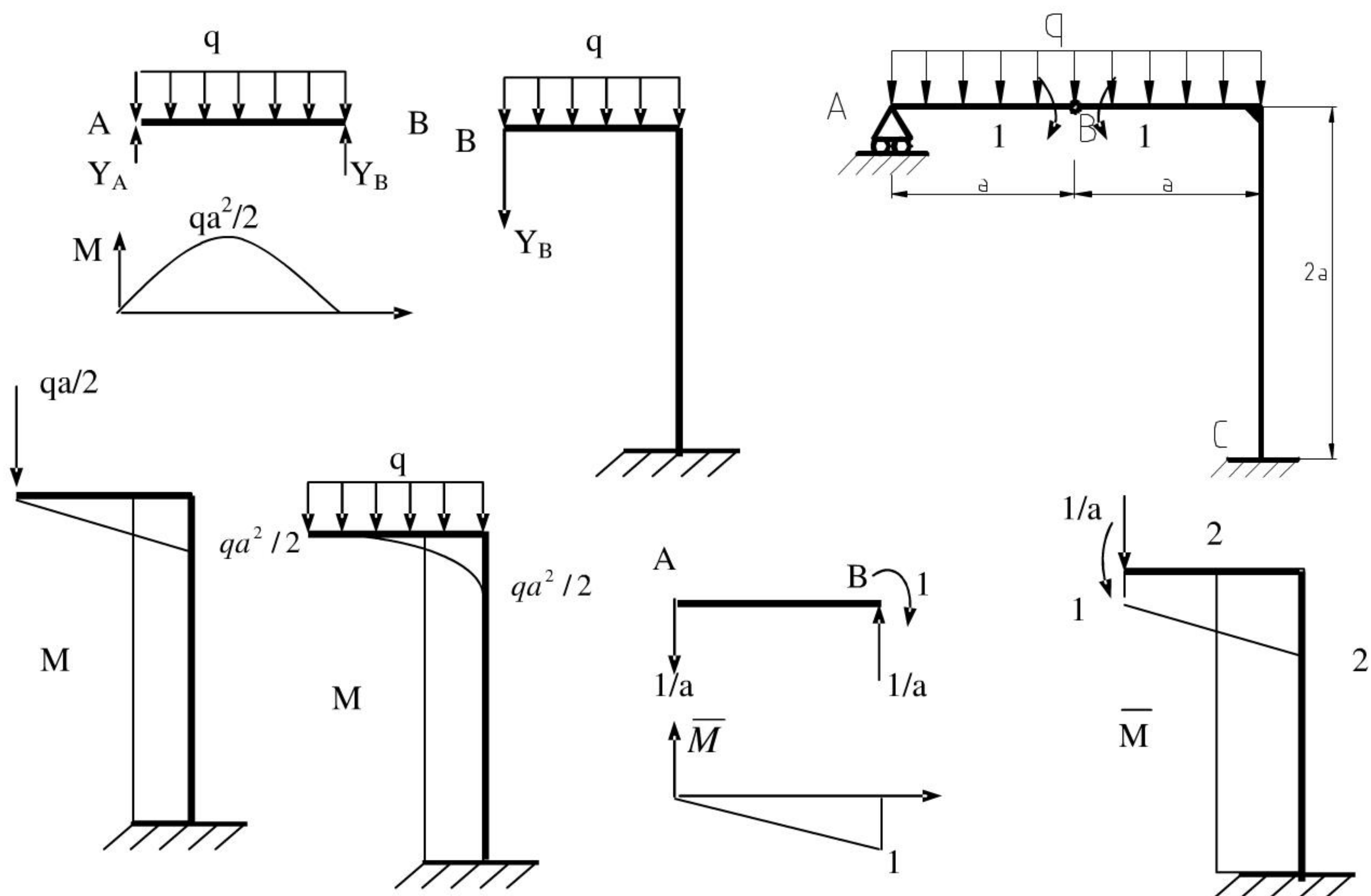
$$= \frac{1119.54}{1077.02} \times 10^6 = 103.9 \text{ MPa}$$

$\leq [\sigma] = 110 \text{ MPa}$ 该构件满足强度条件。



3、(15 分) 用图乘法求图示刚架铰链 B 处左右两截面的相对转角 $\Delta\theta_B$ 。EI=常数。略去轴力及剪力对变形的影响。

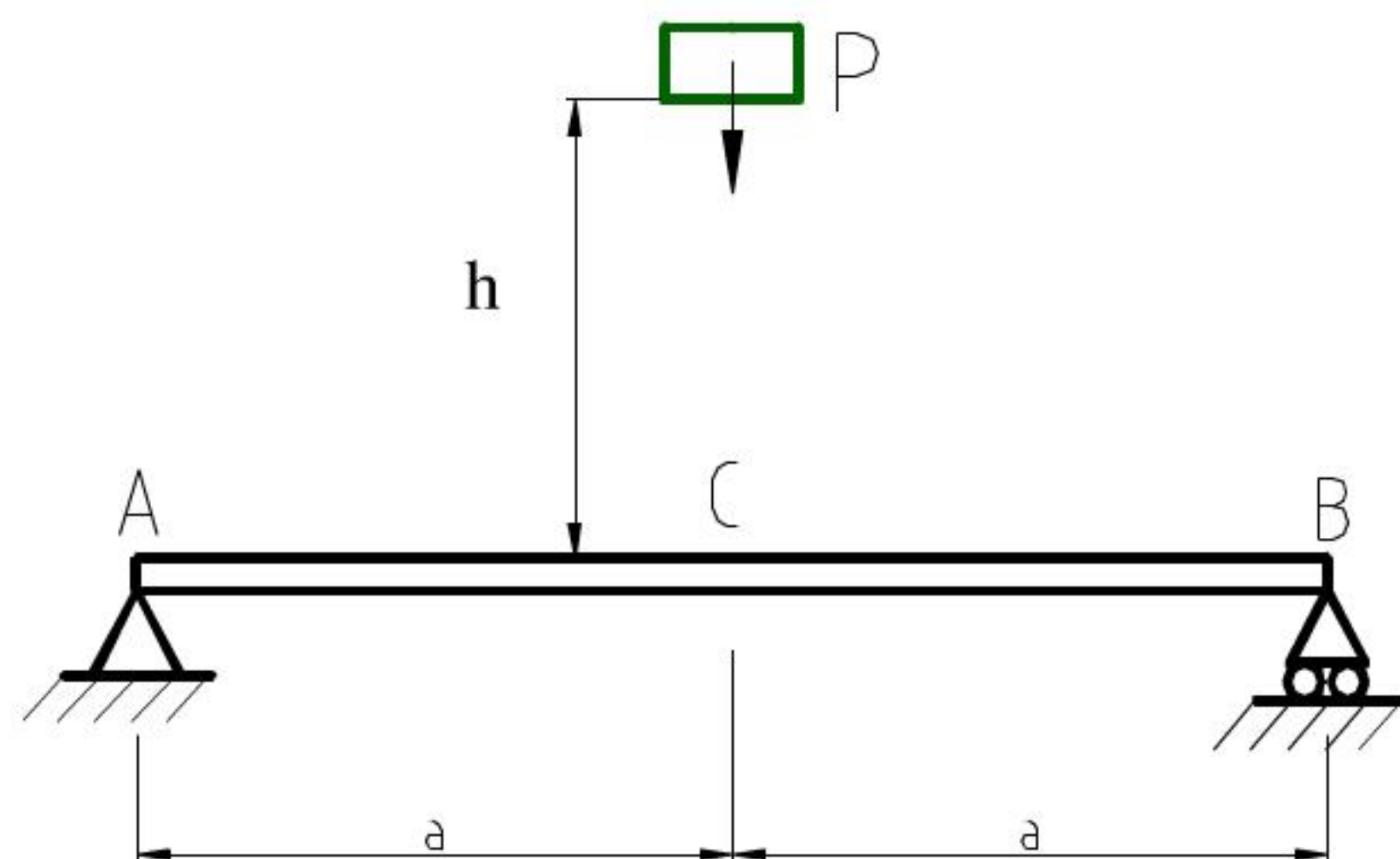
解: 各构件受力如图: $y_A = y_B = qa/2$ $qa^2/2$



分别作出原载荷和单位力的弯矩图
由图乘法：

$$\begin{aligned}\Delta\theta_B &= \frac{1}{EI} \left\{ \left(\frac{2}{3}a \times \frac{qa^2}{8} \right) \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} + \left[\left(\frac{1}{2} \times a \times \frac{qa^3}{2} \right) \times \left(1 + \frac{2}{3} \right) + \left[\left(\frac{1}{3} \times a \times \frac{qa^2}{2} \right) \times \left(1 + \frac{3}{4} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(2a \times \frac{qa^2}{2} \right) \times 2 \times (2) \right] \right\} \\ &= \frac{14qa^3}{3EI}\end{aligned}$$

4、(5 分) 图示结构中，当冲击物的重量增加一倍时，其它条件不变，梁上最大冲击应力重量也增加一倍？为什么？



解：结论不正确。
由动载荷公式

$$\sigma_d = K_d \sigma_j \quad \text{和} \quad K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}}$$

$$\sigma_{st \max} = \frac{M}{W_z} = \frac{Pa}{2W_z};$$

又有：

$$\delta_j = \frac{P(2a)^3}{48EI} = \frac{Pa^3}{6EI} \quad \text{将上式子整理得：}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{12Elh}{Pa^3}}$$

$$\sigma_{d \max} = K_d \sigma_{st \max} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{12Elh}{Pa^3}} \right) \frac{Pa}{2W_z}$$

$\sigma_{d \max}$ 与 P 不成线性关系，所以结

论不正确。

5、(20 分) AB 和 BD 材料相同，直径均为 d，且 $l/d = 30/1$ ，BD 杆 $\lambda_P = 100$ ，求当 BD 杆达到临界状态时 P 的数值。

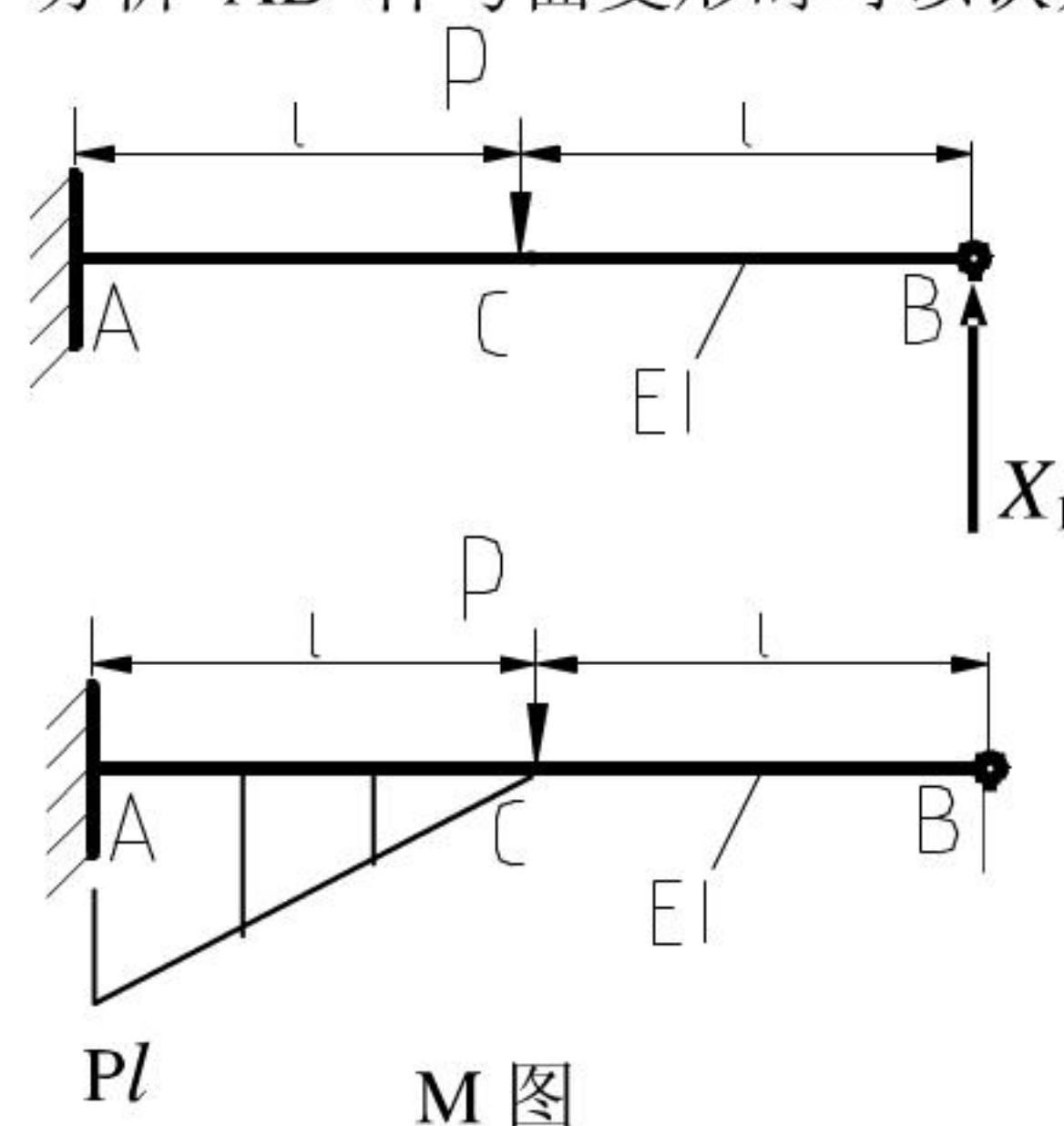
解：结构为一次静不定，对于细长杆件忽略压缩变形，分析 AB 杆弯曲变形时可以认为 B 点挠度为零。解除 B 点约束用 X_1 代替；

$$\text{由力法：} \quad \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

确定系数

$$\delta_{11} = \frac{(2l)^3}{3EI} = \frac{8l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1P} = - \left[\frac{1}{2} (l \times Pl) \times \left(l + \frac{2}{3}l \right) \right] = - \frac{5Pl^3}{6EI}$$



代入上式：
$$X_1 = \frac{5Pl^3}{6EI} \frac{3EI}{8l^3} = \frac{5P}{16}$$

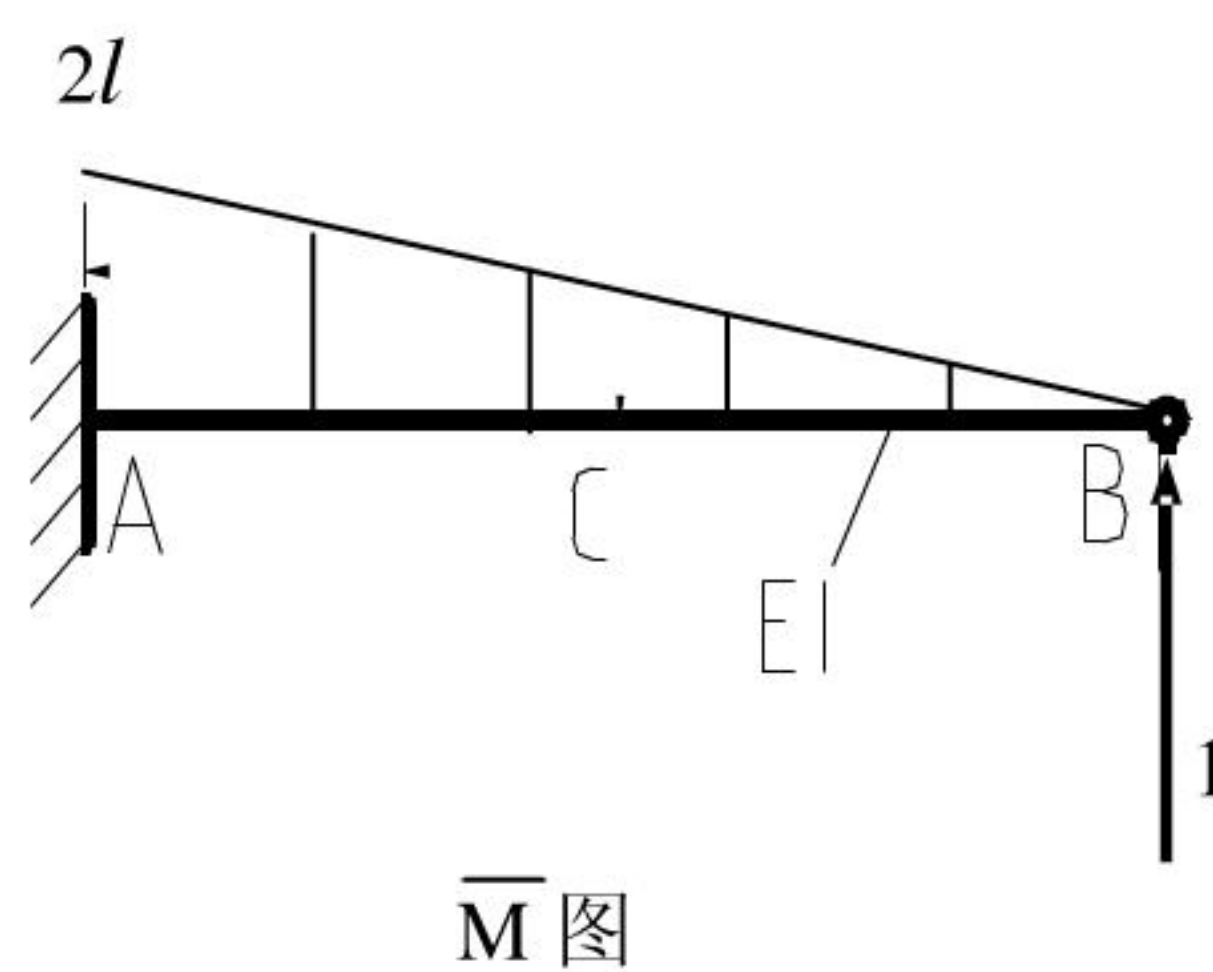
计算 BD 杆的柔度：

由
$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \mu l \sqrt{\frac{64\pi d^2}{4\pi d^4}} = \frac{4\mu l}{d} = 120 > 100$$

$\therefore \lambda \geq \lambda_p$ 为大柔度杆，则

$$X_1 = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E d^2}{57600}$$

临界状态时：
$$P_{cr} = \frac{16}{5} X_1 = \frac{5P}{16} = \frac{\pi^3 E d^2}{18000}$$



6、(10 分) 图示承受气体压力的薄壁圆筒，壁厚为 t ，平均直径为 D ，材料的弹性模量为 E ，泊松比 ν 已知。现测得 A 点沿 x 方向的线应变为 ϵ_x ，求筒内气体压力 p 。

解 A 点的应力状态如图所示

其中

$$\sigma_1 = \frac{PD}{2t}$$

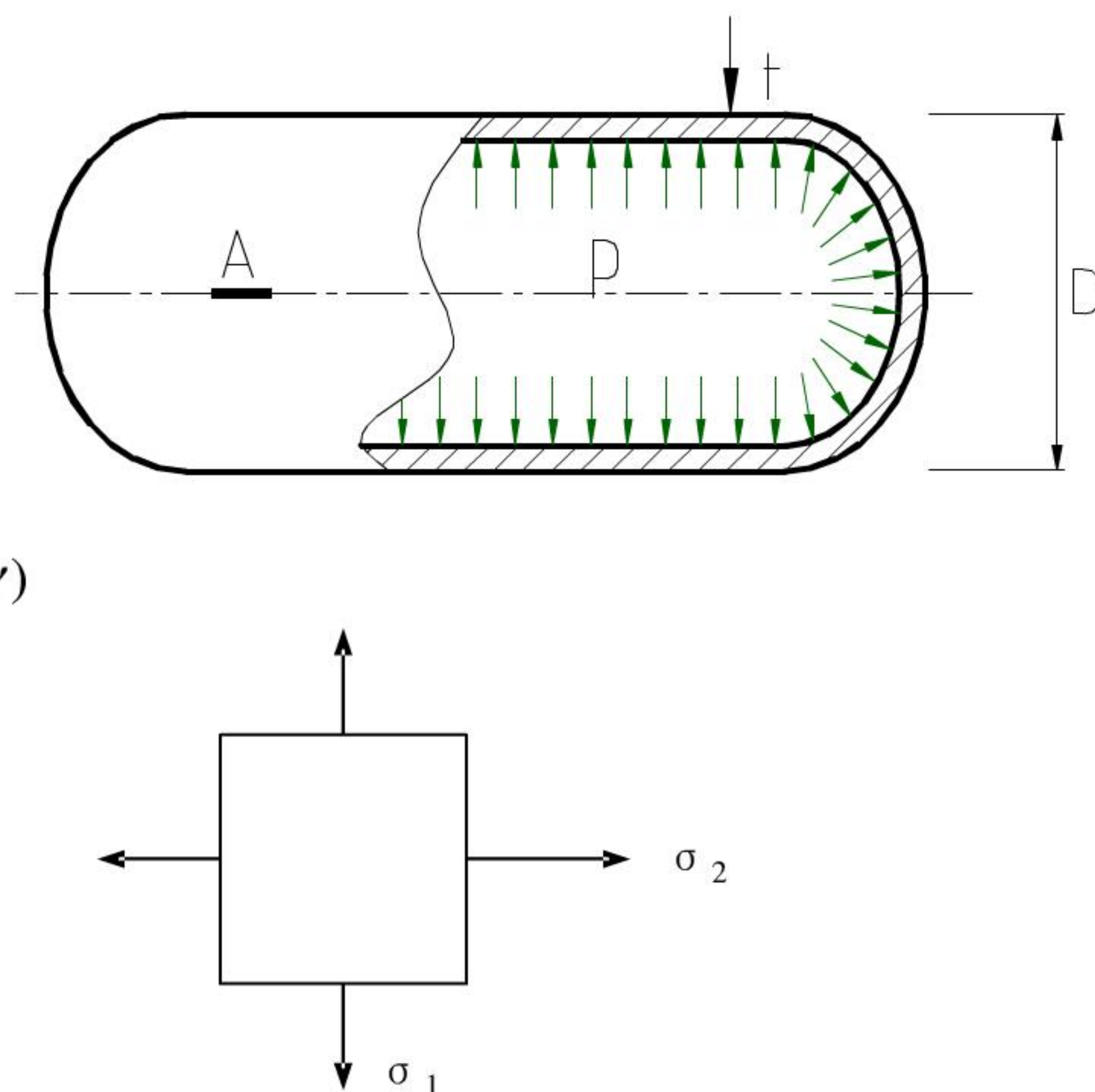
$$\sigma_2 = \frac{PD}{4t}$$

由广义虎克定律有

$$\epsilon_x = \epsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = \frac{PD}{4Et}(1 - 2\nu)$$

所以

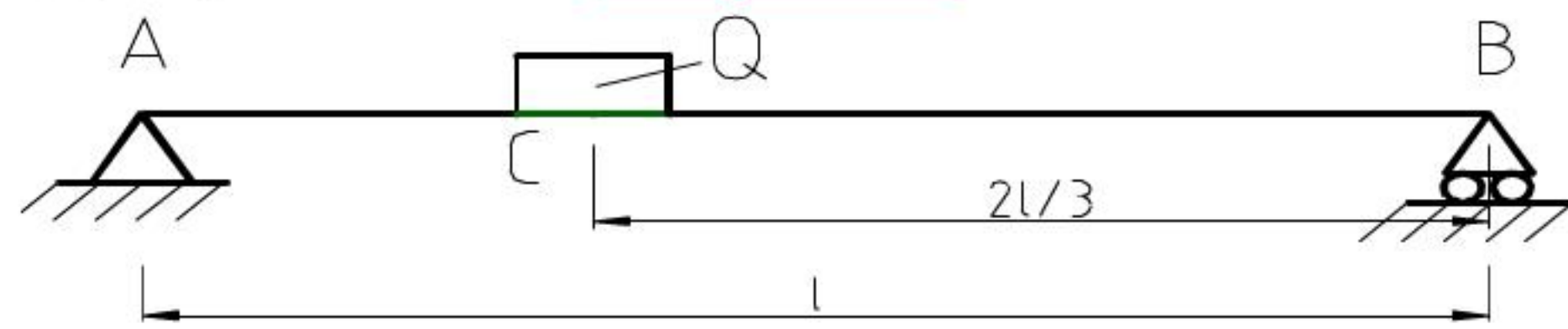
$$P = \frac{4\epsilon_x Et}{D(1 - 2\nu)}$$



材料力学模拟试题（三）解答

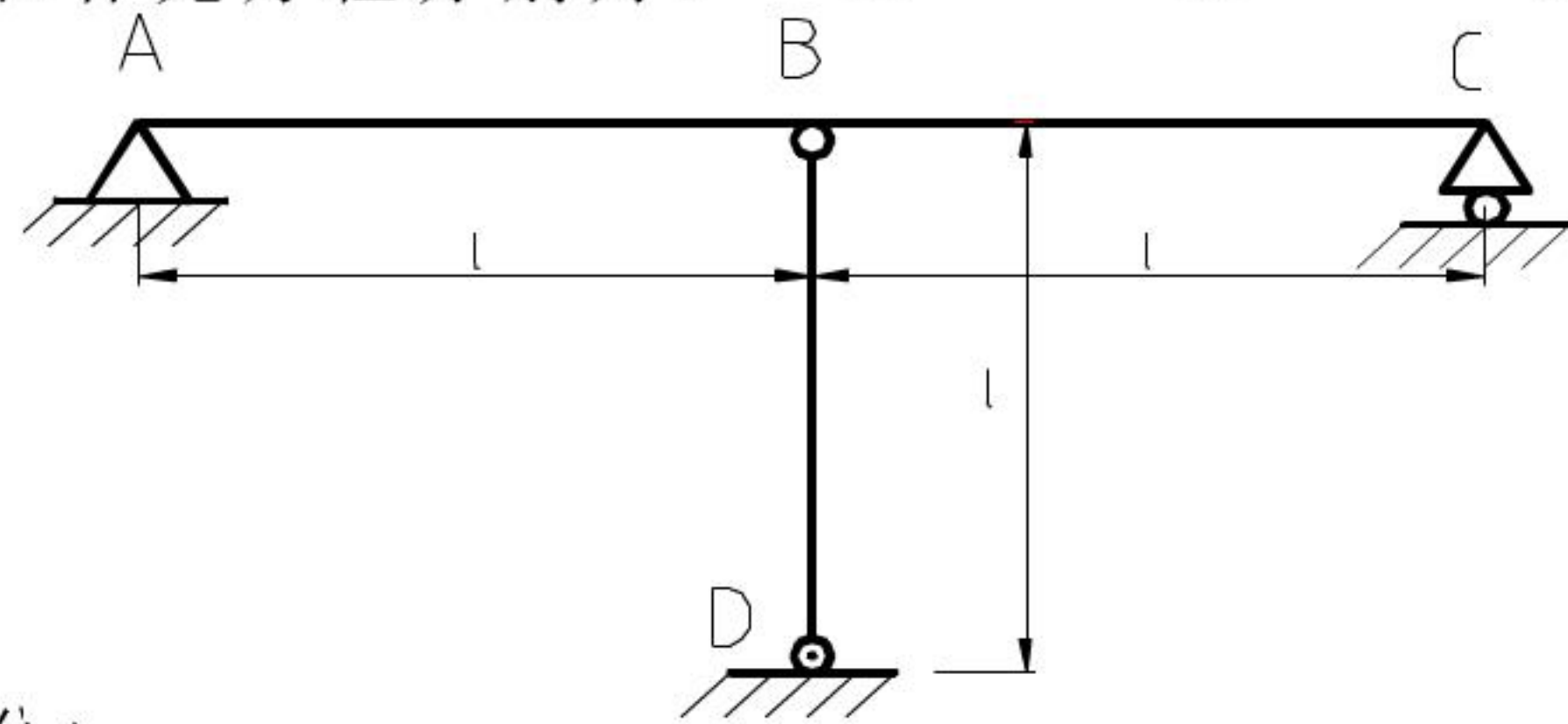
四、一、填空题（每小题 5 分，共 10 分）

1、图示梁在突加载荷作用下，其最大弯矩 $M_{d\max} = \underline{4QL/9}$ 。



2、简支梁 AC 在 B 点与钢索 BD 连接，钢索张紧但无初始拉力。当温度降低 $T^\circ\text{C}$ 后，为求钢索中轴力所需的变形协调方程和补充方程分别为：

$$\Delta l_{Bd}(T) - \Delta l_{BD}(N) = f_B \text{ 和 } \alpha Tl - \frac{Nl}{EA} = \frac{N(2l)^3}{48EI}。$$

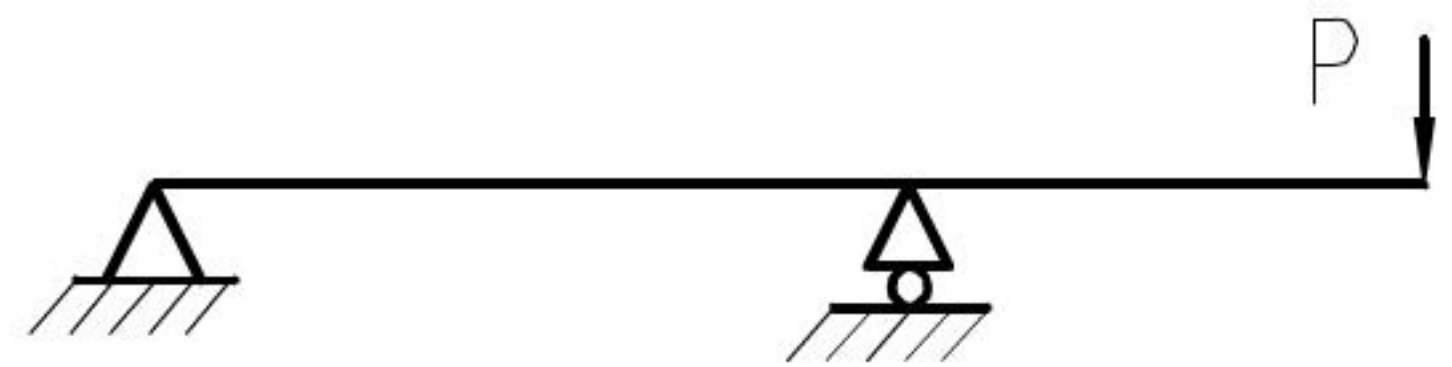


五、二、选择题（每小题 5 分，共 10 分）

1、形截面铸铁梁受载如图，正应力强度分析，截面的放置方式有四种：

(A) (B) (C) (D)

正确方式是 D。



2、如图所示直杆，其材料相同，截面和长度相同，支承方式不同，在轴向压力作用下，那个柔度最大，哪个柔度最小？有四种答案：正确答案是 B。

- (A) λ_a 大, λ_c 小;
 (B) λ_b 大, λ_d 小;
 (C) λ_b 大, λ_c 小;
 (D) λ_a 大, λ_b 小;

六、三、证明题（15 分）

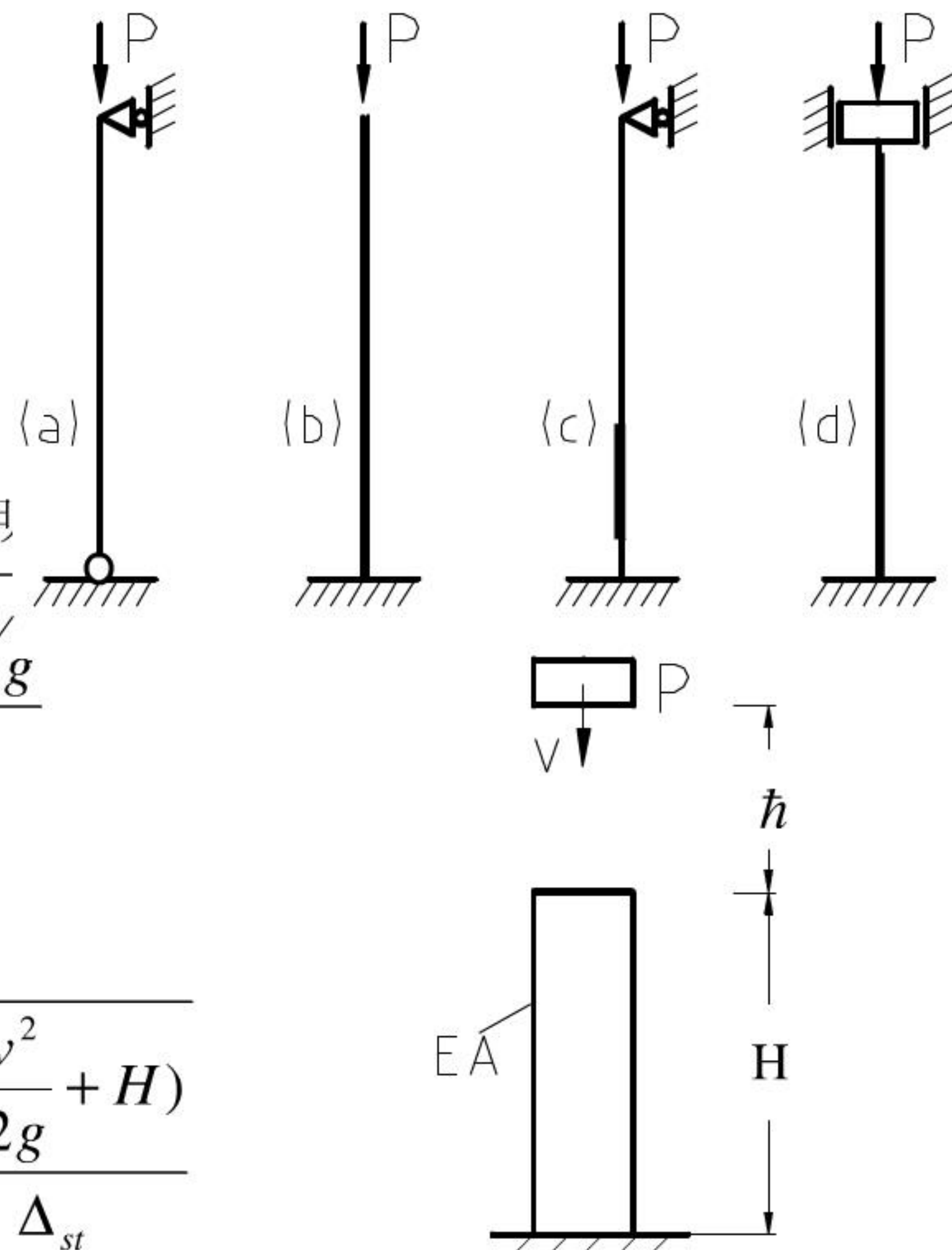
重物 Q 以初速 v 自 H 处下落杆顶，证明

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H + v^2/g}{\Delta_{st}}}$$

证明： $\therefore h = \frac{v^2}{2g}$

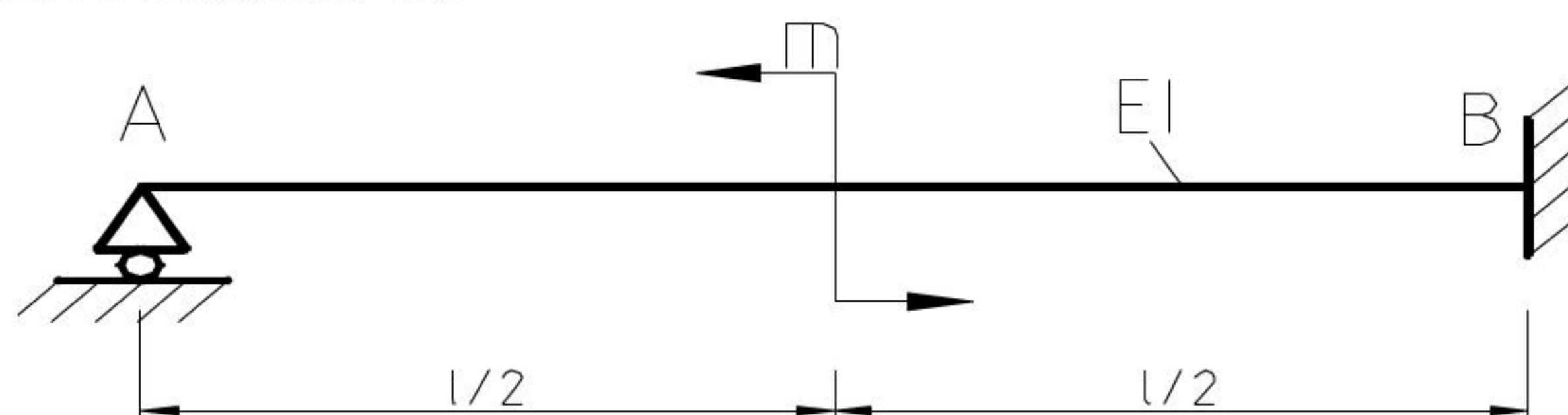
$$\therefore K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(\frac{v^2}{2g} + H)}{\Delta_{st}}}$$

即： $K_d = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H + v^2/g}{\Delta_{st}}}$



七、四、计算题（共 65 分）

1、（10 分）求图示梁的反力 R_A 。

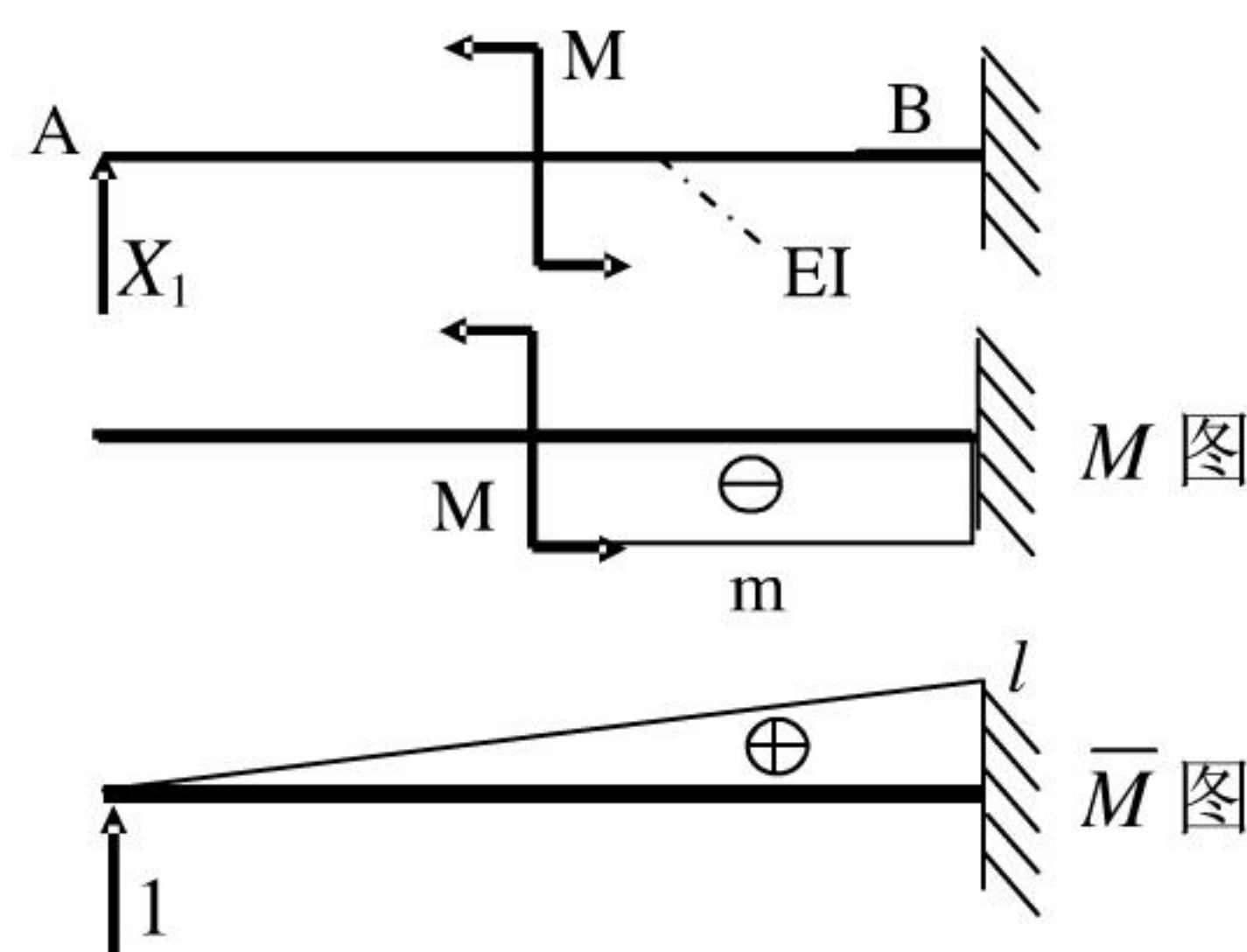


解：由力法： $R_A \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$ 得：

$$\therefore \delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} l \times l \right) \times \frac{2l}{3} = \frac{l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left(m \times \frac{1}{2} l \right) \times \frac{3l}{4} = -\frac{3ml^2}{8EI}$$

$$\therefore R_A = \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{9m}{8l} (\uparrow)$$

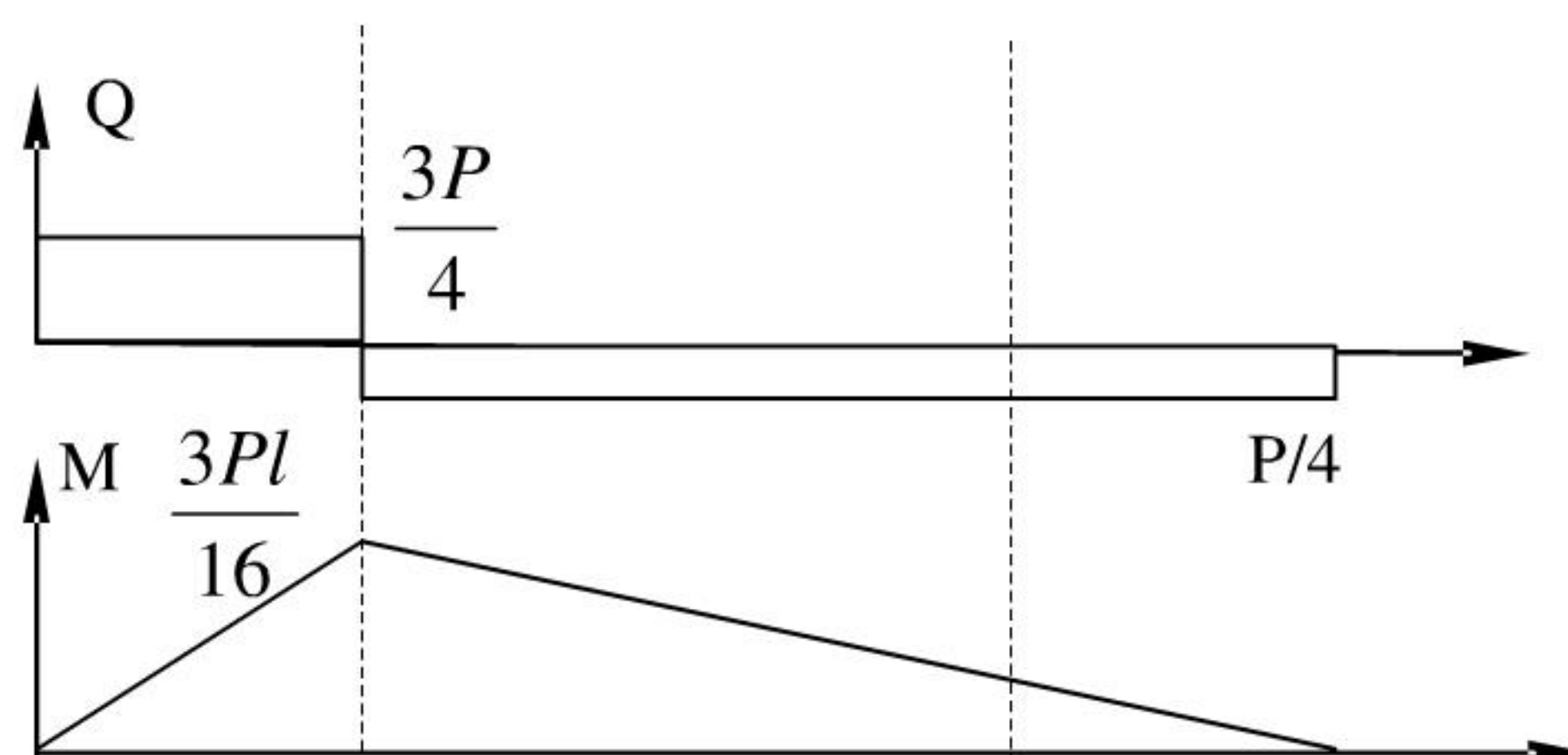


2、（15 分）矩形截面简支梁如图。测得在载荷 P 作用下，点 A 处纵向线应变 $\epsilon_x = -1 \times 10^{-4}$ 。已知材料的 $E = 200 \text{ GPa}$ ，试求 P 值。

解：梁的内力如图：

A 点处正应力：

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -\frac{0.02Pl/16}{I}$$



忽略切应力影响，由虎克定律：

$$\therefore P = 200 \times 10^5 \frac{0.04 \times 0.06^3}{12} \frac{1}{0.02 \times 0.1}$$

$$\epsilon_x = -1 \times 10^{-4} = \sigma_x / E = 7.2 \text{ (KN)}$$

3、（15 分）如图示砂轮传递的力偶矩 $m = 20.5 \text{ N.m}$ ，砂轮直径 $D = 25 \text{ cm}$ ，砂轮重量 $Q = 275 \text{ N}$

磨削力 P_y ： $P_z = 3: 1$ 。砂轮轴材料许用应力 $[\sigma] = 60 \text{ Mpa}$ 。

用第四强度理论选择砂轮轴直径。

解：（1）外力分析。

轴受力如图，由扭转平衡有

$$m = P_z \frac{D}{2} = 20.5 \text{ N.m, 则}$$

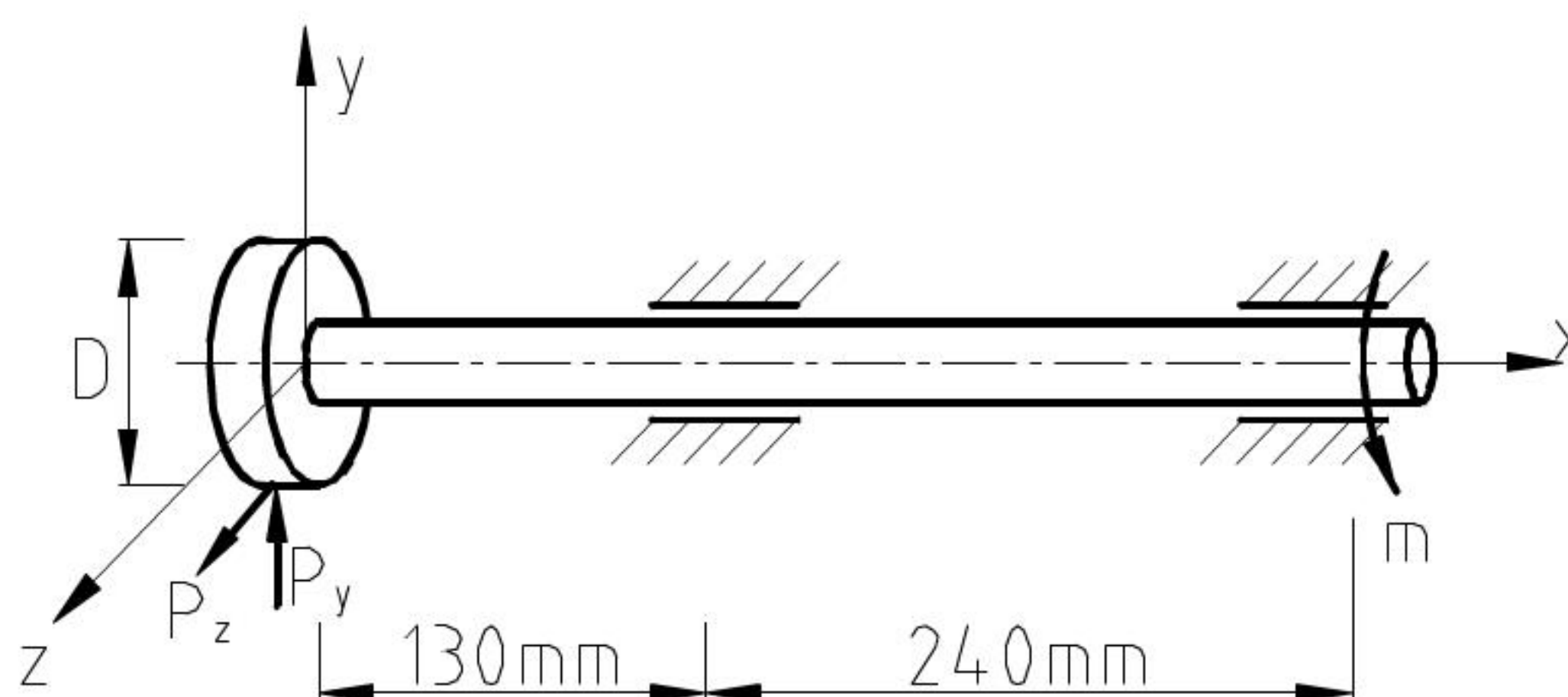
$$P_z = \frac{2M}{D} = 41/0.25 = 164 \text{ (N)}$$

$$P_y = 3P_z = 3 \times 164 = 492 \text{ (N)}$$

（2）画内力图确定危险截面

由内力图知，截面 A 为危险截面。其上弯矩和扭矩分别为：

弯矩：



$$M_{ZA} = 0.13 \times (492 - 275) = 28.21 \text{ (Nm)}$$

$$M_{YA} = 164 \times 0.13 = 21.32 \text{ (Nm)}$$

$$M_{AMAX} = \sqrt{M_{ZA}^2 + M_{YA}^2} = 35.36 \text{ (Nm)}$$

扭矩:

$$M_x = 20.5 \text{ (Nm)}$$

(3) 强度计算

在圆轴弯扭组合变形下,

根据第四强度理论的强度条件有

$$\frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_x^2}}{W} \leq [\sigma]$$

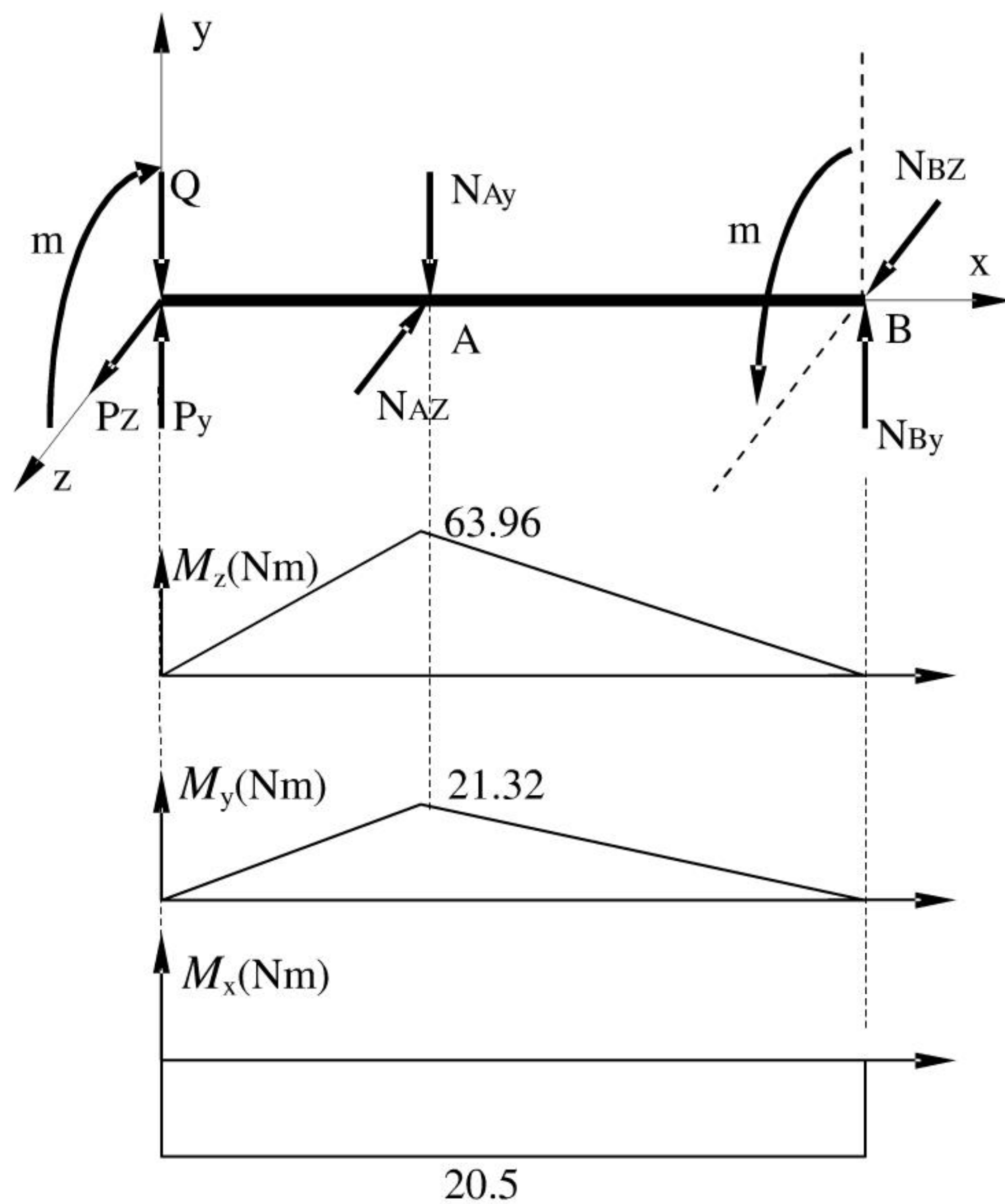
$$W \geq \frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_x^2}}{[\sigma]}$$

$$\frac{3.14 \times d^3}{32} \geq \frac{\sqrt{35.36^2 + 0.75 \times 20.5^2}}{60 \times 10^6}$$

$$\frac{3.14 \times d^3}{32} \geq \frac{39.57}{60 \times 10^6}$$

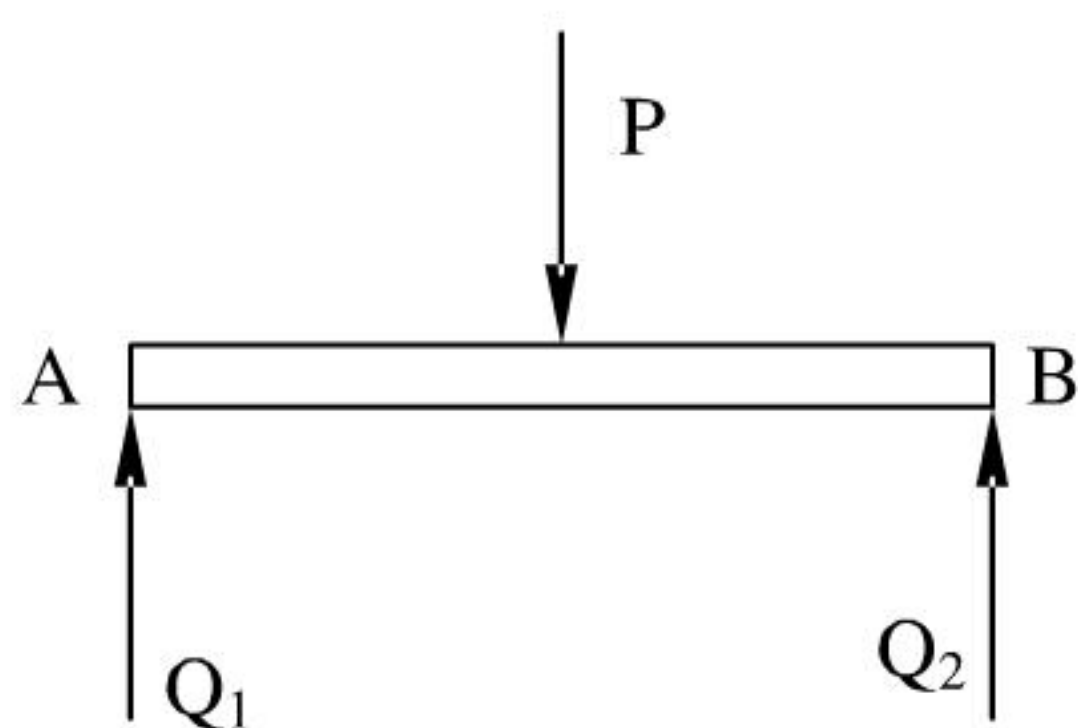
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{39.57 \times 32}{3.14 \times 60 \times 10^6}} = 1.887 \times 10^{-2} \text{ (m)}$$

取 $d=19\text{mm}$.



$$\frac{D_2}{d_2} = 0.7$$

4、(15 分) 图示结构, 1、2 两杆长度、截面积相同, 1 杆为圆截面, 2 杆为圆环截面(d_2)。 $l=1200\text{mm}$, $A=900\text{mm}^2$, 材料的 $E=200\text{GPa}$, $\lambda_p=100$, $\lambda_s=61.4$, 临界应力经验公式 $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda \text{ (MPa)}$, 求两杆的临界应力及结构失稳时的载荷 P_{cr} 。



解: (1) 研究 AB

$$Q_1 = Q_2 = \frac{P}{2}$$

(2) 计算 Q_{1Cr}

$$\therefore \frac{\pi d_1^2}{4} = A = 900\text{mm}^2$$

$$\therefore d_1 = \sqrt{\frac{4 \times 900}{3.14}} = 33.9\text{mm}$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{\mu l}{d_1} = \frac{1 \times 1200}{33.914} = 141.6 > \lambda_p = 100$$

$$\therefore Q_{1Cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \times A = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{141.6^2} \times 900 = 88.6\text{KN}$$

(3) 计算 Q_{2Cr}

$$\therefore \frac{\pi D_2^2}{4}(1-\alpha^2) = \frac{\pi D_2^2}{4}(1-0.7^2) = A = 900\text{mm}^2$$

$$\therefore D_2 = \sqrt{\frac{4 \times 900}{3.14 \times (1-0.7)}} = 47.4\text{mm}$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_2} = \frac{1 \times 1200}{\frac{D_2}{4} \sqrt{1+\alpha^2}} = \frac{4 \times 1200}{4.74 \times \sqrt{1+0.7^2}} = 83$$

$$\lambda_s = 61.4 < \lambda < \lambda_p = 100$$

$$\therefore Q_{2cr} = (304 - 1.12\lambda_2)A = (304 - 1.12 \times 83) \times 900 = 190 \times 10^3 \text{ N} = 190 \text{ KN}$$

(4) 结构失稳载荷为:

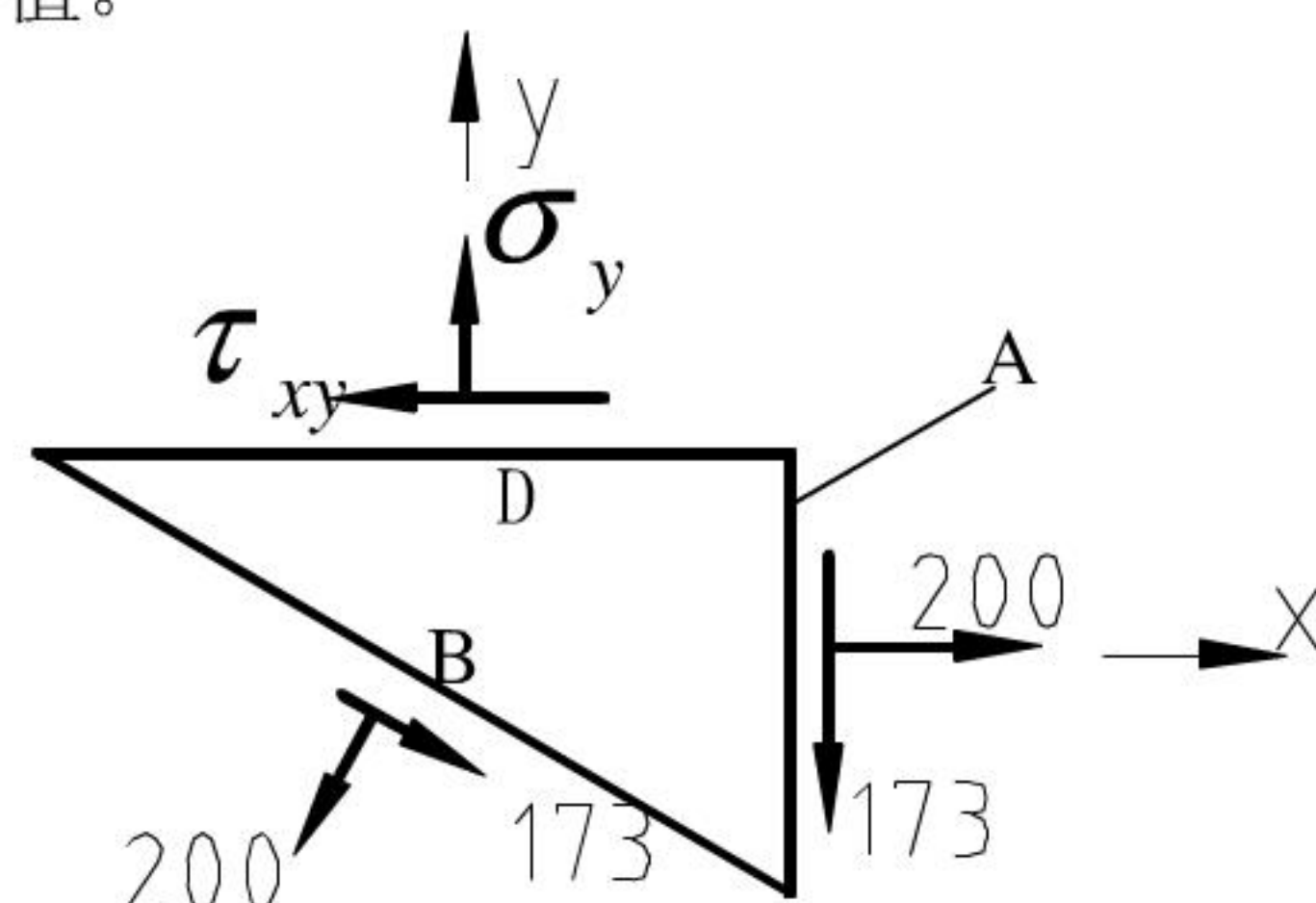
$$P_{cr} = 2Q_{1cr} = 177.2 \text{ KN}$$

5、(10 分) 作图示单元体所对应的应力圆, 求 σ_y 、 τ_{yx} 值。

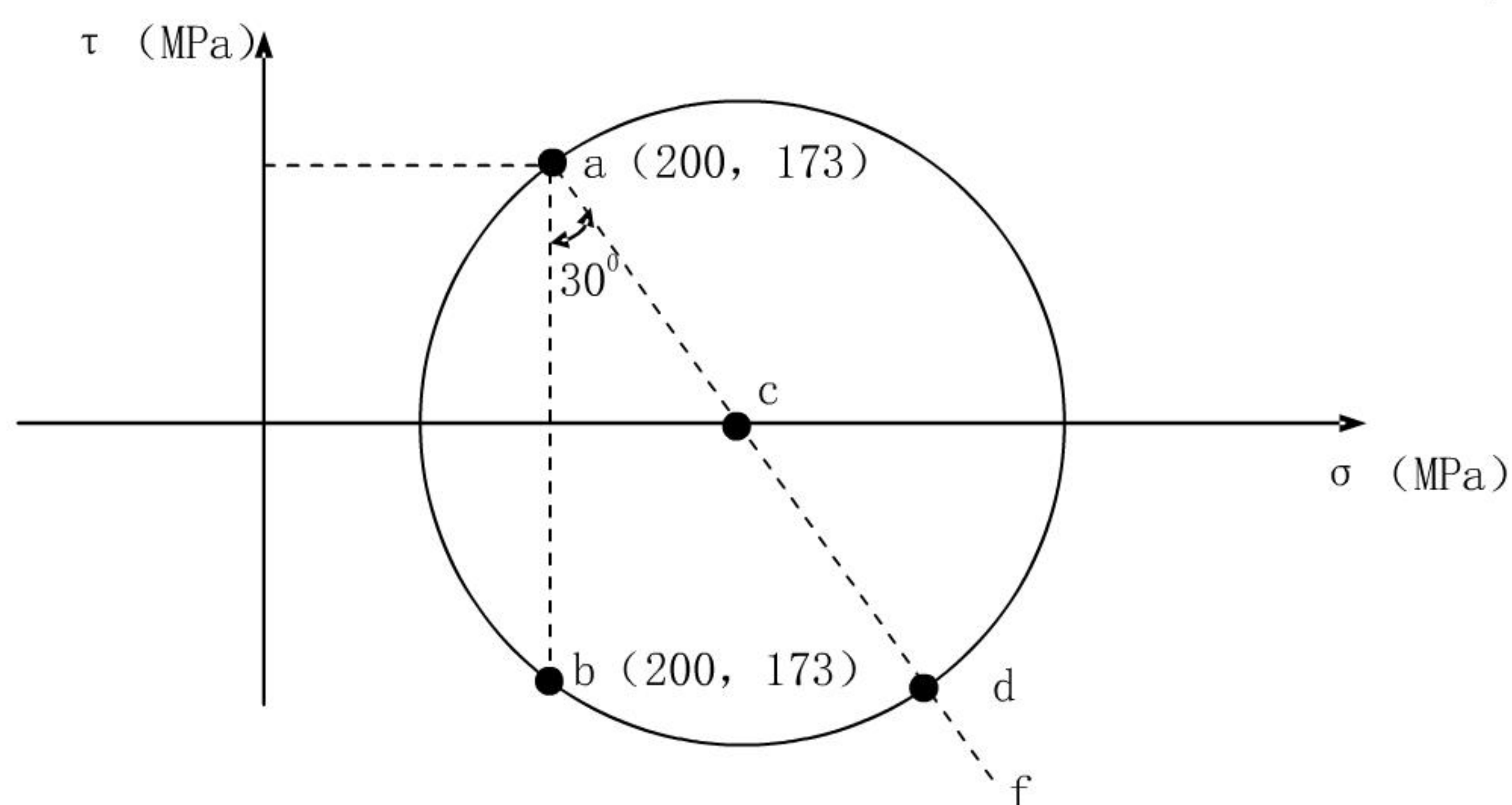
- 解: (1) 作 a 点 (对应面 A);
 (2) 作 b 点 (对应面 B);
 (3) 作线 af 与 ab 成 30° 夹角交 σ 轴于 c 点;
 (4) c 点为圆心、ac 为半径作圆 (应力圆);
 (5) 应力圆与 af 交点 d 对应面 D 的应力情况;

$$\therefore \sigma_y = 200 + (173 \times \tan 30^\circ) \times 2 = 400 \text{ MPa}$$

$$\therefore \tau_{xy} = -173 \text{ MPa}$$



(单位: Mpa)

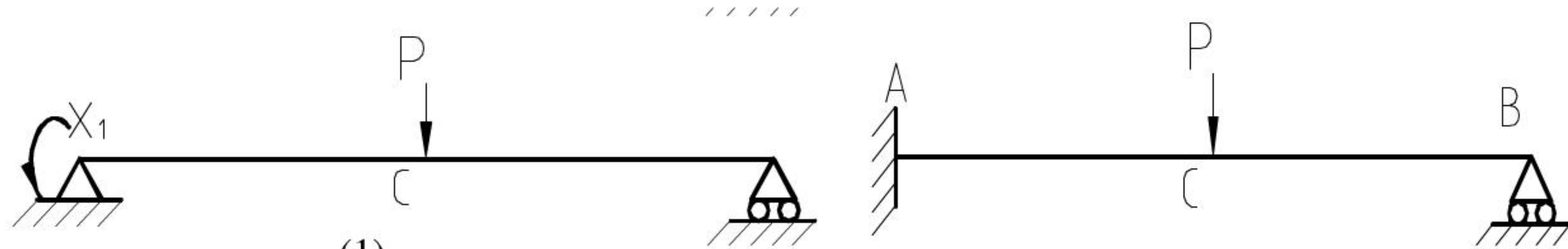


材料力学模拟试题（四）解答

八、一、 填空题（3 道题，共 15 分）

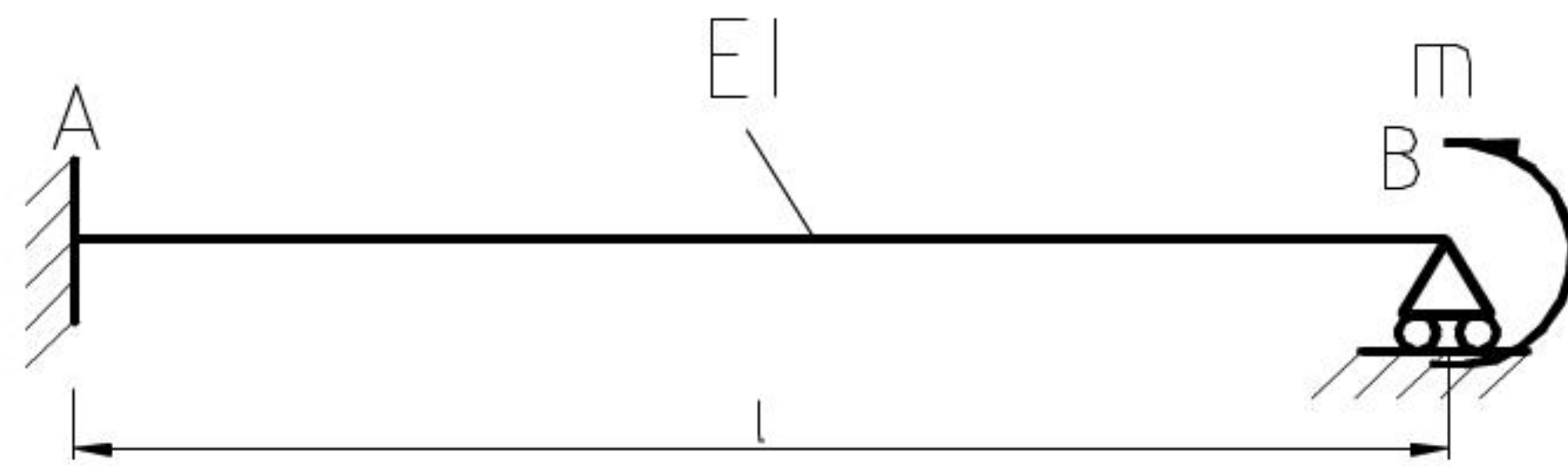
1. (5 分) 表示交变应力情况的 5 个量值: σ_m 、 σ_a 、 r 及 σ_{\max} 、 σ_{\min} , 其中只有 2 个是独立的。

2. (5 分) 图 (2) 是图 (1) 所示静不定梁的基本静定系, 其力法正则方程为 $\delta_{11}\chi_1 + \Delta_{1p} = 0$ 则 δ_{11} 的几何意义是 在静定基上单位力偶 X_1 单独作用在 A 点时, 在 A 点沿 X_1 方向的转角。



Δ_{1p} 的几何意义是 (1) 在静定基上载荷 P 作用下, A 点沿 X_1 方向的转角。

3. (5 分) 图示 B 端的支反力 $R_B = \frac{3m}{2l} (\downarrow)$ 。



二、 选择题（2 道题，共 15 分）

1. (5 分) 圆轴的应力公式 $\tau_\rho = T\rho/I_p$ 是, “平面假设” 起的作用有下列四种答案:

$$T = \int_A \tau_\rho dA$$

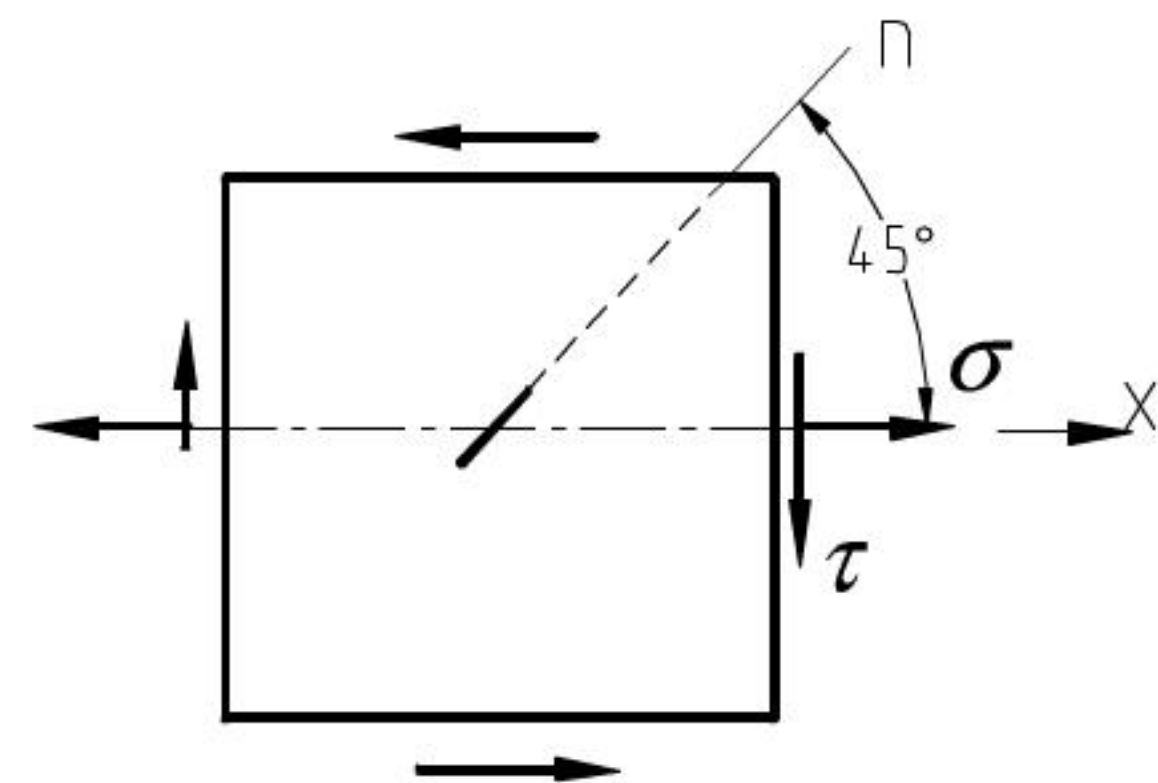
- (A) “平面假设” 给出了横截面上内力与应力的关系
- (B) “平面假设” 给出了圆轴扭转时的变形规律;
- (C) “平面假设” 使物理方程得到简化;
- (D) “平面假设” 是建立剪应力互等定理的基础。

正确答案是 B。

2. (5 分) 平面应力状态如图, 设 $\alpha=45^\circ$, 求沿 n 方向的正应力 σ_α 和线应变 ε_α 。(E、 ν 分别表示材料的弹性模量和泊松比) 有四种答案:

- (A) $\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} + \tau$, $\varepsilon_\alpha = (\frac{\sigma}{2} + \tau)/E$
- (B) $\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} - \tau$, $\varepsilon_\alpha = (\frac{\sigma}{2} - \tau)/E$
- (C) $\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} + \tau$, $\varepsilon_\alpha = (1-\nu)\frac{\sigma}{E} + (1+\nu)\frac{\tau}{E}$
- (D) $\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} - \tau$, $\varepsilon_\alpha = (1-\nu)\frac{\sigma}{2E} - (1+\nu)\frac{\tau}{E}$

正确答案是 D。



九、 三、 计算题（5 道题，共 75 分）

1. (10 分) 皮带传动轴由电机带动而匀速转动时, 尺寸和受力如图所示, 皮带轮重 $G=1\text{KN}$, 直径 $D=1200\text{mm}$,

轴的 $[\sigma]=50\text{Mpa}$, $l=1600\text{mm}$, $T=6\text{KN}$, $t=3\text{KN}$ 。试用第四强度理论确定传动轴的直径。

解：1.外力分析

皮带轮轴受力如图：

$$P = T + t - G = 6 + 3 - 1 = 8 \text{ kN}$$

$$M_e = (T - t)D/2 = 1800 \text{ (Nm)}$$

$$N_A = N_B = 4 \text{ (kN)}$$

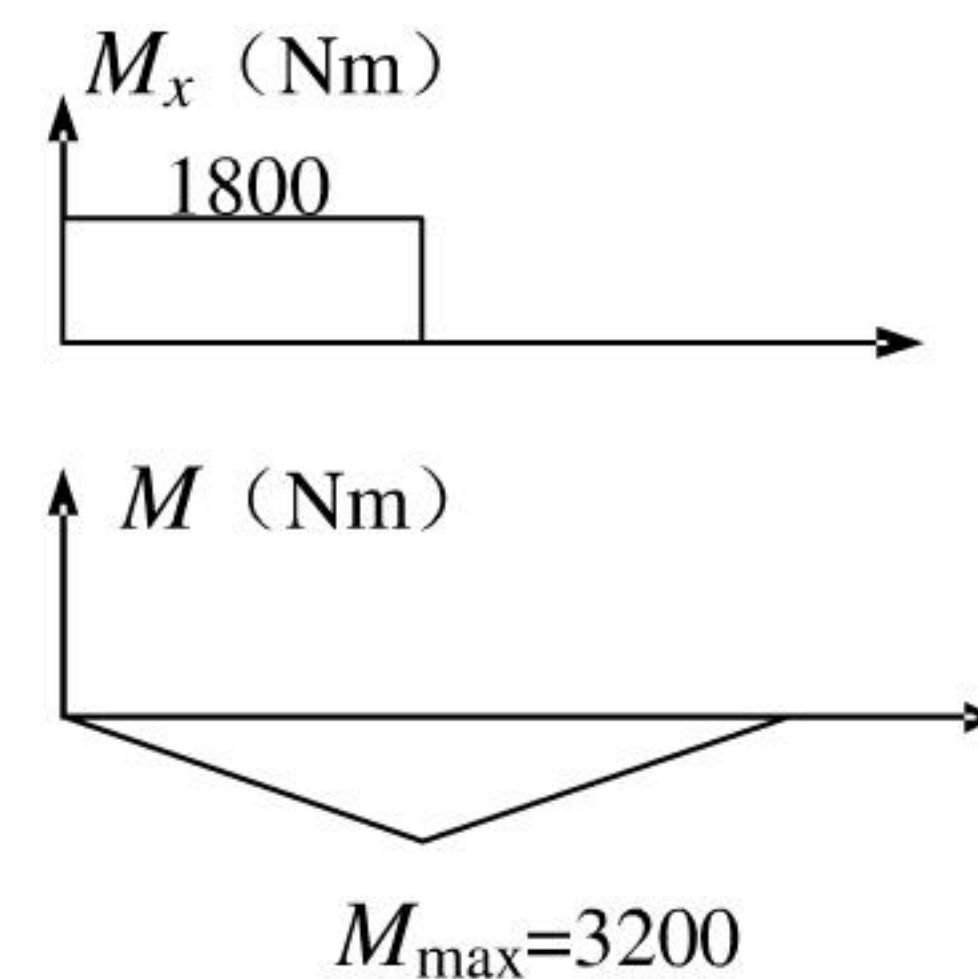
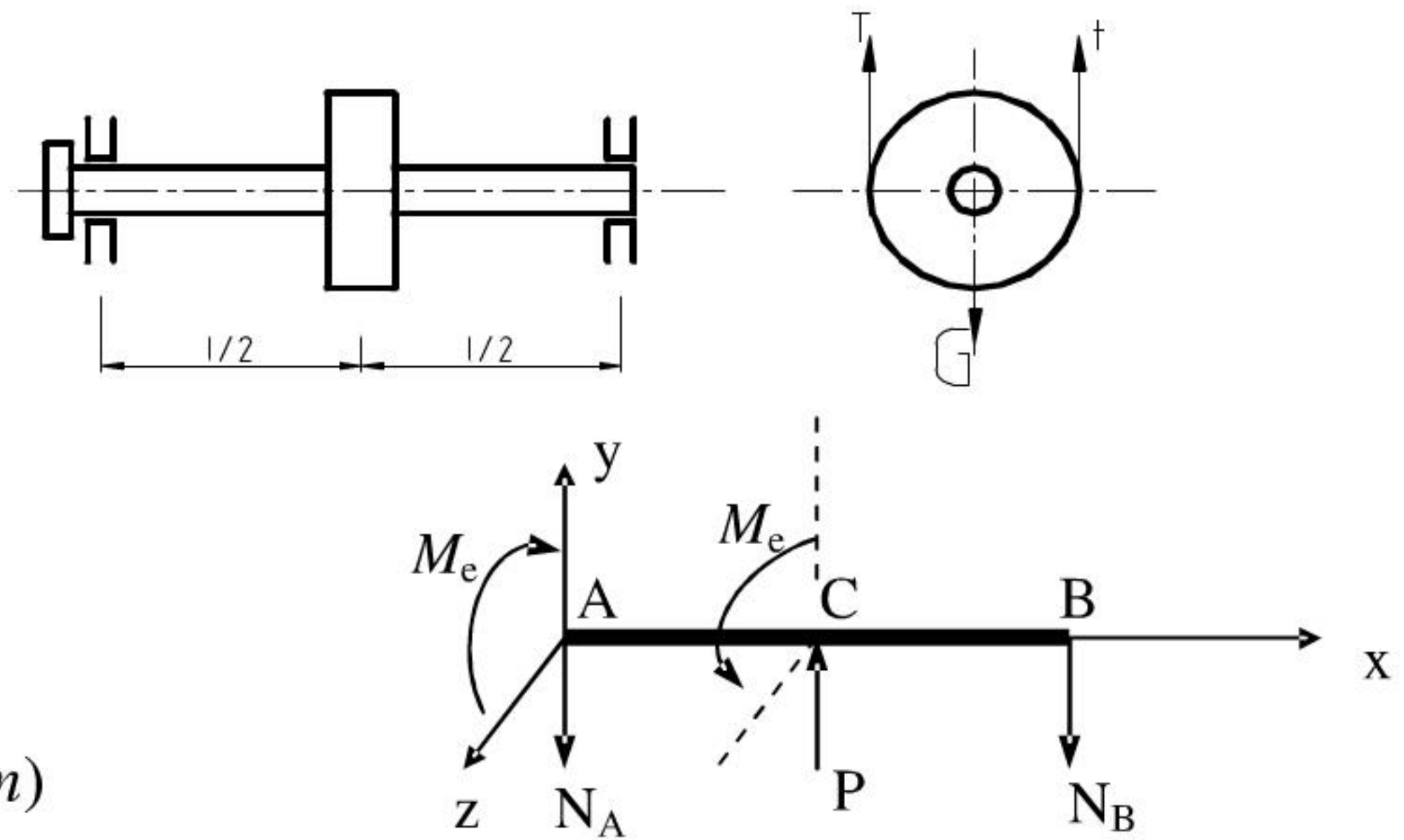
2.作内力图，判断危险截面

危险截面在中间 C 处，其

$$M_x = M_e = 1800 \text{ (Nm)}$$

$$M_{\max} = \frac{pl}{4} = \frac{8000 \times 1.6}{4} = 3200 \text{ (Nm)}$$

3.强度计算



圆轴弯扭组合变形，第四强度理论的强度条件：

$$\frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_n^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \geq \frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_n^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{3200^2 + 0.75 \times 1800^2}}{50 \times 10^6} = \frac{3559.5}{50 \times 10^6}$$

$$\therefore d \geq \sqrt[3]{\frac{3559.5 \times 32}{3.14 \times 50 \times 10^6}} = 8.986 \times 10^{-2} \text{ (m)}$$

取 $d = 90 \text{ mm}$

2. (15 分) 结构如图所，试求最大弯矩及其作用位置（不计轴力及剪力的影响）。

解：由于不计轴力及剪力的影响，杆 BC 无弯矩，去掉约束后，结构 C 点的位移主要由梁的弯曲变形产生。

则由变形比较法知

$$y_B = 0 = \left(\frac{Pl^3}{3EI} + \frac{Pl^3}{2EI} \right) - \frac{N_C (2l)^3}{3EI}$$

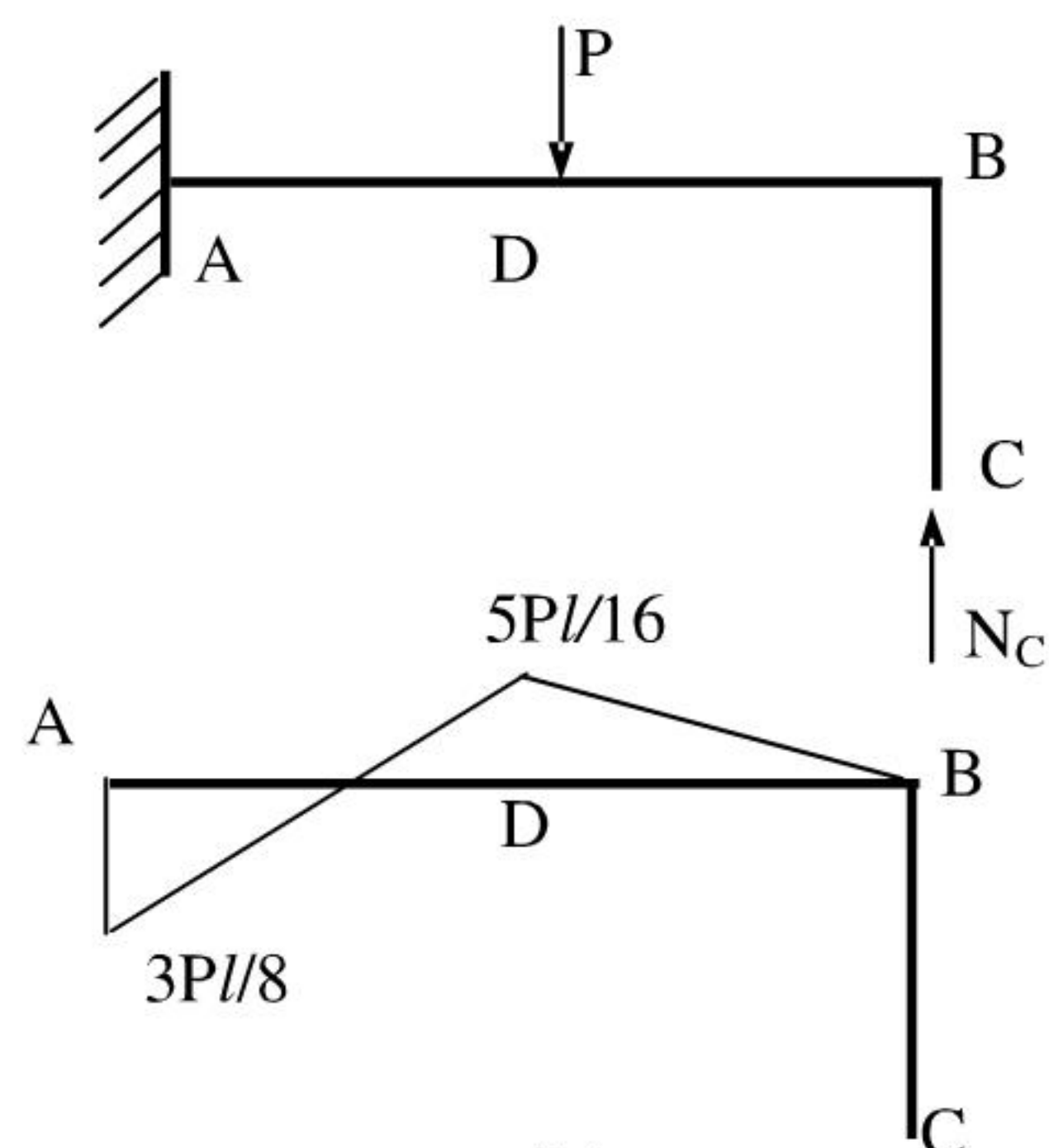
$$\therefore N_C = 5P/16$$

作结构的弯矩图：

$$M_D = \frac{5Pl}{16}$$

$$M_A = \frac{3Pl}{8}$$

$$\therefore M_{\max} = M_A = \frac{3Pl}{8} \text{ (作用在 A 截面)}$$

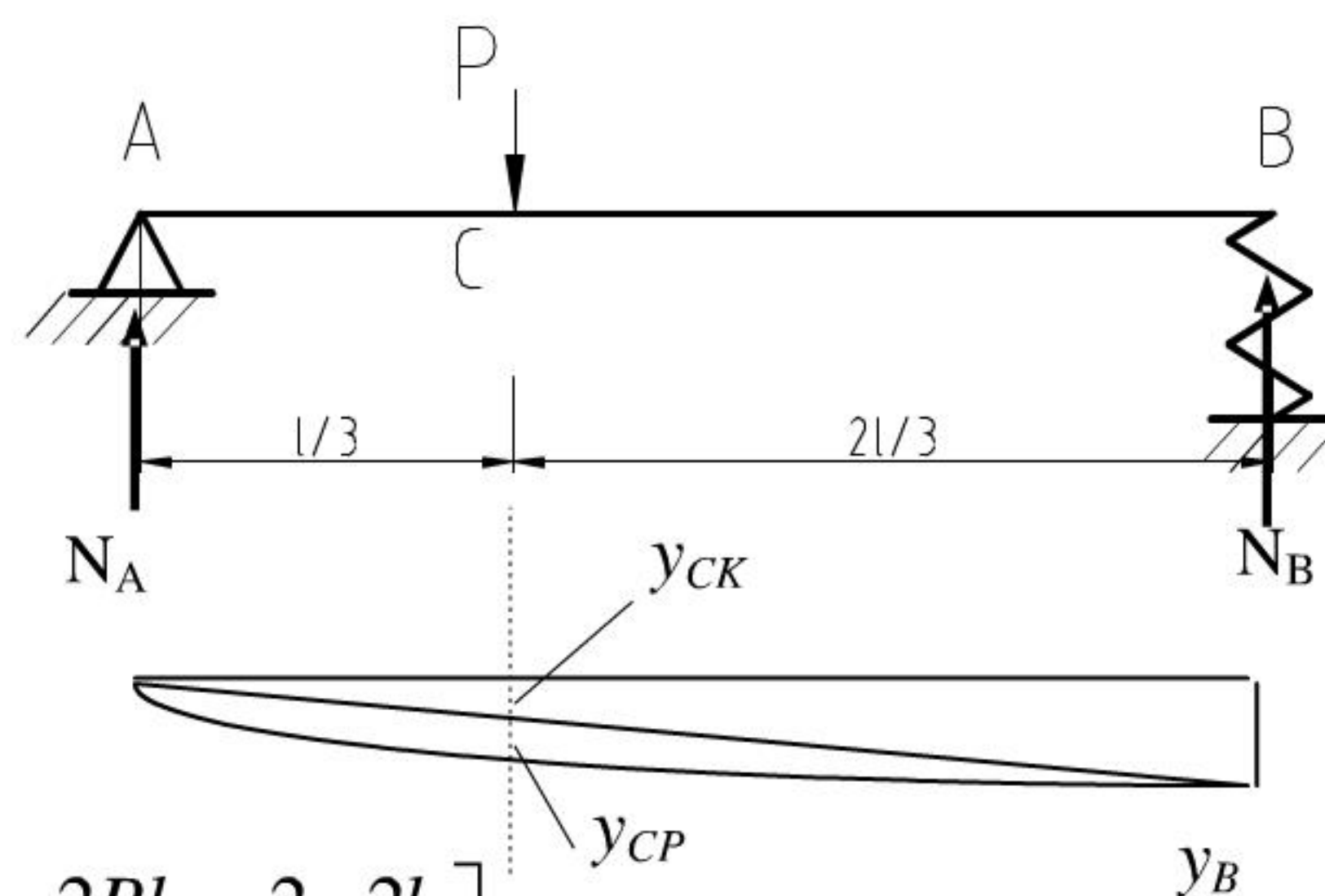


3. (15 分) 已知梁的弯曲刚度 EI 和支座 B 的弹簧刚度 K。试用能量法求截面 C 的挠度。

解：计算 AB 梁的外力：

$$N_A = 2P/3 ; \quad N_B = P/3 ;$$

由图乘法求截面 C 的挠度：



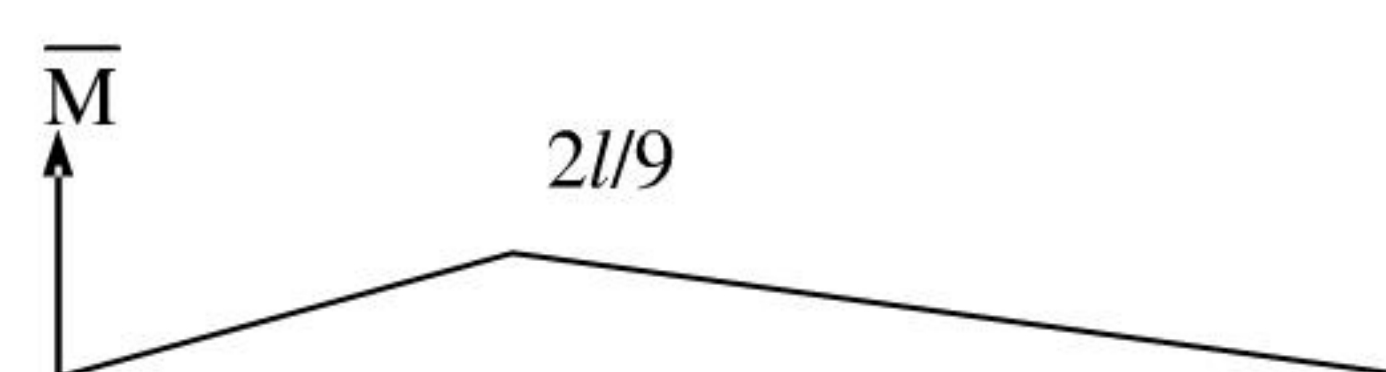
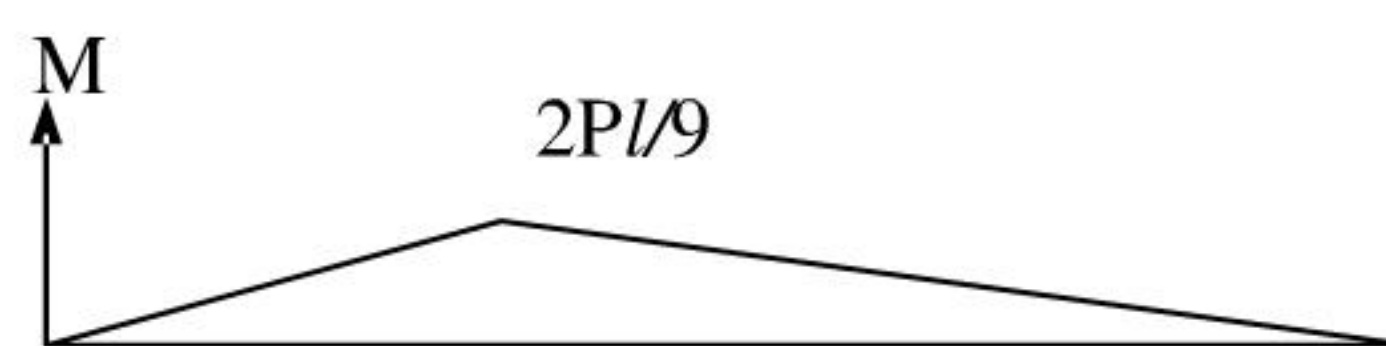
$$y_{CP} = y_{CK} + y_{CP}$$

$$y_{CP} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{l}{3} \times \frac{2Pl}{9} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2l}{9} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2l}{3} \times \frac{2Pl}{9} \right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{2l}{9} \right) \right]$$

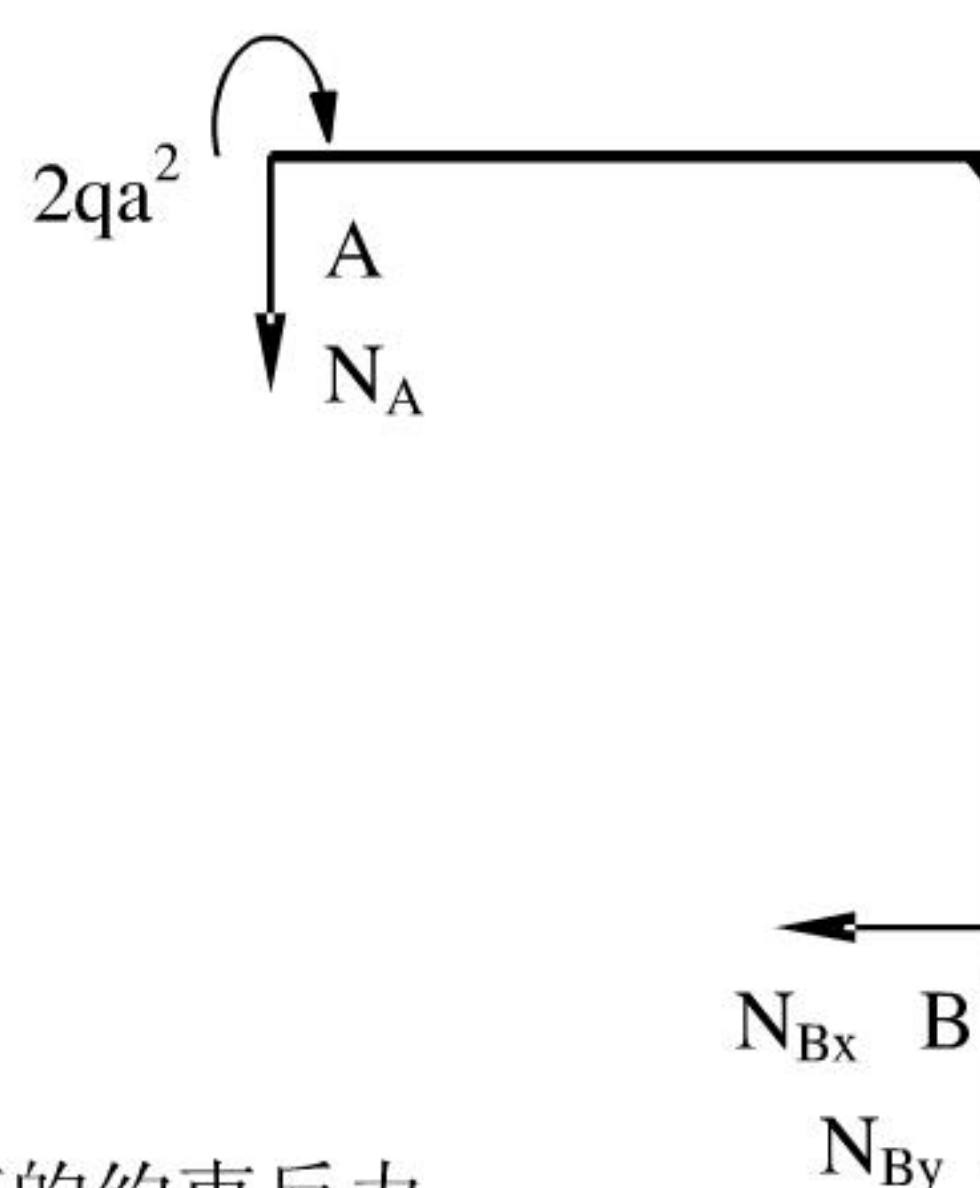
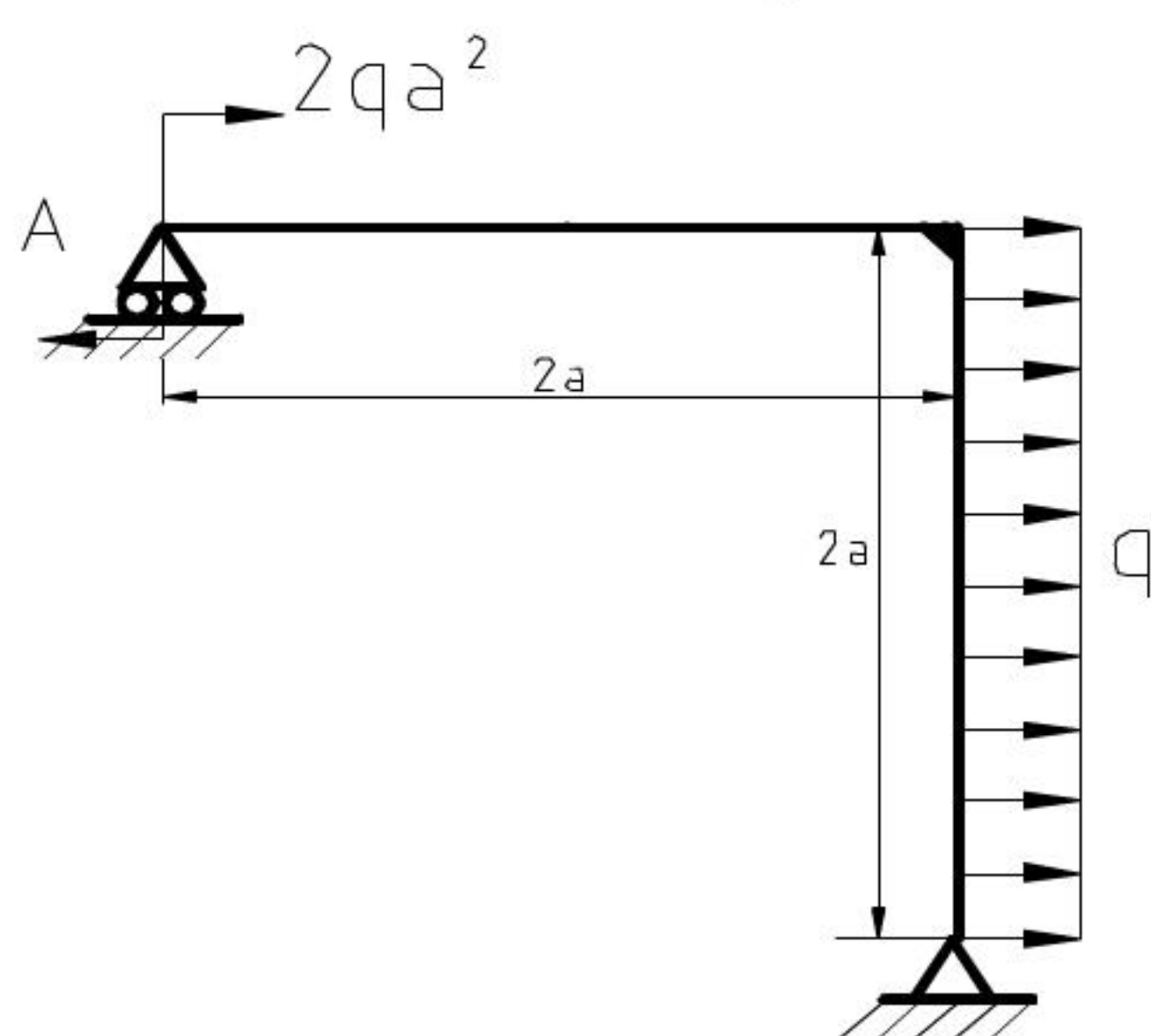
$$= \frac{4Pl^3}{243EI}$$

$$y_C = y_{CP} + y_{CK} = y_{CP} + \frac{y_B}{3}$$

$$= \frac{4Pl^3}{243EI} + \frac{P}{9K}$$



4. (15 分) 作刚架 N、Q、M 图。



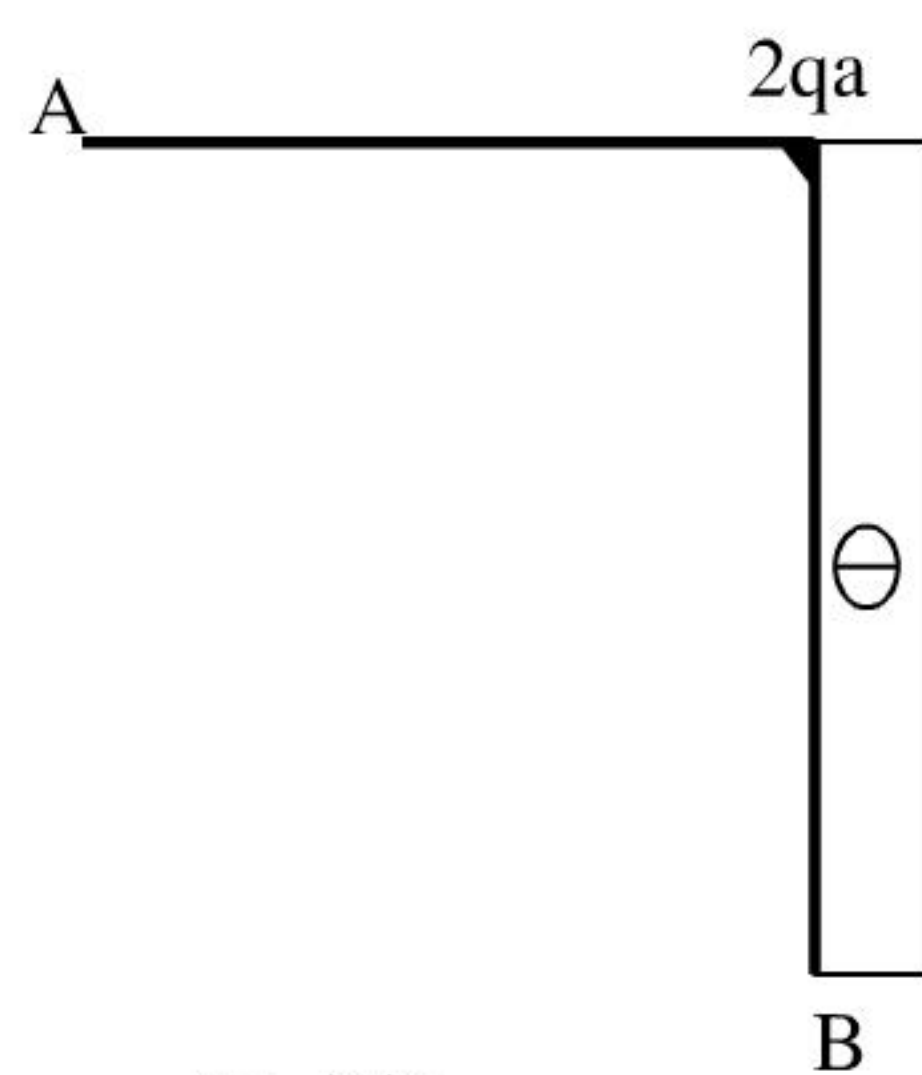
解：(1) 求支座的约束反力。

$$\sum m_B = 0$$

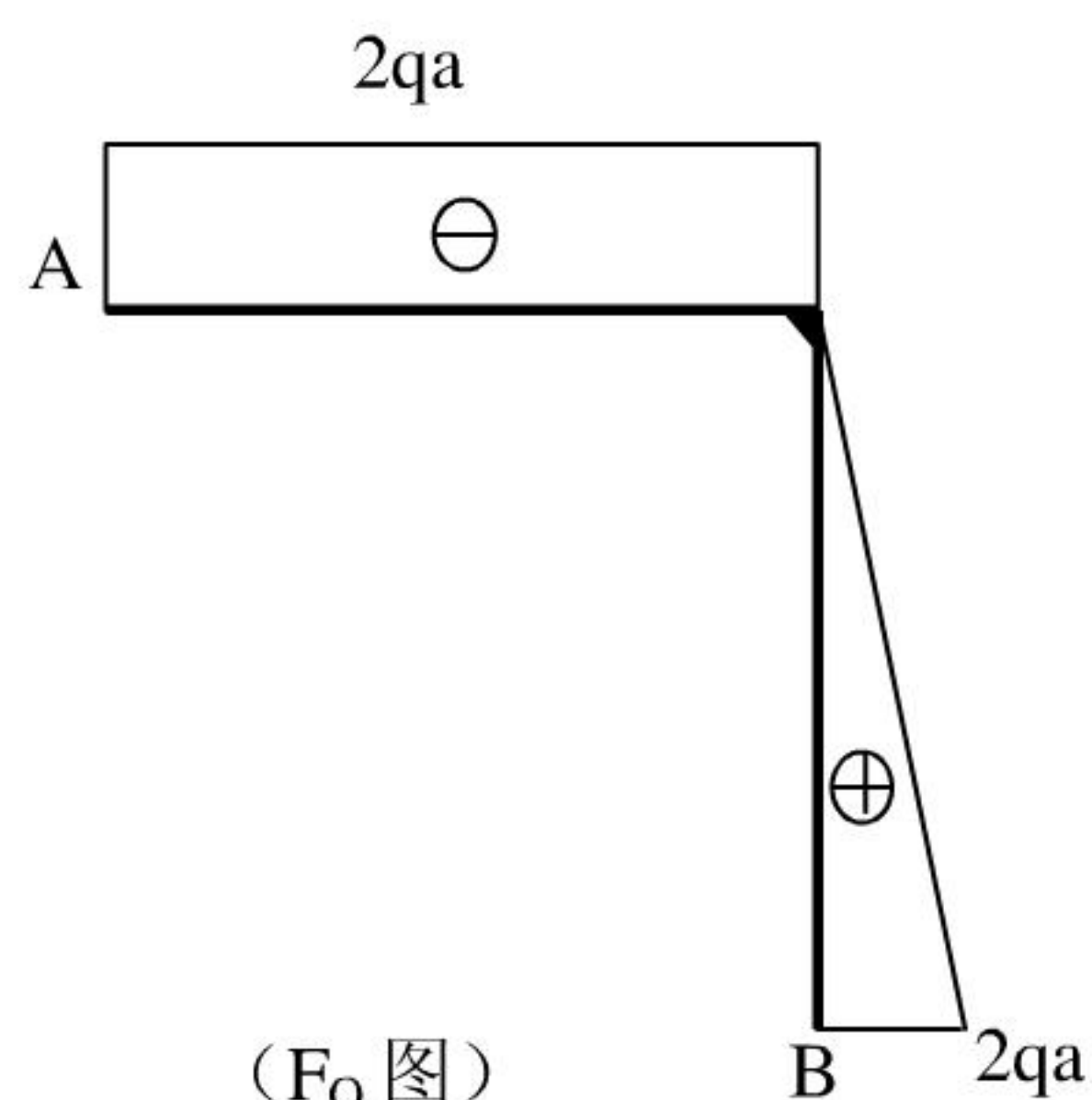
$$2qa^2 + 2qa^2 - N_A \cdot 2a = 0$$

$$N_A = 2qa, \quad N_{By} = 2qa, \quad N_{Bx} = -2qa$$

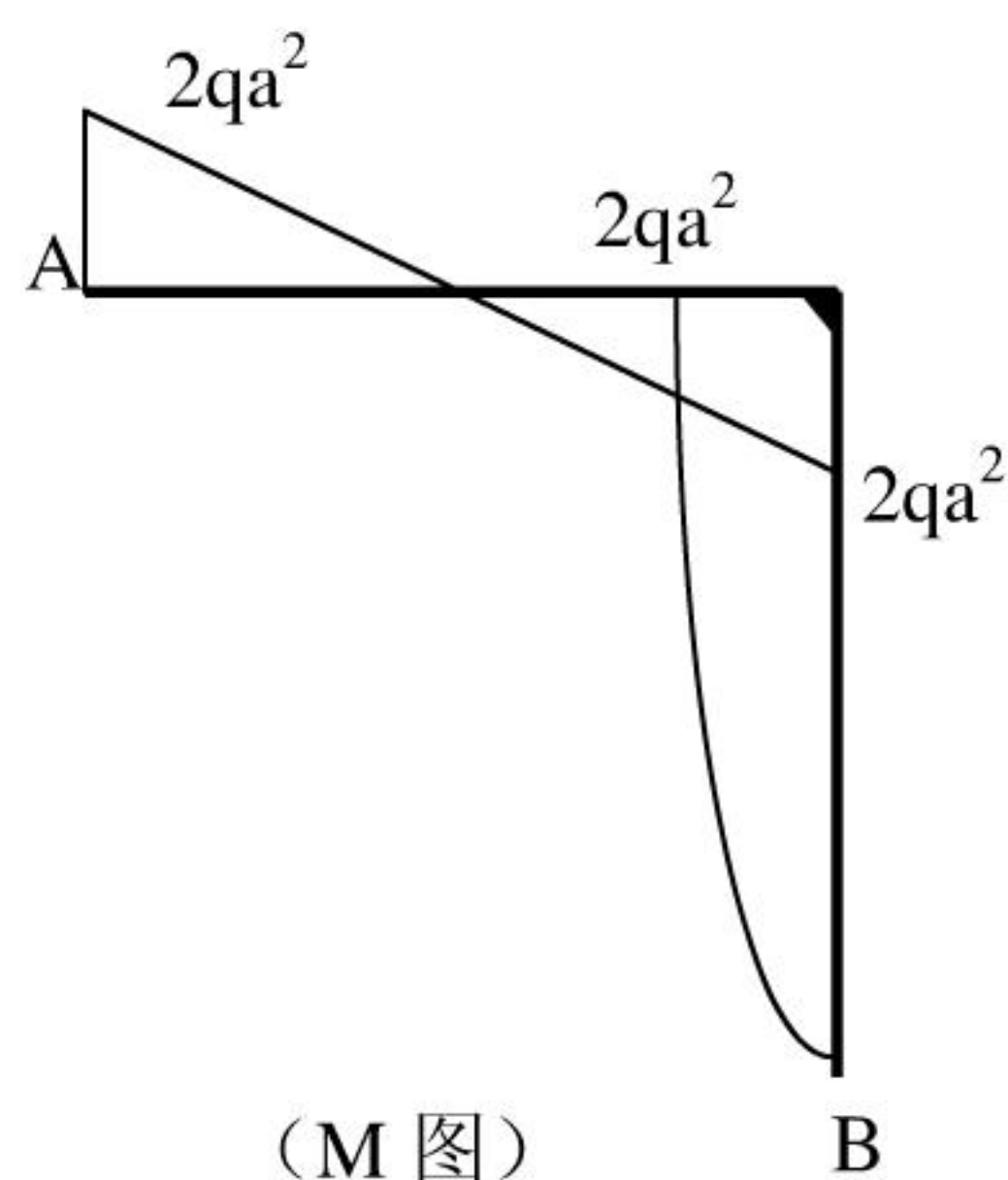
(2) 绘制内力图。



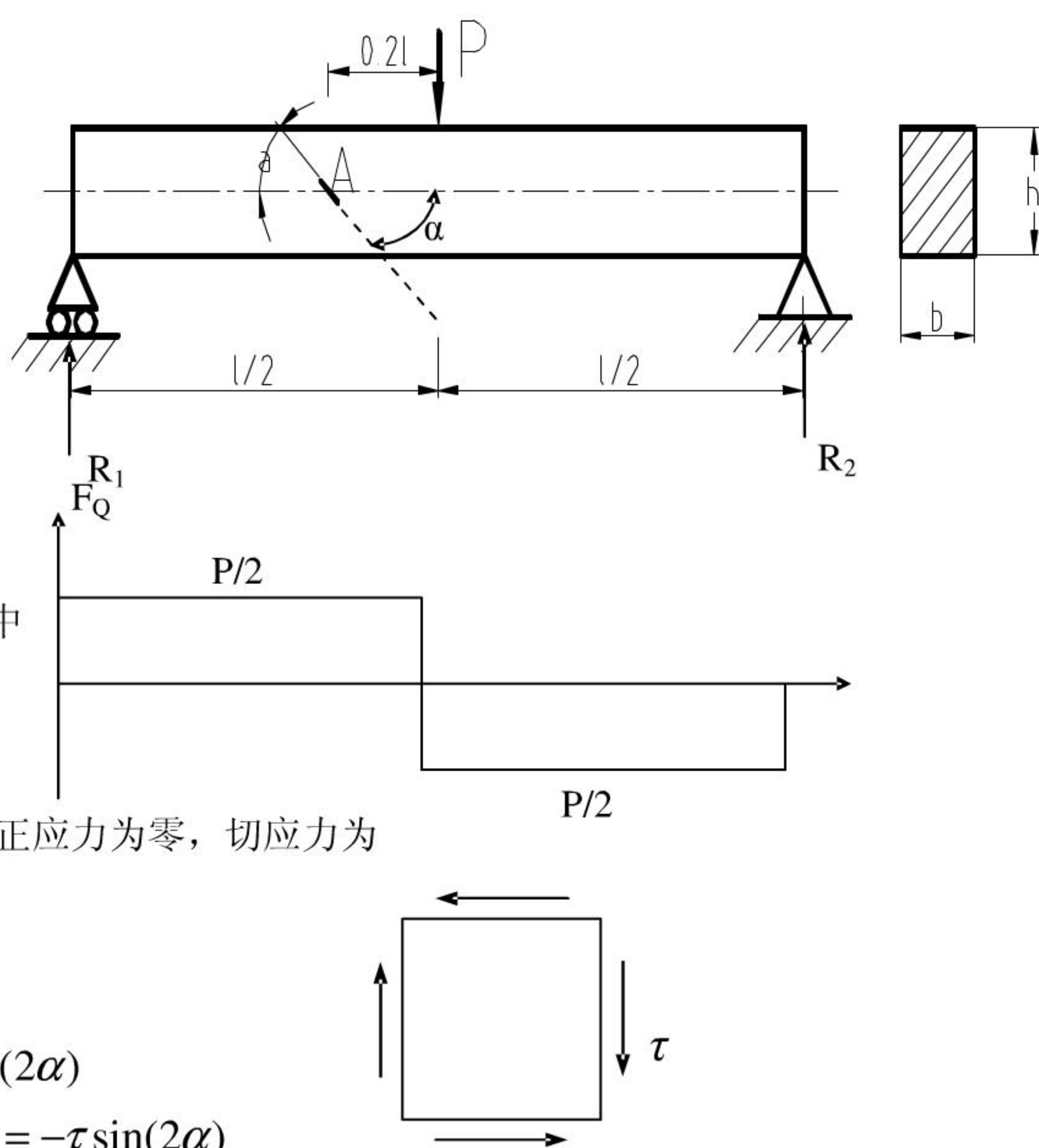
(F_N 图)



(F_Q 图)



5. (15 分) 如图是截面为矩形的简支梁，中间受集中载荷 P ，在梁的中性层 A 点任意贴一应变片，测得应变值为 ε_α ，若 α 、 E 、 ν 为已知。试求载荷 P 的大小。



解 1. 求约束力

$$R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$$

2. 作剪力图

过 A 点横截面上有弯矩和剪力，其中

$$F_Q = \frac{P}{2}$$

3. A 点的应力状态情况

由于 A 点在中性轴上，故 A 点弯曲正应力为零，切应力为

$$\tau = \frac{3F_Q}{2bh} = \frac{3P}{4bh}$$

则斜截面上正应力为

$$\sigma_{-\alpha} = -\tau \sin[2(-\alpha)] = \tau \sin(2\alpha)$$

$$\sigma_{90^\circ-\alpha} = -\tau \sin[2(90^\circ - \alpha)] = -\tau \sin(2\alpha)$$

4. 利用广义虎克定律，求 P

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E} [\sigma_{-\alpha} - \nu \sigma_{90^\circ-\alpha}] \\ &= \frac{\tau \sin 2\alpha}{E} (1 - \nu) \\ &= \frac{3P}{4bh} \frac{\tau \sin 2\alpha}{E} (1 - \nu) \end{aligned}$$

因此，有

$$P = \frac{4bhE\varepsilon_\alpha}{3(1-\nu)\sin\alpha}$$

材料力学模拟试题（五）解答

十、一、填空题（2 道题，共 10 分）

1. (5 分) 利用叠加法求杆件组合变形的条件是：1. 为 小变形；2. 材料处于 线弹性范围。
2. (5 分) 一直径为 D 的实心轴，另一内外直径之比 $d_2/D_2=0.8$ 的空心轴，两轴的长度、材料、扭矩和单位长度扭转角均分别相同，则空心轴与实心轴的重量比 $W_1/W_2=$ 2.13。

十一、二、选择题（3 道题，共 15 分）

1. (5 分) 判断下列结论的正确性：

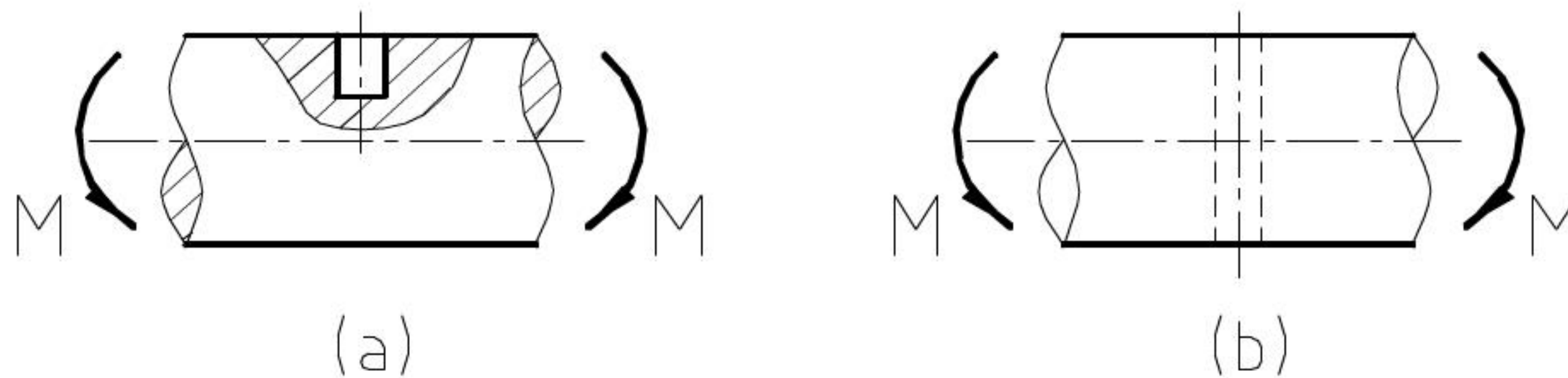
- (A) 杆件某截面上的内力是该截面上应力的代数和；
- (B) 杆件某截面上的应力是该截面上内力的平均值；
- (C) 应力是内力的集度；
- (D) 内力必大于应力。

正确答案是 C。

2. (5 分) 三轮汽车转向架圆轴有一盲孔（图 a），受弯曲交变应力作用，经常发生疲劳断裂后将盲孔改为通孔（图 b），提高了疲劳强度。其原因有四种答案：

- (A) 提高应力集中系数；
- (B) 降低应力集中系数；
- (C) 提高尺寸系数；
- (D) 降低尺寸系数。

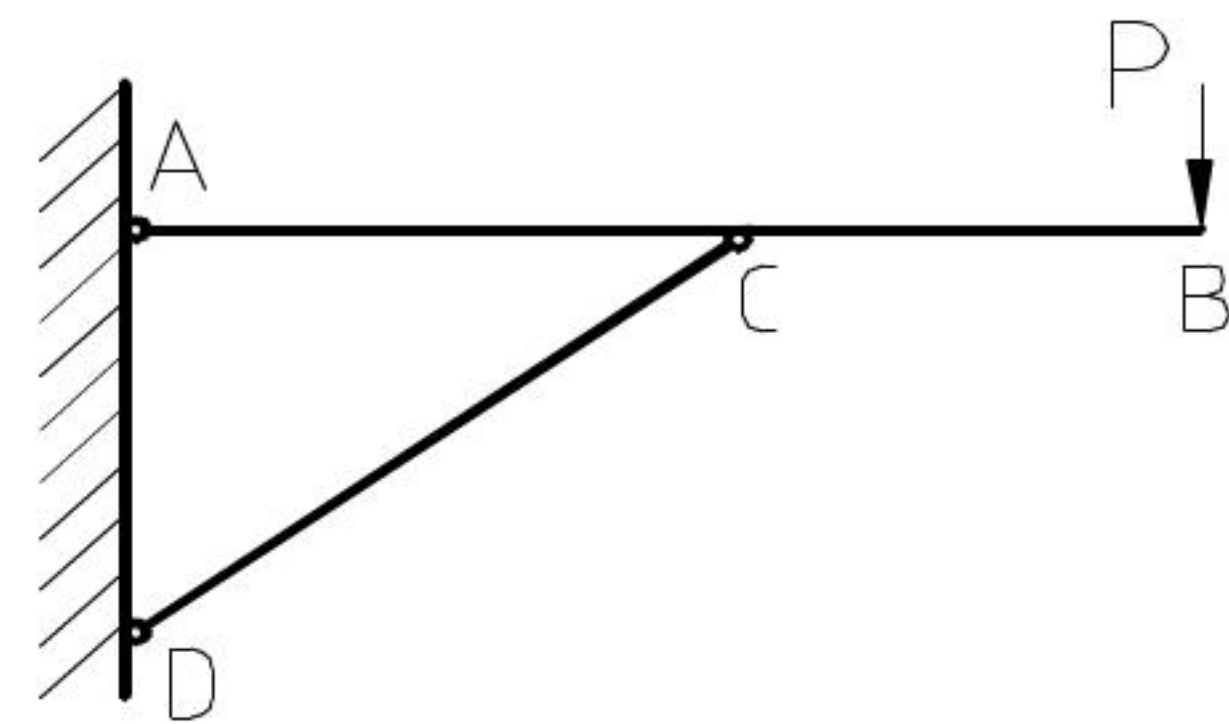
正确答案是 B。



3. (5 分) 图示结构中，AB 杆将发生的变形为：

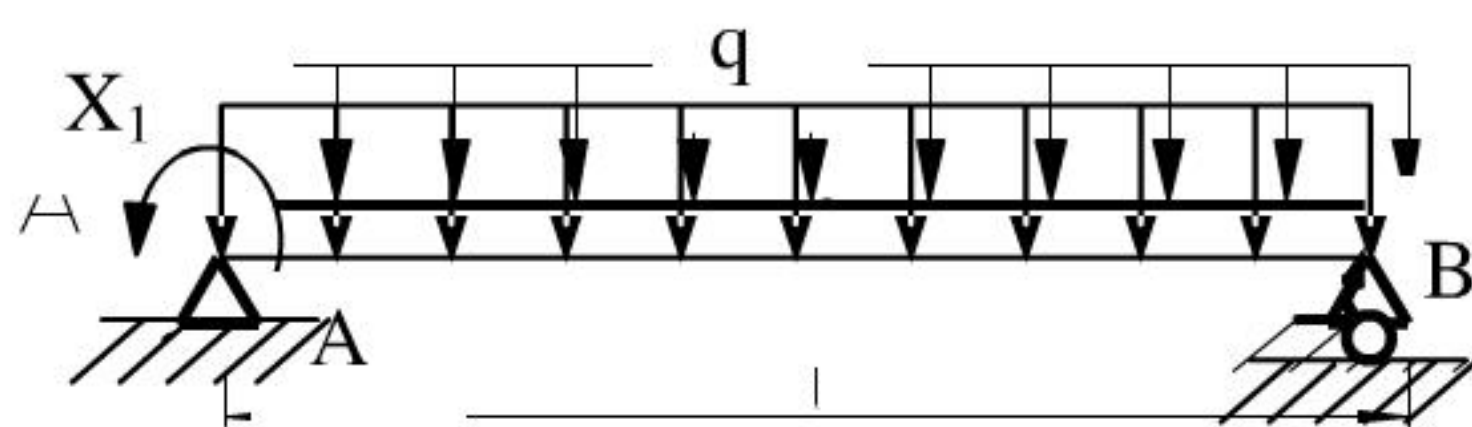
- (A) (A) 弯曲变形；
- (B) (B) 拉压变形；
- (C) (C) 弯曲与压缩的组合变形
- (D) 弯曲与拉伸的组合变形。

正确答案是 D。



十二、三、计算题（5 道题，共 75 分）

1. (10 分) 静不定梁 AB 受力如图所示。试用力法求约束反力偶 M_A 。梁的抗弯刚度 EI 已知。



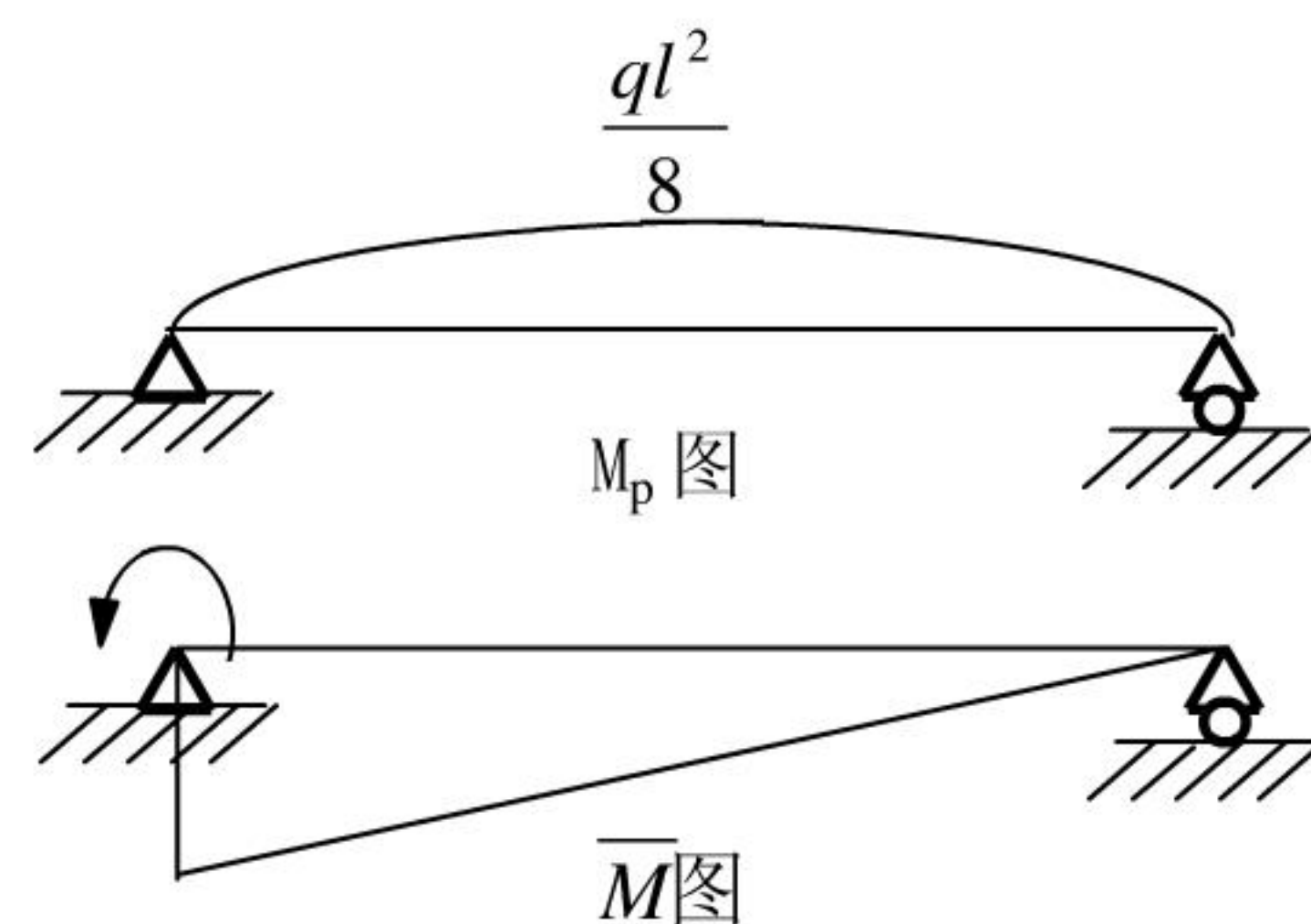
解：解除 A 点多余约束，用 M_A 代替，如图：

由力法求 M_A ：

$$\text{由 } \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

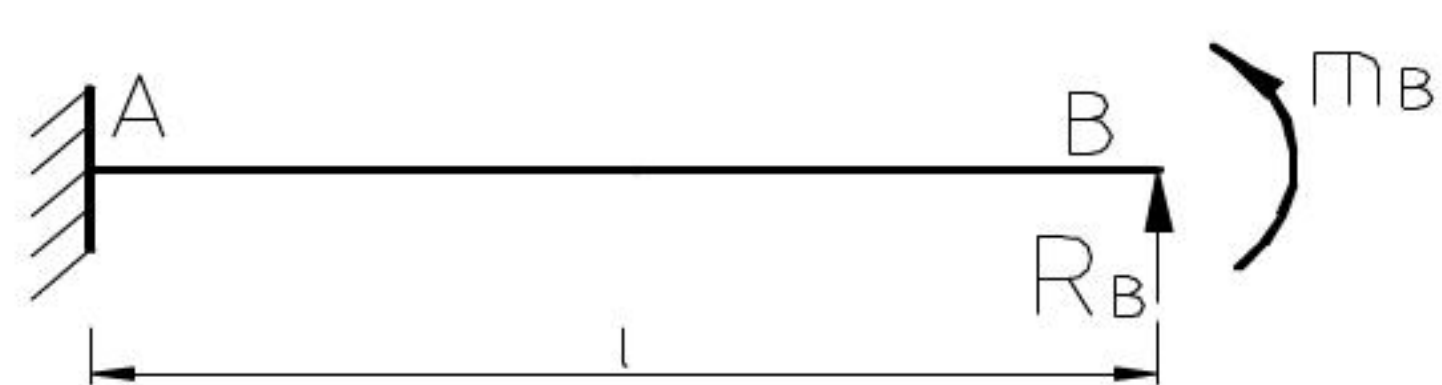
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \times l \times 1 \right) \times \frac{2}{3} \times 1 \right] = \frac{1}{3EI}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times l \right) \times \left(\frac{1}{2} l \right) \right] = -\frac{ql^3}{24EI}$$



$$\therefore M_A = X_1 = \frac{ql^3}{24EI} \times \frac{3EI}{l} = \frac{ql^2}{8}$$

2. (15 分) 一悬臂梁, 抗弯刚度为 EI , 在自由端承受力 R_B 和力偶 m_B 。



(1) 如果 $\theta_B=0$, 试求 R_B 与 m_B 的关系, 并求此时的 y_B ;

(2) 若 $y_B=0$, 试求 R_B 与 m_B 的关系, 并求此时的 θ_B 。

解: (1) 如果 $\theta_B=0$, 试求 R_B 与 m_B 的关系, 并求此时的 y_B

在 R_B 与 m_B 作用下, B 点的转角为

$$\theta_B = \frac{m_B l}{EI} + \frac{R_B l^2}{2EI}$$

当 $\theta_B=0$ 时, 即 $\theta_B = \frac{m_B l}{EI} + \frac{R_B l^2}{2EI} = 0$, 得

$$m_B = -\frac{R_B l}{2}$$

此时

$$y_B = \frac{m_B l^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = -\frac{R_B l^3}{4EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = \frac{R_B l^3}{12EI} \quad (\text{方向与 } R_B \text{ 一致})$$

(2) 若 $y_B=0$, 试求 R_B 与 m_B 的关系, 并求此时的 θ_B

在 R_B 与 m_B 作用下, B 点的挠度为

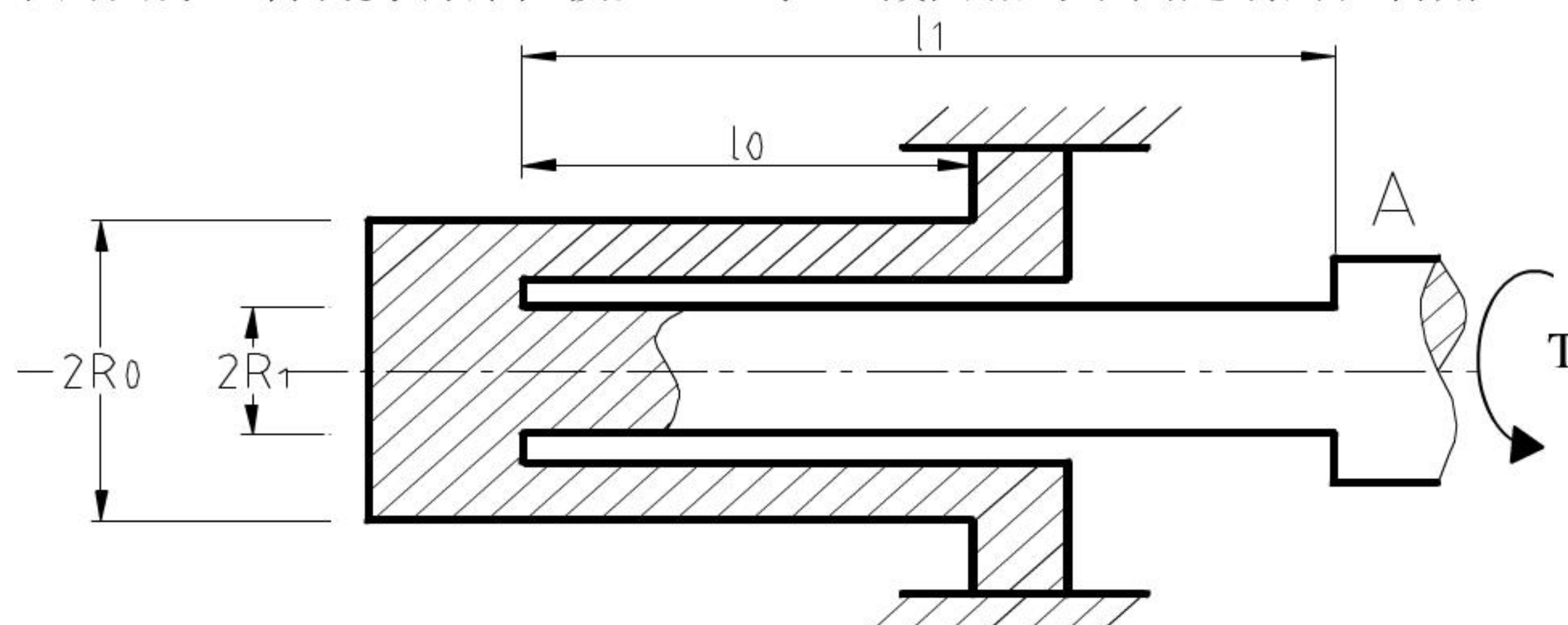
$$y_B = \frac{m_B l^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI}$$

当 $y_B=0$ 时, 即 $y_B = \frac{m_B l^2}{2EI} + \frac{R_B l^3}{3EI} = 0$, 得

$$m_B = -\frac{2R_B l}{3}$$

$$\theta_B = \frac{m_B l}{EI} + \frac{R_B l^2}{2EI} = -\frac{2R_B l^2}{3EI} + \frac{R_B l^2}{2EI} = -\frac{R_B l^2}{6EI} \quad (\text{方向与 } m_B \text{ 一致})$$

3. (15 分) 图示实心扭杆弹簧由半径为 R_1 的内轴和外半径为 R_0 的套筒所组成。内轴和套筒的内表面之间有非常小的间隙, 材料剪切弹性模量 G 。求 A 截面相对于固定端的扭转角。



解: 扭矩为 $M_n=T$

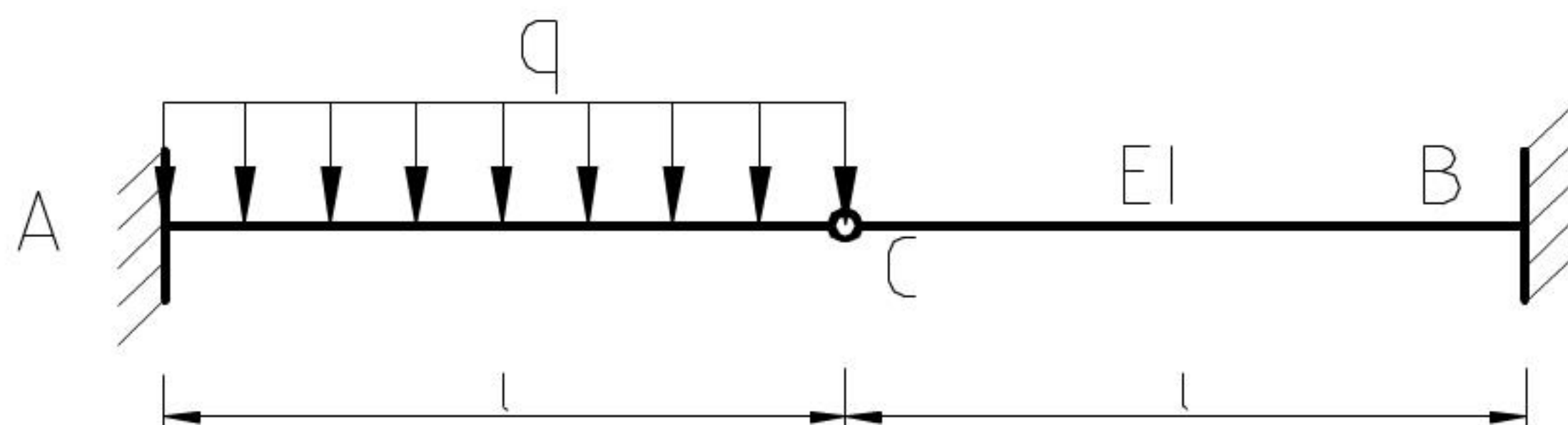
$$\phi = \frac{M_n l}{GI_p}$$

由扭转计算公式得：

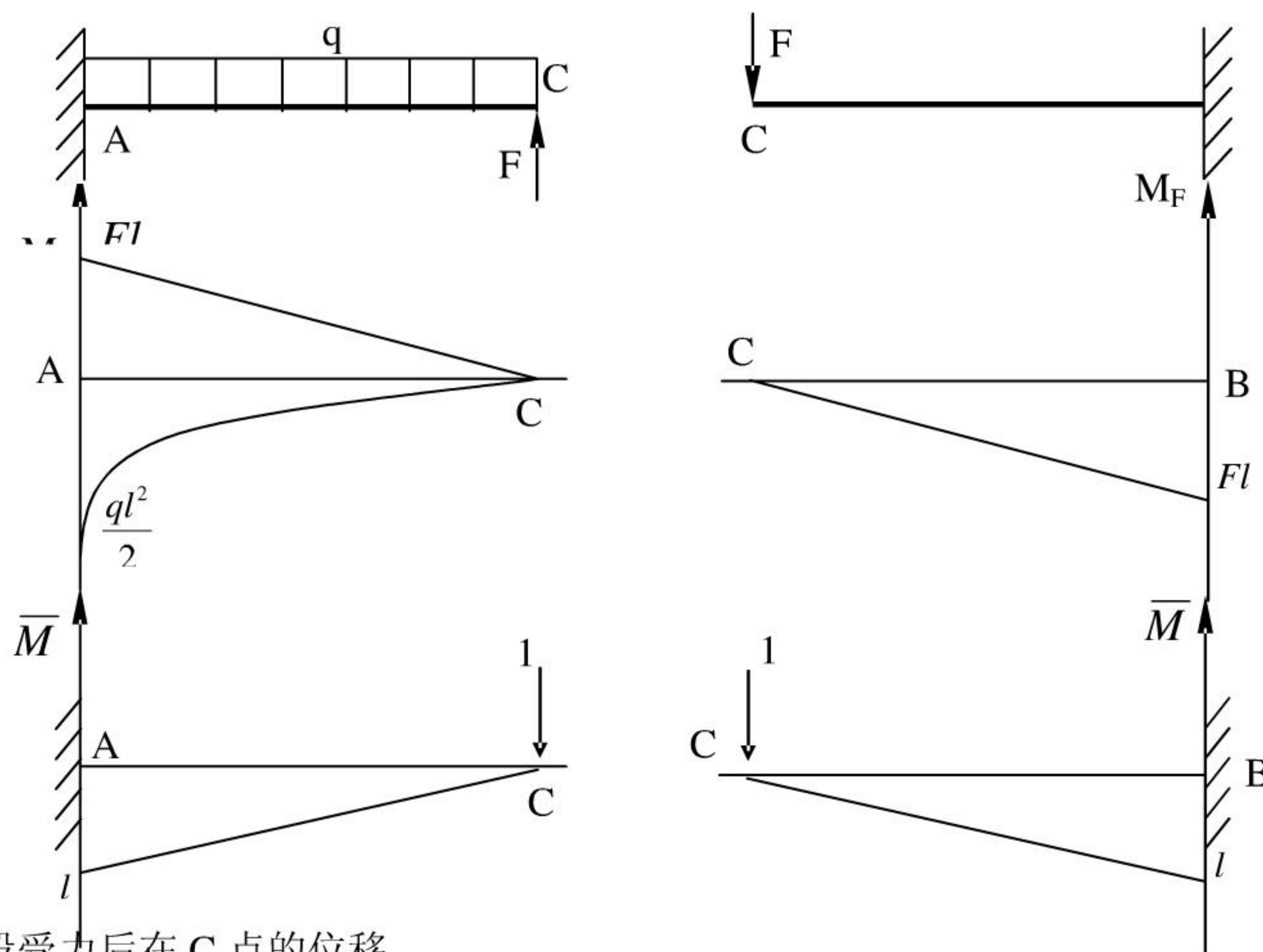
$$\phi_A = \frac{M_n l_1}{GI_{p1}} + \frac{M_n l_0}{GI_{p2}} = \frac{32T}{\pi G} \left[\frac{l_1}{(2R_1)^4} - \frac{l_0}{(2R_0)^4 - (2R_1)^4} \right]$$

$$\phi_A = \frac{2T}{\pi G} \left(\frac{l_1}{R_1^4} - \frac{l_0}{R^4 - R_1^4} \right)$$

4. (20 分) 具有中间铰的两端固支梁，已知 q 、 EI 、 l 。用能量法求梁的支反力，并绘出梁的 Q 图和 M 图。



解：(1) 用能量法求梁的支反力



AC 段受力后在 C 点的位移

$$\delta_1 = \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} Fl \times l \right) \times \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \right) \times \frac{3}{4} l \right]$$

BC 段受力后在 C 点的位移

$$\delta_2 = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Fl \times l \right) \times \frac{2}{3} l \right]$$

由协调条件有：

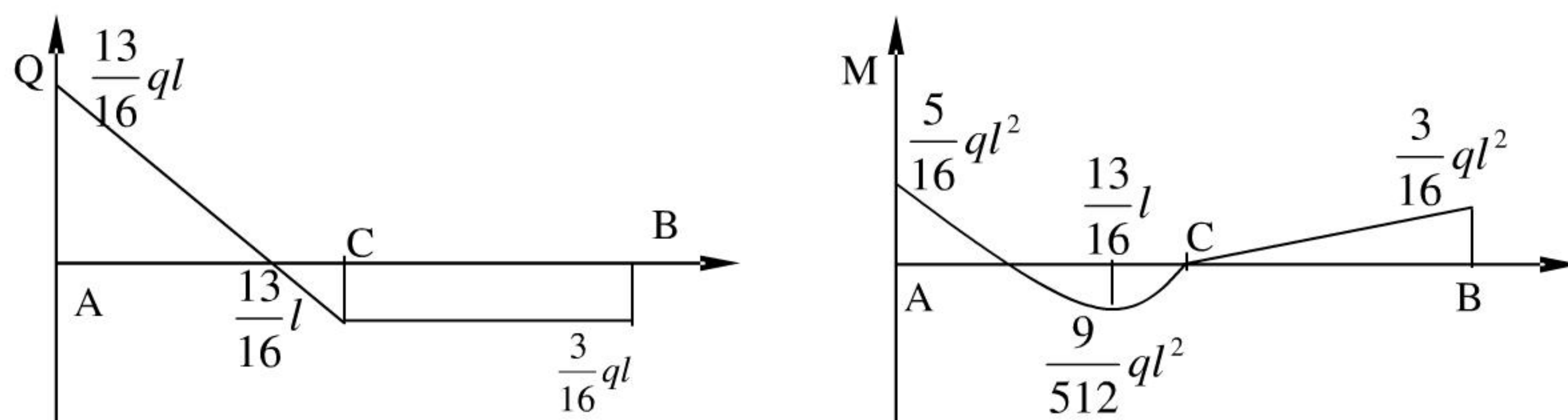
$$\delta_1 = \delta_2$$

$$\text{即：} \frac{1}{EI} \left[-\left(\frac{1}{2} Fl \times l \right) \times \frac{2}{3} l + \left(\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{2} \times l \right) \times \frac{3}{4} l \right] = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} Fl \times l \right) \times \frac{2}{3} l \right]$$

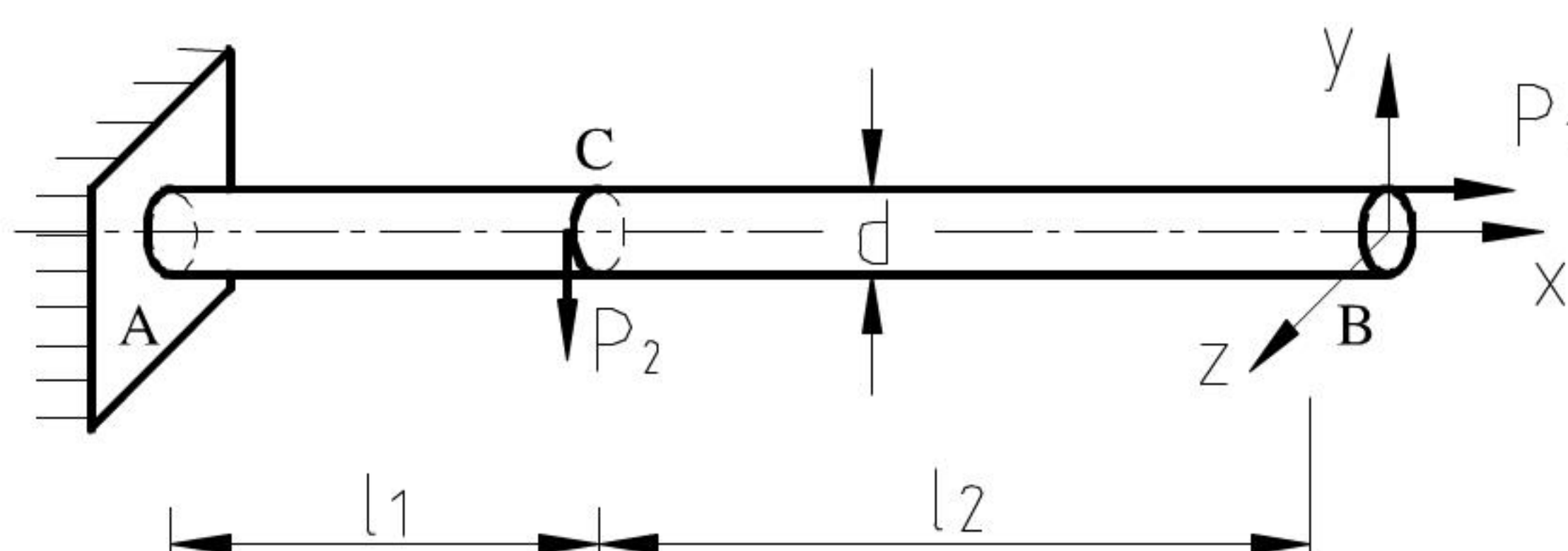
$$\text{解之得：} F = \frac{3}{16} ql$$

求 A、B 处的支反力略。 $R_{Ay} = \frac{13}{16}ql$; $m_A = \frac{5}{16}ql^2$; $R_{By} = \frac{3}{16}ql$; $m_B = \frac{3}{16}ql^2$ 。

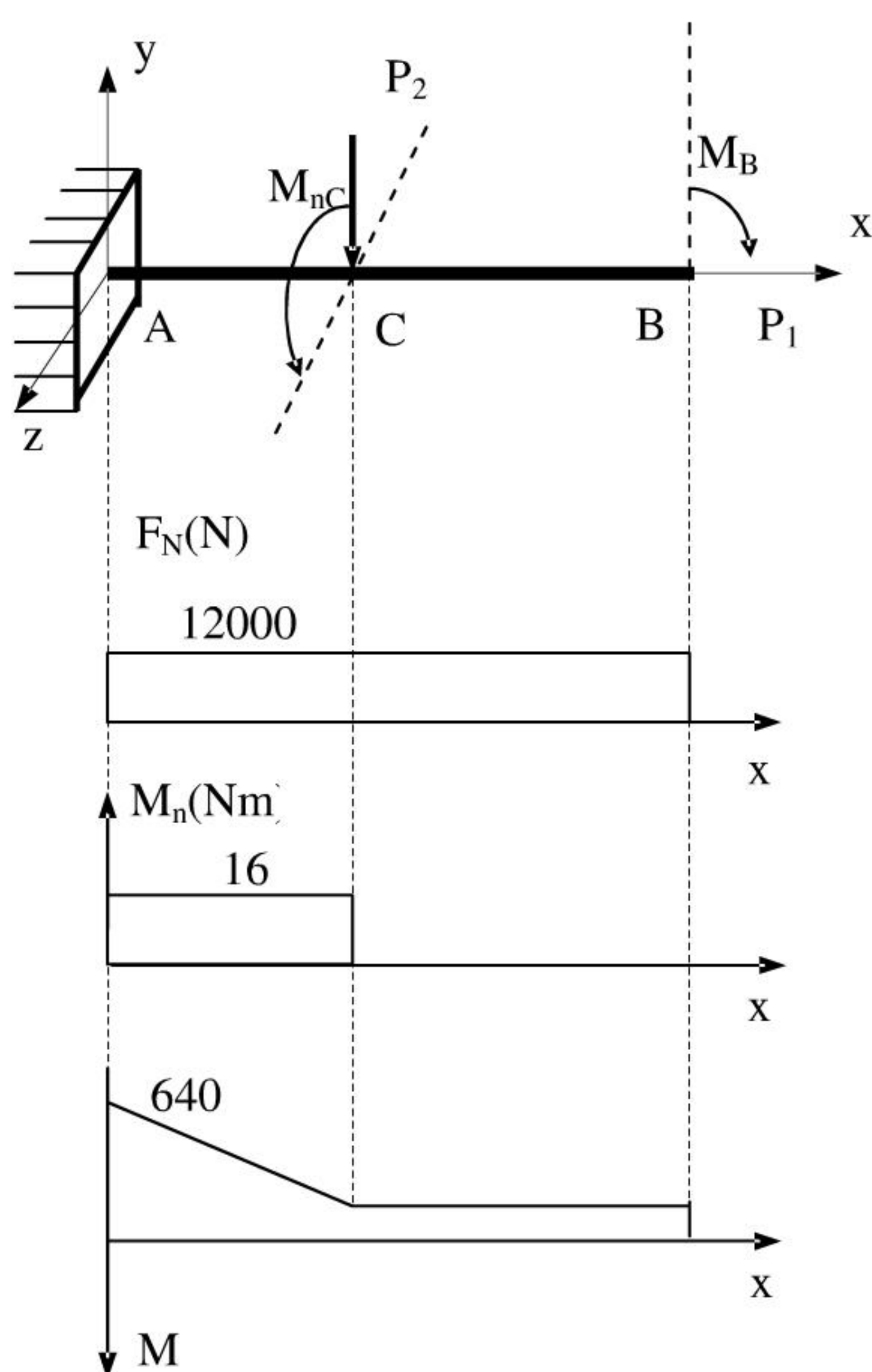
(2) 绘制梁的 Q 图和 M 图。



5. (15 分) 图示钢质圆杆, $d=40\text{mm}$, $l_1=0.5\text{m}$, $l_2=0.7\text{m}$, $P_1=12\text{KN}$, $P_2=0.8\text{KN}$, $\sigma_s=240\text{MPa}$, 安全系数 $n=2$ 。试用第三强度理论校核强度



解: 1. AB 杆受外力向形心简化



$$M_{nC} = \frac{P_2 d}{2} = 800 \times 0.02 = 16 \text{ Nm}$$

$$M_B = \frac{P_1 d}{2} = 12000 \times 0.02 = 240 \text{ Nm}$$

2. 作 AB 杆的内力图

危险截面是 A 截面, 其轴力、扭矩和弯矩分别为

$$F_N = 12 \text{ KN};$$

$$M_n = \frac{P_2 d}{2} = 800 \times 0.02 = 16 \text{ Nm}$$

$$M = M_{\max} = \frac{P_1 d}{2} = 12000 \times 0.02 + 800 \times 0.5 = 640 \text{ Nm}$$

3. 强度计算

该处横截面上危险点的应力为

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{F_N}{A} = \frac{640 \times 32}{\pi \times 0.04^3} + \frac{12000}{\pi \times 0.02^2} = 102 + 0.09 = 102 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{M_n}{W_n} = \frac{16 \times 16}{\pi \times 0.04^3} = 1.27 \text{ MPa}$$

由第三强度理论的强度条件, 有

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 102 \text{ MPa} < [\sigma] = \frac{\sigma_s}{2} = 120 \text{ MPa}$$

杆件 ACB 满足强度条件。