材料力学
总复习

题型范围：

- 拉压变形
- 扭转变形、剪切与挤压
- 弯曲变形
- 组合变形
- 广义**Hooke**定律
- 强度理论
- 压杆稳定
- 内力图（尤其弯矩、剪力图）
- 能量法
- 静不定问题
- 动载荷

材料力学主要研究构件的强度、刚度和稳定性。

工程构件的失效形式通常可以分为：强度失效、刚度失效和稳定性失效。

基本概念

- 内力、应力、应变、许用应力（变）；
- 抗拉（压）/弯/扭刚度、截面系数；
- 弹性极限、屈服极限、强度极限、弹性模量；
- 惯性矩、静矩、惯性半径

杆件变形的基本形式：拉压、剪切、扭转、弯曲（组合形式）

轴向拉伸与压缩

基本内容

- 截面法
- 内力（轴力）图
- 应力的求取
- 求变形
- 胡克定律
- 强度条件
- 拉压静不定问题的求解

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

$$\frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$$

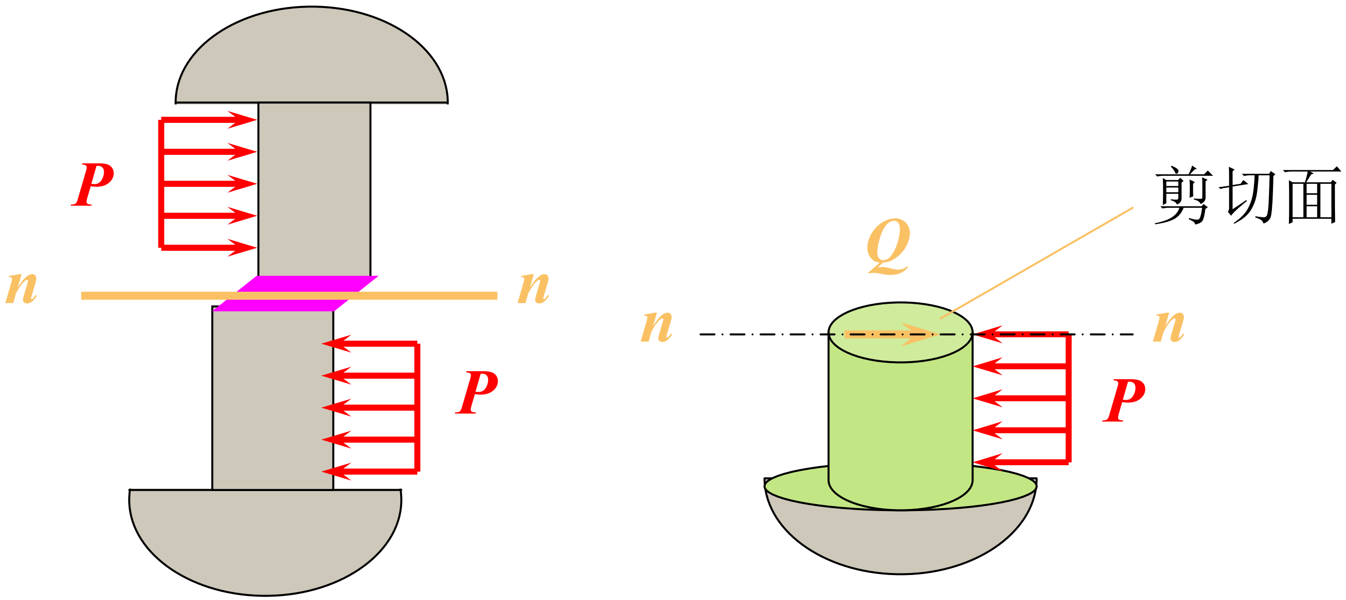
分布轴向力需要通过积分就伸长量 $\Delta l = \int_0^L \frac{F_N(x)}{EA} dx$

连接处

（1）假设剪切面上的切应力均匀分布，剪切强度条件为：

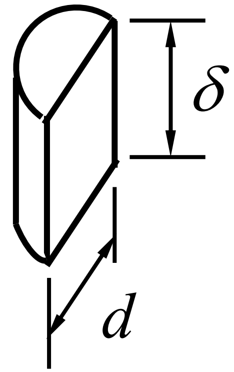
$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$$

正确地确定剪切面的位置及剪力。剪力在两相邻外力作用线之间，与外力平行

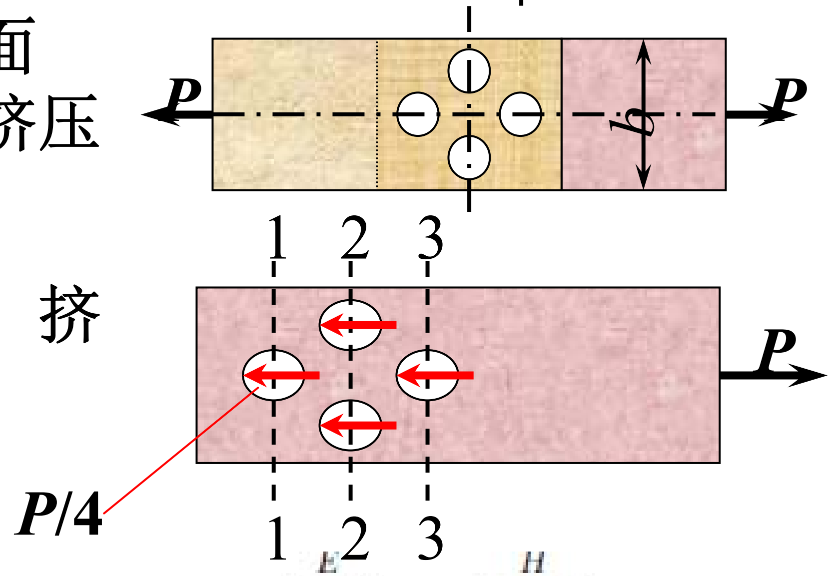


（2）假设挤压面上的挤压应力均匀分布，挤压强度条件为：

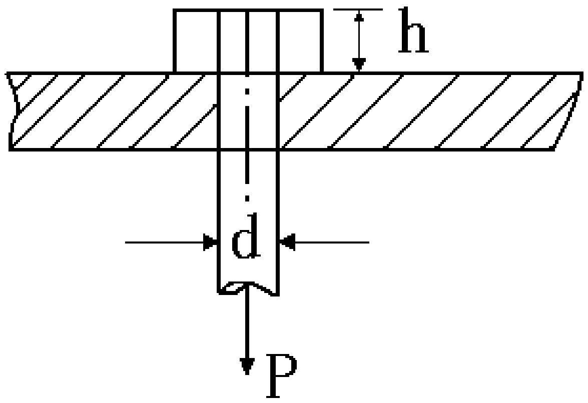
$$\sigma_{bs}=\frac{P}{A_{bs}}\le[\sigma_{bs}] \qquad A_{bs}=d\delta$$

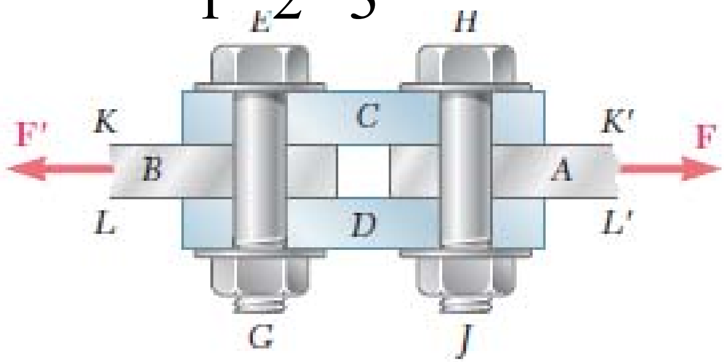


1. 正确地确定挤压面的位置及其上的压力。挤压面即为外力的作用面，与外力垂直；挤压面为半圆弧面时，可将构件的直径截面视为挤压面。



2. 多个铆钉时按均分处理（剪切、挤压），拉伸另计



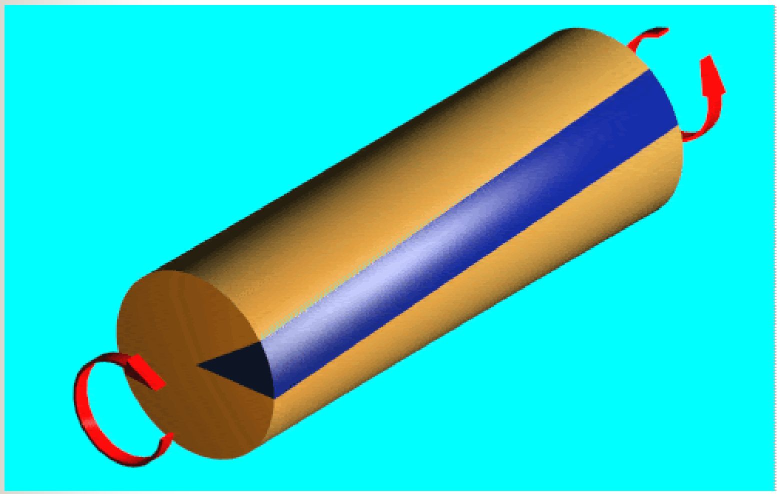


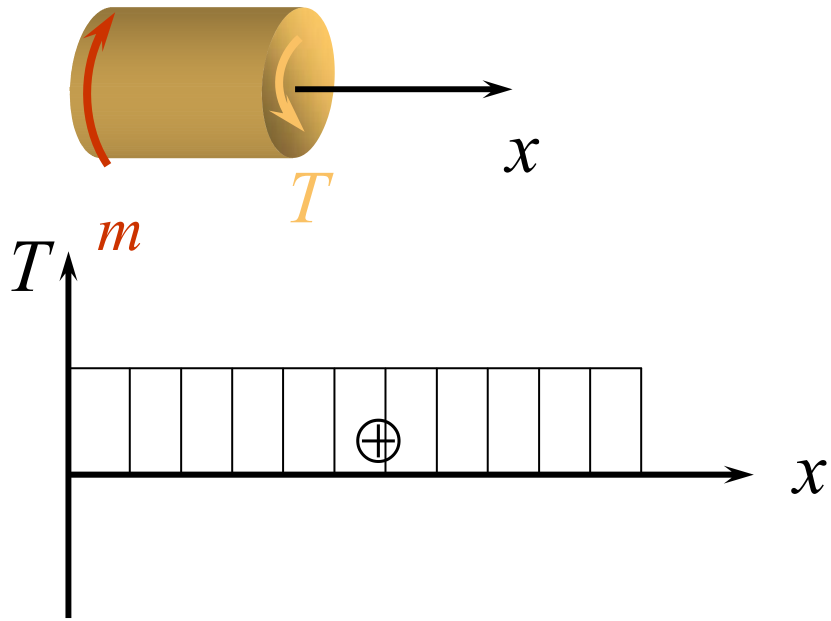
扭转

圆轴或圆管扭转时，其截面上仅有切应力，两截面间将产生相对的转动扭转。

切应力互等定理： $\tau = \tau'$

剪切胡克定律： $\tau = G\gamma$





作扭矩图

扭矩转速关系

$$M = 9549\frac{P}{n} \quad (\mathrm{N{\bullet}m})$$

kW

r/min

扭转切应力公式：

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_P}\rho \qquad \tau = \frac{T}{2\pi R_0^2\delta}$$

扭转变形公式：

$$\phi = \frac{Tl}{GI_P}$$

圆轴线性，圆管均匀

刚度、强度：

强度条件：

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} \le [\tau]$$

刚度条件：

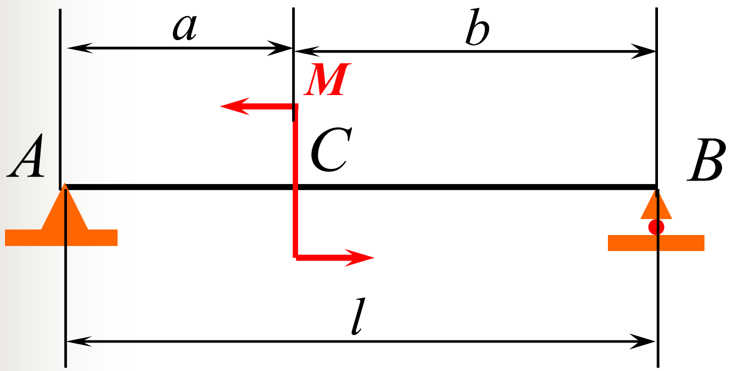
$$\varphi = \frac{T}{GI_P} \times \frac{180}{\pi} \le [\varphi]$$

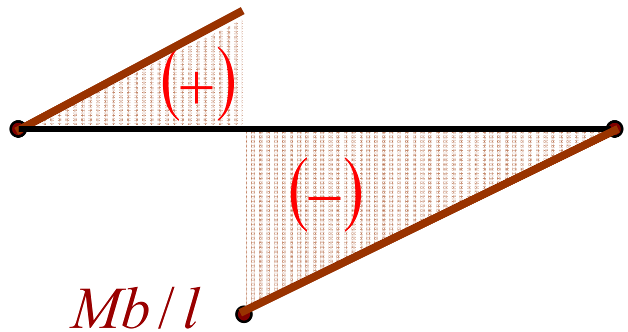
弯曲

梁弯曲时横截面上有两种内力：剪力和弯矩；对应有：剪应力和正应力

符号：　　左上右下，剪力为正；

　　　　　左顺右逆，弯矩为正；





剪力、弯矩与分布载荷间的关系及特点：

外力	无外力		均布载荷		集中力处	集中力偶处
	$q=0$		$q>0$	$q<0$	F C	M_e C
Q图特征	水平直线		斜直线		向下突变	无变化
	$Q>0$	$Q<0$	增函数	减函数	$Q_{S1}-Q_{S2}=F$	
M图特征	斜直线		抛物线		产生折点	向下突变
	增函数	减函数	开口向上	开口向下		$M_1-M_2=M_e$

剪力图和弯矩图

（1）根据剪力方程和弯矩方程作图;

（2）用叠加法作图;

（3）根据内力图的规律作图;

作图步骤

（1）求支座反力;

（2）分段;

（3）列出各段梁剪力方程和弯矩方程

（4）画剪力图和弯矩图

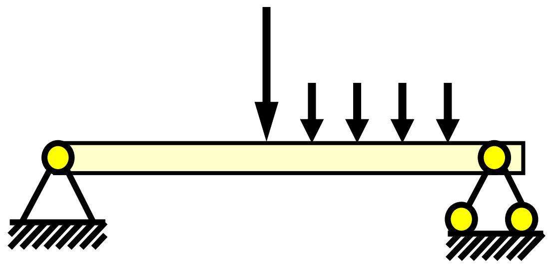
（5）确定最大剪力和最大弯矩及其所在的截面

正应力、剪应力： $\sigma = \dfrac{My}{I_z}$ $\tau = \dfrac{QS_z^*}{I_z b}$

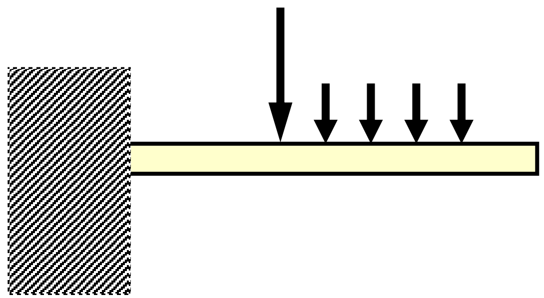
强度条件： $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$ $\tau_{\max} = \dfrac{Q_{\max} S_{z\max}^*}{I_z b} \le [\tau]$

刚度条件： $|w|_{\max} \le [w]$ $|\theta|_{\max} \le [\theta]$

$I_z = \dfrac{\pi D^4}{64}, \dfrac{bh^3}{12}$



$\tau = \dfrac{3Q}{2A}, \dfrac{4Q}{3A}$



梁弯曲变形：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M}{EI_z} \qquad \frac{dM}{dx}=Q \qquad \frac{d^2M}{dx^2}=\frac{dQ}{dx}=q$$

- 求梁变形的方法：积分法，叠加法，能量法
- 用积分法求梁变形的方法和步骤：
  - 求支座反力，列弯矩方程
  - 列出梁的挠曲线近似微分方程，并对其逐次积分；
  - 利用边界条件、连续条件确定积分常数；
  - 建立转角方程和挠度方程；
  - 求最大转角、最大挠度或指定截面的转角和挠度。

计算挠度、转角等的能量方法，静不定梁的求解：

1. 按约束处的已知条件，列四个边界条件即可解析求解。

2. 功能原理 W=V$_\varepsilon$

$$W=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}F_j\delta_j$$

3. 卡氏定理

4. 莫尔积分

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{F_{\rm N}^2(x)}{2EA(x)}{\rm d}x+\int_l\frac{T^2(x)}{2GI_{\rm p}(x)}{\rm d}x+\int_l\frac{M^2(x)}{2EI(x)}{\rm d}x$$

$$\delta=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}$$

$$\delta=\int_l\frac{F_{\rm N}(x)\overline{F}_{\rm N}(x)}{EA}{\rm d}x+\int_l\frac{T(x)\overline{T}(x)}{GI_{\rm p}}{\rm d}x+\int_l\frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}{\rm d}x$$

应力状态 强度理论

任意斜截面上的正应力和切应力(应力圆)

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

最大主应力，最小主应力，最大切应力：

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_{max} \\ \sigma_{min}\end{matrix}\right. = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

平面应力状态下的应力-应变关系

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right)$$

$\alpha = 30^o$ $\quad \varepsilon_{30^o} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{30^o} - \nu\sigma_{-60^o}\right)$

$\alpha = 45^o$ $\quad \varepsilon_{45^o} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{45^o} - \nu\sigma_{-45^o}\right)$

强度分析时

1. 找危险面，
2. 找危险点，
3. 是否属基本变形，是直接用单向强度理论；否（即组合加载时），找危险点处单元体的主应力；
4. 选用强度理论，确定相应的相当应力；
5. 建立强度条件，进行强度校核、设计、计算。

第一强度理论: $\sigma_{r1} = \sigma_1$

第二强度理论: $\sigma_{r2} = \sigma_1 - v\sigma_3$

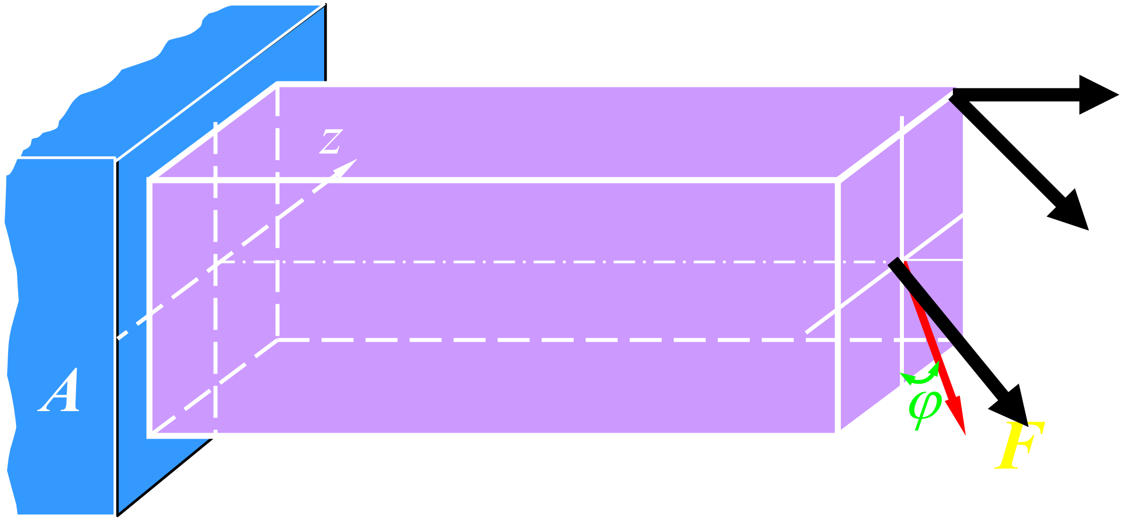
$$\sigma_r \le [\sigma]$$

第三强度理论: $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$

第四强度理论: $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$

组合变形

斜弯组合变形



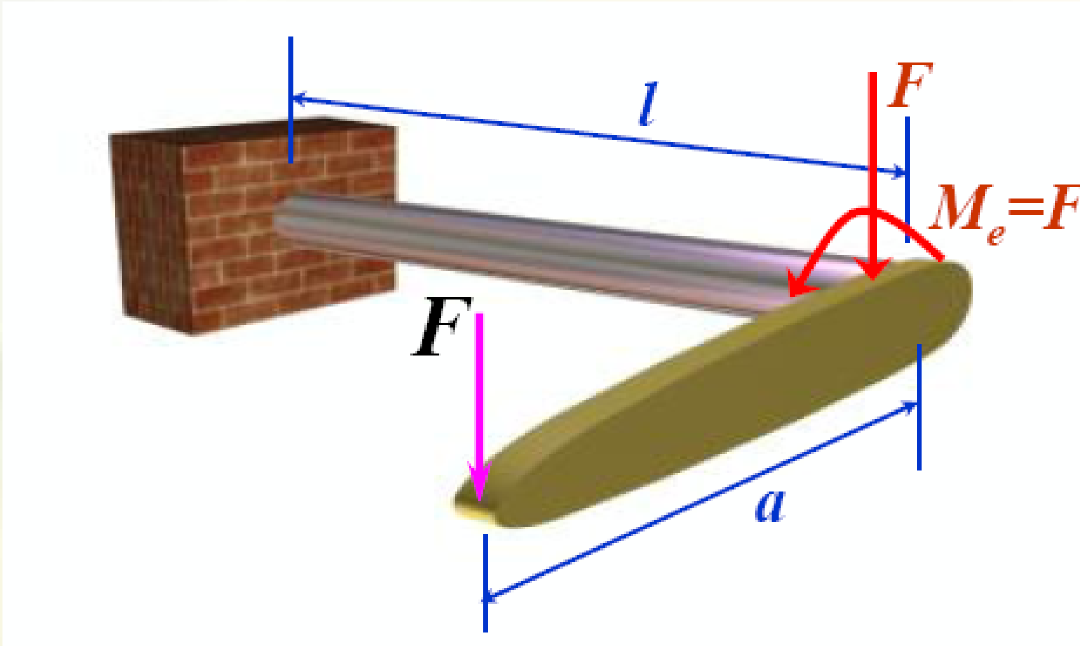
$$\sigma_{t,\max} = \frac{M_{z,\max}}{W_z} + \frac{M_{y,\max}}{W_y}$$

$$\sigma_{c,\max} = -\left(\frac{M_{z,\max}}{W_z} + \frac{M_{y,\max}}{W_y}\right)$$

弯扭组合变形

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_t^2} \le [\sigma]$$

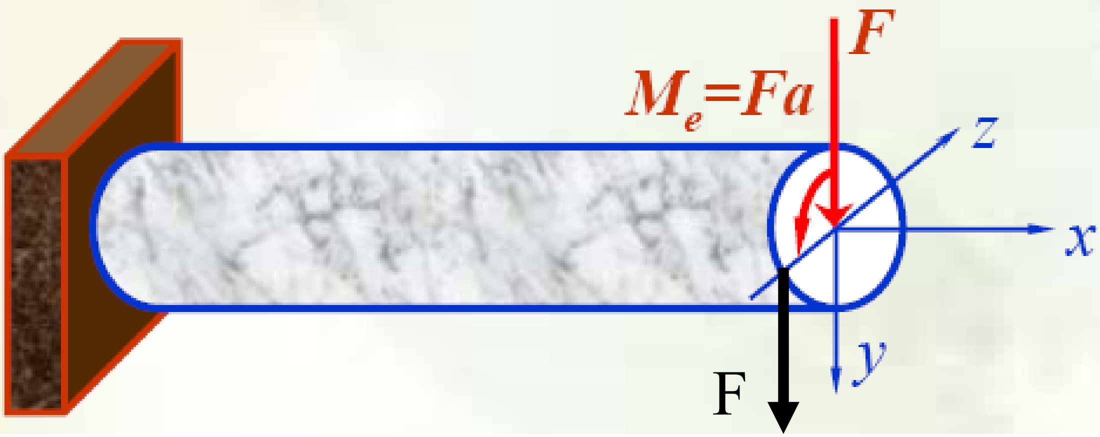
$$\sigma_3 = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \le [\sigma]$$



或

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_t^2} \le [\sigma]$$

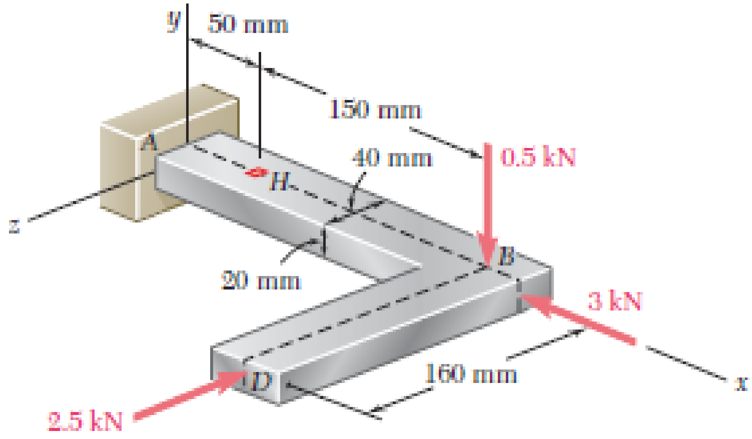
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \le [\sigma]$$



注意拉压弯扭组合时强度公式的应用区别

弯拉（压）、扭剪组合变形

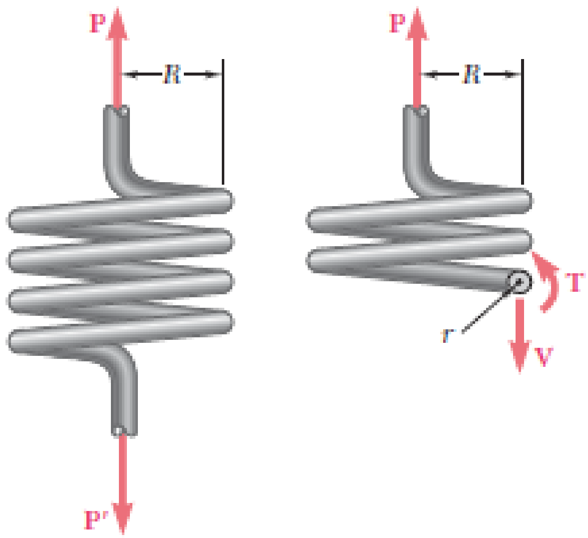
$$\boxed{\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \pm\frac{F_N}{A} \pm \frac{My}{I_z}}$$



$$\sigma_{t\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{N}{A} - \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma_c]$$

$$\boxed{\tau = \frac{P}{A} + \frac{PRr}{GI_\rho}}$$



压杆稳定

临界力计算及安全校核：$P_{cr}/P>n_{st}$

$$\lambda=\frac{\mu L}{i}\ ,\ i=\sqrt{\frac{I}{A}},\mu=0.5,0.7,1,2$$

比较几何柔度与λ_p, λ_s的大小关系

对于大柔度杆，用欧拉公式计算，即：

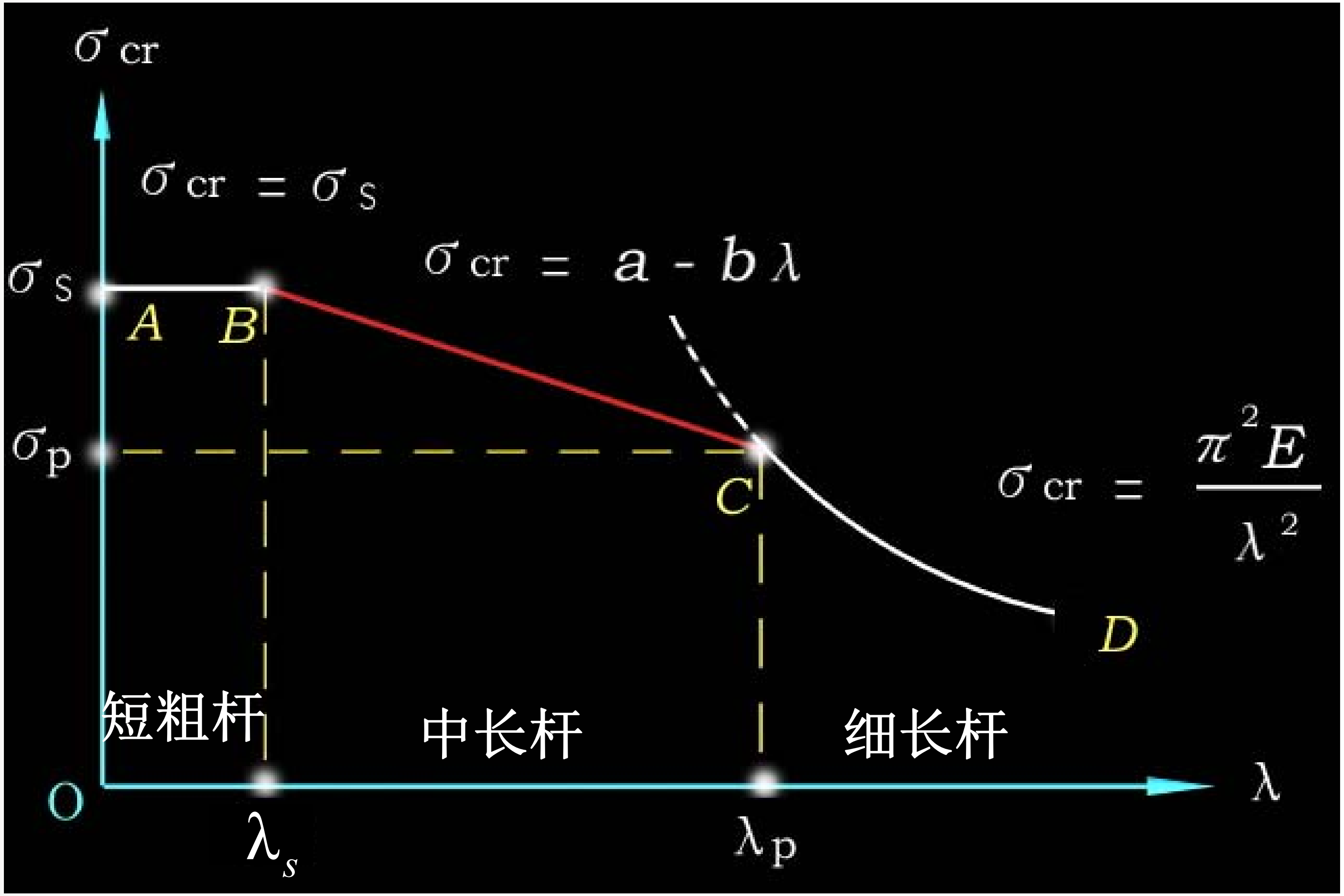
临界力：$\boxed{P_{cr}=\frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu L)^2}}$

临界应力：$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{P_{cr}}{A}$

对于中柔度杆，用经验公式计算，即：

临界力　：$P_{cr}=(a-b\lambda)A$

临界应力　：$\sigma_{cr}=a-b\lambda$


σ_{cr}
$\sigma_{cr} = \sigma_S$
$\sigma_{cr} = a - b\lambda$
σ_S
A
B
σ_p
C
$\sigma_{cr} = \dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
D
短粗杆
中长杆
细长杆
O
λ_s
λ_p
λ

安全系数法，其稳定条件为：$n_{st}=\dfrac{P_{cr}}{P}\geq\left[n_{st}\right]$

$$\lambda=\frac{\mu L}{i},i=\sqrt{\frac{I}{A}},\lambda_p=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}},\lambda_s=\pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_s}}$$

基本步骤：

（1）根据压杆约束条件，确定长度系数

μ（=1，0.5，0.7，2）

（2）确定惯性矩，计算惯性半径

（3）计算柔度值，选择Euler公式或直线或屈服/强度极限等

大柔度杆：$\lambda\geqslant\lambda_p$，$\sigma_{cr}\leqslant\sigma_p$，按欧拉公式计算；

中柔度杆：$\lambda_s\leqslant\lambda<\lambda_p$，$\sigma_{cr}>\sigma_p$，按直线型经验公式计算；

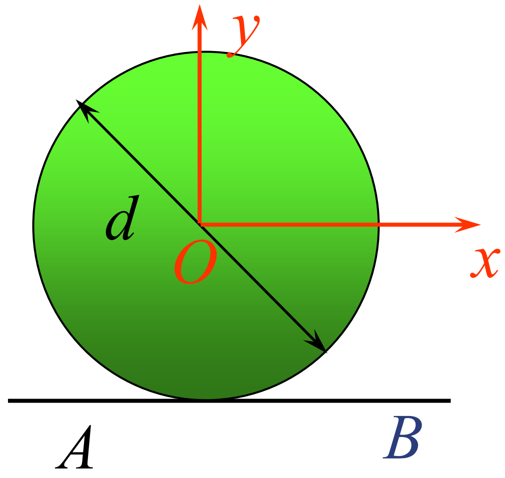
小柔度杆：$\lambda<\lambda_s$，$\sigma_{cr}=\sigma_s$，按强度问题处理。

惯性矩的平行移轴定理和转轴定理

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}, \frac{bh^3}{12}$$

对于其它与上面相关的几何截面，可以通过

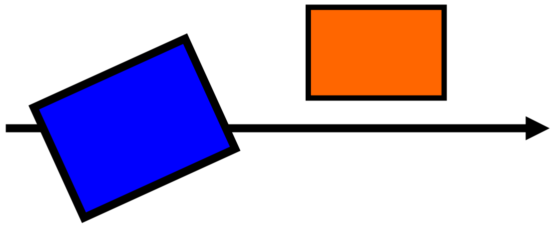
1. 截面加减法计算；
2. 平行移轴定理计算；
3. 转轴定理计算



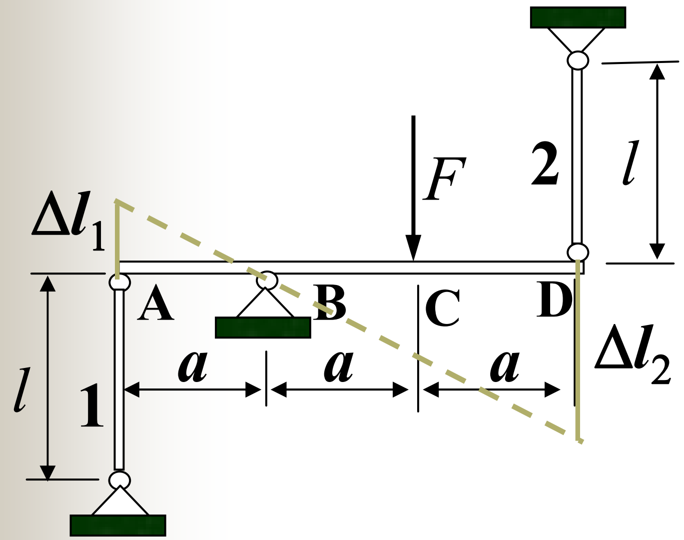
$$I_x = I_{xC} + b^2 A$$

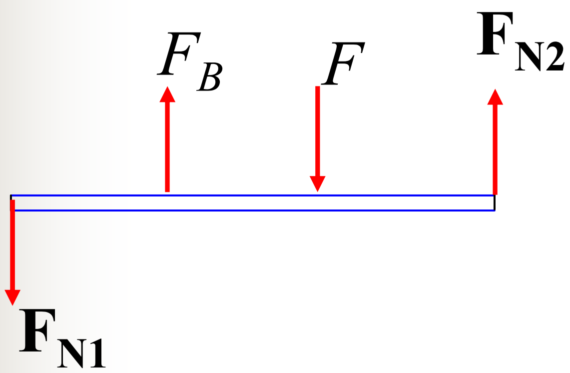
$$I_{x_1} = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

对于对称图形，$I_{xy}=0$



图示结构中，水平梁为刚性梁，杆1和杆2的抗拉刚度相同，均为EA，试求在力作用下杆1和杆2的轴力.





解： 1) 计算各杆轴力(受力图如图)

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_B + F_{N2} - F \cdot a - F_{N1} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad F_{N1} \cdot a - F \cdot a + F_{N2} \cdot 2a = 0$$

2) 变形几何关系(超静定问题)

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

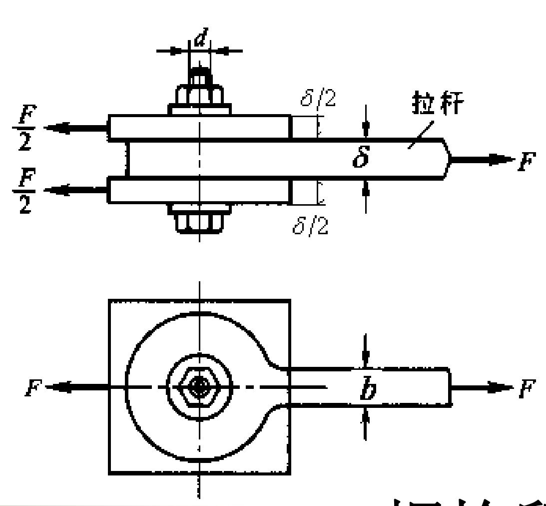
3) 物理关系 $\Delta l_1 = \dfrac{F_{N1} l}{E_1 A_1}$

$$\frac{F_{N2} l}{E_2 A_2} = 2\frac{F_{N1} l}{E_1 A_1} \qquad F_{N2} = 2F_{N1}$$

$$F_{N1} = \frac{1}{5}F \qquad F_{N2} = \frac{2}{5}F$$

一螺栓将拉杆与厚为8㎜的两块盖板相连接。各零件材料相同，许用应力均为$[\sigma]=80\text{MPa}$，$[\tau]=60\text{MPa}$ ，$[\sigma_{bs}]=160\text{MPa}$ 。若拉杆的厚度δ=16mm，拉力F=120kN，试设计螺栓直径d及拉杆宽度b。

解： 1) 按拉伸强度要求设计拉杆的宽度



轴力$F_N=F$, 强度条件为 $\sigma=\dfrac{F_N}{A}=\dfrac{F}{b\delta}\le[\sigma]$

$$b=\frac{F}{\delta[\sigma]}=\frac{120\times10^3}{16\times10^{-3}\times80\times10^6}m=93.75mm$$

2) 按剪切强度要求设计螺栓的直径

螺栓所承受剪力$F_s=F/2$, $\tau=\dfrac{F_s}{A}=\dfrac{F/2}{\pi d^2/4}\le[\tau]$

$$d\ge\sqrt{\frac{2F}{\pi[\tau]}}=\sqrt{\frac{2\times120\times10^3}{\pi\times60\times10^6}}m=35.7mm$$

3) 按挤压强度要求设计螺栓的直径

$$\sigma_{bs}=\frac{F}{A_{bs}}=\frac{F}{d\delta}\le[\sigma_{bs}]$$

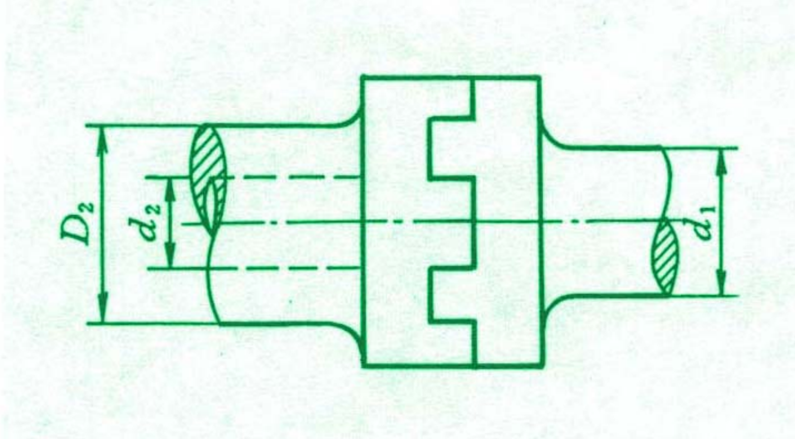
$$d\ge\frac{F}{\delta[\sigma_{bs}]}=\frac{120\times10^3}{16\times10^{-3}\times160\times10^6}m=46.875mm$$

$d=47\text{mm}$，$b=94\text{mm}$

实心轴和空心轴通过牙嵌式离合器连接在一起。已知轴的转速每分钟100转，传递的功率7.5kW，材料的许用应力40MPa。试选择实心轴的直径和内外径比值为1/2的空心轴的外径.

解：轴所传递的扭矩

$$T=9549\frac{P}{n}=9549\times\frac{7.5}{100}=716.2(N\cdot \mathrm{m})$$



实心圆轴的强度条件

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_{t1}}=\frac{16\,T}{\pi d_1^3}\le[\tau]$$

实心圆轴的直径：

$$d_1\ge\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}}=\sqrt[3]{\frac{16\times 716.2}{\pi\times 40\times 10^6}}m=45mm$$

空心圆轴的强度条件

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_{t2}}=\frac{16T}{\pi D_2^3(1-\alpha^4)}\le[\tau]$$

空心圆轴的外径：

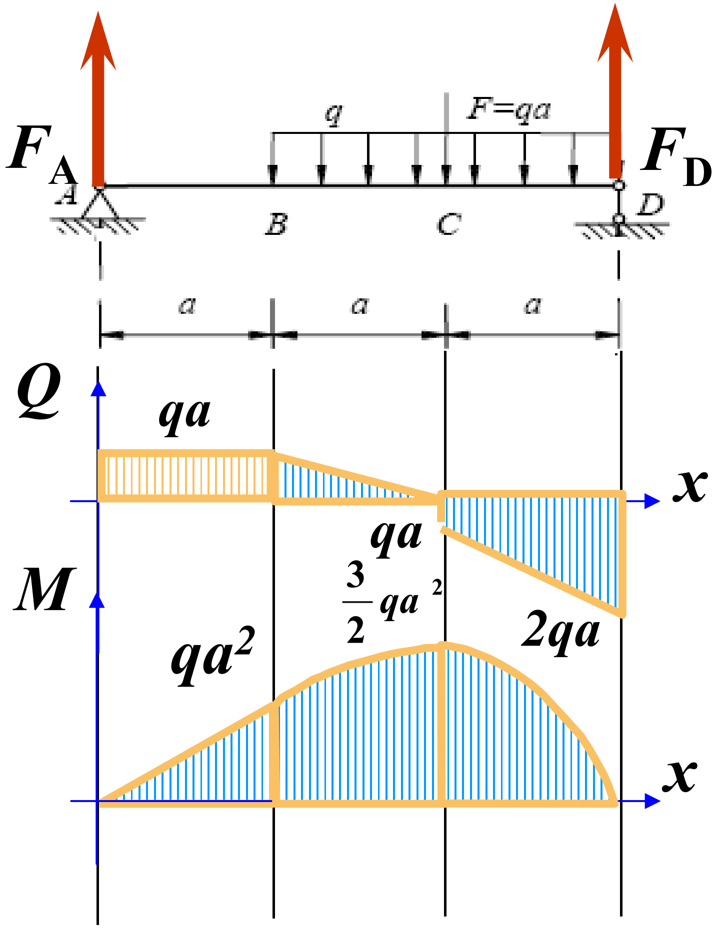
$$D_2\ge\sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}}=\sqrt[3]{\frac{16\times 716.2}{\pi\times 40\times 10^6\times(1-0.5^4)}}m=46mm$$

作图示简支梁的剪力图和弯矩图.

解：(1) 约束力F_A、F_B

$$\sum F_y = 0 \qquad F_A + F_D - qa - q \times 2a = 0$$

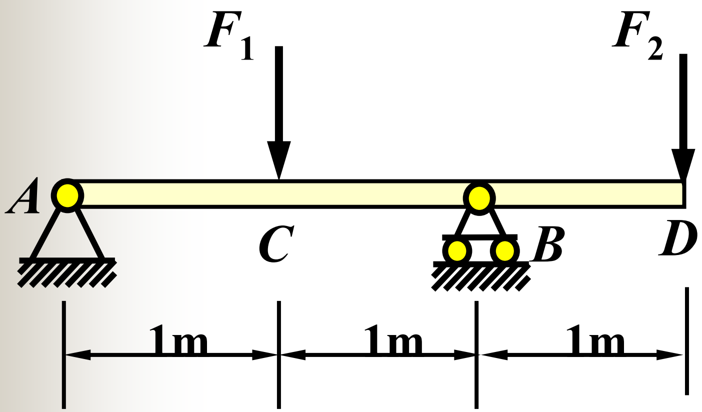
$$\sum M_D = 0 \qquad F_A \times 3a - qa \times a - 2qa \times a = 0$$

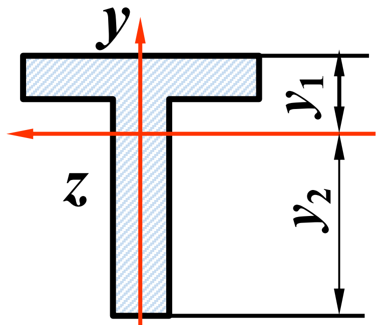


解得：

$$F_A = qa \qquad F_D = 2qa$$

T形截面铸铁梁受力如图，许用拉应力$[\sigma_t] = 40\text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c] = 160\text{MPa}$，已知：$F_1$=12kN, F_2=4.5kN, I_z=765cm^4, y_1=52mm, y_2=88mm 。试校核梁的弯曲正应力强度.





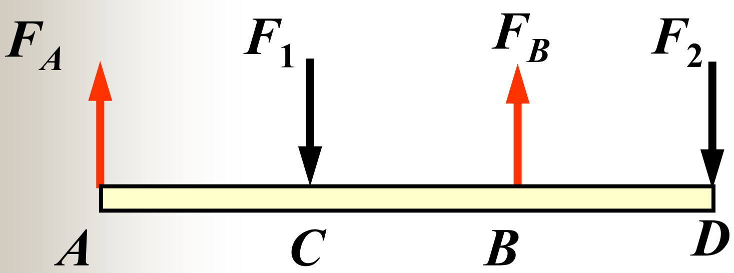
解： (1) 作M图，确定危险截面

a.先求支反力

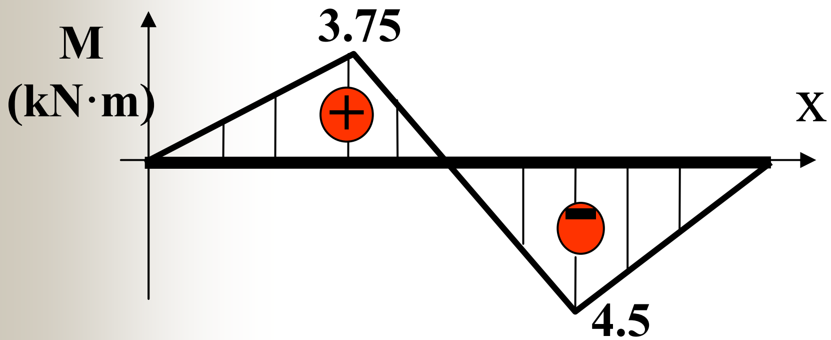
$$\sum F_y = 0 \qquad F_A + F_B - F_1 - F_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0 \qquad F_1 \times 1 - F_B \times 2 + F_2 \times 3 = 0$$

解得： $F_A = 3.75kN \quad F_B = 12.75kN$

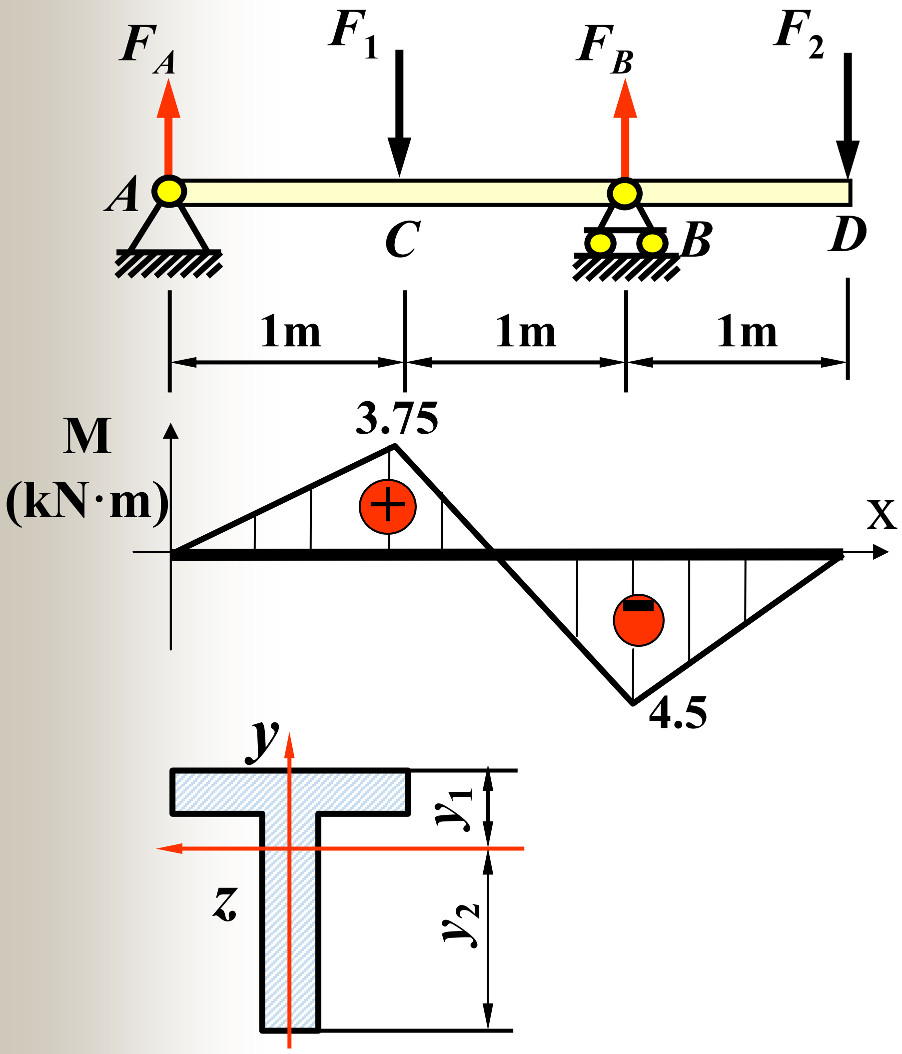


b.作弯矩图如图示



最大正弯矩在截面C $\quad M_C = 3.75\text{kN}\cdot\text{m}$

最大负弯矩在截面B $\quad M_B = 4.5\text{kN}\cdot\text{m}$



I_z=765cm4, y_1=52mm, y_2=88mm

(2) 校核梁的强度

*B*截面（上拉下压）

$$\sigma_{t\max} = \frac{M_B y_1}{I_z} = 30.59\text{MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_B y_2}{I_z} = 51.76\text{MPa} < [\sigma_c]$$

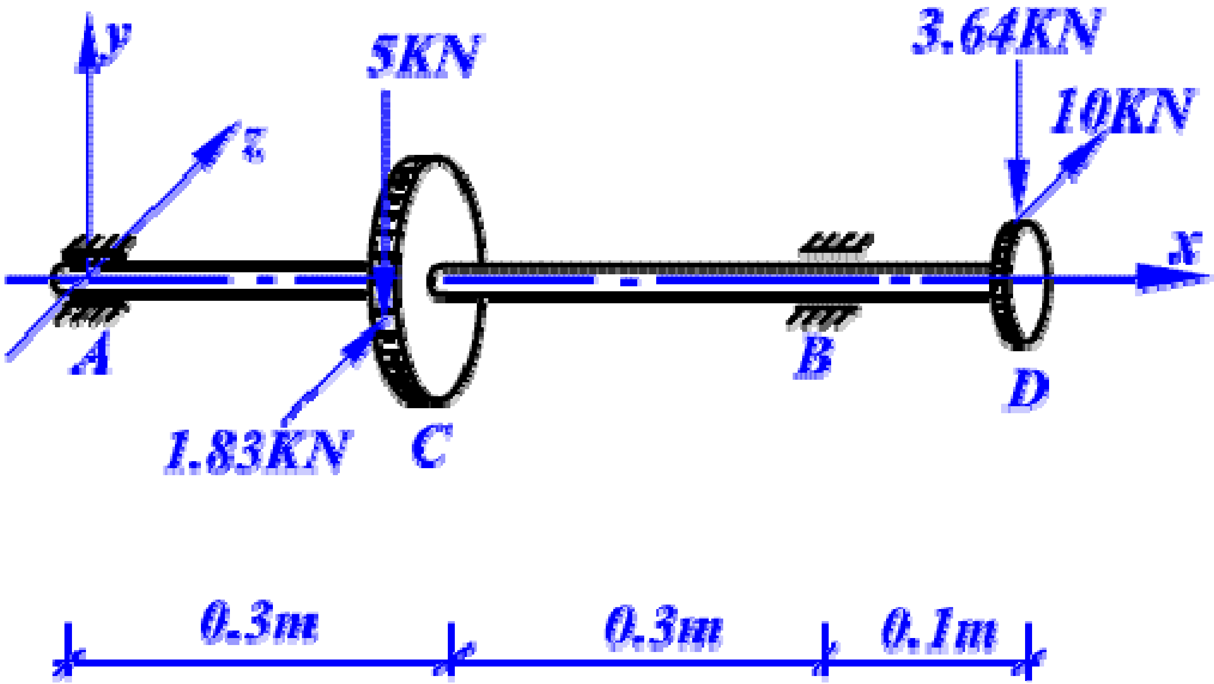
*C*截面（上压下拉）

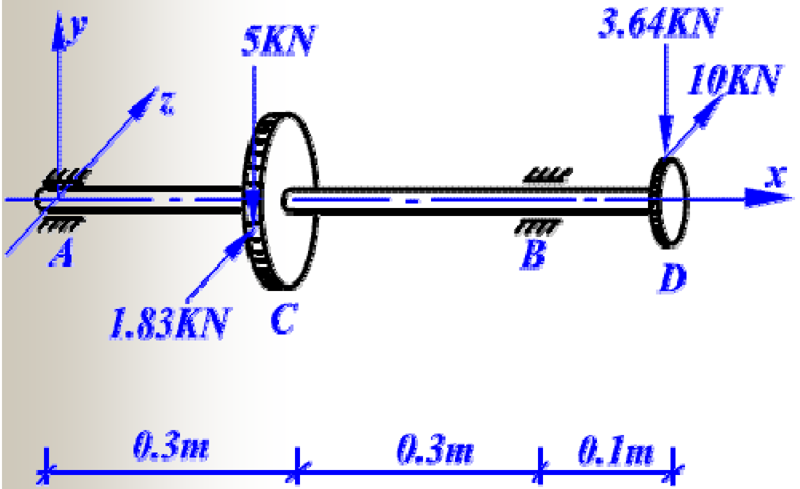
$$\sigma_{t\max} = \frac{M_C y_2}{I_z} = 43.14\text{MPa} > [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c\max} = \frac{M_c y_1}{I_z} = 25.49\text{MPa} < [\sigma_c]$$

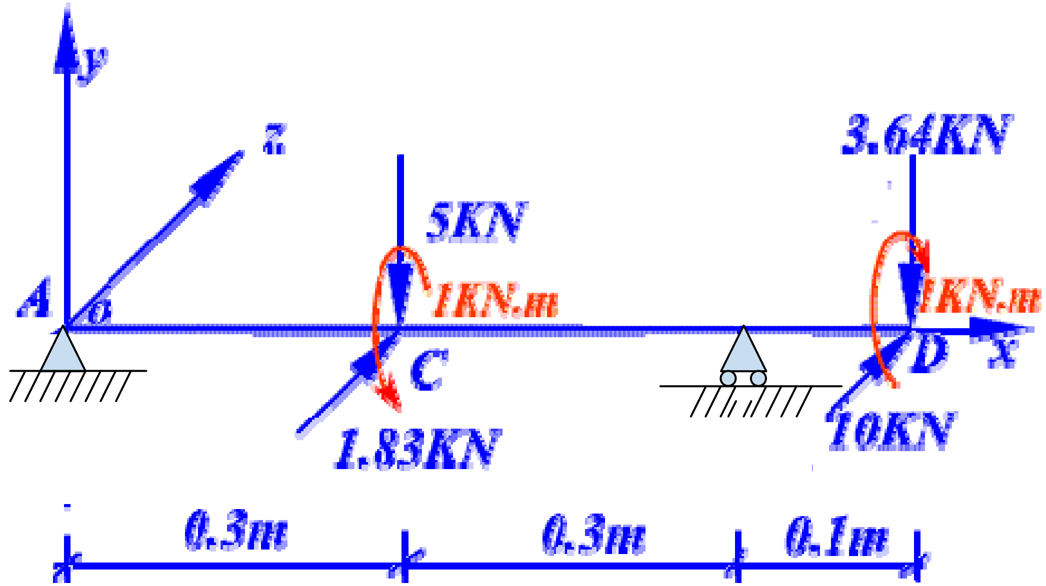
综上: 梁在C截面处不安全

图示钢制实心圆轴,其齿轮C上作用铅直切向力5KN, 径向力1.82KN, 齿轮D上作用有水平切向力10KN，径向力3.64KN。齿轮C的直径d_C=400mm，齿轮D直径d_D=200mm。圆轴的许用应力 $[\sigma]=100MPa$ 试按第四强度理论求轴的直径。

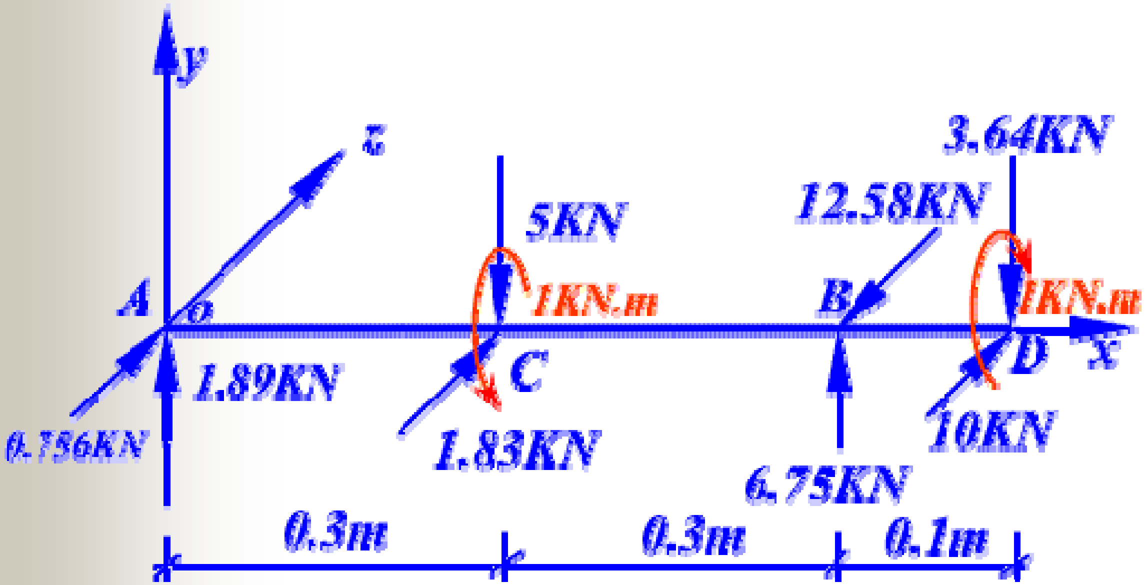




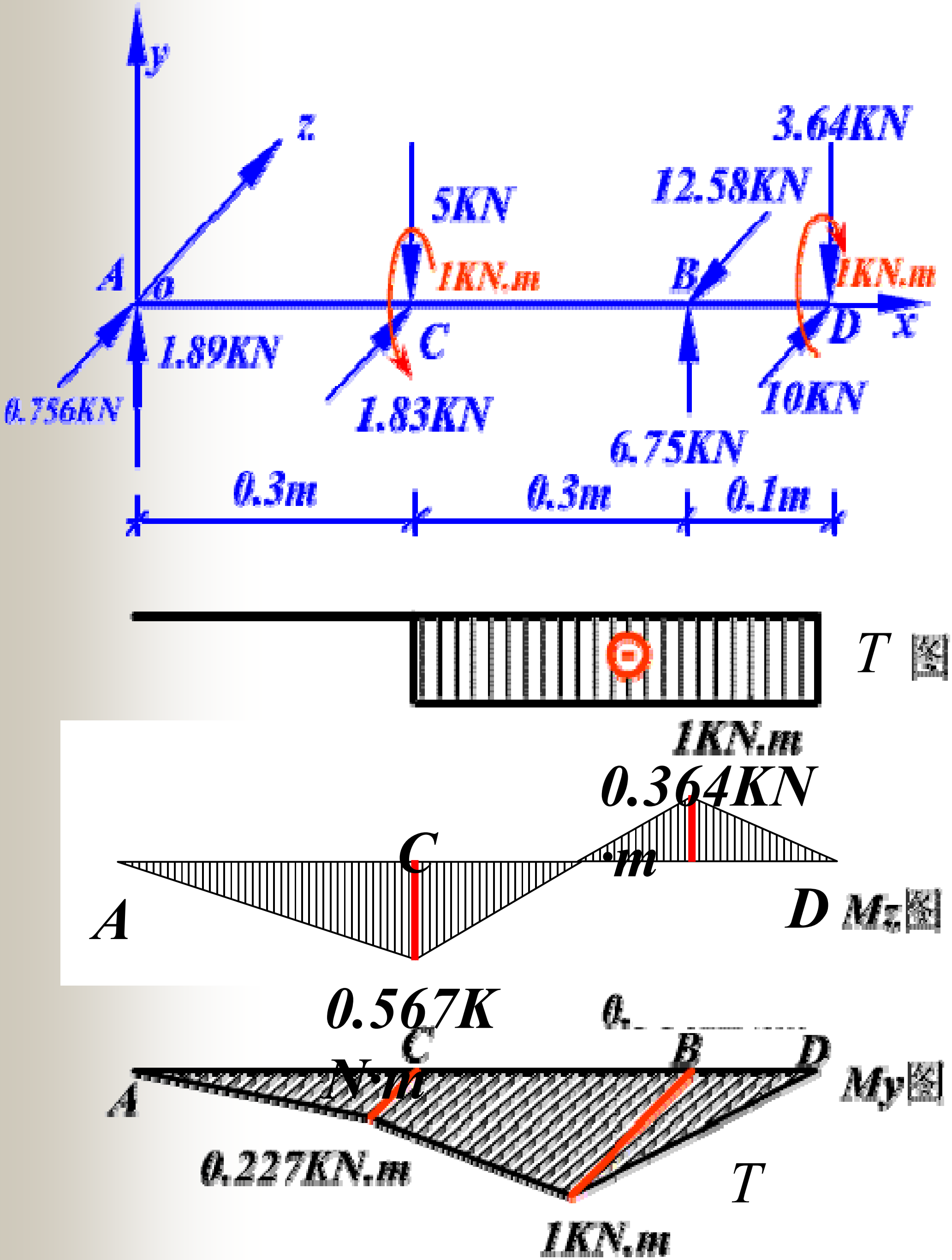
解：载荷的简化，作受力图



受力简图



求出支座反力



内力分析

画出内力图如图

从内力图分析，*B*截面为危险截面。*B*截面上的内力为：

扭矩： $T = 1KN \cdot m$

弯矩： $\begin{cases} M_z = 0.364KN \cdot m \\ M_y = 1KN \cdot m \end{cases}$

合成弯矩为：

$$M_B = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = 1.06KN \cdot m$$

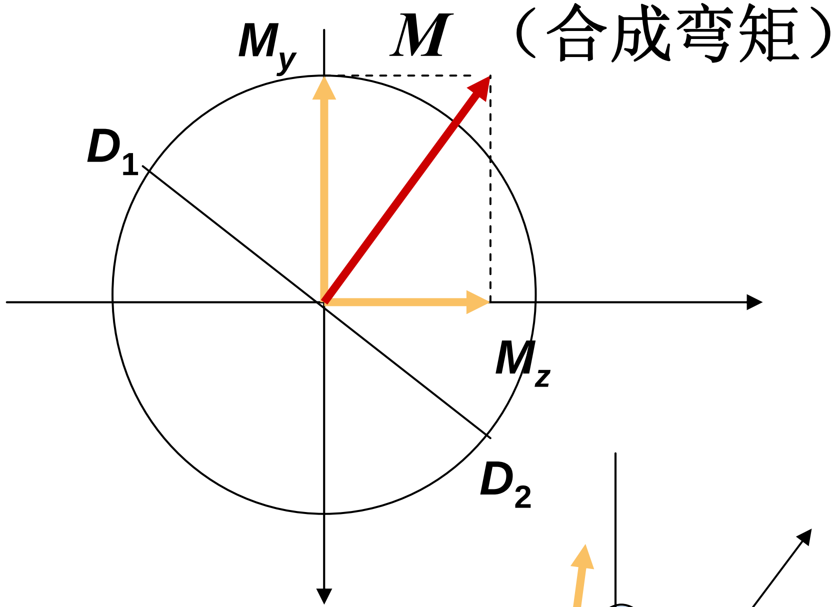
按第四强度理论求所需直径

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W}\sqrt{M^2 + 0.75T^2} \le [\sigma]$$

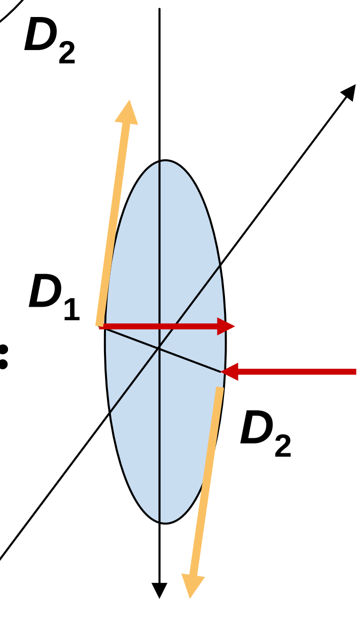
$$\frac{\pi d^3}{32} = W \ge \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{[\sigma]}$$

解出：d=51.9mm

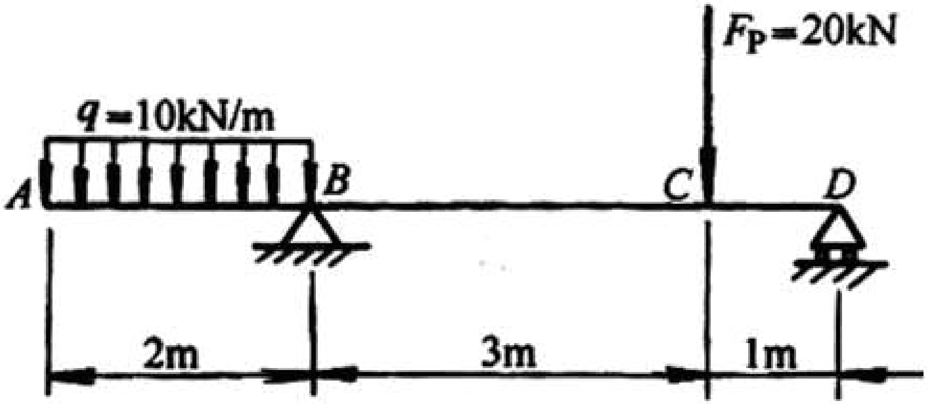
讨论：危险点的位置

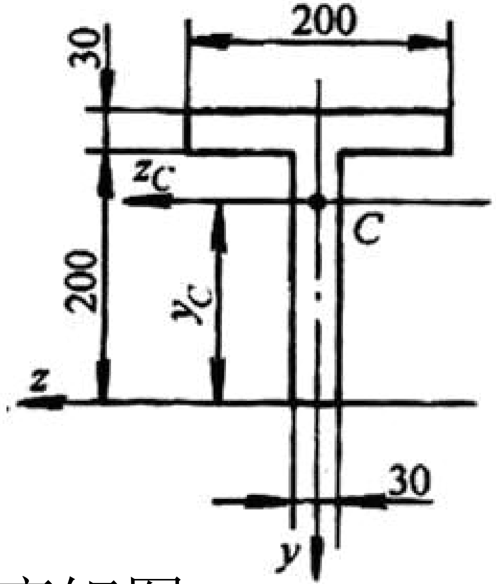


可得：



铸铁T型梁的载荷及横截面尺寸如图所示，C为截面形心。已知I_z=60125000mm^4，y_C=157.5mm，材料许用压应力[σc]=100MPa，许用拉应力[σt]=40MPa。试求：①画梁的剪力图、弯矩图。②按正应力强度条件校核梁的强度。



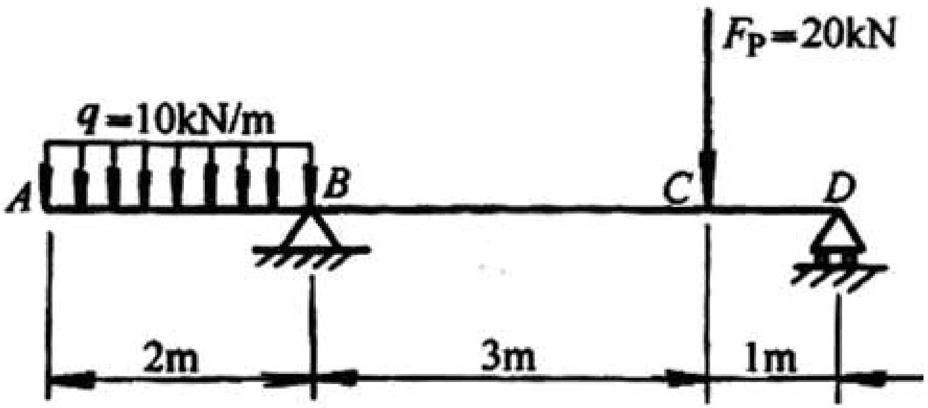


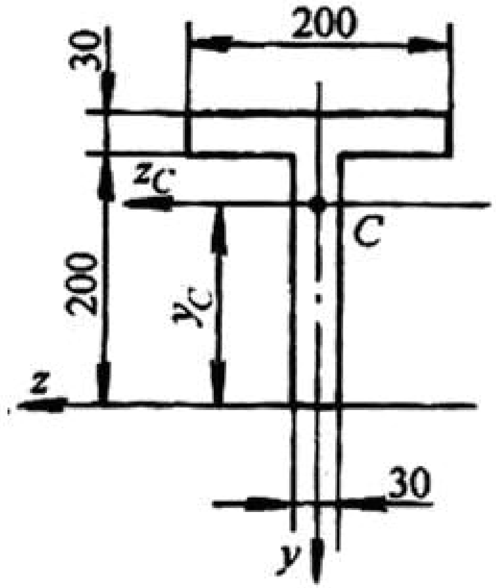
解：①求支座约束力，作剪力图、弯矩图

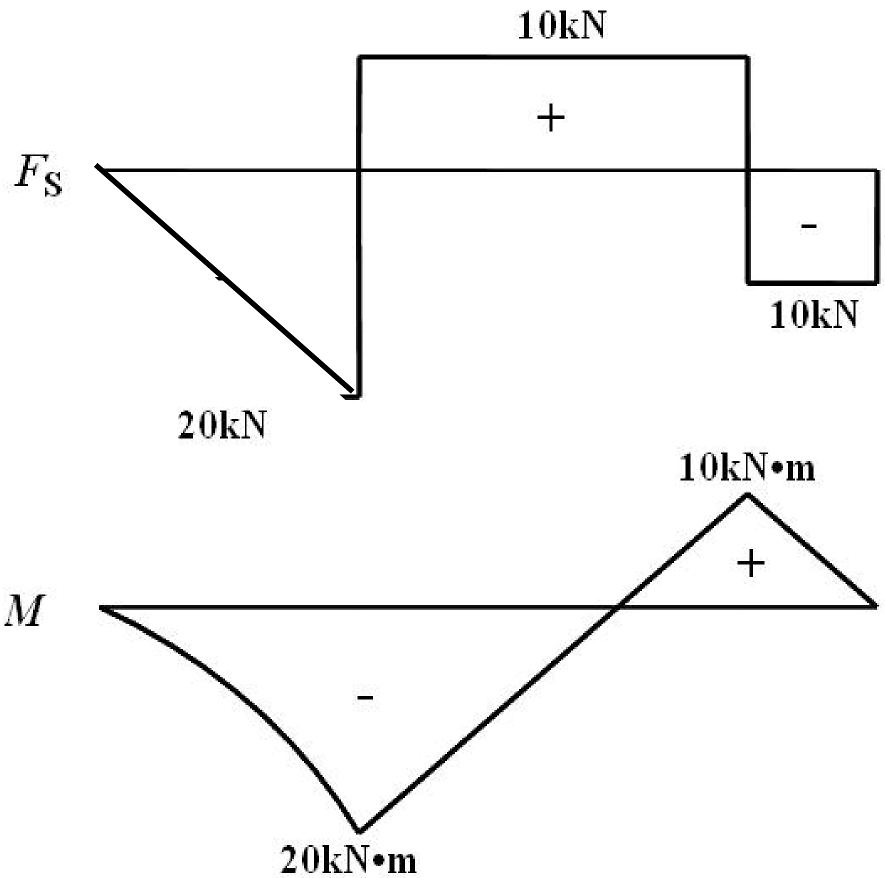
$$\sum M_B(F)=0: \qquad 10\times2\times1-20\times3+F_D\times4=0$$

$$\sum F_y=0: \qquad F_B+F_D-10\times2-20=0$$

解得： $F_B=30\text{kN} \qquad F_D=10\text{kN}$


$F_P=20kN$
$q=10kN/m$
A
B
C
D
2m
3m
1m


200
30
z_C
C
200
y_C
z
30
y


F_S
10kN
+
-
10kN
20kN
M
10kN•m
+
-
20kN•m

②梁的强度校核

$y_1 = 157.5\text{mm}$　　　$y_2 = 230 - 157.5 = 72.5\text{mm}$

拉应力强度校核

B截面

$$\sigma_{\text{tmax}} = \frac{M_{\text{B}} y_2}{I_z} = \frac{20\times10^3 \times 72.5\times10^{-3}}{60125000\times10^{-12}} = 24.1\text{MPa} \le [\sigma_{\text{t}}]$$

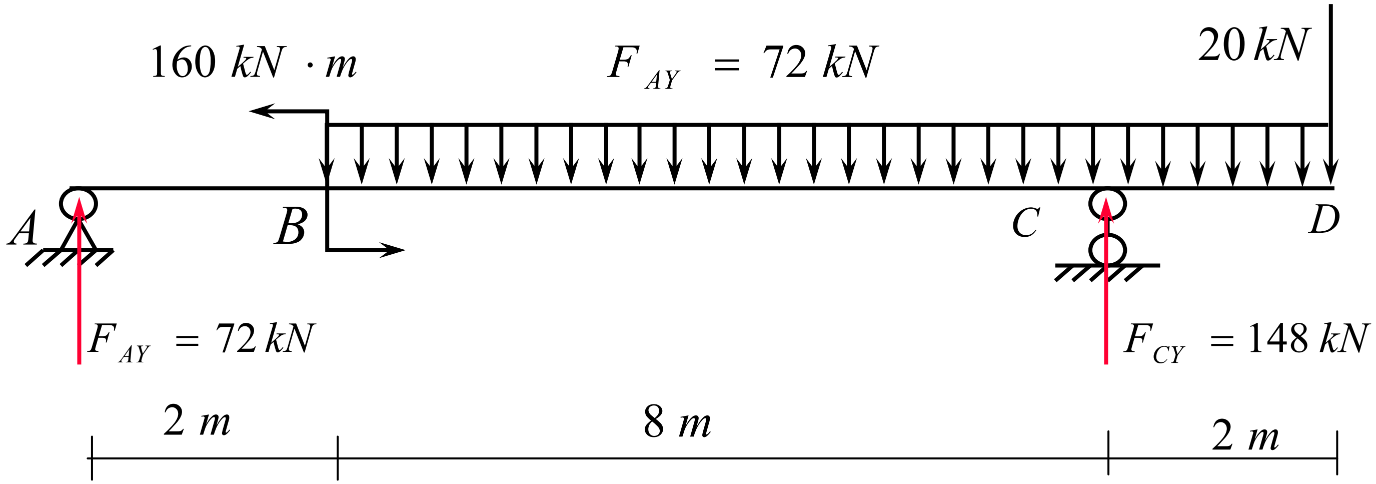
C截面

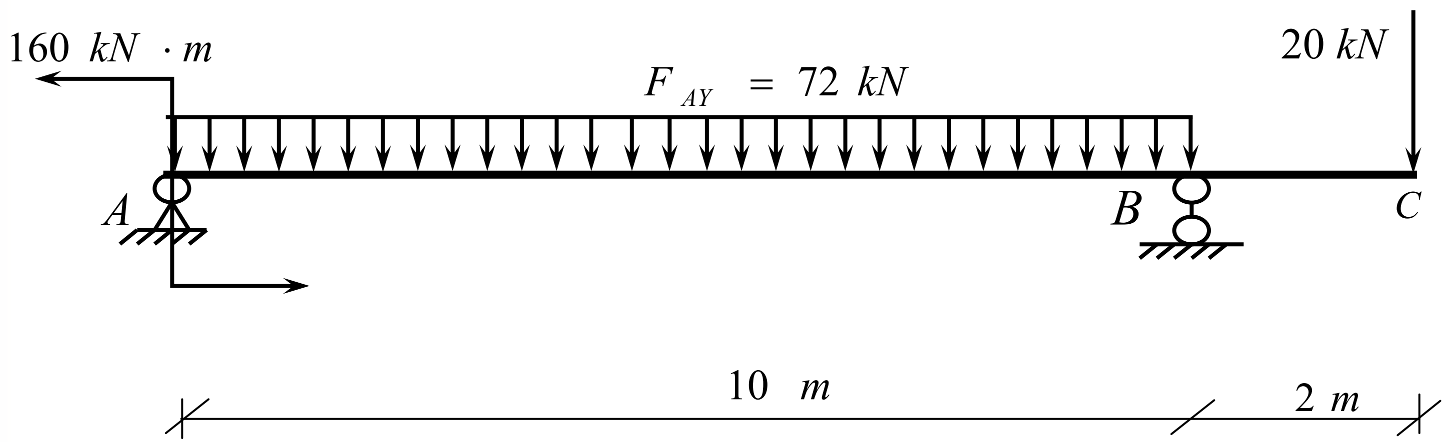
$$\sigma_{\text{tmax}} = \frac{M_{\text{C}} y_1}{I_z} = \frac{10\times10^3 \times 157.5\times10^{-3}}{60125000\times10^{-12}} = 26.2\text{MPa} \le [\sigma_{\text{t}}]$$

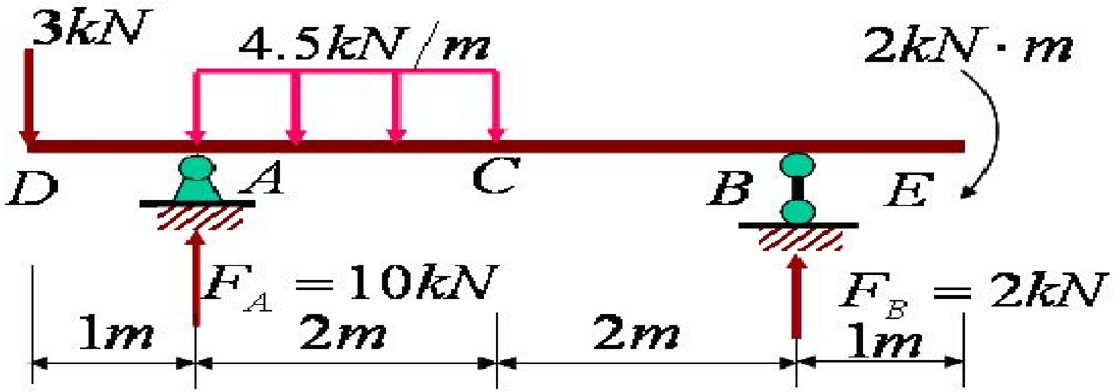
压应力强度校核（经分析最大压应力在B截面）

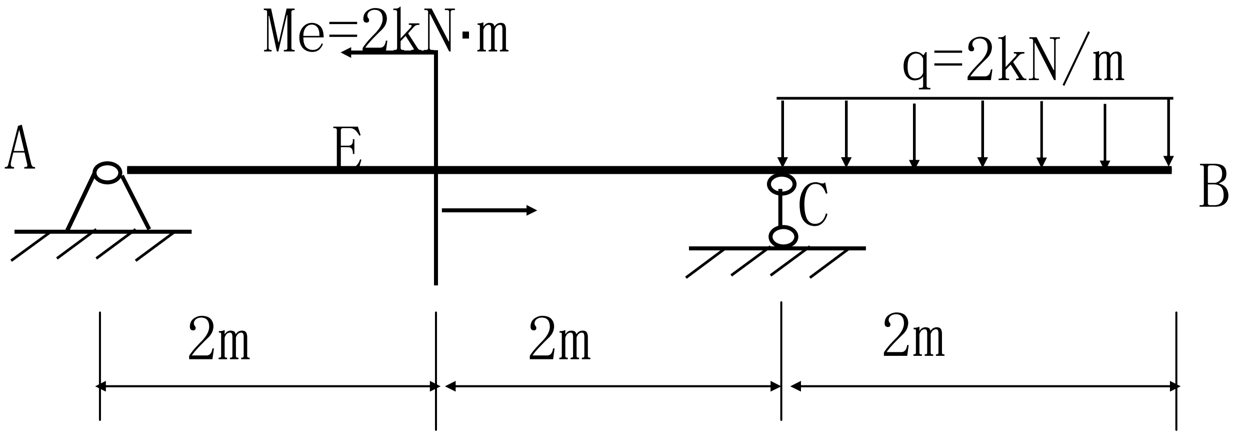
$$\sigma_{\text{cmax}} = \frac{M_{\text{B}} y_1}{I_z} = \frac{20\times10^3 \times 157.5\times10^{-3}}{60125000\times10^{-12}} = 52.4\text{MPa} \le [\sigma_{\text{c}}]$$

所以梁的强度满足要求

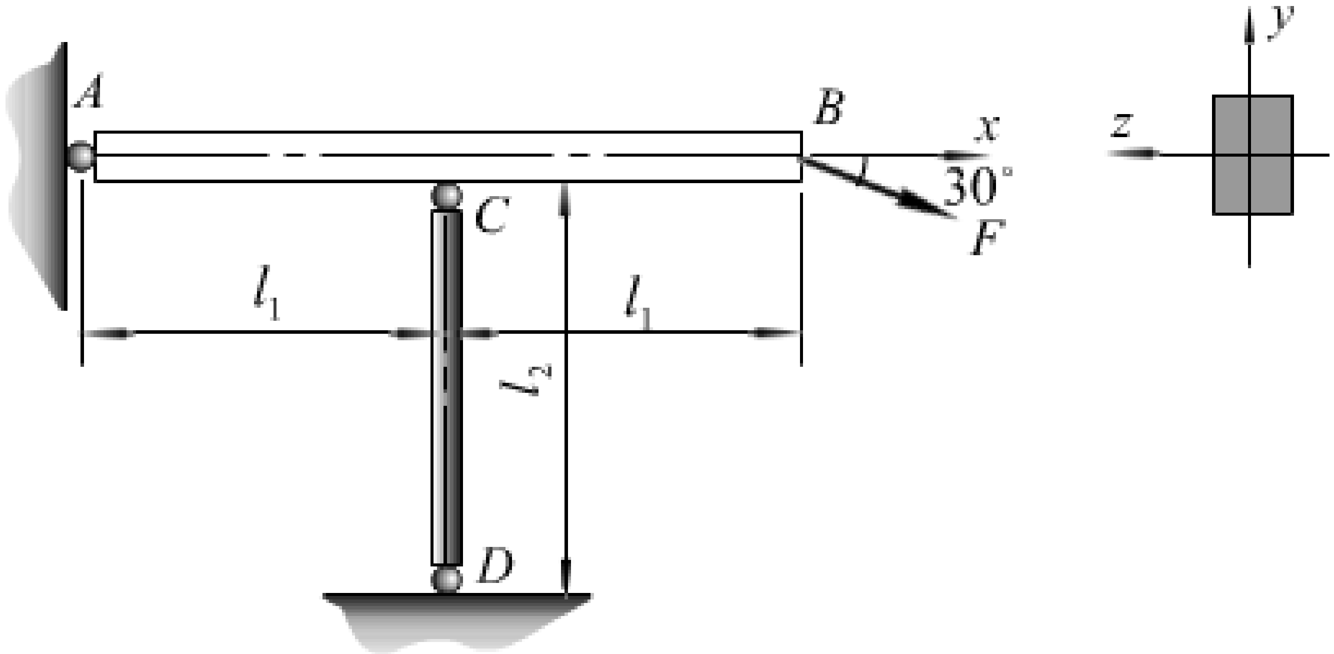

160 kN · m
F AY = 72 kN
20 kN
A
B
C
D
F AY = 72 kN
F CY = 148 kN
2 m
8 m
2 m


160 kN · m
F AY = 72 kN
20 kN
A
B
C
10 m
2 m


3kN
4.5kN/m
2kN·m
D
A
C
B
E
$F_A = 10kN$
$F_B = 2kN$
1m
2m
2m
1m

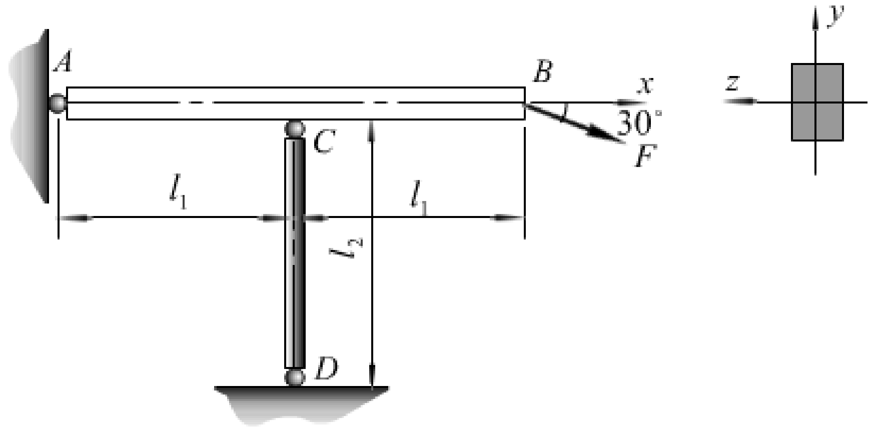

Me=2kN·m
q=2kN/m
A
E
C
B
2m
2m
2m

如图所示结构，杆AB横截面面积$A=21.5\text{cm}^2$，抗弯截面模量$W_z=102\text{cm}^3$，材料的许用应力$[\sigma]=180\text{MPa}$。圆截面杆CD，其直径$d=20\text{mm}$，材料的弹性模量$E=200\text{GPa}$，$\sigma_s=250\text{MPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$\lambda_1=100$，$\lambda_2=50$，如果压杆不为细长杆时采用直线拟合。A、C、D三处均为球铰约束，若已知：$l_1=1.25\text{m}$，$l_2=0.55\text{m}$，$F=25\text{kN}$，稳定安全系数$[n]_{st}=1.8$，校核此结构是否安全。



解：（1）计算

CD杆的临界压力



$$i=\frac{d}{4}=5mm$$

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times 0.55}{5\times 10^{-3}}=110$$

$$\lambda>\lambda_1$$

所以 CD杆为大柔度杆

用欧拉公式计算临界压应力和临界压力

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

,

$$P_{cr}=\sigma_{cr}A=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}A=\frac{3.14^2\times 200\times 10^9}{110^2}\times\frac{3.14\times 20^2\times 10^{-6}}{4}=51KN$$

2. AB杆平衡　有 $\sum M_A = 0$

$$F\sin 30\times 2l_1 = T_C l_1$$

得

$$T_C = 25KN$$

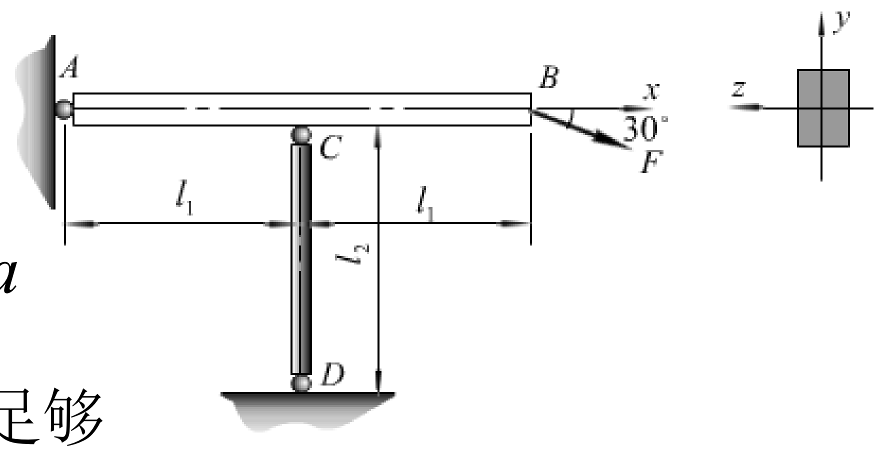
AB杆拉弯组合变形，弯矩图和轴力图下图所示
AB杆最大拉应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_Z} + \frac{F_N}{A} = \frac{125\times 10^3}{8\times 102\times 10^{-6}} + \frac{25\sqrt{3}\times 10^3}{2\times 21.5\times 10^{-4}} = 163.2MPa$$

3．校核

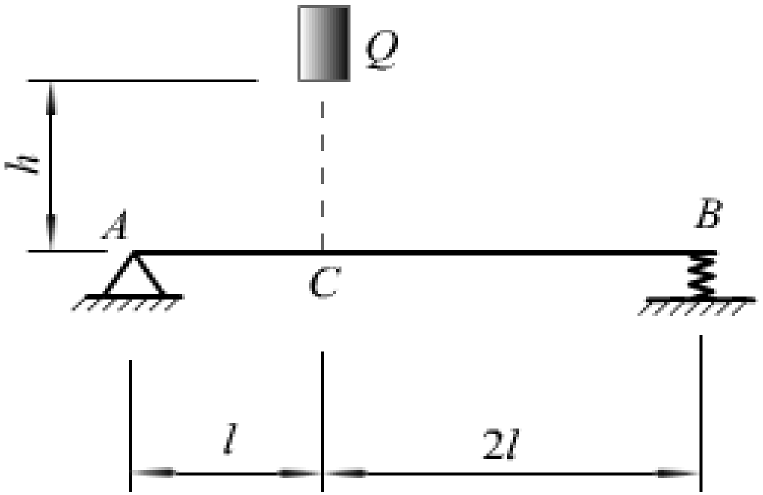
$$\frac{P_{cr}}{T_c} = \frac{51}{25} = 2.05 > [n_{st}] = 1.8$$

$$\sigma_{\max} = 163.2MPa \le [\sigma] = 180MPa$$



梁强度足够　　　压杆稳定性足够

重为Q的物体从高度h处自由落下，若已知梁的抗弯刚度为EI，支座的弹簧刚度为k（产生单位长度变形所需的力），且$k=EI/l^3$，试求C点冲击挠度



解：弹簧引起的静位移为

$$\delta = \frac{1}{3} \times \frac{Q}{3K} = \frac{Ql^3}{9EI}$$

梁的静位移为：

$$\Delta_{st} = \frac{1}{EI}\int_0^l \frac{2}{3}Qx\frac{2}{3}xdx + \frac{1}{EI}\int_0^{2l} \frac{1}{3}Qx\frac{1}{3}xdx + \frac{Ql^3}{9EI} = \frac{5Ql^3}{9EI}$$

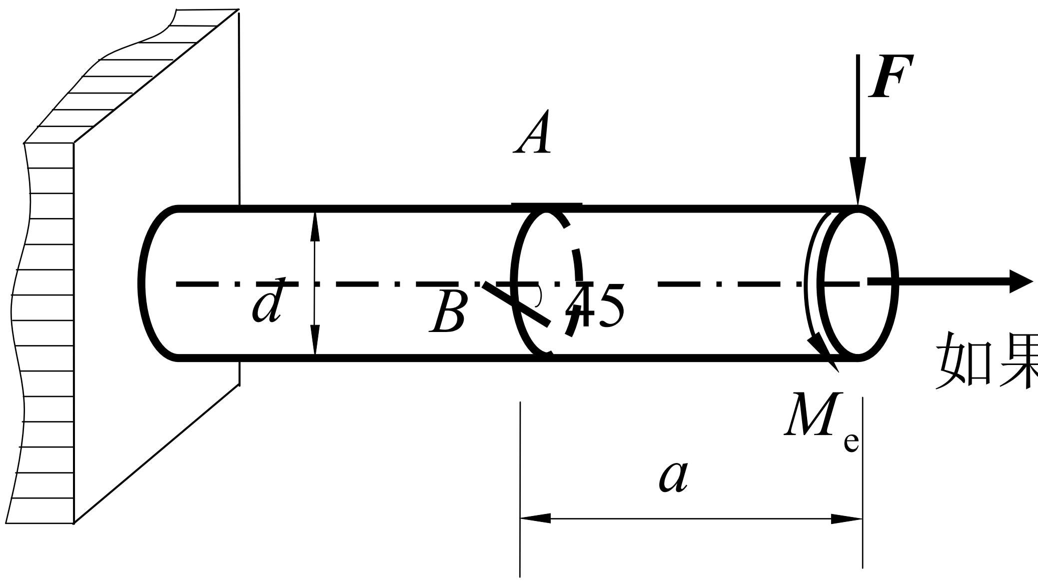
动荷系数

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{5Ql^3 + 18EIh}{5Ql^3}}$$

C点的动挠度

$$\Delta_d = K_d\Delta_{st} = \frac{5Ql^3}{9EI}\left(1 + \sqrt{\frac{5Ql^3 + 18EIh}{5Ql^3}}\right)$$

已知圆轴直径d=20mm，在其上边缘A点处测得纵向线应变$\varepsilon_{0^\circ}=400\times10^{-6}$，在水平直径平面的外侧点B处，测得$\varepsilon_{-45^\circ}=300\times10^{-6}$，已知材料的弹性模量$E$=200GPa，泊松比$\nu$=0.25，$a$=2m。若不计弯曲切应力的影响，试求作用在轴上的载荷F和M_e的大小。

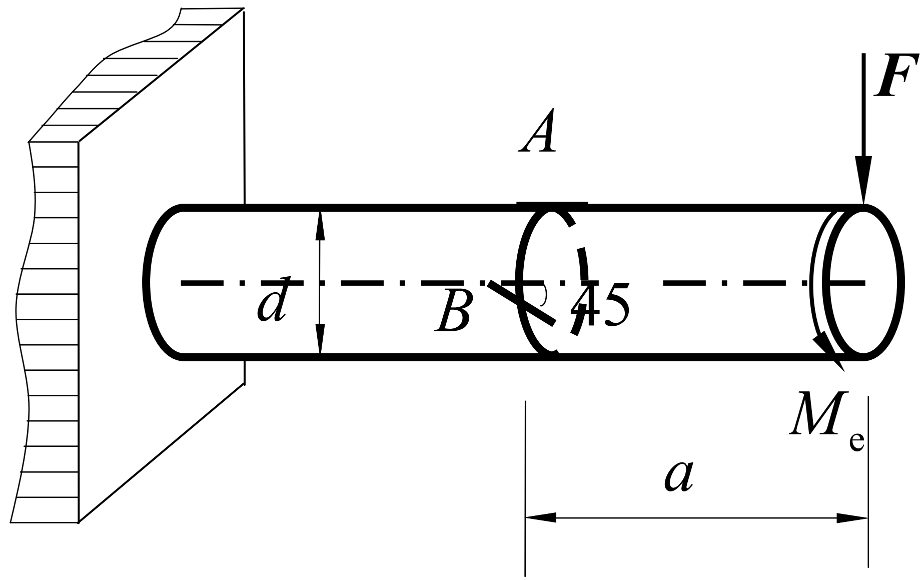


如果F换成拉伸呢？

由广义胡克定理有 $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] = \varepsilon_{45^0}$

根据扭转应力公式：

$$\tau = \frac{M_e}{\frac{\pi}{16} d^3}$$



B点应力状态为纯剪切状态，得到

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_3 = -\tau, \sigma_2 = 0$$

$$\varepsilon_{45^o} = \frac{1+\nu}{E}\tau$$

$$M_e = \frac{\pi}{16} d^3 \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{-45^o} = 75.4 N \cdot M$$

又由应变公式，得到

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{Md}{2EI} = \frac{Fad}{2EI} = 400 \times 10^{-6}$$

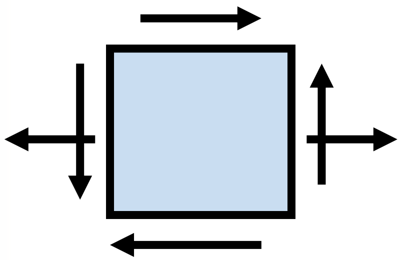
得到 $$F = \frac{2EI}{ad} \times 400 \times 10^{-6} = 31.4N$$

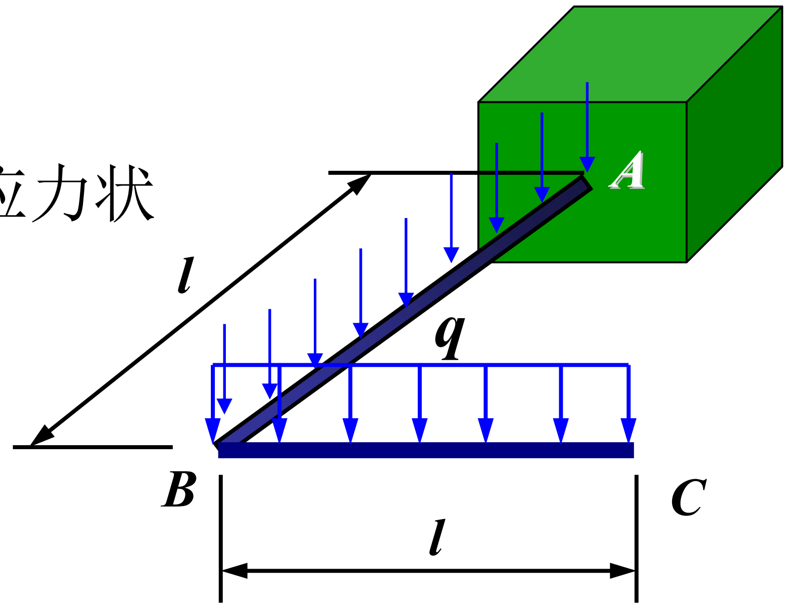
图示等圆截面水平直角折杆，横截面直径为d，承受铅直均布载荷q，材料的弹性模量为E，切变模量为G。试求：1）危险截面的位置；2）画出危险点的应力状态；3）第三强度理论的最大相当应力；4）截面C的铅直位移

1）危险截面的位置：A处

$M_A=ql^2+0.5ql^2$，$T=0.5ql^2$；

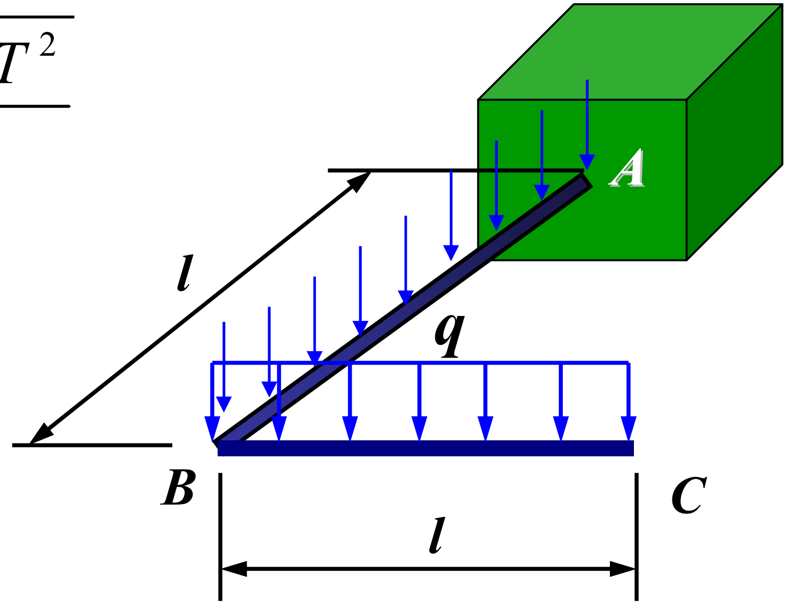
2）画出危险点A上表面的应力状态如图





$$\sigma_{3r} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{M^2 + T^2}{W^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\frac{3}{2}ql^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}ql^2\right)^2}{\left(\frac{\pi d^3}{32}\right)^2}}$$



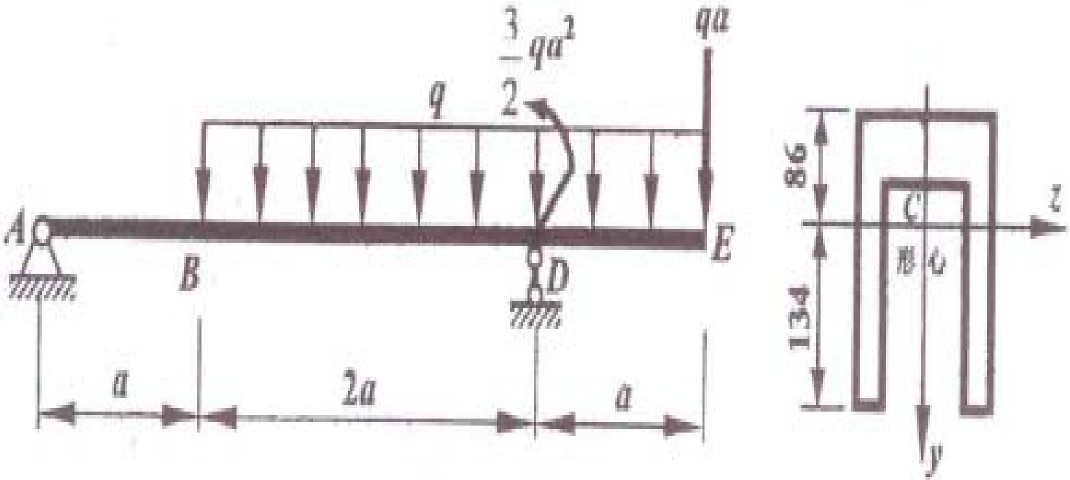
$$\delta = \int_0^l \frac{M(x)}{EI}\overline{M}(x)\mathrm{d}x + \{\int_0^l [\frac{M(x)}{EI}\overline{M}(x)\mathrm{d}x + \frac{T(x)}{GI_p}\overline{T}(x)\mathrm{d}x]\}$$

$$= \int_0^l \frac{qx^2}{2EI}x\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{qlx + 0.5qx^2}{EI}lx\mathrm{d}x + \int_0^l \frac{0.5ql^2}{GI_p}l\mathrm{d}x$$

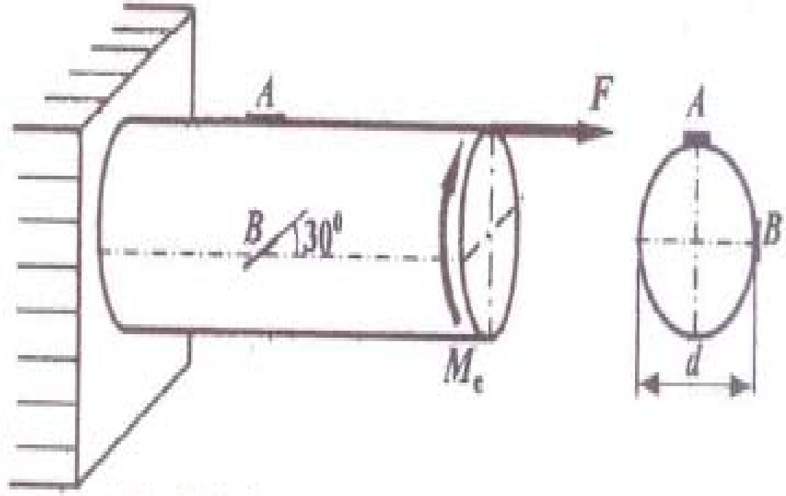
$$= \frac{7ql^4}{12EI} + \frac{ql^4}{2GI_p}$$

一、计算题（20分）

槽型截面铸铁梁荷载及横截面如图所示。已知 a=2m，I_z=5493×10^4mm^4，y_1=134mm，y_2=86mm。铸铁的许用拉应力[σ_t]=40MPa，许用压应力[σ_c]=80MPa。作梁的内力图并用正应力强度条件确定梁的许可荷载集度[q]。



（第一题图）



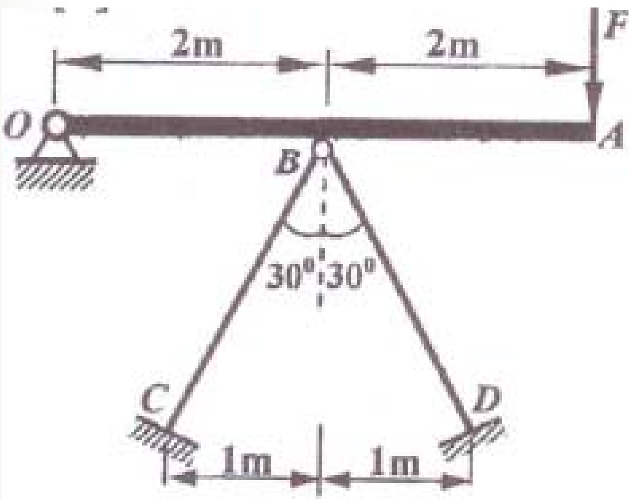
（第二题图）

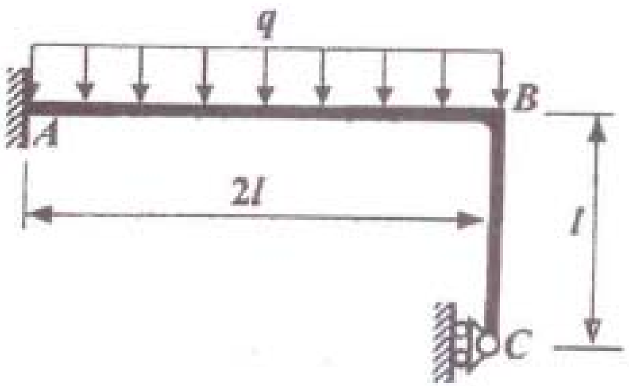
二、计算题（20分）

直径 d=20mm 的实心圆截面杆受作用在圆顶端并沿轴向的偏心拉力 F 和扭转力偶矩 M_e 共同作用，在杆的顶面沿轴向和外侧面沿与轴向成 30° 角方向分别贴有应变片 A 和 B，若测得 A 和 B 的应变分别为 ε_A=500×10^{-6}，ε_B=400×10^{-6}。已知材料的弹性常数 E=200GPa，ν=0.3，许用应力[σ]=160MPa。求荷载 F 和 M_e，并按第三强度理论校核杆的强度。（为了简化计算，本题统一取π=3）

三、计算题（18 分）

Q235 钢制成的空心圆截面杆 BC 和 BD 材料尺寸均相同，两杆只受轴向压力作用。已知杆的外径 D=60mm，内径 d=45mm，B 为球铰链，C、D 为固定端，压杆的弹性常数 E=206GPa，σ_p=200MPa，λ_s=66，直线公式系数 a=304MPa，b=1.12MPa，规定的稳定安全因数 n_{st}=3.0。根据压杆的稳定性条件确定刚性水平梁 OA 上的许可荷载[F]





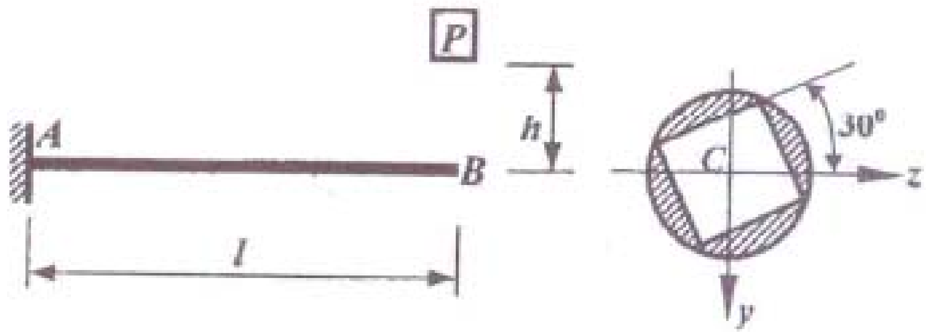
四、计算题（18 分）

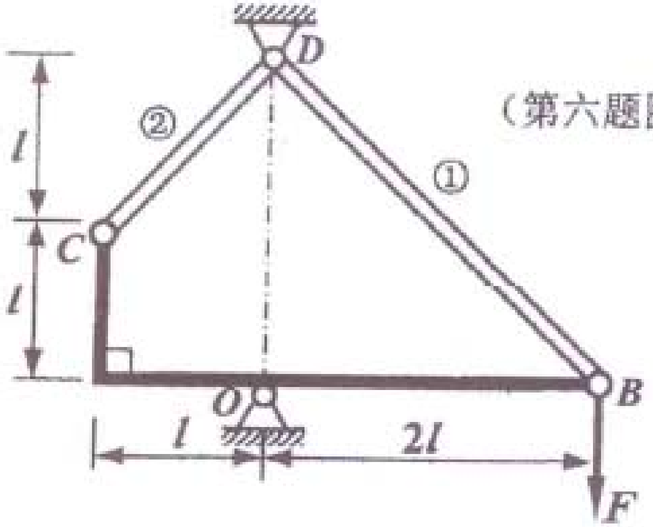
抗弯刚度 EI 为常数的等截面平面刚架结构及受载如图所示，A 为固定端，C 为可动铰。已知荷载集度 q，尺寸 l，求 C 处的铅直位移。

五、计算题（12 分）

重为 P 的重物自高为 h 处自由下落冲击长为 l、弹性模量为 E 的悬臂梁 AB，悬臂梁的横截面是图示直径为 d 的圆挖去一内接正方形而形成的。计算此横截面对 z 轴的惯性矩，并求梁冲击下的最大弯矩。

（$\Delta_{st} = Pl^3/3EI$）





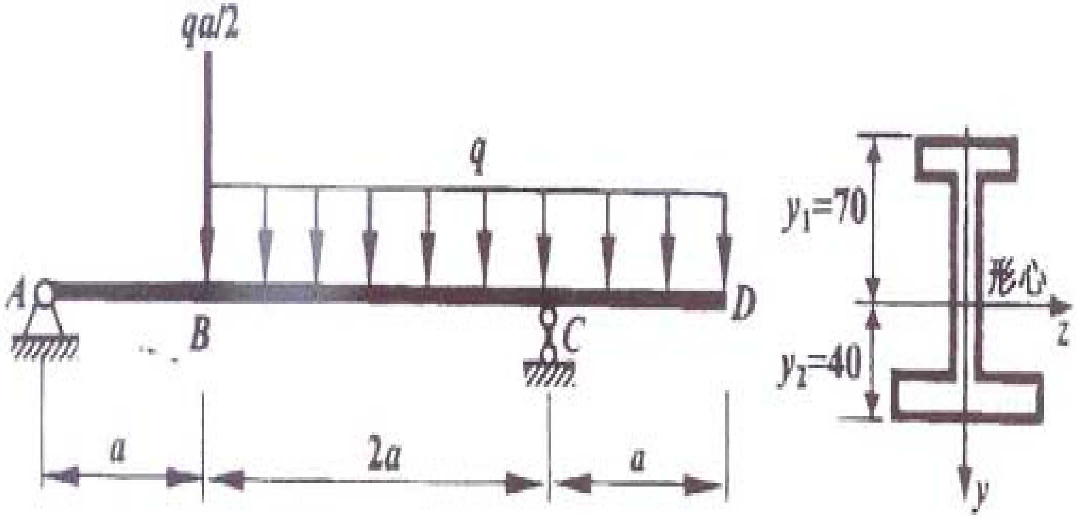
（第六题图）

六、计算题（12 分）

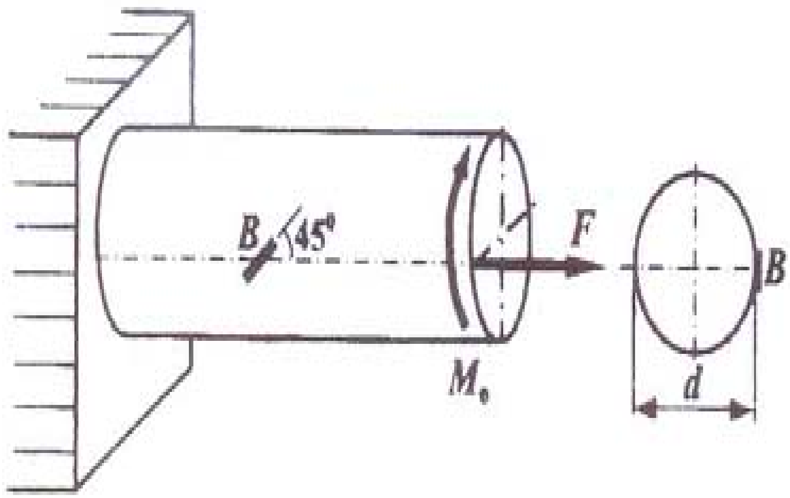
直角折杆 BC 在 O 点铰接，在 BC 两端分别铰接抗拉刚度 EA 完全相同的两杆①和②，两杆在 D 点铰接，尺寸见图。直角折杆视为刚体，结构在 B 点受力 F 作用，求杆①和杆②的轴力。

一、计算题（20 分）

铸铁制成的外伸梁荷载如图所示，梁的横截面为不对称工字型截面，$I_z=45\times10^{-6}m^4$，$y_1=70mm$，$y_2=40mm$。梁的许用拉应力$[\sigma_t]=30MPa$，许用压应力$[\sigma_c]=60MPa$。(1)作梁的剪力图和弯矩图(用 q 和 a 表示各数据)；(2)若 $q=4kN/m$，$a=3m$，按正应力强度条件校核梁的强度。



（第一题图）



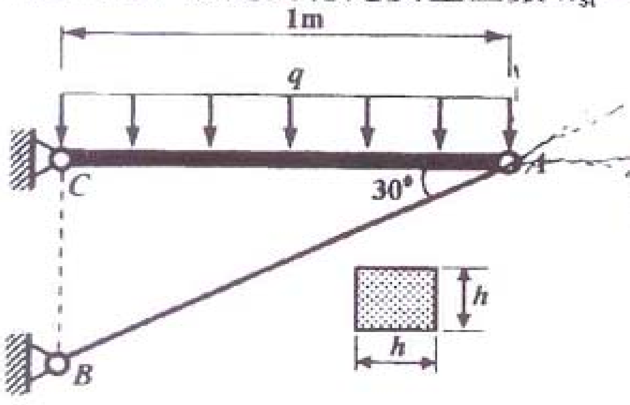
（第二题图）

二、计算题（20 分）

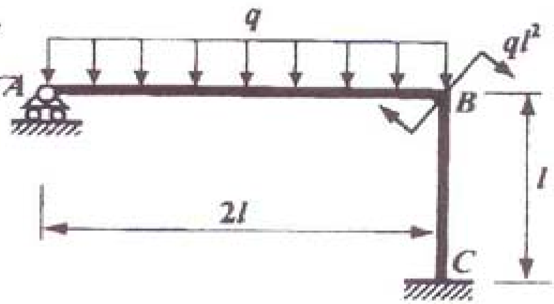
直径 $d=10mm$ 的实心圆截面杆受沿轴向的偏心拉力 F 和扭转力偶矩 M_e 共同作用，且 $M_e=Fd/4$。已知杆材料的弹性常数 $E=200GPa$，$\nu=1/3$，许用应力$[\sigma]=160MPa$。若测得圆杆外表面与纵向成 45^0 角方向 B 处的应变为$\varepsilon_B=420\times10^{-6}$，求荷载 F 和 M_e，并按第四强度理论校核杆的强度。（**注意：本题统一取$\pi=3$**）

三、计算题（18 分）

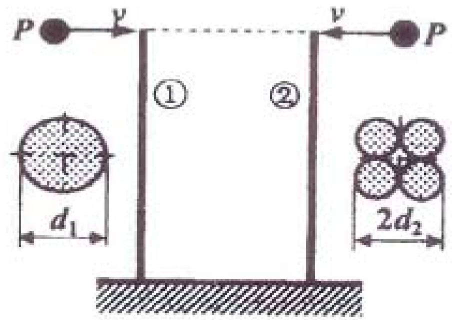
托架结构尺寸及受载如图所示，AC 是刚性杆，AB 是 Q235 钢制成的正方形受压杆件，A、B 均为球形铰。已知 AB 杆横截面边长 h=50mm，弹性常数 E=200GPa，σ_p=200MPa，σ_s=235MPa，直线公式系数 a=304MPa，b=1.12MPa，规定的稳定安全因数 n_{st}=4.0。根据压杆的稳定性条件确定刚性水平梁 AC 上的许可荷载集度[q]。



（第三题图）



（第四题图）



（第五题图）

四、计算题（15 分）

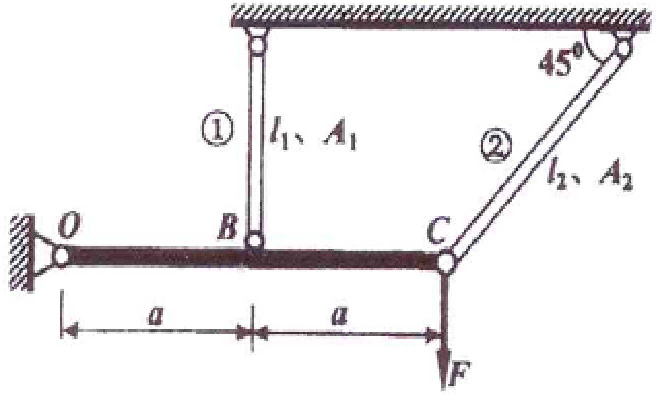
抗弯刚度 EI 为常数的等截面平面刚架结构及受载如图所示，A 为可动铰，C 为固定端。已知荷载集度 q，尺寸 l，求可动铰 A 及固定端 C 处的约束力。

五、计算题（15 分）

图示两根材料和长度相同并固定在地面上的杆①和杆②，杆①横截面是直径为 d_1 的圆，杆②横截面是直径为 d_2 的 4 个圆组合而成，两杆横截面面积相等。若重为 P 的重物以速度 v 分别水平冲击两杆，求两杆形心主惯性矩 I_1 和 I_2 的比值及冲击荷载作用下最大正应力 σ_{max1} 和 σ_{max2} 的比值。（已知 $\Delta_{st}=Pl^3/3EI$）

六、计算题（12 分）

图示刚性杆 OBC 在 O 点铰接，在 B、C 处分别铰接弹性模量 E 相同的两杆①和②，结构在 C 点受力 F 作用。已知②杆长 $l_2=\sqrt{2}l_1$，②杆横截面面积 $A_2=\sqrt{2}A_1$，列出两杆变形的关系式并求杆①和杆②的轴力。



（第六题图）

一、计算题（20 分）

解：内力图如右。（各 7 分，共 14 分）

危险截面：$M_E=8qa^2/9$，$M_C=qa^2/2$

E 截面

$$\sigma_{Et}=\frac{M_E}{I_z}y_2=\frac{8\times4\times9}{9\times45\times10^{-6}}\times40=28.4\text{MPa}\le[\sigma_t]=30\text{MPa}$$

（公式 1 分，结果 1 分，共 2 分）

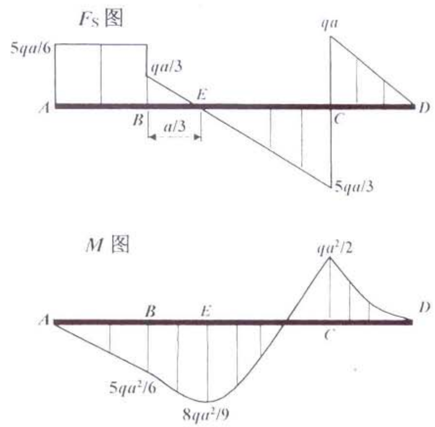
$$\sigma_{Ec}=\frac{M_E}{I_z}y_1=\frac{8\times4\times9}{9\times45\times10^{-6}}\times70=49.8\text{MPa}\le[\sigma_c]=60\text{MPa}$$

（公式 1 分，结果 1 分，共 2 分）

C 截面

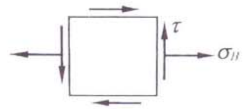
$$\sigma_{Ct}=\frac{M_C}{I_z}y_1=\frac{4\times9}{2\times45\times10^{-6}}\times70=28\text{MPa}\le[\sigma_t]=30\text{MPa}$$

（公式 1 分，结果 1 分，共 2 分）



二、计算题（20 分）

解：将力 F 向横截面形心简化，得到一个力 F 和一个力偶 $M_e=Fd/2$。（1 分）



B 处单元体如图所示，其正应力和切应力分别为

B 处正应力为轴向拉伸和弯曲的的叠加：

$$\sigma_B=\frac{F}{A}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}}+\frac{M_z}{\frac{\pi d^3}{32}}=\frac{20F}{\pi d^2}$$

（两个应力公式分别为 2 分和 3 分，共 5 分）

切应力 $$\tau=\frac{M_e}{W_p}=\frac{M_e}{\frac{\pi d^3}{16}}=\frac{16M_e}{\pi d^3}=\frac{4F}{\pi d^2}$$ （应力公式为 3 分）

由应力状态分析可知：$\sigma_{45^\circ}=\frac{1}{2}\sigma_B+\tau$，$\sigma_{-45^\circ}=\frac{1}{2}\sigma_B-\tau$ （两个式子各 2 分，共 4 分）

由广义胡克定律有：$\sigma_{45^\circ}-\nu\sigma_{-45^\circ}=E\varepsilon_B$ （2 分）

求得 $F=2.1\text{kN}$ （1 分） 于是 $M_e=52.5\text{Nm}$ （1 分）

危险点的相当应力为 $\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma_B^2+3\tau^2}=\sqrt{140^2+3\times28^2}=148.2\text{MPa}<[\sigma]$ （公式 2 分结果 1 分，共 3 分）

三、计算题（18 分）

解：由平衡方程求得压杆的轴力为，$F_{AB}=ql_{AC}$ （3 分）

压杆的惯性半径为 $i=\frac{h}{2\sqrt{3}}=\frac{25}{\sqrt{3}}\text{mm}$ （公式 1 分，结果 1 分，共 2 分）

相当长度 $\mu l_{AB}=1\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\text{m}$ （公式 1 分，结果 1 分，共 2 分）

压杆的柔度为 $\lambda=\frac{\mu l_{AB}}{i}=80$ （公式 1 分，结果 1 分，共 2 分，直接计算柔度共 6 分）

材料的固有柔度值 $\lambda_p = \sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = 100$ （公式1分，结果1分，共2分）

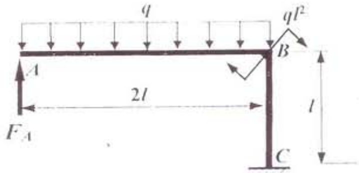
$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b} = 62$$ （公式1分，结果1分，共2分）

$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$ 属于中柔度杆，用经验公式 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$ 计算临界应力。

临界荷载为 $F_{cr} = \sigma_{cr} A = (a - b\lambda)A = (304 - 1.12 \times 80) \times h^2 = 536\text{kN}$ （公式1分，结果1分，共2分）

$n = \dfrac{F_{cr}}{F_{AB}} \geq n_{st}$ （2分） 求得 $[q]$=134kN/m （1分）

四、计算题（15分）



解：解除 A 处约束，代之以约束力 F_A，得到相当系统。 （2分）

由卡氏定理有 $\Delta_{Ay} = \dfrac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_A} = \displaystyle\int_{3l} \frac{M(x)}{EI} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F_A} \mathrm{d}x$ （3分）

$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{2l} \left(F_A x - \frac{qx^2}{2}\right) \cdot x\mathrm{d}x + \int_0^l (2F_A l - ql^2) \cdot 2l\mathrm{d}x\right]$$ （6分）

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{20}{3} F_A l^3 - 4ql^4\right] = 0$$ 解得 $F_A = \dfrac{3}{5} ql$ （1分）

由平衡方程求得 C 处的约束力为 $F_{Cx} = 0$，$F_{Cy} = \dfrac{7}{5} ql$，$M_C = \dfrac{1}{5} ql^2$ （结果各1分，共3分）

五、计算题（15分）

解：$\dfrac{\pi d_1^2}{4} = 4\dfrac{\pi d_2^2}{4}$ 解得 $d_1\ 2d_2$ （1分）

惯性矩 $I_1 = \dfrac{\pi d_1^4}{64} = \dfrac{16\pi d_2^4}{64}$，$I_2 = 4\left[\dfrac{\pi d_2^4}{64} + \dfrac{\pi d_2^2}{4} \cdot \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2\right] = \dfrac{20\pi d_2^4}{64}$ （每个惯性矩3分，共6分）

$I_1 : I_2 = \dfrac{4}{5}$ （1分） 动荷系数 $K_d = \sqrt{\dfrac{v^2}{g\Delta_{st}}}$ （2分）

$$\sigma_{\max 1} : \sigma_{\max 2} = \frac{K_{d1} Pl}{W_1} : \frac{K_{d2} Pl}{W_2} (2分) = \frac{K_{d1}}{W_1} \cdot \frac{W_2}{K_{d2}} = \frac{K_{d1}}{K_{d2}} \cdot \frac{W_2}{W_1} = \frac{W_2}{W_1}\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} (2分) = \frac{\sqrt{5}}{2} (1分)$$

六、计算题（12分）

解：变形几何关系得：$\sqrt{2}\Delta l_2 = 2\Delta l_1$ （4分） 物理方程：$\Delta l_1 = \dfrac{F_{N1} l_1}{EA_1}$，$\Delta l_2 = \dfrac{F_{N2} l_2}{EA_2} = \dfrac{F_{N2} l_1}{EA_1}$ （4分

刚性杆对 O 取矩得：$F_{N1} + \sqrt{2} F_{N2} = 2F$ （2分） 联立求得：$F_{N1} = \dfrac{2F}{3}$，$F_{N2} = \dfrac{2\sqrt{2}F}{3}$ （2分）

Good luck!

Thanks!