

第三篇

材料力学

第一章 轴向拉伸和压缩

知 识 要 点

1. 外力特点

作用在杆上的外力或外力合力的作用线与杆的轴线重合,杆件的变形沿轴线方向伸长或缩短。

2. 内力特点

(1) 轴力

轴向拉压杆的内力称为轴力,用符号 N 表示。当 N 的指向背离横截面时规定为正,当 N 的指向朝向横截面时,规定为负。正的 N 称为拉力,负的 N 称为压力。

(2) 轴力图

表示轴力与横截面位置关系的图线,称为轴力图。

3. 应力

(1) 横截面上的应力

轴向拉压杆的横截面上只有均匀分布的正应力

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

(2) 斜截面上的应力

与横截面成 α 角的任一斜截面上的正应力和切应力分别为

$$\sigma_\alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha$$

式中, $\sigma_0 = N/A$, 即轴向拉压杆在横截面 ($\alpha=0$) 上的正应力。

4. 变形与应变

(1) 变形的定义

受力物体形状改变时,物体内部任意两点之间线距离或两正交线段间的夹角的改变。前者称为线变形,后者称为角变形。

(2) 轴向拉伸(压缩)时的变形

① 线变形 $\Delta l = l_1 - l$

② 线应变 $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$

③ 横向变形 $\Delta d = d_1 - d$ 或 $\Delta b = b_1 - b$

④ 横向应变 $\epsilon' = \frac{\Delta b}{b}$

⑤ 泊松比 $\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right| = -\frac{\epsilon'}{\epsilon}$

5. 胡克定律

$$\sigma = E\epsilon \quad \text{或} \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

胡克定律是材料力学中最基本的定律之一,只有在材料处于线弹性情况下才适用。

6. 位移

(1) 位移的定义

受力物体形状改变时,相对于某参考坐标系,物体上某一点的位置改变的直线距离,或某一线段的方向改变的角度。

(2) 位移的计算

① 选取参考坐标系;

② 计算杆件的变形量;

③ 根据变形的相容性(变形相容条件),作位移图(或结构的变形图),由位移的几何关系,计算位移值。

7. 材料的力学性能(常温、静载条件下,低碳钢拉伸试验)

(1) 弹性变形与塑性变形

① 弹性变形 解除外力后能完全消失的变形;

② 塑性变形 解除外力后不能消失的变形。

(2) 变形的四个阶段

弹性变形阶段,屈服阶段,硬化阶段,颈缩阶段。

(3) 力学性能指标

① 强度指标

a. 比例极限 σ_p ——应力和应变成正比的最大应力值。

b. 弹性极限 σ_e ——只产生弹性变形的最大应力值。

c. 屈服点 σ_s ——应力变化不大,应变显著增加时的最低应力值。

d. 强度极限 σ_b ——材料在断裂前所能承受的最大应力值。

② 弹性指标

$$\text{弹性模量 } E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

③ 塑性指标

$$\text{延伸率 } \delta = \frac{\Delta l}{l} \times 100\%$$

$$\text{截面收缩率 } \psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

④ 冷作硬化 材料经过预拉至硬化阶段,卸载之后再受拉力时,呈现比例极限提高,塑性降低的现象。

8. 轴向拉伸(压缩)时的强度计算

(1) 许用应力与强度条件

构件内的最大应力 σ_{\max} 不得超过材料的许用应力 $[\sigma]$,即

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

许用应力 $[\sigma]$ 是材料容许承受的最大工作应力,由下式确定

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$$

式中, σ_u 是极限应力, n 为安全系数。

(2) 强度计算的三类问题

① 校核强度

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]$$

② 选择截面尺寸

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]}$$

③ 确定承载能力

$$[N] \leq A[\sigma]$$

习题详解

1-1 用截面法求题 1-1 图(a)、(b)~(f)所示各杆指定截面的内力。

解 (a) 如题 1-1 图(a)所示。

(1) 用截面 1-1 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(a₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0$$

得

$$N_1 = 0$$

(2) 用截面 2-2 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(a₂)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_2 - P = 0$$

得

$$N_2 = P$$

(3) 用截面 3-3 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(a₃)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_3 - P = 0$$

得

$$N_3 = P$$

(b) 如题 1-1 图(b)所示。

(1) 用截面 1-1 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(b₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad 2 \times \frac{N_1}{2} - 2 \text{ kN} = 0$$

得

$$N_1 = 2 \text{ kN}$$

(2) 用截面 2-2 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(b₂)所示,由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_2 - 2 \text{ kN} = 0$$

得

$$N_2 = 2 \text{ kN}$$

(c) 如题 1-1 图(c)所示。

(1) 用截面 1-1 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(c₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_1 - P = 0$$

得

$$N_1 = P$$

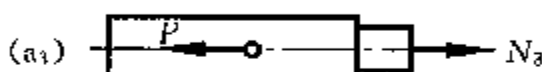
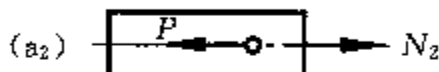
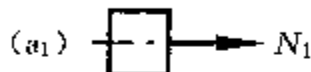
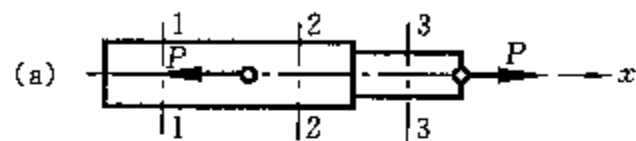
(2) 用截面 2-2 将杆截开,取左段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(c₂)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_2 - P - P = 0$$

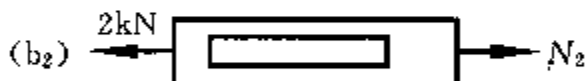
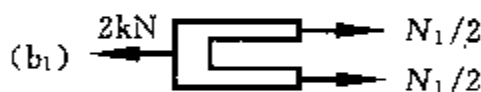
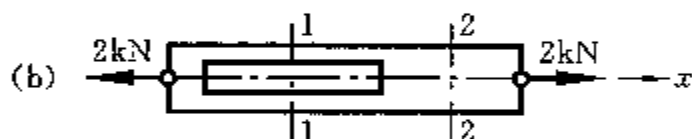
得

$$N_2 = 2P$$

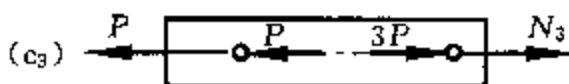
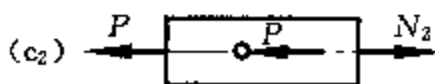
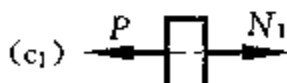
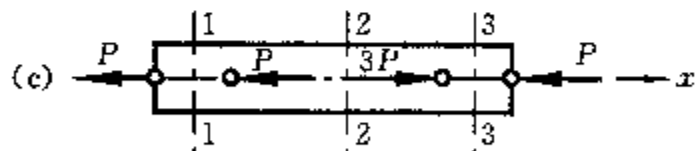
(3) 用截面 3-3 将杆截开,取左段为研究对象



题 1-1 图



续题 1-1 图



续题 1-1 图

象,作受力图如题 1-1 图(c₃)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_3 - P - P + 3P = 0$$

得 $N_3 = -P$

(d) 如题 1-1 图(d)所示。

(1) 用截面 1-1 将杆截开,取右段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(d₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad -N_1 - 3P + P = 0$$

得 $N_1 = -2P$

(2) 用截面 2-2 将杆截开,取右段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(d₂)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad P - N_2 = 0$$

得 $N_2 = P$

(e) 如题 1-1 图(e)所示。

(1) 用截面 1-1 将牛腿柱截开,取上段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(e₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_1 + 50 = 0$$

得 $N_1 = -50 \text{ kN}$

(2) 用截面 2-2 将牛腿柱截开,取上段为研究对象,作受力图如题 1-1 图(e₂)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad N_2 + 2 \times 20 + 50 = 0$$

得 $N_2 = -90 \text{ kN}$

(f) 如题 1-1 图(f)所示。将杆 AC、BC 分别用截面 1-1 和 2-2 截开,取右侧部分为研究对象,作受力图如题 1-1 图(f₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad -N_1 \cos 45^\circ - N_2 \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 30^\circ - P = 0$$

得 $N_1 = 0.896P, \quad N_2 = -0.732P$

1-2 高炉装料器中的大钟拉杆如题 1-2 图(a)所示,拉杆下端以连接楔与大钟连接,连接处拉杆的横截面如图(b)所示,拉杆上端螺纹的内径 $d=175 \text{ mm}$ 。已知作用于拉杆上的静拉力 $P=850 \text{ kN}$,试计算大钟拉杆的最大静应力。

解 拉杆内的轴力根据静力学平衡条件可确定为

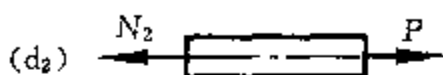
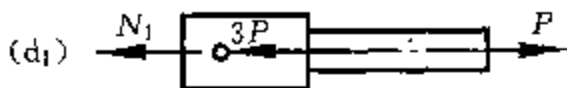
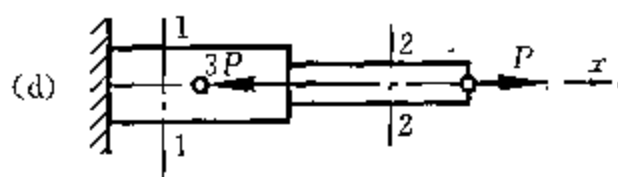
$$N = P = 850 \text{ kN}$$

拉杆的危险截面在有螺纹处,其最小面积为

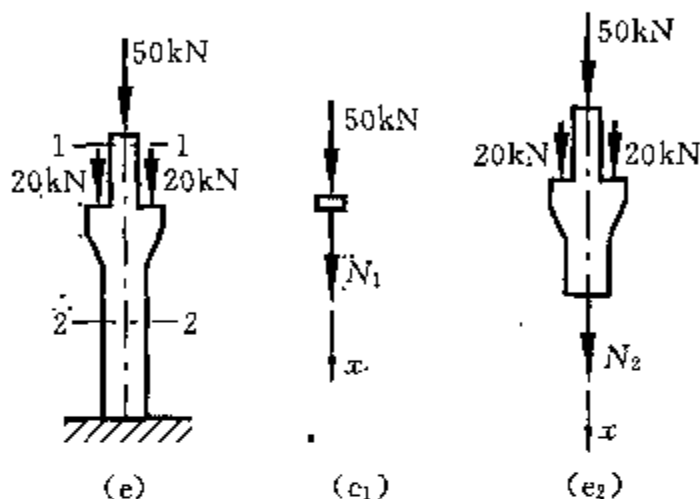
$$A = \frac{1}{4} \pi d^2 = \left(\frac{1}{4} \pi \times 0.175^2 \right) \text{ m}^2 = 0.02405 \text{ m}^2$$

所以,拉杆的最大静应力为

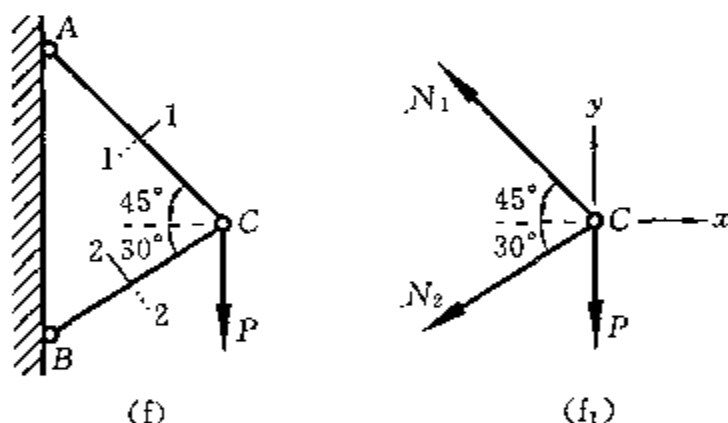
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} = \frac{850 \times 10^3}{0.02405} \text{ Pa} \approx 35.34 \text{ MPa}$$



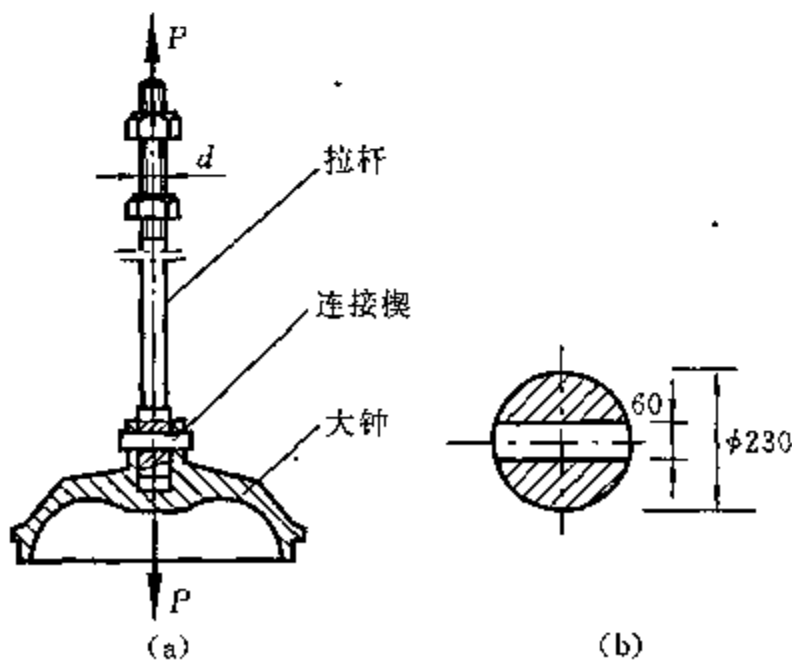
续题 1-1 图



续题 1-1 图

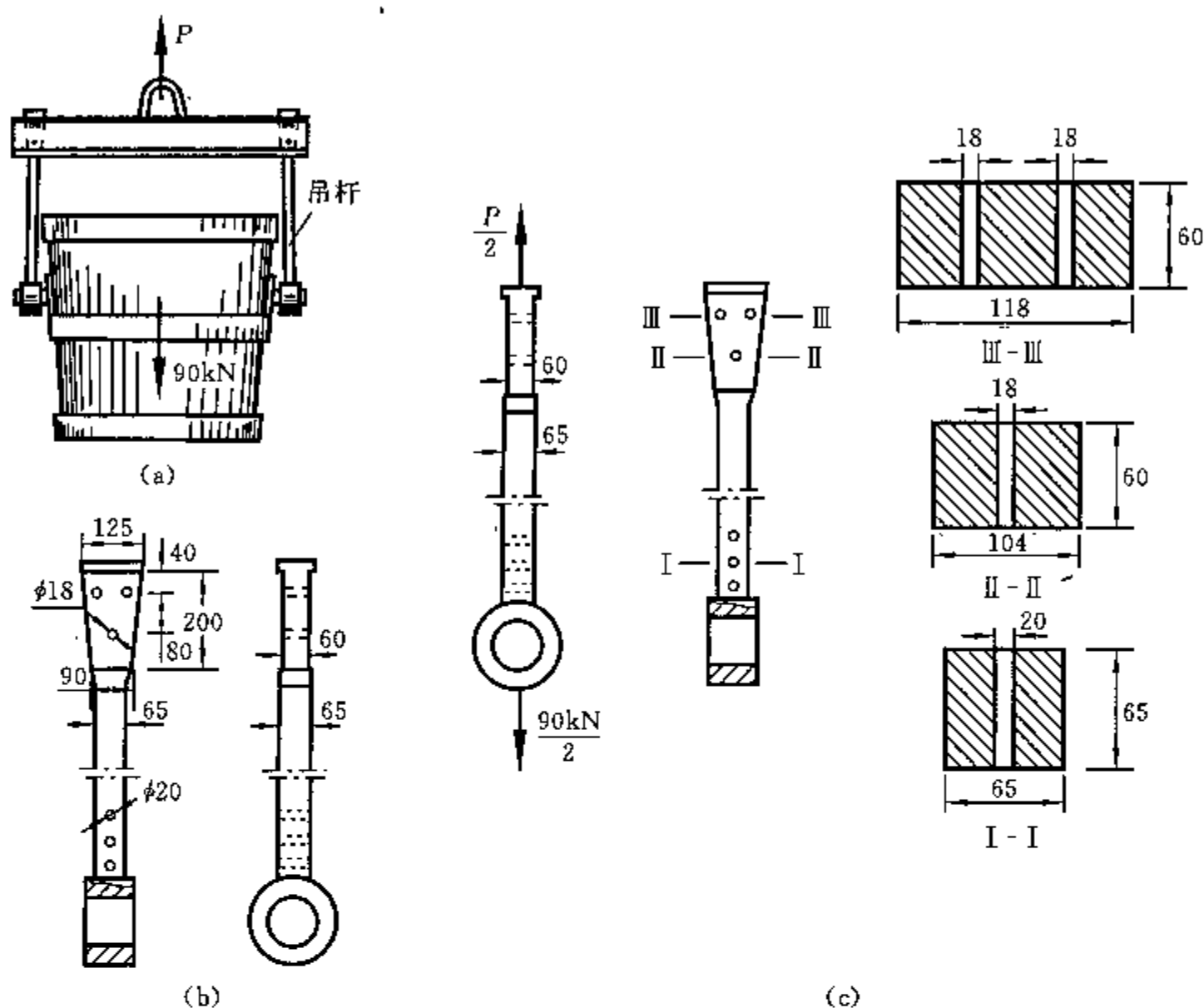


续题 1-1 图



题 1-2 图

1-3 试计算题 1-3 图(a)所示钢水包吊杆的最大应力。已知钢水包及其所盛钢水共重 90 kN, 吊杆的尺寸如图(b)所示。



题 1-3 图

解 吊杆的轴力 $N=90$ kN。吊杆的危险截面必在有圆孔之处, 如题 1-3 图(c)所示, 它们的截面积分别为

$$A_1 = (65^2 - 65 \times 20) \text{ mm}^2 = 2.925 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_2 = (104 \times 60 - 60 \times 18) \text{ mm}^2 = 5.16 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$A_3 = [118 \times 60 - (60 \times 18) \times 2] \text{ mm}^2 = 4.92 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

显然, 最小截面积为 $A_1 = 2.925 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, 最大应力产生在吊杆下端有钉孔处

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_1} = \frac{P/2}{A_1} = \frac{90/2}{2.925 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 15.38 \text{ MPa}$$

1-4 一桅杆起重机如题 1-4 图(a)所示, 起重杆 AB 为一钢管, 其外径 $D=20$ mm, 内径 $d=18$ mm; 钢绳 CB 的横截面面积为 0.1 cm^2 。已知起重重量 $P=2000$ N, 试计算起重杆和钢丝绳的应力。

解 (1) 计算起重杆 AB 和钢丝绳的内力

取点 B 为研究对象, 作受力图如题 1-4 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad -T_{BC} \cos 45^\circ + S_{AB} \sin 15^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad -T_{BC} \sin 45^\circ + S_{AB} \cos 15^\circ - P = 0$$

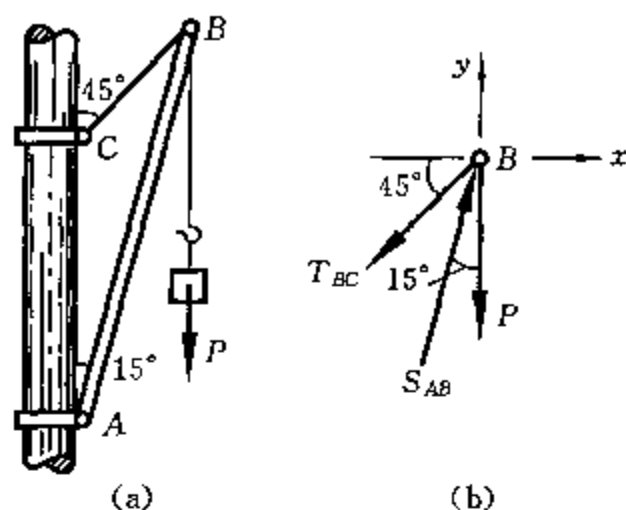
得杆 AB 和钢丝绳的内力分别为

$$S_{AB} = 2828 \text{ N}, \quad T_{BC} = 1035 \text{ N}$$

(2) 计算起重杆 AB 和钢丝绳 BC 的应力

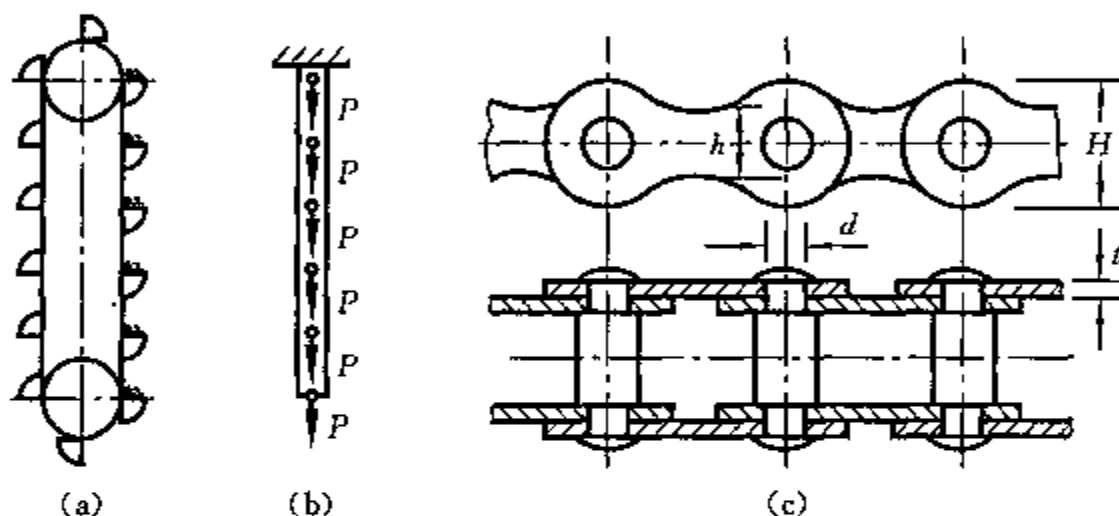
$$\begin{aligned}\sigma_{AB} &= \frac{N_{AB}}{A_{AB}} = \frac{4S_{AB}}{\pi(D^2 - d^2)} \\ &= \frac{4 \times 2828}{\pi(0.02^2 - 0.018^2)} \text{ Pa} = 47.38 \text{ MPa} \\ \sigma_{BC} &= \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{T_{BC}}{A_{BC}} = \frac{1035}{0.1 \times 10^{-4}} \text{ Pa} \\ &= 103.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

所以,起重杆的应力为 47.38 MPa,钢丝绳的应力为 103.5 MPa。



题 1-4 图

1-5 题 1-5 图(a)所示为一斗式提升机。斗与斗之间用链条连接,链条的计算简图如图(b)所示,每个料斗连同物料的总重量 $P=2000 \text{ N}$ 。钢链由两层钢板构成,如图(c)所示。每个链板厚 $t=4.5 \text{ mm}$,宽 $h=40 \text{ mm}$, $H=65 \text{ mm}$,钉孔直径 $d=30 \text{ mm}$ 。试求链板的最大应力。



题 1-5 图

解 (1) 计算链板的内力 $N = \frac{6P}{2} = \frac{6 \times 2000}{2} \text{ N} = 6 \text{ kN}$

(2) 计算链板的最小横截面积

(a) 钉孔处链板的横截面面积

$$A_1 = (H - d)t = (0.065 - 0.03) \times 0.0045 \text{ m}^2 = 1.575 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

(b) 链板凹处的横截面面积

$$A_2 = ht = (0.040 \times 0.0045) \text{ m}^2 = 1.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

所以,链板的最小横截面面积 $A_{\min} = A_1 = 1.575 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

(3) 计算链板的最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\min}} = \frac{6 \times 10^3}{1.575 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 38.1 \text{ MPa}$$

链板的最大应力产生在有钉孔处, $\sigma_{\max} = 38.1 \text{ MPa}$ 。

1-6 一长为 30 cm 的钢杆,其受力情况如题 1-6 图(a)所示。已知杆横截面面积 $A=10 \text{ cm}^2$,材料的弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$,试求:

(1) AC、CD、DB 各段的应力和变形;

(2) 杆 AB 的总变形。

解 首先利用截面法,作杆的轴力图如题 1-6 图(b)所示。

(1) 计算杆的 AC、CD、DB 各段的应力

根据题 1-6 图(b)所示的轴力图,可知各段杆的内力,所以各段的应力为

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A} = \frac{-20 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = -20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A} = \frac{0}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 0$$

$$\sigma_{DB} = \frac{N_{DB}}{A} = \frac{-20 \times 10^3}{10 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = -20 \text{ MPa}$$

(2) 计算杆的 AC、CD、DB 各段的变形

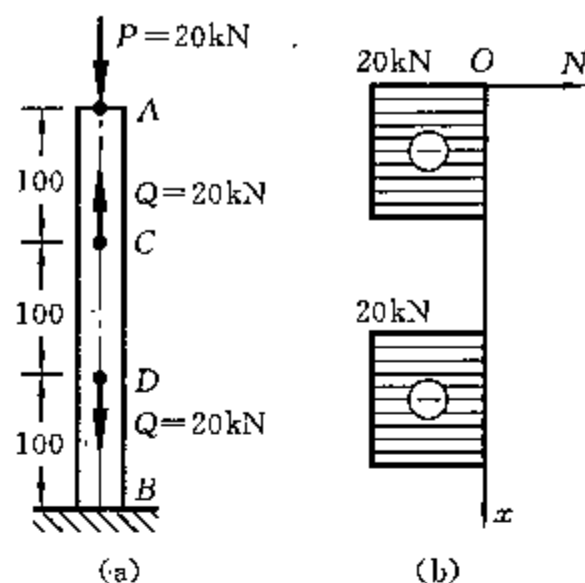
$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA} = \frac{-20 \times 10^3 \times 0.1}{200 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}} \text{ m} = -0.01 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA} = \frac{0 \times 0.1}{200 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}} \text{ m} = 0$$

$$\Delta l_{DB} = \frac{N_{DB} l_{DB}}{EA} = \frac{-20 \times 10^3 \times 0.1}{200 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-4}} \text{ m} = -0.01 \text{ mm}$$

(3) 计算杆 AB 的总变形

$$\begin{aligned} \Delta l &= \Delta l_{AC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DB} = (-0.01 - 0.01) \text{ mm} \\ &= -0.02 \text{ mm} \end{aligned}$$



题 1-6 图

1-7 一圆截面阶梯杆受力如题 1-7 图(a)所示, 已知材料的弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$, 试求各段的应力和应变。

解 利用截面法, 作杆 AB 的轴力图如题 1-7 图(b)所示。

(1) 计算杆 AB 各段的应力

杆 AB 虽是变截面杆, 但轴力与截面面积无关, 各段的轴力均为 $N=P=40 \text{ kN}$, 如题 1-7 图(b)所示, 各段应力为

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{AC}} = \frac{4N}{\pi D_{AC}^2} = \frac{4 \times 40 \times 10^3}{\pi \times 0.04^2} \text{ Pa} = 31.83 \text{ MPa}$$

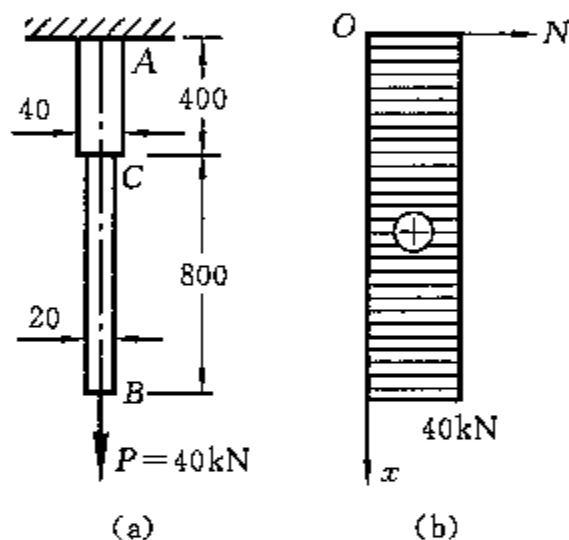
$$\sigma_{CB} = \frac{N_{CB}}{A_{CB}} = \frac{4N}{\pi D_{CB}^2} = \frac{4 \times 40 \times 10^3}{\pi \times 0.02^2} \text{ Pa} = 127.3 \text{ MPa}$$

(2) 计算杆 AB 各段的应变

应用胡克定律, 可确定各段的应变分别为

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} = \frac{31.83 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.592 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{CB} = \frac{\sigma_{CB}}{E} = \frac{127.3 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 6.365 \times 10^{-4}$$



题 1-7 图

1-8 为测定轧钢机的轧制力, 在压下螺旋与上轧辊轴承座之间装置一测压力用的压头, 如题 1-8 图所示。压头是一个钢制的圆筒, 其外径 $D=50 \text{ mm}$, 内径 $d=40 \text{ mm}$, 在压头的外表面上沿纵向贴有测变形用的电阻丝片。若测得轧辊两端两个压头的纵向应变均为 $\varepsilon=0.9 \times 10^{-2}$, 试求轧机的总轧制力。压头材料的弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$ 。

解 (1) 利用胡克定律计算一个压头承受的应力

$$\sigma = E\varepsilon = 200 \times 10^9 \times 0.9 \times 10^{-2} \text{ Pa} = 1800 \text{ MPa}$$

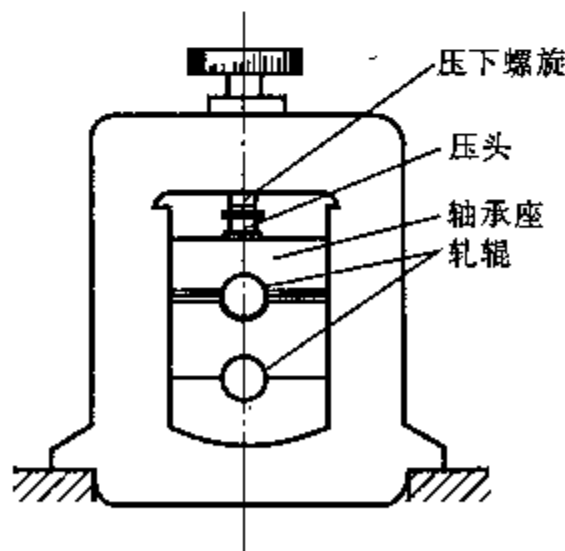
(2) 计算压头圆筒的轴力

$$N = A\sigma = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)\sigma$$

$$= \frac{\pi}{4}(0.05^2 - 0.04^2) \times 1800 \times 10^6 \text{ N} = 1.272 \times 10^6 \text{ N}$$

(3) 计算轧机的总轧制力

轧辊两端各装有一个测压力的压头, 已计算得一个压头测得的压力 $N=1.272 \times 10^6 \text{ N}$, 则轧



题 1-8 图

机的总轧制力

$$P=2N=2 \times 1.272 \times 10^6 \text{ N}=2544 \text{ kN}$$

1-9 用一板状试样进行拉伸试验,在试样表面贴上纵向和横向的电阻丝片来测定试样的应变,如题 1-9 图所示。已知 $b=30 \text{ mm}$, $h=4 \text{ mm}$;每增加 3000 N 的拉力时,测得试样的纵向应变 $\epsilon_1=120 \times 10^{-6}$,横向应变 $\epsilon_2=-38 \times 10^{-6}$ 。求试样材料的弹性模量 E 和泊松比 ν 。

解 (1) 计算试样内的应力

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{bh} = \frac{3000}{0.03 \times 0.004} \text{ Pa} = 25 \text{ MPa}$$

(2) 计算材料的弹性模量

应用胡克定律 $\sigma = E\epsilon$,可确定材料的弹性模量为

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{25 \times 10^6}{120 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 208.3 \text{ GPa}$$

(3) 计算材料的泊松比

根据泊松比定义,可确定材料的泊松比为

$$\nu = \left| \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right| = \left| \frac{-38 \times 10^{-6}}{120 \times 10^{-6}} \right| = 0.3167$$

1-10 连杆端部与销轴相连,其构造如题 1-10 图所示。设作用于连杆的轴向力 $P=128 \text{ kN}$,螺栓螺纹处的内径 $d=3.7 \text{ cm}$,螺栓材料的许用应力 $[\sigma]=60 \text{ MPa}$,试校核螺栓的强度。

解 根据力学平衡条件可得每一个螺栓内的轴力为

$$N = \frac{P}{2} = \frac{128 \times 10^3}{2} \text{ N} = 64 \text{ kN}$$

螺栓的最大工作应力产生在其最小截面上

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_{\min}} = \frac{4N}{\pi d^2} = \frac{4 \times 64 \times 10^3}{\pi \times 0.037^2} \text{ Pa} = 59.52 \text{ MPa}$$

螺栓的最大工作应力 $\sigma_{\max} < [\sigma] = 60 \text{ MPa}$,所以螺栓安全。

1-11 用绳索吊运一重 $P=20 \text{ kN}$ 的重物,如题 1-11 图所示。设绳索的横截面面积 $A=12.6 \text{ cm}^2$,许用应力 $[\sigma]=10 \text{ MPa}$,试问:

(1) 当 $\alpha=45^\circ$ 时,绳索强度是否够用?

(2) 如改为 $\alpha=60^\circ$,再校核绳索的强度。

解 取吊钩为研究对象,作受力图如题 1-11 图(b)所示。因结构与外力均对称,所以两根绳索的内力也对称,由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad P - 2N \sin \alpha = 0$$

得

$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

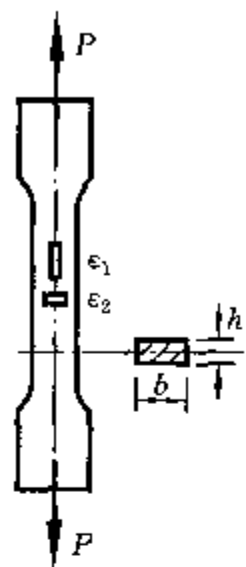
(1) 计算当 $\alpha=45^\circ$ 时绳索的工作应力

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{N_{45^\circ}}{A} = \frac{P}{2A \sin 45^\circ} = \frac{20 \times 10^3}{2 \times 12.6 \times 10^{-4} \sin 45^\circ} \text{ Pa} = 11.22 \text{ MPa}$$

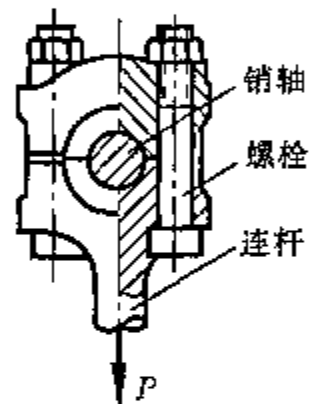
(2) 计算当 $\alpha=60^\circ$ 时绳索的工作应力

$$\sigma_{60^\circ} = \frac{N_{60^\circ}}{A} = \frac{P}{2A \sin 60^\circ} = \frac{20 \times 10^3}{2 \times 12.6 \times 10^{-4} \sin 60^\circ} \text{ Pa} = 9.164 \text{ MPa}$$

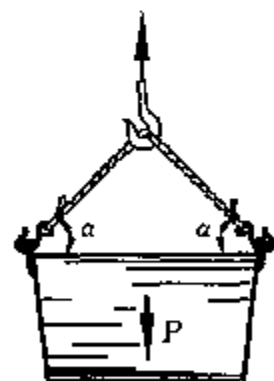
所以,当 $\alpha=60^\circ$ 时,绳索的工作应力为 $\sigma_{60^\circ} = 9.164 \text{ MPa} < [\sigma]$,能安全工作。当 $\alpha=45^\circ$ 时,绳索的工作应力 $\sigma_{45^\circ} = 11.22 \text{ MPa} > [\sigma]$,不安全。



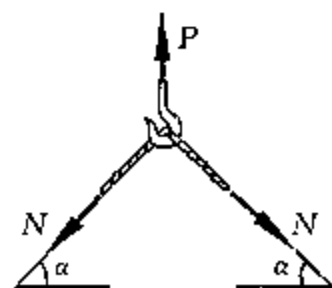
题 1-9 图



题 1-10 图



(a)



(b)

题 1-11 图

1-12 题 1-12 图(a)所示一板卷夹钳同时夹吊两个钢卷,已知每个钢卷重 100 kN, AB 与 AC 两杆夹角为 120° , 其横截面为 $100 \times 150 \text{ mm}^2$ 的矩形, 材料的许用应力 $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$ 。试校核二杆的强度。

解 取铰 A 为研究对象, 作受力图如题 1-12 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad -N_{AB} \sin 60^\circ + N_{AC} \sin 60^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad -N_{AB} \cos 60^\circ - N_{AC} \cos 60^\circ + P = 0$$

得杆 AC 和杆 AB 的轴力为

$$N_{AC} = N_{AB} = P = 200 \text{ kN}$$

杆 AC 和杆 AB 的应力为

$$\sigma_{AB} = \sigma_{AC} = \frac{N_{AB}}{A} = \frac{200 \times 10^3}{(100 \times 150) \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 13.33 \text{ MPa}$$

小于材料的许用应力 $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$, 所以安全。

1-13 某金属矿矿井深 200 m, 井架高 18 m, 其提升系统简图如题 1-13 图所示。设罐笼及其装载的矿石共重 $Q = 45 \text{ kN}$, 钢丝绳自重为 $p = 23.8 \text{ N/m}$; 钢丝绳横截面面积 $A = 2.51 \text{ cm}^2$, 抗拉强度 $\sigma_b = 1600 \text{ MPa}$ 。设取安全系数 $n = 7.5$, 试校核钢丝绳的强度。

解 当考虑了钢丝绳的自重时, 钢丝绳的内力不再是常量, 越靠近绳的上端, 内力越大, 最大内力产生在最上端, 靠近滑轮处, 所以此处是危险截面。

(1) 计算钢丝绳的最大内力

$$N_{\max} = Q + pl = [45 \times 10^3 + 23.8 \times (200 + 18)] \text{ N} = 5019 \text{ N}$$

(2) 计算钢丝绳的最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{5019}{2.51 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 200 \text{ MPa}$$

(3) 计算材料的许用应力

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n} = \frac{1600}{7.5} \text{ MPa} = 213.3 \text{ MPa}$$

钢丝绳的最大工作应力 $\sigma_{\max} = 200 \text{ MPa} < [\sigma] = 213.3 \text{ MPa}$, 所以安全。

1-14 化铁炉的上料罐如题 1-14 图所示, 罐自重 10 kN, 装料 20 kN。试计算拉杆和链环拉伸部分所需的直径。材料的许用应力 $[\sigma] = 120 \text{ MPa}$ 。

解 (1) 计算拉杆所需的直径

$$\text{拉杆的轴力} \quad N_1 = (10 + 20) \text{ kN} = 30 \text{ kN}$$

根据强度条件

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2} \leq [\sigma]$$

可得拉杆所需的直径

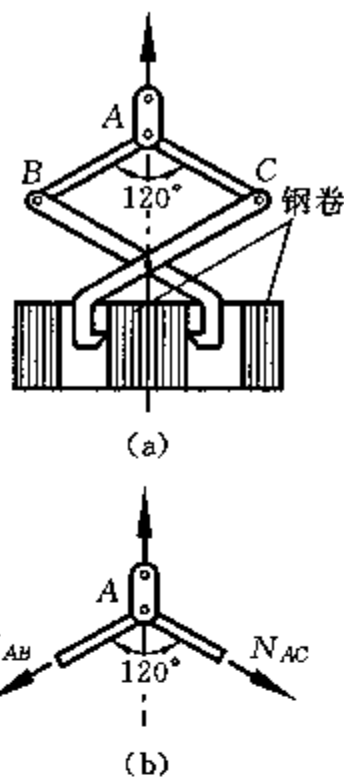
$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 30 \times 10^3}{\pi \times 120 \times 10^6}} \text{ m} = 1.784 \text{ cm}$$

(2) 计算链环拉伸部分所需直径

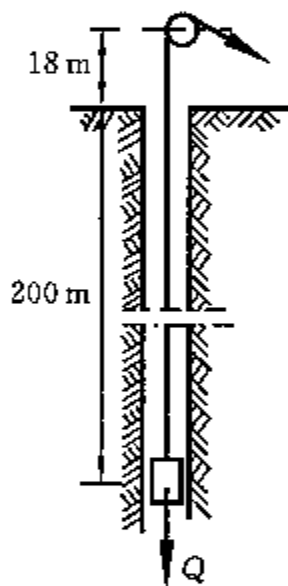
$$\text{链环拉伸部分的轴力} \quad N_2 = \frac{1}{2}(10 + 20) \text{ kN} = 15 \text{ kN}$$

根据强度条件

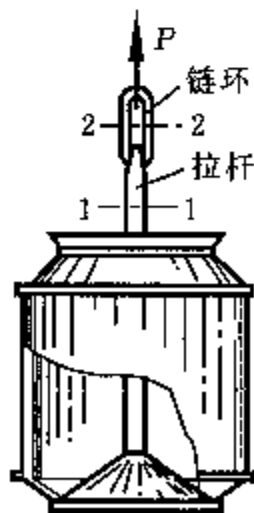
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^2} \leq [\sigma]$$



题 1-12 图



题 1-13 图



题 1-14 图

可得链环拉伸部分的直径

$$d_z \geq \sqrt{\frac{4N_2}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 15 \times 10^3}{\pi \times 120 \times 10^6}} \text{ m} = 1.261 \text{ cm}$$

1-15 悬臂吊车的尺寸和载荷情况如题 1-15 图(a)所示。斜杆 BC 由两角钢组成, 载荷 $Q=25 \text{ kN}$ 。设材料的许用应力 $[\sigma]=140 \text{ MPa}$, 试选择角钢的型号。

解 首先将题 1-15 图(a)所示悬臂吊车简化为题 1-15 图(b)所示的力学模型。因斜杆 BC 为二力杆, 所以斜杆 BC 的内力只有轴力。解除题 1-15 图(b)所示结构的约束, 代之以约束反力, 作受力图如题 1-15 图(c)所示。由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad 3Q - 1.5N_{BC} \sin 45^\circ = 0$$

可得斜杆 BC 的轴力

$$N_{BC} = \frac{3Q}{1.5 \sin 45^\circ} = \frac{3 \times 25 \times 10^3}{1.5 \sin 45^\circ} \text{ N} = 70.72 \text{ kN}$$

根据强度条件 $\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} \leq [\sigma]$

可得斜杆 BC 所需的横截面积

$$A_{BC} \geq \frac{N_{BC}}{[\sigma]} = \frac{70.72 \times 10^3}{140 \times 10^6} \text{ m}^2 = 5.051 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

一根角钢所需的横截面积为

$$A = \frac{A_{BC}}{2} = \frac{5.051 \times 10^{-4}}{2} \text{ m}^2 = 2.526 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

查文献 1 附录一型钢表, 应选用 $45 \times 45 \times 3$ 的等边角钢, 它的横截面积 $A = 2.659 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 。

1-16 题 1-16 图所示的一手动压力机, 在工件上所加的最大压力为 150 kN 。已知立柱和螺杆所用材料的屈服点 $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$, 规定的安全系数 $n = 1.5$ 。

- (1) 试按强度要求选择立柱的直径 D ;
- (2) 若螺杆的内径 $d = 40 \text{ mm}$, 试校核其强度。

解 (1) 按强度要求选择立柱直径 D

由已知材料的屈服点 $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$ 和规定的安全系数 $n = 1.5$, 可确定材料的许用应力

$$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{240}{1.5} \text{ MPa} = 160 \text{ MPa}$$

根据静力学平衡条件可知立柱内的轴力 $N_1 = \frac{150}{2} \text{ kN} = 75 \text{ kN}$

应用强度条件 $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4 \times 75 \times 10^3}{\pi D^2} \leq [\sigma]$

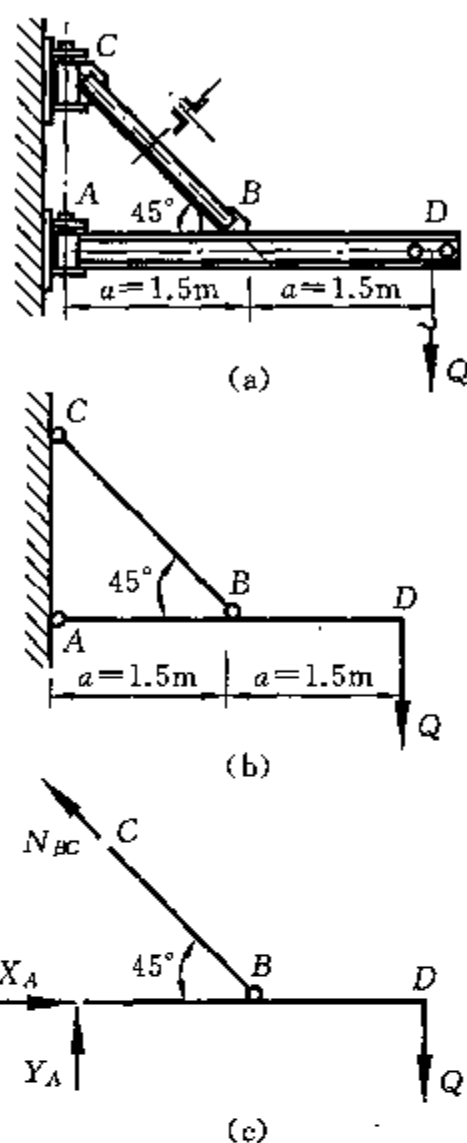
可得立柱的直径 $D \geq \sqrt{\frac{4 \times 75 \times 10^3}{\pi [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 75 \times 10^3}{\pi \times 160 \times 10^6}} \text{ m} = 24.43 \text{ cm}$

(2) 校核螺杆的强度

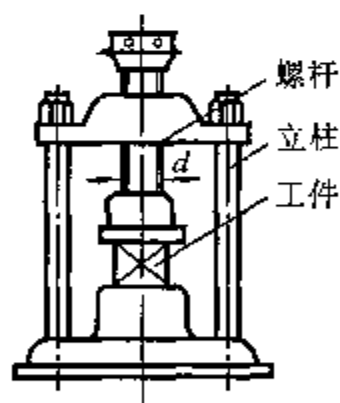
螺杆的工作应力

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{2N_1}{A_2} = \frac{8N_1}{\pi d^2} = \frac{8 \times 75 \times 10^3}{\pi \times 0.04^2} \text{ Pa} = 119.4 \text{ MPa} < [\sigma] = 160 \text{ MPa}$$

螺杆的工作应力小于许用应力。



题 1-15 图

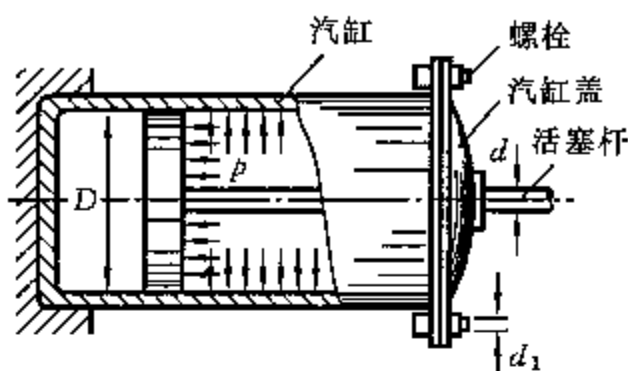


题 1-16 图

1-17 一汽缸如题 1-17 图所示,其内径 $D=560\text{ mm}$,汽缸内的气体压强 $p=250\text{ N/cm}^2$,活塞杆直径 $d=100\text{ mm}$,所用材料的屈服点 $\sigma_s=300\text{ MPa}$ 。

(1) 试求活塞杆的正应力和工作安全系数;

(2) 若连接汽缸与汽缸盖的螺栓直径 $d_1=30\text{ mm}$,螺栓所用材料的许用应力 $[\sigma]=60\text{ MPa}$,试求所需的螺栓数。



题 1-17 图

解 (1) 计算活塞杆的正应力和工作安全系数
因气体压力在活塞杆内产生的轴力

$$N_{\text{杆}} = A_{\text{杆}} p = \frac{\pi D^2 p}{4} = \frac{\pi \times 0.560^2 \times 250 \times 10^4}{4} \text{ N} \\ = 615.8 \text{ kN}$$

活塞杆的应力 $\sigma_{\text{杆}} = \frac{N_{\text{杆}}}{A_{\text{杆}}} = \frac{4N_{\text{杆}}}{\pi d^2} = \frac{4 \times 615.8 \times 10^3}{\pi \times 0.1^2} \text{ Pa} = 78.41 \text{ MPa}$

活塞杆的工作安全系数 $n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\text{杆}}} = \frac{300}{78.4} = 3.826$

(2) 计算所需螺栓数

设所需螺栓数为 Z 个,并假设因汽缸内压而产生的对汽缸盖的推力,由 Z 个螺栓平均承担,则每个螺栓内的轴力

$$N_{\text{栓}} = \frac{\pi D^2 p}{4Z} = \frac{\pi \times 0.560^2 \times 250 \times 10^4}{4Z} \text{ N} = \frac{615.8}{Z} \text{ kN}$$

由强度条件 $\sigma_{\text{栓}} = \frac{N_{\text{栓}}}{A_{\text{栓}}} = \frac{4N_{\text{栓}}}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 615.8 \times 10^3}{\pi Z \times 0.03^2} \text{ Pa} \leq [\sigma]$

可得所需螺栓个数为

$$Z = \frac{4 \times 615.8 \times 10^3 \text{ Pa}}{\pi \times 0.03^2 [\sigma]} = \frac{4 \times 615.8 \times 10^3}{\pi \times 0.03^2 \times 60 \times 10^6} = 14.52 (\text{个})$$

取螺栓数为 $Z=15$ 个。

1-18 如题 1-18 图所示,起重吊钩上端借助螺母支搁,吊钩螺纹部分的外径 $d=63.5\text{ mm}$,内径 $d_1=55\text{ mm}$;材料为 20 钢,许用应力 $[\sigma]=50\text{ MPa}$ 。试根据吊钩螺纹部分的强度确定吊钩的许用起重量 P 。

解 吊钩螺纹部分的最小横截面面积为

$$A_{\text{min}} = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \times 0.055^2}{4} \text{ m}^2 = 2.376 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

该截面上的轴力等于吊钩的起重量 P ,即

$$N = P$$

吊钩螺纹部分的最大工作应力

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{A_{\text{min}}} = \frac{P}{A_{\text{min}}} = \frac{P}{2.376 \times 10^{-3}}$$

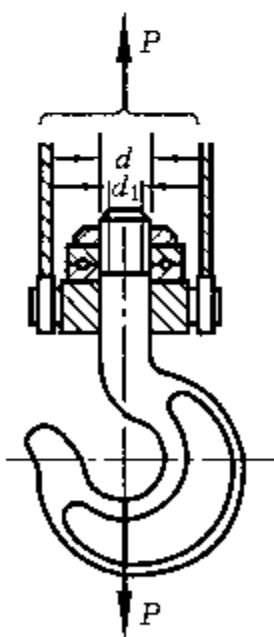
应用强度条件 $\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{2.376 \times 10^{-3}} \leq [\sigma]$

可确定吊钩的最大起重量

$$P \leq 2.376 \times 10^{-3} [\sigma] = 2.376 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^6 \text{ N} = 118.8 \text{ kN}$$

所以吊钩的许用起重量 $[P]=118.8\text{ kN}$ 。

1-19 如题 1-19 图(a)所示结构的杆 AB 为钢杆,其横截面面积 $A_1=6\text{ cm}^2$,许用应力 $[\sigma]=140\text{ MPa}$;杆 BC 为木杆,横截面面积 $A_2=300\text{ cm}^2$,许用压应力 $[\sigma_c]=3.5\text{ MPa}$ 。试求最大许可载



题 1-18 图

荷 P 。

解 取铰 B 为研究对象, 作受力图如题 1-19 图

(b) 所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad -N_1 - \frac{3}{5}N_2 = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad \frac{4}{5}N_2 - P = 0$$

可得杆 AB 和 BC 的轴力分别为

$$N_1 = \frac{3}{4}P, \quad N_2 = \frac{5}{4}P$$

利用强度条件

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{3P}{4 \times 6 \times 10^{-4}} \leq [\sigma] \quad (1)$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{5P}{4 \times 300 \times 10^{-4}} \leq [\sigma_c] \quad (2)$$

解①式, 得 $[P_1] = \frac{4 \times 6 \times 10^{-4} [\sigma]}{3} = \frac{4 \times 6 \times 10^{-4} \times 140 \times 10^6}{3} \text{ N} = 112 \text{ kN}$

解②式, 得 $[P_2] = \frac{4 \times 300 \times 10^{-4} [\sigma_c]}{5} = \frac{4 \times 300 \times 10^{-4} \times 3.5 \times 10^6}{5} \text{ N} = 84 \text{ kN}$

比较许用载荷 $[P_1]$ 和 $[P_2]$, 取其中数值较小者, 故最大许用载荷 $[P] = 84 \text{ kN}$ 。

1-20 起重机如题 1-20 图(a)所示, 钢丝绳 AB 的横截面面积为 500 mm^2 , 许用应力 $[\sigma] = 40 \text{ MPa}$ 。试根据钢丝绳的强度求起重机的许用起重量 P 。

解 解除题 1-20 图(a)所示起重机的约束, 代之以约束反力, 作受力图如题 1-20 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum M_D = 0, \quad 5P - 10N \cos \alpha = 0$$

并注意到

$$\alpha = \arctan \frac{10}{15} = 33.69^\circ$$

可得钢丝绳的轴力

$$N = \frac{5P}{10 \cos 33.69^\circ} = 0.6P$$

应用强度条件

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{0.6P}{500 \times 10^{-6}} \leq [\sigma]$$

得 $P \leq \frac{[\sigma] \times 500 \times 10^{-6}}{0.6} = \frac{40 \times 10^6 \times 500 \times 10^{-6}}{0.6} \text{ N} = 33.33 \text{ kN}$

所以, 起重机的许用起重量 $[P] = 33.33 \text{ kN}$ 。

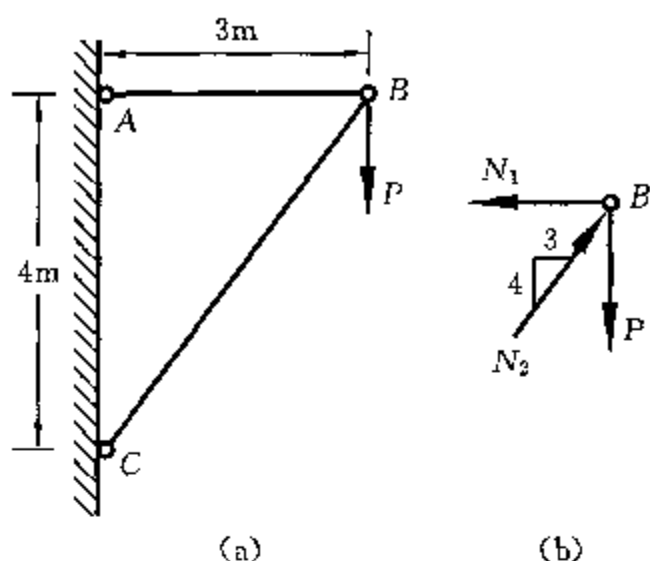
1-21 一不变形的刚性梁 AB 搁于三个相同的弹簧上, 在梁上 D 处作用一力 P , 如题 1-21 图(a)所示。设已知弹簧刚性系数 $C \left(= \frac{S}{\Delta l} \right)$, 试求 A 、 B 、 C 处三个弹簧各受力多少?

解 这是一次静不定问题。取刚性梁为研究对象, 作受力图如题 1-21 图(b)所示。

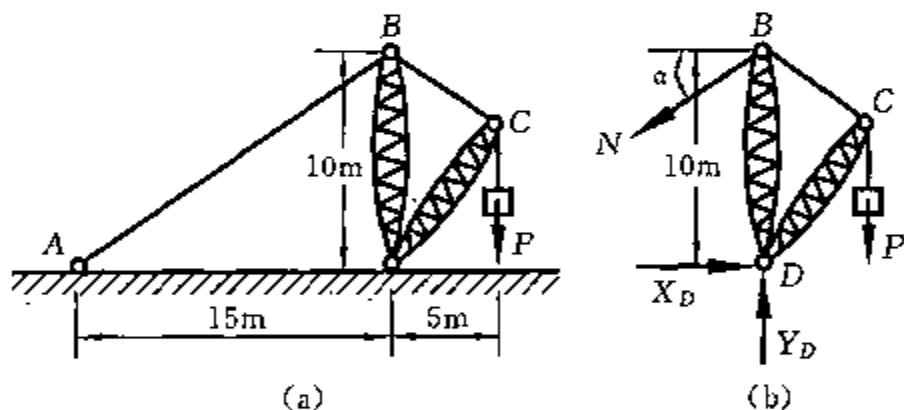
(1) 静力学平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad N_A + N_C + N_B - P = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0, \quad 2aN_A - 2aN_B - aP = 0 \quad (2)$$



题 1-19 图



题 1-20 图

(2) 变形几何条件

因 A、C、B 三点固结在刚性梁上, 所以三个弹簧被压缩变形后, A_1 、 C_1 、 B_1 三点应保持在同一直线上, 如题 1-21 图(b) 所示。由图(b) 中的几何关系, 有

$$\frac{\Delta l_C - \Delta l_A}{2a} = \frac{\Delta l_B - \Delta l_A}{4a}$$

或

$$2\Delta l_C - \Delta l_A - \Delta l_B = 0$$

(3) 物理条件

$$\Delta l_A = \frac{N_A}{C}, \quad \Delta l_C = \frac{N_C}{C}, \quad \Delta l_B = \frac{N_B}{C}$$

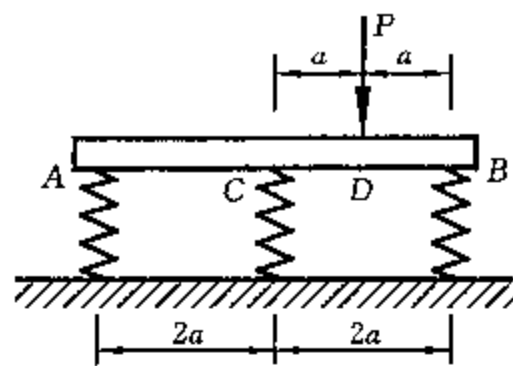
(4) 建立补充方程

将④式代入③式中, 得补充方程

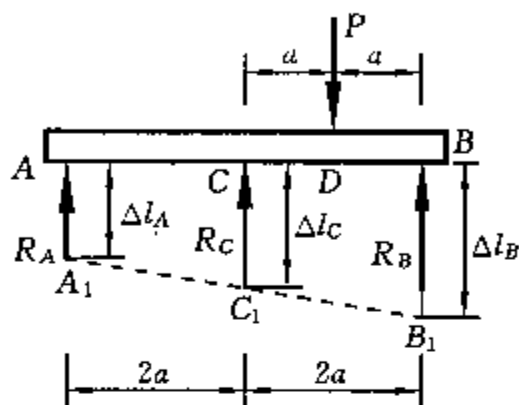
$$2N_C - N_B - N_A = 0$$

联立平衡方程①、②式和补充方程⑤式求解, 可得 A、B、C 处三个弹簧各受力为

$$R_A = \frac{P}{12}, \quad R_B = \frac{7P}{12}, \quad R_C = \frac{P}{3}$$



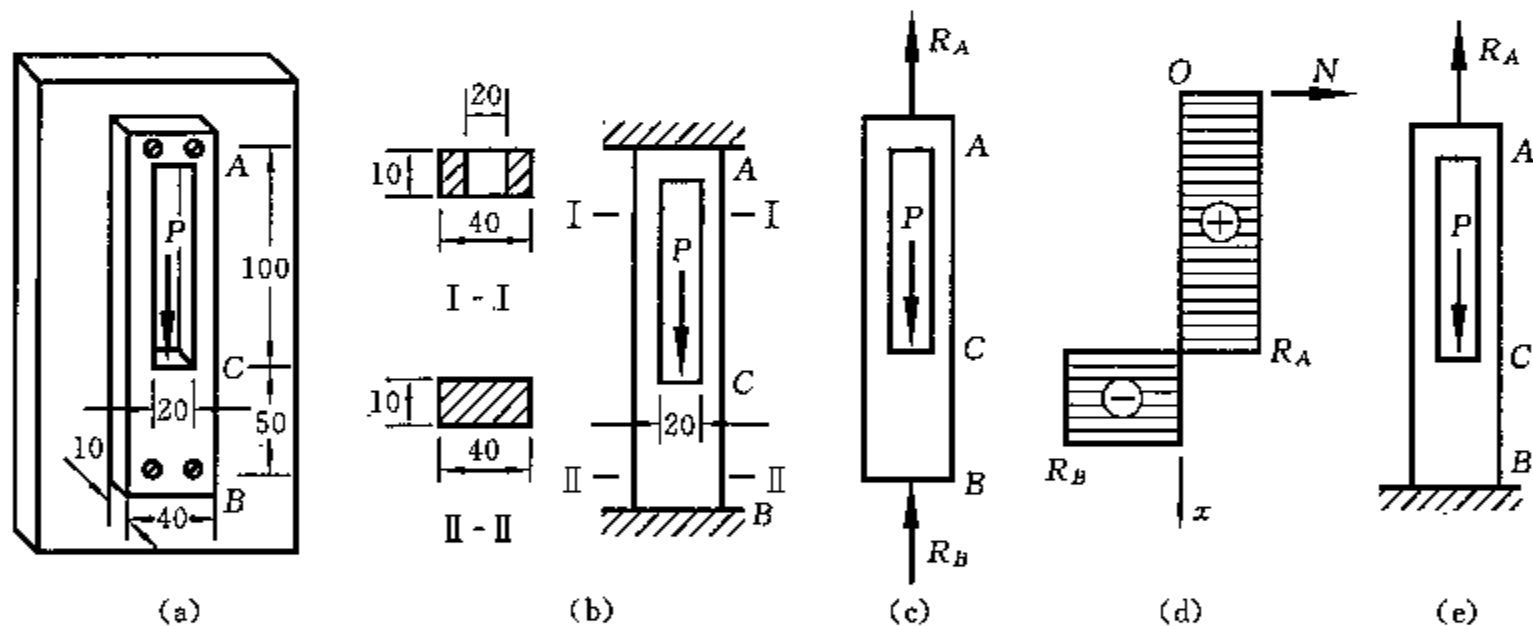
(a)



(b)

题 1-21 图

1-22 题 1-22 图(a)所示为一中间切槽的钢板, 以螺钉固定于刚性平面上, 在 C 处作用一力 $P = 5000 \text{ N}$, 有关尺寸如图所示。试求此钢板的最大应力。



题 1-22 图

解法 1 这是一次静不定问题。被切槽的钢板, 在切槽处的横截面面积

$$A_{AC} = 0.01 \times (0.04 - 0.02) \text{ m}^2 = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

未切槽处的横截面面积

$$A_{CB} = (0.01 \times 0.04) \text{ m}^2 = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

题 1-22 图(a)所示钢板的力学模型如题 1-22 图(b)所示。解除图(b)中钢板的约束, 代之以约束反力, 作受力图如题 1-22 图(c)所示。

(1) 静力学平衡方程

对题 1-22 图(c)列平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_B - P + R_A = 0 \quad ①$$

(2) 变形几何条件

杆 AB 在力 P 作用下, AC 段将伸长, CB 段将缩短, 但在原有的约束条件下, 杆 AB 的长度应

保持不变,即

$$\Delta l_{AC} + \Delta l_{CB} = 0 \quad (2)$$

(3) 物理条件

根据胡克定律,有

$$\begin{cases} \Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} l_{AC}}{EA_{AC}} \\ \Delta l_{CB} = \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA_{CB}} \end{cases} \quad (3)$$

(4) 建立补充方程

将③式代入②式中,得

$$\frac{N_{AC} l_{AC}}{EA_{AC}} + \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA_{CB}} = 0 \quad (4)$$

由轴力图题 1-22 图(d)可知,钢板的 AC 段和 CB 段的轴力分别为

$$N_{AC} = R_A, \quad N_{CB} = -R_B$$

代入④式,得

$$\frac{R_A l_{AC}}{A_{AC}} - \frac{R_B l_{CB}}{A_{CB}} = 0$$

将 $l_{AC} = 0.10 \text{ m}$, $l_{CB} = 0.05 \text{ m}$, $A_{AC} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{CB} = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ 代入上式,得补充方程

$$\frac{0.10 R_A}{2.0 \times 10^{-4}} - \frac{0.05 R_B}{4.0 \times 10^{-4}} = 0$$

简化上式,得

$$R_A - 0.25 R_B = 0 \quad (5)$$

将平衡方程①式和补充方程⑤式联立求解,得

$$R_A = 1000 \text{ N(拉)}, \quad R_B = 4000 \text{ N(压)}$$

(5) 计算钢板 AC 段和 CB 段的应力

$$\sigma_{AC} = \frac{N_{AC}}{A_{AC}} = \frac{R_A}{A_{AC}} = \frac{1000}{2.0 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 5 \text{ MPa(拉)}$$

$$\sigma_{CB} = \frac{N_{CB}}{A_{CB}} = \frac{R_B}{A_{CB}} = \frac{4000}{4.0 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 10 \text{ MPa(压)}$$

比较 σ_{AB} 和 σ_{CB} , 可知最大应力产生在钢板的 CB 段, 最大应力

$$\sigma_{\max} = \sigma_{CB} = 10 \text{ MPa(压)}$$

解法 2 解除题 1-22 图(b)所示钢板的上端约束, 得静定基如题 1-22 图(e)所示。根据变形几何条件, 即截面 A 处的位移为零, 有

$$\Delta l = \sum \frac{Nl}{EA} = \frac{R_A l_{AC}}{EA_{AC}} + \frac{(R_A - P) l_{CB}}{EA_{CB}} = 0$$

将 $l_{AC} = 0.1 \text{ m}$, $l_{CB} = 0.05 \text{ m}$, $A_{AC} = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $A_{CB} = 4.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $P = 5000 \text{ N}$ 代入上式, 得

$$\frac{0.1 R_A}{2.0 \times 10^{-4}} + \frac{0.05 (R_A - P)}{4.0 \times 10^{-4}} = 0$$

从上式解得 $R_A = 1000 \text{ N}$, 代入平衡方程①式中, 得

$$R_B = P - R_A = (5000 - 1000) \text{ N} = 4000 \text{ N}$$

结果与解法 1 相同, 但比解法 1 简便。

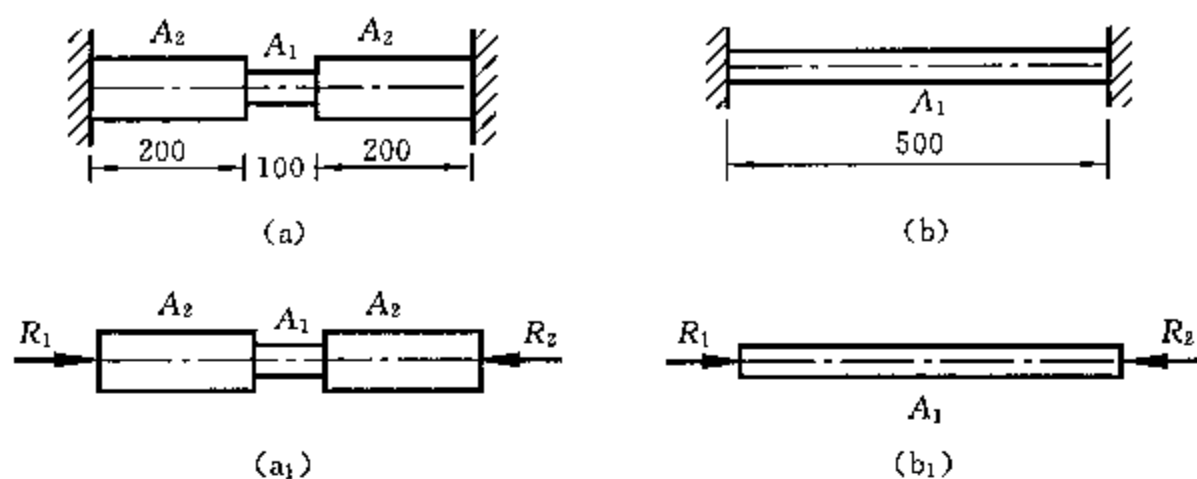
1-23 两钢杆如题 1-23 图(a)和(b)所示, 已知截面面积 $A_1 = 1 \text{ cm}^2$, $A_2 = 2 \text{ cm}^2$, 材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 线膨胀系数 $\alpha = 12.5 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ 。当温度升 30°C 时, 试求两杆内的最大应力。

解 (a) 如题 1-23 图(a)所示。这是一个温度应力问题。温度应力问题的实质是静不定问题。解除题 1-23 图(a)所示钢杆两端的约束, 代之以约束反力, 作受力图如题 1-23 图(a₁)所示。

(1) 平衡方程

$$\sum X = 0, \quad R_1 - R_2 = 0 \quad (1)$$

$$R_1 = R_2 = R$$



题 1-23 图

(2) 变形几何条件

由于杆两端原固定,杆长应保持不变,所以因温度而产生的伸长 Δl_T 和因轴向压力 R 而引起的缩短 Δl_R ,二者应相等,即

$$\Delta l_T = \Delta l_R \quad (2)$$

(3) 物理条件

$$\Delta l_T = \alpha l \Delta T = (12.5 \times 10^{-6} \times 0.5 \times 30) \text{ m} = 187.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_R &= \sum \frac{Rl}{EA} = 2 \times \frac{0.2R}{EA_2} + \frac{0.1R}{EA_1} = \left(\frac{0.4R}{210 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-4}} + \frac{0.1R}{210 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-4}} \right) R \\ &= 14.29 \times 10^{-9} R \end{aligned}$$

(4) 建立补充方程

将 Δl_T 和 Δl_R 的数值代入②式,得

$$187.5 \times 10^{-6} = 14.29 \times 10^{-9} R, \quad R = \frac{187.5 \times 10^{-6}}{14.29 \times 10^{-9}} \text{ N} = 13.12 \text{ kN}$$

最大应力产生在截面 A_1 上 $\sigma_{\max} = \frac{R}{A_1} = \frac{13.12 \times 10^3}{1 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 131.2 \text{ MPa}$

(b) 如题 1-23 图(b)所示。解除杆两端约束,代之以约束反力,作受力图如题 1-23 图(b₁)所示。

(1) 平衡方程

$$\sum X = 0, \quad R_1 - R_2 = 0$$

$$R_1 = R_2 = R \quad (3)$$

(2) 变形几何条件

$$\Delta l_T = \Delta l_R \quad (4)$$

(3) 物理条件

$$\Delta l_T = \alpha l \Delta T = (12.5 \times 10^{-6} \times 0.50 \times 30) \text{ m} = 187.5 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA_1} = \frac{0.5R}{210 \times 10^9 \times 1 \times 10^{-4}} = 2.381 \times 10^{-8} R$$

(4) 建立补充方程

将 Δl_T 和 Δl_R 的数值代入④式,得

$$187.5 \times 10^{-6} = 2.381 \times 10^{-8} R, \quad R = \frac{187.5 \times 10^{-6}}{2.381 \times 10^{-8}} \text{ N} = 7.875 \text{ kN}$$

最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{R}{A_1} = \frac{7.875 \times 10^3}{1 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 78.75 \text{ MPa}$$

第二章 剪 切

知 识 要 点

1. 外力特点

杆件承受一对等值、反向、作用线相互紧靠但又不重合的平行力作用。

2. 变形特征

杆件沿二平行力的交界面发生相对错动。

3. 内力

剪切面上的内力称为剪力,用符号 Q 表示。材料力学中规定,剪力 Q 对所研究的隔离体内任一点的力矩为顺时针转向的为正,逆时针转向的为负。

4. 剪切的实用计算

(1) 平均切应力

假设切应力在整个剪切面上均匀分布,则平均切应力

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

(2) 剪切强度条件

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau]$$

式中, $[\tau]$ 为许用切应力。

5. 挤压的实用计算

(1) 挤压破坏

构件相互接触的表面上,因承受较大的压力作用,使接触处的局部区域产生显著的塑性变形或被压溃。

(2) 平均挤压应力

假设挤压应力在有效挤压面上均匀分布,挤压应力用下式计算

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}}$$

(3) 有效挤压面积的确定

① 平面接触 有效接触面积 A_{bs} 等于实际承压面面积。

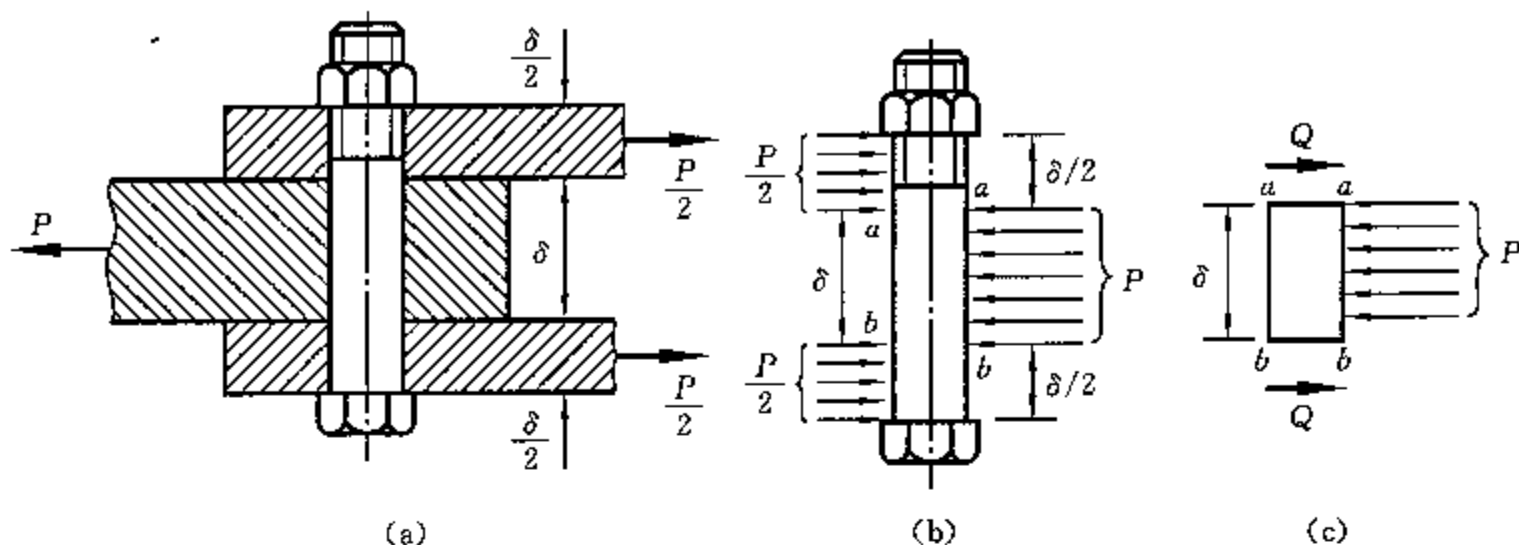
② 柱面接触 有效接触面积 A_{bs} 等于实际承压面面积在其直径平面上的投影。

(4) 挤压强度条件

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}]$$

习 题 详 解

2-1 一螺栓连接如题 2-1 图(a)所示,已知 $P=200 \text{ kN}$, $\delta=2 \text{ cm}$,螺栓材料的许用切应力 $[\tau]$



题 2-1 图

$= 80 \text{ MPa}$, 试求螺栓的直径。

解 螺栓受力图如题 2-1 图(b)所示, 这是个双剪切问题, 截面 a-a 和 b-b 均为剪切面。选取两剪切面之间的一段螺栓为研究对象, 作受力图如题 2-1 图(c)所示。由平衡条件

$$\sum X = 0, \quad 2Q - P = 0$$

可得剪力

$$Q = \frac{P}{2} = \frac{200}{2} \text{ kN} = 100 \text{ kN}$$

剪切面面积

$$A = \frac{\pi d^2}{4}$$

螺栓的工作切应力为

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2}$$

由剪切强度条件

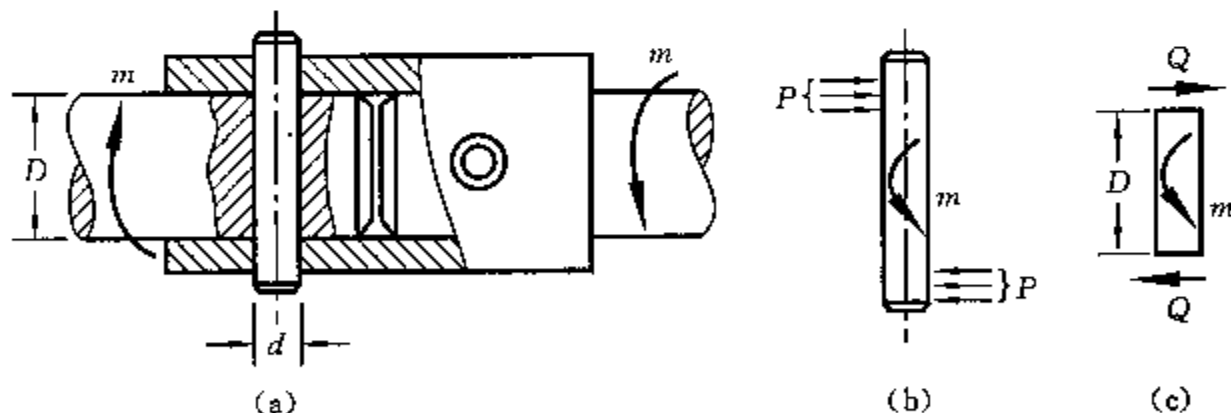
$$\tau \leq [\tau]$$

可得

$$d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \times 100 \times 10^3}{\pi \times 80 \times 10^6}} \text{ m} = 3.989 \text{ cm}$$

所以选取螺栓直径 $d = 4 \text{ cm}$ 。

2-2 销钉式安全离合器如题 2-2 图(a)所示, 允许传递的外力偶矩 $m = 30 \text{ kN} \cdot \text{cm}$, 销钉材料的剪切强度极限 $\tau_b = 360 \text{ MPa}$, 轴的直径 $D = 30 \text{ mm}$, 为保证 $m > 30000 \text{ N} \cdot \text{cm}$ 时销钉被剪断, 求销钉的直径 d 。



题 2-2 图

解 销钉受力图如题 2-2 图(b)所示。销钉有两个剪切面, 两剪切面之间的一段销钉受力图如题 2-2 图(c)所示。由平衡条件

$$\sum m = 0, \quad m - DQ = 0$$

可得剪力

$$Q = \frac{m}{D} = \frac{300}{30 \times 10^{-3}} \text{ N} = 10 \text{ kN}$$

确保 $m \geq 30000 \text{ N} \cdot \text{cm}$ 时销钉被剪断的条件是

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 10 \times 10^3}{\pi d^2} \geq \tau_b$$

$$d \leq \sqrt{\frac{4 \times 10 \times 10^3}{\pi \tau_b}} = \sqrt{\frac{4 \times 10 \times 10^3}{\pi \times 360 \times 10^6}} \text{ m} = 5.947 \text{ mm}$$

所以选用直径 $d=6 \text{ mm}$ 的销钉。

2-3 题 2-3 图所示冲床的最大冲力为 400 kN , 冲头材料的许用应力 $[\sigma]=440 \text{ MPa}$, 被冲剪钢板的剪切强度极限 $\tau_b=360 \text{ MPa}$ 。求在最大冲力作用下所能冲剪圆孔的最小直径 d 和钢板的最大厚度 δ 。

解 冲孔过程就是发生剪切破坏的过程。剪切面面积是一直径为 d , 高为 δ 的圆柱面的面积, 即

$$A = \pi d \delta$$

分布于此圆柱面上的剪力 $Q=P$, 冲孔时, 工作切应力至少需达到剪切强度极限 τ_b , 即

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{P}{\pi d \delta} \geq \tau_b$$

与此同时, 为确保冲头不被压坏, 还应满足

$$\sigma_c = \frac{N}{A_c} = \frac{P}{A_c} = \frac{4P}{\pi d^2} \leq [\sigma] \quad (2)$$

解②式, 得冲头的最小直径也即冲剪圆孔的最小直径

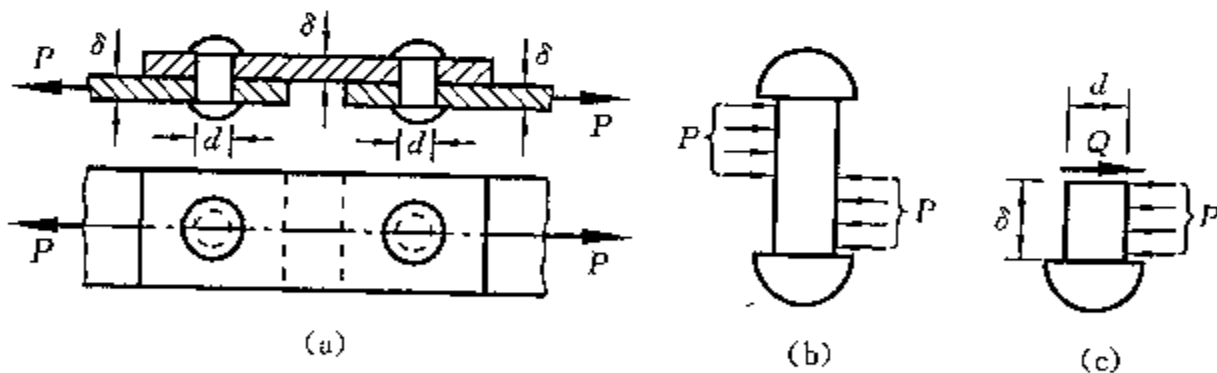
$$d \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 400 \times 10^3}{\pi \times 440 \times 10^6}} \text{ m} = 3.402 \times 10^{-2} \text{ m}$$

代入①式, 得钢板的最大厚度

$$\delta \leq \frac{P}{\pi d \tau_b} = \frac{400 \times 10^3}{\pi \times 3.402 \times 10^{-2} \times 360 \times 10^6} \text{ m} = 1.04 \text{ cm}$$

所以, 冲剪孔的最小直径 $d=3.402 \text{ cm}$, 能冲剪圆孔的最大厚度 $\delta=1.04 \text{ cm}$ 。

2-4 已知题 2-4 图(a)所示铆接钢板的厚度 $\delta=10 \text{ mm}$, 铆钉的直径为 $d=17 \text{ mm}$, 铆钉的许用切应力 $[\tau]=140 \text{ MPa}$, 许用挤压应力 $[\sigma_n]=320 \text{ MPa}$, $P=24 \text{ kN}$, 试作强度校核。



题 2-4 图

解 (1) 剪切强度校核

铆钉受力图如题 2-4 图(b)所示, 只有一个剪切面, 此情况称为单剪。取铆钉剪切面下侧部分为研究对象, 作受力图如题 2-4 图(c)所示。由平衡条件

$$\sum X = 0, \quad Q - P = 0$$

得剪切面上的剪力

$$Q = P = 24 \text{ kN}$$

剪切面面积

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (17 \times 10^{-3})^2}{4} \text{ m}^2 = 227 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

铆钉的工作切应力为

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{24 \times 10^3}{227 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 105.7 \text{ MPa} < [\tau] = 140 \text{ MPa}$$

(2) 挤压强度校核

挤压力 $P = 24 \text{ kN}$, 挤压面积等于被挤压的半圆柱面的正投影面积, 即

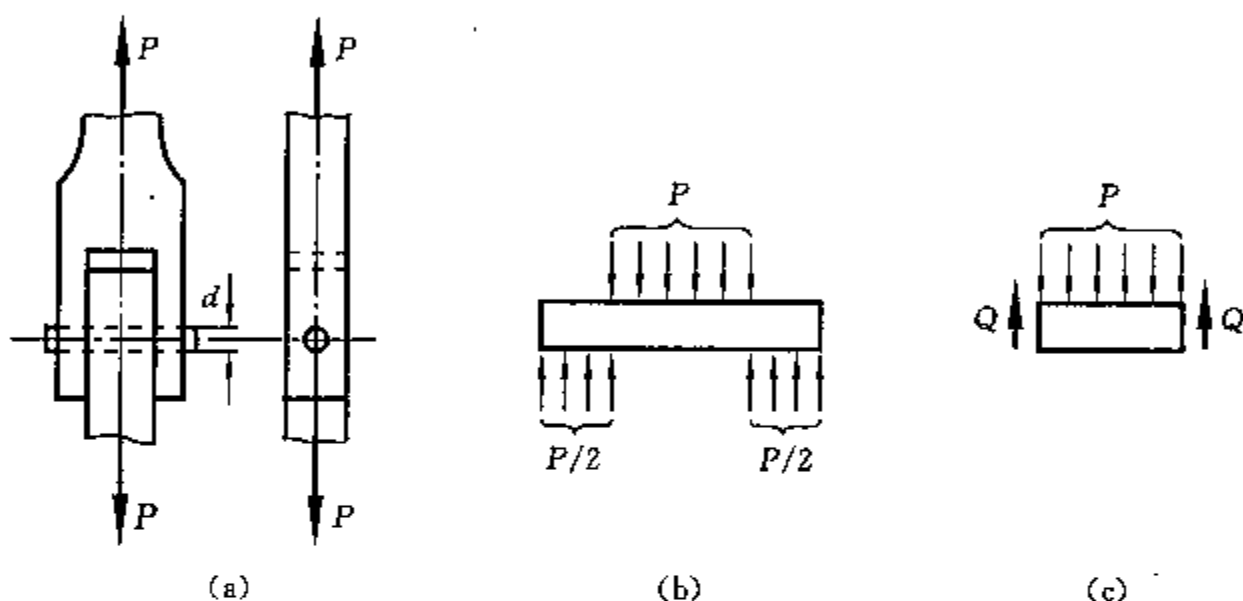
$$A_{bs} = \delta d = (10 \times 10^{-3} \times 17 \times 10^{-3}) \text{ m}^2 = 170 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

铆钉的工作挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} = \frac{24 \times 10^3}{170 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 141.2 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 320 \text{ MPa}$$

铆钉的工作切应力和挤压应力均小于各自的许用应力。

2-5 题 2-5 图(a)所示为测定剪切强度极限的试验装置。若已知低碳钢试件的直径 $d = 1 \text{ cm}$, 剪断试件时的外力 $P = 50.2 \text{ kN}$, 问材料的剪切强度极限为多少?



题 2-5 图

解 试件的受力图如题 2-5 图(b)所示。这是个双剪切问题, 试件有两个剪切面。取两剪切面之间的一段试件为研究对象, 作受力图如题 2-5 图(c)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad 2Q - P = 0$$

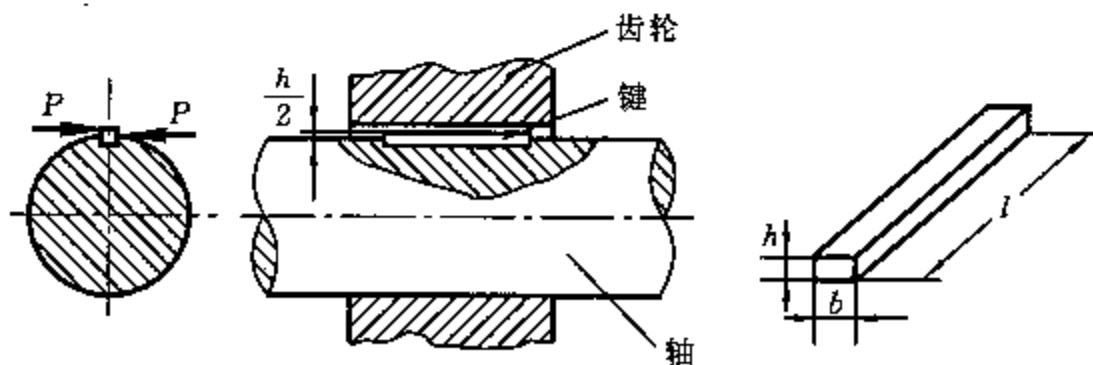
可得剪切面上的剪力
$$Q = \frac{P}{2} = \frac{50.2}{2} \text{ kN} = 25.1 \text{ kN}$$

剪切面面积
$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times (1 \times 10^{-2})^2}{4} \text{ m}^2 = 7.854 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

试件被剪断的条件是材料的剪切强度极限

$$\tau_b = \tau = \frac{Q}{A} = \frac{25.1 \times 10^3}{7.854 \times 10^{-5}} \text{ Pa} = 320 \text{ MPa}$$

2-6 一减速机上齿轮与轴通过平键连接。已知键受外力 $P = 12 \text{ kN}$, 所用平键的尺寸为 $b = 28 \text{ mm}$, $h = 16 \text{ mm}$, $l = 60 \text{ mm}$, 键的许用应力 $[\tau] = 87 \text{ MPa}$, $[\sigma_b] = 100 \text{ MPa}$ 。试校核键的强度。



题 2-6 图

解 (1) 剪切强度校核

剪切面面积 $A = lb = (60 \times 28) \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 1680 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

剪切面上的剪力 $Q = P = 12 \text{ kN}$, 所以平键内的切应力

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{12 \times 10^3}{1680 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 7.143 \text{ MPa} < [\tau] = 87 \text{ MPa}$$

(2) 挤压强度校核

挤压面积等于平键侧面面积之半, 即

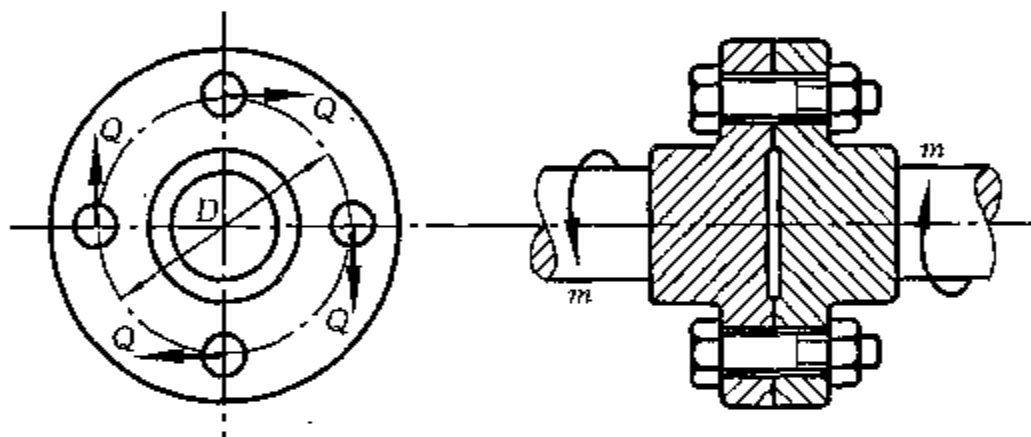
$$A_{bs} = \frac{1}{2} hl = \frac{1}{2} \times (16 \times 60) \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 480 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

挤压面上承受的挤压力 $P = 12 \text{ kN}$, 所以挤压应力

$$\sigma_{bs} = \frac{P}{A_{bs}} = \frac{12 \times 10^3}{480 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 25 \text{ MPa} < [\sigma_{bs}] = 100 \text{ MPa}$$

切应力和挤压应力均小于各自的许用应力。

2-7 题 2-7 图所示联轴器, 用四个螺栓连接, 螺栓对称地安排在直径 $D = 480 \text{ mm}$ 的圆周上。这个联轴节传递的力偶矩 $m = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 求螺栓的直径 d 需要多大? 材料的许用切应力 $[\tau] = 80 \text{ MPa}$ 。(提示: 由于对称, 可假设各螺栓所受的剪力相等。)



题 2-7 图

解 作用于轴上的外力偶矩 m 应与 4 个螺栓上的剪力 Q 对轴心之矩相平衡, 即

$$\sum m_x = 0, \quad 4Q \times \frac{D}{2} - m = 0$$

由上式, 得螺栓剪切面上的剪力

$$Q = \frac{m}{2D} = \frac{24 \times 10^3}{2 \times 480 \times 10^{-3}} \text{ N} = 25 \text{ kN}$$

由剪切强度条件

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} \leq [\tau]$$

可确定螺栓直径

$$d \geq \sqrt{\frac{4Q}{\pi[\tau]}} = \sqrt{\frac{4 \times 25 \times 10^3}{\pi \times 80 \times 10^6}} \text{ m} = 1.995 \text{ cm}$$

选取螺栓直径 $d = 2 \text{ cm}$ 。

2-8 题 2-8 图(a)所示夹剪, 销于 C 的直径为 0.5 cm , 剪直径与销子直径相同的铜丝时, 若力 $P = 200 \text{ N}$, $a = 3 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, 求铜丝与销子横截面上的平均切应力。

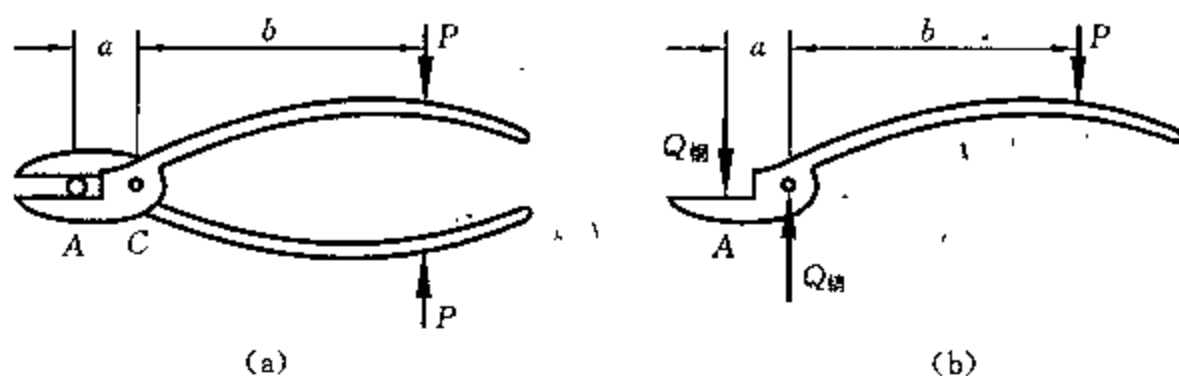
解 取夹剪的一股为研究对象, 作受力图如题 2-8 图(b)所示。由平衡条件

$$\sum M_A = 0, \quad P(a+b) - Q_{\text{销}} a = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad Q_{\text{销}} - Q_{\text{铜}} - P = 0$$

可得铜丝和销子剪切面上的分别为剪力

$$Q_{\text{销}} = \frac{a+b}{a} P = \frac{(3+15) \times 10^{-2}}{3 \times 10^{-2}} \times 200 \text{ N} = 1200 \text{ N}$$



题 2-8 图

$$Q_{\text{销}} = Q_{\text{销}} - P = (1200 - 200) \text{ N} = 1000 \text{ N}$$

铜丝和销子的剪切面面积相同,均为

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times (0.5 \times 10^{-3})^2}{4} \text{ m}^2 = 0.1964 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

铜丝横截面上的平均切应力

$$\tau_{\text{铜}} = \frac{Q_{\text{铜}}}{A} = \frac{1000}{0.1964 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 50.93 \text{ MPa}$$

销子横截面上的平均切应力

$$\tau_{\text{销}} = \frac{Q_{\text{销}}}{A} = \frac{1200}{0.1964 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 61.10 \text{ MPa}$$

2-9 一冶炼厂使用的高压泵安全阀如题 2-9 图(a)所示。要求当活塞下高压液体的压强达 $p = 3.4 \text{ MPa}$ 时,使安全销沿 1-1 和 2-2 两截面剪断,从而使高压液体流出,以保证泵的安全。已知活塞直径 $D = 5.2 \text{ cm}$,安全销采用 15 号钢,其剪切强度极限 $\tau_b = 320 \text{ MPa}$,试确定安全销的直径 d 。

解 安全销的受力图如题 2-9 图(b)所示。这是个双剪切问题,取两剪切面之间的一段销杆为研究对象,作受力图如题 2-9 图(c)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad P - 2Q = 0$$

可得安全销的剪切面上的剪力

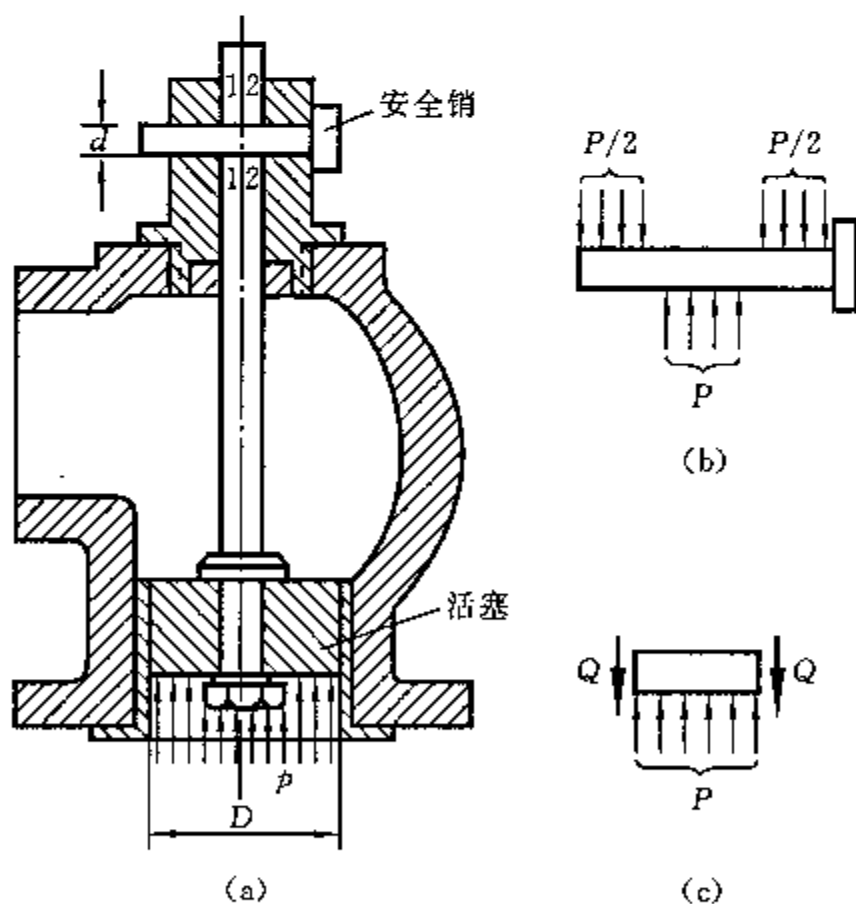
$$\begin{aligned} Q &= \frac{P}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi D^2}{4} p \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi \times (5.2 \times 10^{-2})^2}{4} \times 3.4 \times 10^6 \text{ N} \\ &= 3.61 \text{ kN} \end{aligned}$$

安全销被剪断的条件是

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} \geq \tau_b$$

$$\begin{aligned} d &\leq \sqrt{\frac{4Q}{\pi \tau_b}} = \sqrt{\frac{4 \times 3.61 \times 10^3}{\pi \times 320 \times 10^6}} \text{ m} \\ &= 0.379 \text{ cm} \end{aligned}$$

所以,安全销的直径 $d = 0.379 \text{ cm}$ 。



题 2-9 图

第三章 扭 转

知 识 要 点

1. 圆轴扭转时外力偶矩的计算

——传动轴的转速、传递的功率与外力偶矩之间的关系

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

式中, m ——作用在轴上的外力偶矩, 单位为 $\text{N} \cdot \text{m}$;

P_k ——轴传递的功率, 单位为 kW ;

n ——轴的转速, 单位为 r/m 。

2. 圆轴扭转时横截面上的内力

(1) 扭矩

圆轴扭转时, 其横截面上产生的内力偶矩, 称为扭矩, 用符号 T 表示。扭矩的正负号, 用右手螺旋法则判定。扭矩矢量的指向背离横截面的为正, 指向横截面的为负。

(2) 扭矩图

扭矩图是表示圆轴横截面上的扭矩沿轴线方向变化规律的图线。

3. 圆轴扭转的强度计算

(1) 横截面上的切应力

① 分布规律 一点的切应力, 其数值与该点到圆心的距离成正比, 其方向与过该点的半径垂直。

② 计算公式

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_P} \rho$$

式中, T ——横截面上的扭矩;

ρ ——横截面上任一点到圆心的距离;

I_P ——横截面对形心的极惯性矩。

(2) 极惯性矩

① 实心圆截面

$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

② 空心圆截面

$$I_P = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

式中, $\alpha = \frac{d}{D}$ 。

(3) 圆轴扭转的强度条件

$$\tau_{\max} = \left(\frac{T}{W_t} \right)_{\max} \leq [\tau]$$

对于等截面圆轴

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau]$$

(4) 抗扭截面系数

① 实心圆截面

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}$$

② 空心圆截面

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

(5) 强度计算的三类问题

① 强度校核 $\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} \leq [\tau];$

② 选择截面 $W_t \geq \frac{T_{\max}}{[\tau]}$, 由 W_t 计算 D ;

③ 计算许用载荷 $T \leq [\tau] W_t$, 由 T 计算外力偶矩 m 。

4. 圆轴扭转时的刚度计算

(1) 圆轴扭转时的变形

小变形时, 圆轴的两任意横截面之间仅产生相对角位移, 称为相对扭转角。

① 相对扭转角 $\phi = \frac{Tl}{GI_P} \text{ rad}$

② 单位长度扭转角 $\varphi = \frac{T}{GI_P} \text{ rad/m}$

(2) 圆轴扭转的刚度条件

$$\varphi_{\max} = \left(\frac{T}{GI_P} \right)_{\max} \leq [\varphi] \text{ rad/m}$$

或

$$\varphi_{\max} = \left(\frac{T}{GI_P} \right)_{\max} \times \frac{180}{\pi} \leq [\varphi] \text{ } ^\circ/\text{m}$$

习题详解

3-1 试求题 3-1 图所示各轴在指定横截面 1-1、2-2 和 3-3 上的扭矩, 并在各截面上表示出扭矩的转向。

解 (a) 如题 3-1 图(a)所示。利用截面法, 可确定截面 1-1、2-2 和 3-3 上的扭矩分别为 $T_1 = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $T_2 = -2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $T_3 = -2 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 它们的转向被标示在题 3-1 图(a₁)中。

(b) 如题 3-1 图(b)所示。利用截面法, 可确定截面 1-1、2-2 和 3-3 上的扭矩分别为 $T_1 = -3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $T_2 = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$, $T_3 = 0$, 它们的转向被标示在题 3-1 图(b₁)中。

3-2 试绘出题 3-2 图所示各轴的扭矩图, 并求 $|T|_{\max}$ 。

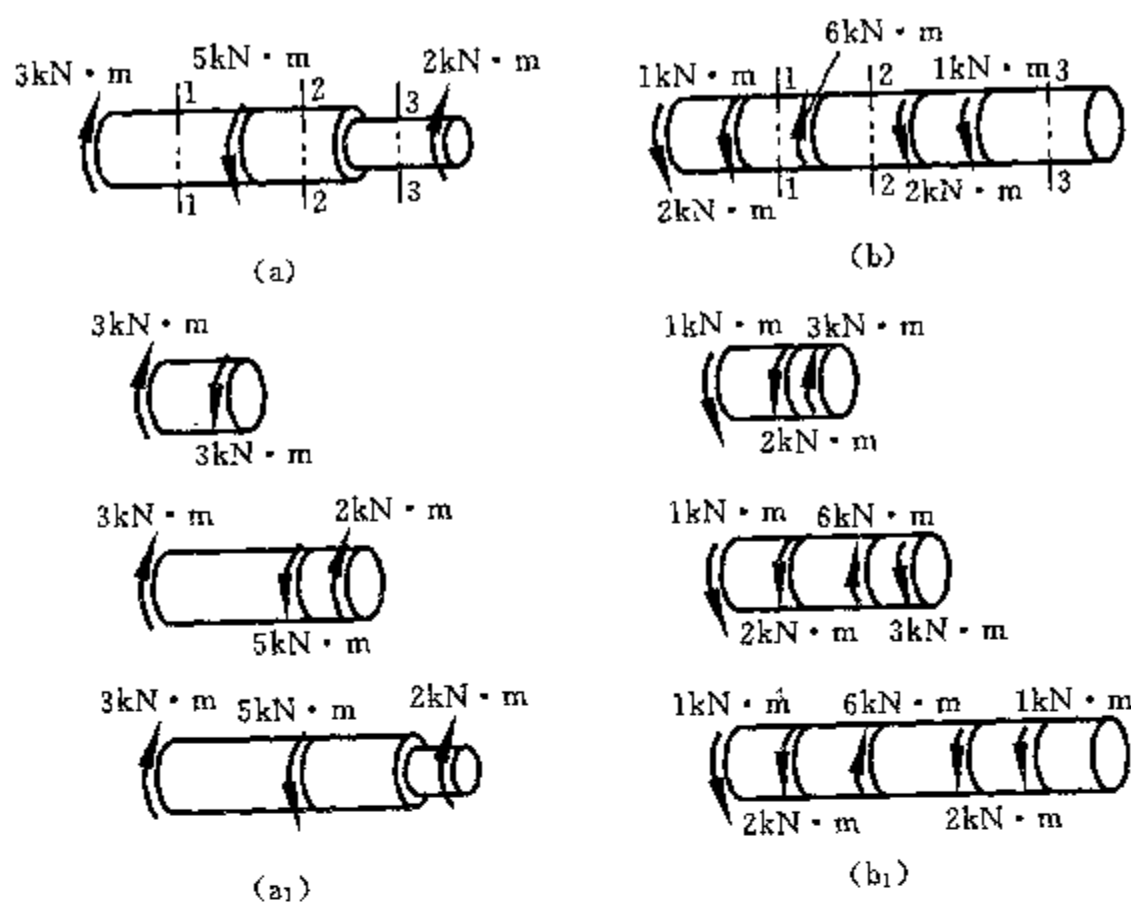
解 (a) 如题 3-2 图(a)所示。利用截面法, 绘出扭矩图如题 3-2 图(a₁)所示。 $|T|_{\max} = 2 \text{ m}$ 。

(b) 如题 3-2 图(b)所示。利用截面法, 绘出扭矩图如题 3-2 图(b₁)所示。 $|T|_{\max} = 4 \text{ m}$ 。

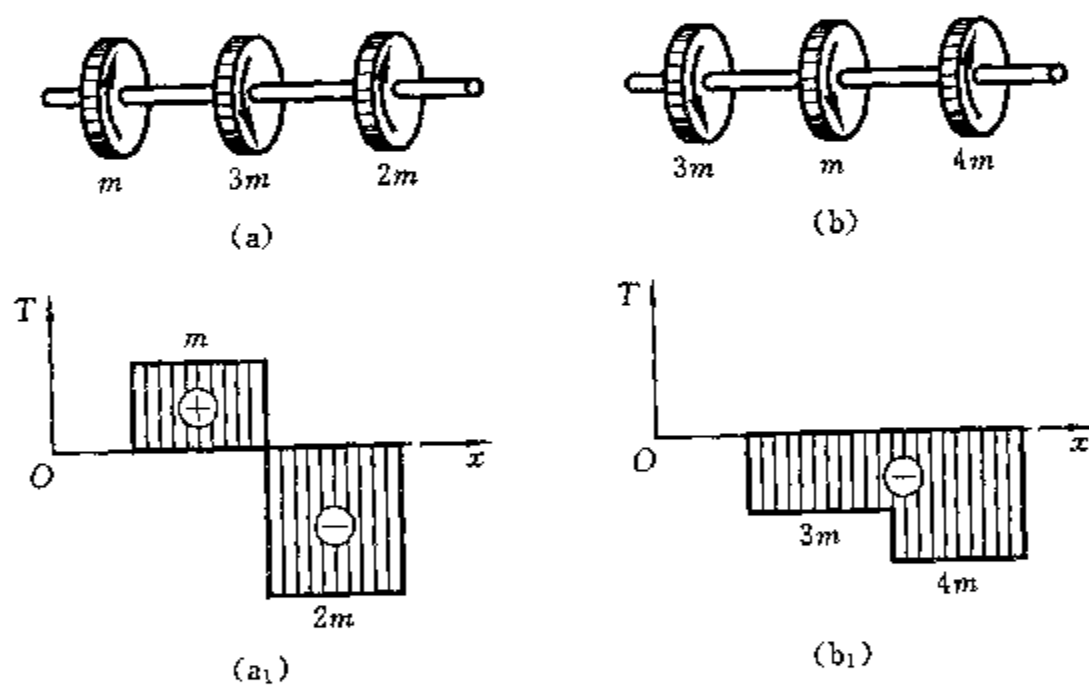
3-3 试绘出题 3-3 图所示各轴的扭矩图, 并求出 $|T|_{\max}$ 。已知 $m_A = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$, $m_B = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$, $m_C = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

解 (a) 如题 3-3 图(a)所示。利用截面法, 绘扭矩图如题 3-3 图(a₁)所示。 $|T|_{\max} = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

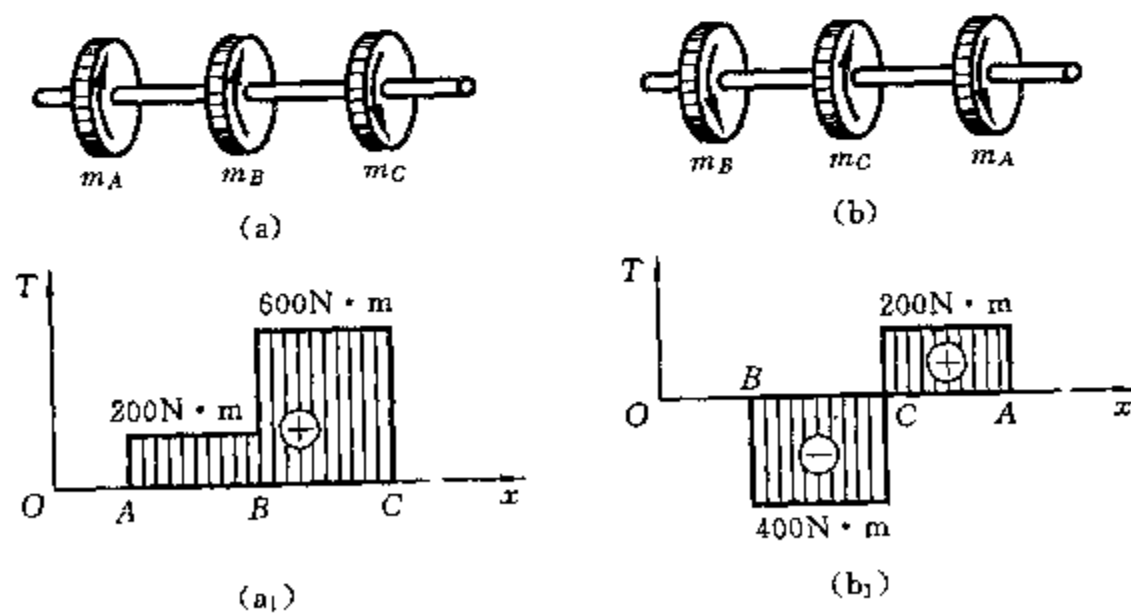
(b) 如题 3-3 图(b)所示。利用截面法, 绘扭矩图如题 3-3 图(b₁)所示。 $|T|_{\max} = 400 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。



题 3-1 图



题 3-2 图



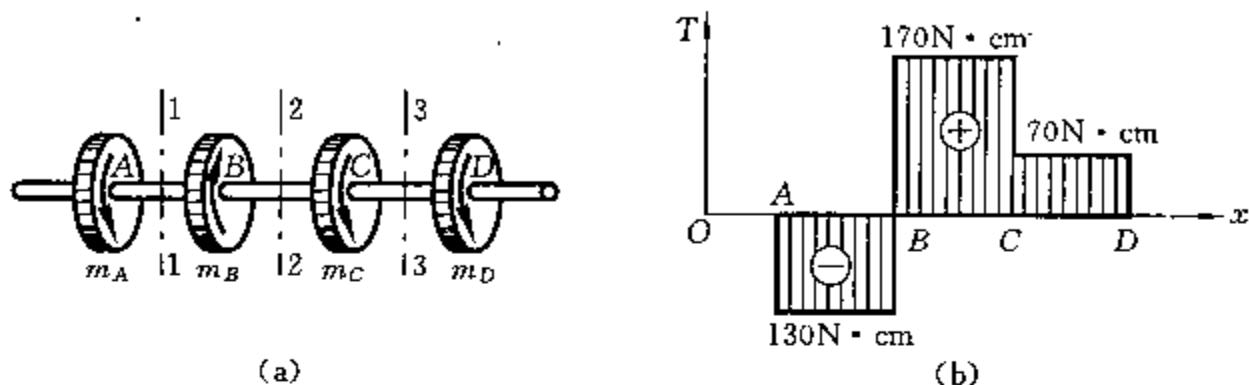
题 3-3 图

3-4 一传动轴如题 3-4 图(a)所示,已知 $m_A = 130 \text{ N} \cdot \text{cm}$, $m_B = 300 \text{ N} \cdot \text{cm}$, $m_C = 100 \text{ N} \cdot \text{cm}$, $m_D = 70 \text{ N} \cdot \text{cm}$;各段轴的直径分别为

$$d_{AB} = 5 \text{ cm}, d_{BC} = 7.5 \text{ cm}, d_{CD} = 5 \text{ cm}$$

(1) 画出扭矩图;

(2) 求 1-1、2-2 和 3-3 截面的最大切应力。



题 3-4 图

解 (1) 画扭矩图

利用截面法,画出扭矩图如题 3-4 图(b)所示。

(2) 计算指定截面上的最大切应力

利用最大切应力计算公式 $\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}$

可计算得 1-1、2-2 和 3-3 截面上的最大切应力分别为

$$\tau_{1\max} = \frac{T_1}{W_{t1}} = \frac{16T_1}{\pi d_{AB}^3} = \frac{16 \times 130 \times 10^{-2}}{\pi \times (5 \times 10^{-2})^3} \text{ Pa} = 53 \text{ kPa}$$

$$\tau_{2\max} = \frac{T_2}{W_{t2}} = \frac{16T_2}{\pi d_{BC}^3} = \frac{16 \times 170 \times 10^{-2}}{\pi \times (7.5 \times 10^{-2})^3} \text{ Pa} = 20.52 \text{ kPa}$$

$$\tau_{3\max} = \frac{T_3}{W_{t3}} = \frac{16T_3}{\pi d_{CD}^3} = \frac{16 \times 70 \times 10^{-2}}{\pi \times (5 \times 10^{-2})^3} \text{ Pa} = 28.52 \text{ kPa}$$

3-5 题 3-5 图(a)所示的空心圆轴,外径 $D = 8 \text{ cm}$,内径 $d = 6.25 \text{ cm}$,承受扭矩 $m = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

(1) 求 τ_{\max} 、 τ_{\min} ;

(2) 绘出横截面上的切应力分布图;

(3) 求单位长度扭转角,已知 $G = 80 \times 10^3 \text{ MPa}$ 。

解 (1) 计算最大和最小切应力

横截面上的扭矩 $T = m = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}$

横截面的极惯性矩和抗扭截面系数分别为

$$I_P = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(0.08^4 - 0.0625^4)}{32} \text{ m}^4$$

$$= 2.523 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{6.25}{8} \right)^4 \right] \text{ m}^3 = 6.308 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

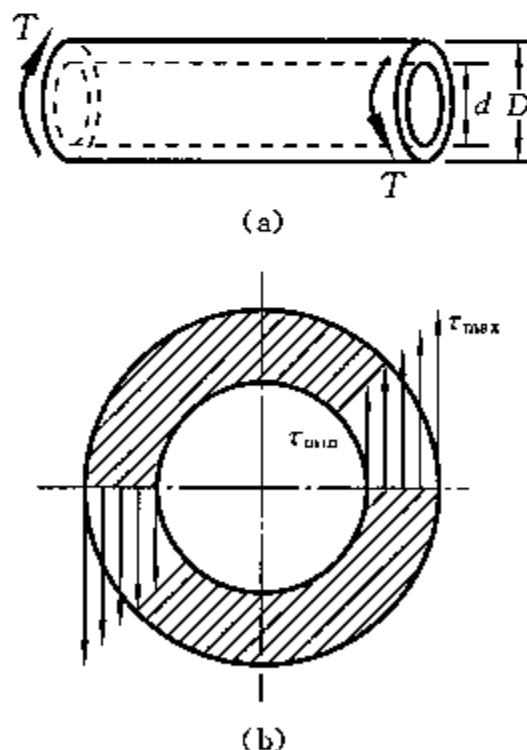
最大与最小切应力分别为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{1000}{6.308 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 15.85 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = \frac{Td}{2I_P} = \frac{1000 \times 0.0625}{2 \times 2.523 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 12.39 \text{ MPa}$$

(2) 绘横截面上的切应力分布图

切应力分布图如题 3-5 图(b)所示。



题 3-5 图

(3) 计算单位长度扭转角

$$\varphi = \frac{T}{GI_P} = \left(\frac{1000}{80 \times 10^9 \times 2.523 \times 10^{-6}} \times \frac{180}{\pi} \right) ^\circ/\text{m} = 0.2839 ^\circ/\text{m}$$

3-6 已知题 3-6 图(a)所示变截面钢轴上的外力偶矩 $m_B = 1800 \text{ N} \cdot \text{m}$, $m_C = 1200 \text{ N} \cdot \text{m}$, 试求最大切应力和最大相对扭转角。已知 $G = 80 \times 10^9 \text{ Pa}$ 。

解 首先利用截面法, 画变截面钢轴的扭矩图如题 3-6 图(b)所示。

(1) 计算最大切应力

AB 段和 BC 段轴的极惯性矩分别为

$$I_{PAB} = \frac{\pi D_{AB}^4}{32} = \frac{\pi \times 0.075^4}{32} \text{ m}^4 = 3.106 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{PBC} = \frac{\pi D_{BC}^4}{32} = \frac{\pi \times 0.05^4}{32} \text{ m}^4 = 6.136 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

AB 段和 BC 段轴的抗扭截面系数分别为

$$W_{TAB} = \frac{2I_{PAB}}{D_{AB}} = \frac{2 \times 3.106 \times 10^{-6}}{0.075} \text{ m}^3 = 82.82 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_{TBC} = \frac{2I_{PBC}}{D_{BC}} = \frac{2 \times 6.136 \times 10^{-7}}{0.05} \text{ m}^3 = 245.4 \times 10^{-7} \text{ m}^3$$

AB 段和 BC 段轴横截面上的最大切应力分别为

$$\tau_{AB\max} = \frac{T_{AB}}{W_{TAB}} = \frac{3000}{82.82 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 36.22 \text{ MPa}$$

$$\tau_{BC\max} = \frac{T_{BC}}{W_{TBC}} = \frac{1200}{245.4 \times 10^{-7}} \text{ Pa} = 48.89 \text{ MPa}$$

所以, 变截面钢轴的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \tau_{BC\max} = 48.89 \text{ MPa}$$

(2) 计算最大相对扭转角

$$\begin{aligned} \phi_{\max} = \phi_{CA} = \phi_{CB} + \phi_{BA} &= \frac{T_{BC}l_{BC}}{GI_{PBC}} + \frac{T_{AB}l_{AB}}{GI_{PAB}} = \left(\frac{1200 \times 0.5}{80 \times 10^9 \times 6.136 \times 10^{-7}} + \frac{3000 \times 0.75}{80 \times 10^9 \times 3.106 \times 10^{-6}} \right) \text{ rad} \\ &= (1.222 \times 10^{-2} + 9.05 \times 10^{-3}) \text{ rad} = 21.27 \times 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad \phi_{\max} = 21.27 \times 10^{-3} \text{ rad} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 1.219^\circ$$

3-7 一钢轴的转速 $n = 240 \text{ r/min}$ 。传递功率 $P_k = 44.1 \text{ kW}$ 。已知 $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, $[\varphi] = 1^\circ/\text{m}$, $G = 80 \times 10^9 \text{ MPa}$, 试按强度和刚度条件计算轴的直径。

解 (1) 计算钢轴承受的外力偶矩

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{44.1}{240} \text{ N} \cdot \text{m} = 1755 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 按强度要求计算轴的直径

由强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d_1^3} \leq [\tau]$$

可得所需轴径

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1755}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 6.068 \text{ cm}$$

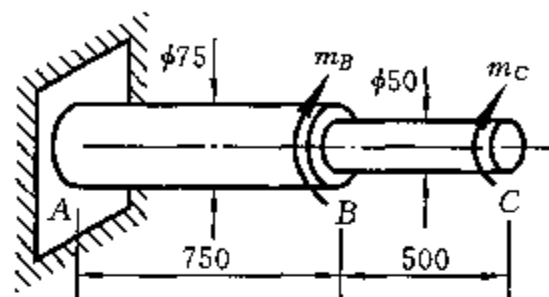
(3) 按刚度条件计算轴的直径

由刚度条件

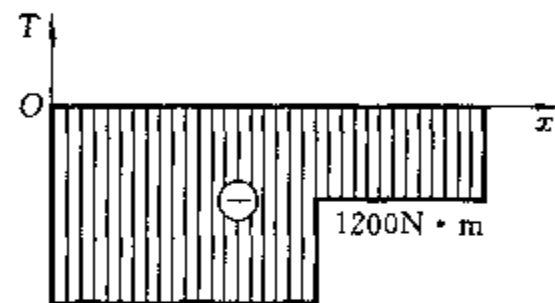
$$\varphi = \frac{T}{GI_P} = \frac{32T}{G\pi d_2^4} \leq [\varphi]$$

可得所需轴径

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32m}{G\pi[\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 1755}{80 \times 10^9 \times \pi \times 1 \times \frac{\pi}{180}}} \text{ m} = 5.982 \text{ cm}$$



(a)



(b)

题 3-6 图

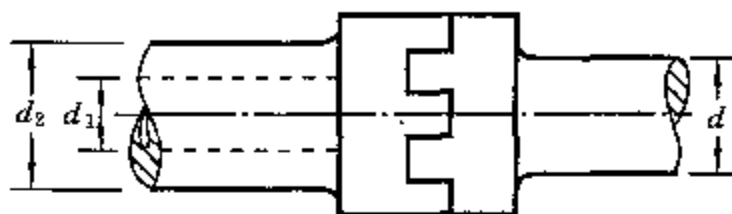
比较以上按强度和刚度条件计算得到的轴径,取其大者,即

$$d = d_1 = 6.068 \text{ cm}$$

3-8 题 3-8 图所示实心轴通过牙嵌离合器把功率传给空心轴。传递的功率 $P_k = 7.5 \text{ kW}$, 轴的转速 $n = 100 \text{ r/min}$, 试选择实心轴直径 d 和空心轴外径 d_2 。已知 $d_1/d_2 = 0.5$, $[\tau] = 40 \text{ MPa}$ 。

解 (1) 计算题 3-8 图所示传动轴承受的外力偶矩

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{7.5}{100} \text{ N} \cdot \text{m} = 716.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$



题 3-8 图

(2) 选择实心轴的直径

$$\text{由强度条件} \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

$$\text{得实心轴直径} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 716.3}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 4.5 \text{ cm}$$

(3) 选择空心轴的外径

$$\text{由强度条件} \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d_2^3 \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right]} \leq [\tau]$$

可得空心轴的外径

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right] [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 716.3}{\pi [1 - 0.5^4] \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 4.599 \text{ cm}$$

3-9 题 3-9 图所示轴 AB 的转速 $n = 120 \text{ r/min}$, 从轮 B 上输入功率 $P_k = 40 \text{ kW}$, 此功率的一半通过锥齿轮传给垂直轴 V , 另一半功率由水平轴 H 传走。已知锥齿轮的节圆直径 $D_1 = 600 \text{ mm}$, $D_2 = 240 \text{ mm}$, 各轴直径为 $d_1 = 100 \text{ mm}$, $d_2 = 80 \text{ mm}$, $d_3 = 60 \text{ mm}$, $[\tau] = 20 \text{ MPa}$, 试对各轴进行强度校核。

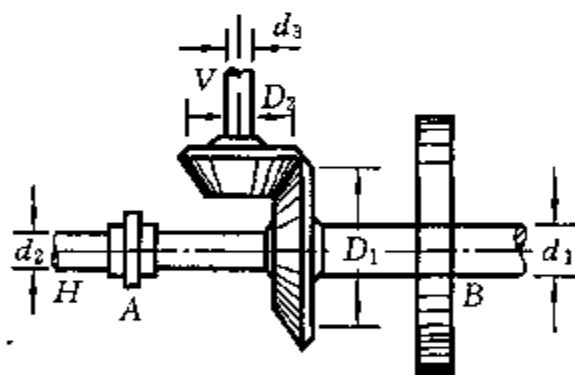
解 (1) 计算外力偶矩

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{40}{120} \text{ N} \cdot \text{m} = 3183 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 校核轴 B 强度

轴 B 的扭矩 $T_B = m = 3183 \text{ N} \cdot \text{m}$, 最大工作应力为

$$\tau_{B\max} = \frac{T_B}{W_{tB}} = \frac{16m}{\pi d_1^3} = \frac{16 \times 3183}{\pi \times 0.1^3} \text{ Pa} = 16.21 \text{ MPa} \leq [\tau]$$



题 3-9 图

(3) 校核轴 H 的强度

轴 H 的扭矩等于轴 B 传递的外力偶矩之半, 即 $T_H =$

$$\frac{T_B}{2} = \frac{m}{2}, \text{ 所以轴 } H \text{ 的最大工作应力为}$$

$$\sigma_{H\max} = \frac{T_H}{W_{tH}} = \frac{16(m/2)}{\pi d_2^3} = \frac{16 \times 3183}{2\pi \times 0.08^3} \text{ Pa} = 15.83 \text{ MPa} < [\tau]$$

(3) 校核轴 V 的强度

轴 V 的扭矩等于轴 B 传递的外力偶矩之半又经过两个锥齿轮变速, 其数值为

$$T_V = \frac{T_B D_2}{2 D_1} = \frac{3183 \times 0.24}{2 \times 0.60} \text{ N} \cdot \text{m} = 636.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

所以轴 V 的最大工作应力为

$$\tau_{V\max} = \frac{T_V}{W_{tV}} = \frac{16 \times 636.6}{\pi d_3^3} = \frac{16 \times 636.6}{\pi \times 0.063^3} \text{ Pa} = 15.01 \text{ MPa} < [\tau]$$

轴 B、水平轴 H 和垂直轴 V 的最大工作应力均小于许用应力。

3-10 如题 3-10 图所示,船用推进器的轴,一段是实心的,直径为 280 mm,另一段是空心的,其内径为外径的一半。在两段产生相同的最大切应力的条件下,求空心部分轴的外径 D 。

解 (1) 计算实心轴的最大切应力

$$\tau_{\text{实}, \max} = \frac{T}{W_{\text{实}}} = \frac{16m}{\pi d_{\text{实}}^3} = \frac{16m}{\pi \times 0.28^3}$$

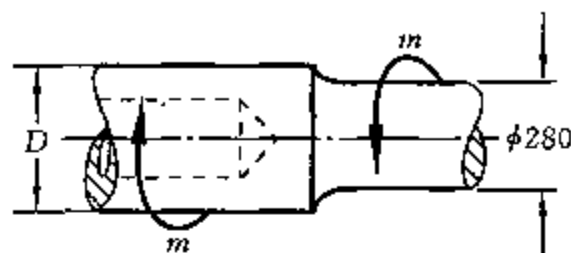
(2) 计算空心轴的最大切应力

$$\tau_{\text{空}, \max} = \frac{T}{W_{\text{空}}} = \frac{16m}{\pi D(1-\alpha^4)} = \frac{16m}{\pi D^3(1-0.5^4)}$$

在实心轴和空心轴产生相同的最大切应力情况下,有

$$\tau_{\text{实}, \max} = \tau_{\text{空}, \max}, \quad \frac{16m}{\pi \times 0.28^3} = \frac{16m}{\pi D^3(1-0.5^4)}$$

所以空心轴的外径为
$$D = \sqrt[3]{\frac{0.28^3}{1-0.5^4}} \text{ m} = 28.61 \text{ cm}$$



题 3-10 图

3-11 有一减速器如题 3-11 图所示。已知电动机的转速 $n=960 \text{ r/min}$, 功率 $P_k=5 \text{ kW}$, 轴的材料为 45 钢, $[\tau]=40 \text{ MPa}$, 试按扭转强度计算减速器第一轴的直径。

解 (1) 计算减速器第一轴承受的外力偶矩

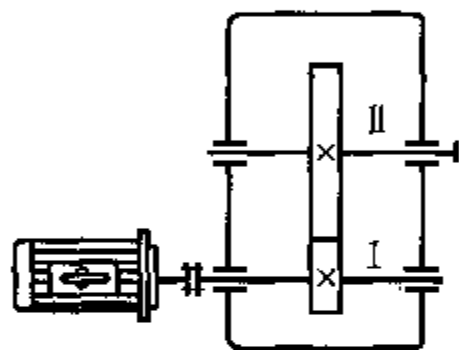
$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{5}{960} \text{ N} \cdot \text{m} = 49.74 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 计算第一轴的直径

由强度条件
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

可得第一轴的直径为

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 49.74}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 1.85 \text{ cm}$$



题 3-11 图

3-12 一传动轴传递功率 $P_k=3 \text{ kW}$, 转速 $n=27 \text{ r/min}$, 材料为 45 钢, 许用切应力 $[\tau]=40 \text{ MPa}$, 试计算轴的直径。

解 (1) 计算传动轴承受的外力偶矩

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{3}{27} \text{ N} \cdot \text{m} = 1061 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 计算传动轴直径

由强度条件
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

可得传动轴直径为
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 1061}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 5.13 \text{ cm}$$

3-13 一钢制传动轴, 受扭矩 $T=4 \text{ kN} \cdot \text{m}$, 轴的剪切弹性模量 $G=80 \times 10^3 \text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau]=40 \text{ MPa}$, 单位长度的许用转角 $[\varphi]=1^\circ/\text{m}$, 试计算轴的直径。

解 (1) 按强度条件确定轴径

由强度条件
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16T}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

可得轴径
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 4 \times 10^3}{\pi \times 40 \times 10^6}} \text{ m} = 7.986 \text{ cm}$$

(2) 按刚度条件确定轴径

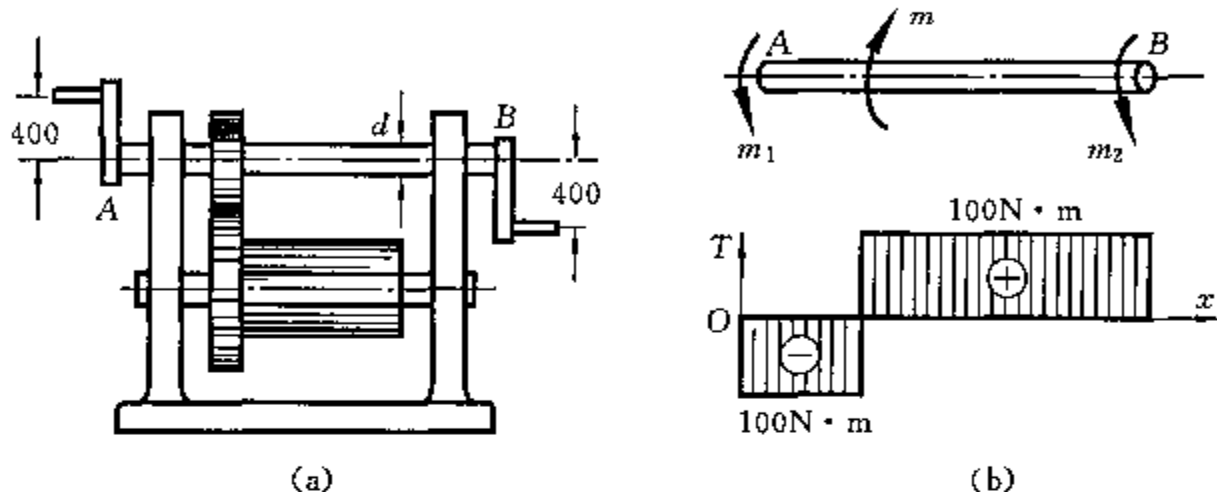
由刚度条件, 并注意将许用转角 $[\varphi]$ 的单位由 $^\circ/\text{m}$ 转化为 rad/m

$$\varphi = \frac{T}{GI_P} = \frac{32T}{G\pi d^4} \leq [\varphi] \times \frac{\pi}{180}$$

可得轴径
$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32T \times 180}{G\pi^2 [\varphi]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \times 4 \times 10^3 \times 180}{80 \times 10^3 \times \pi^2 \times 1}} \text{ m} = 7.35 \text{ cm}$$

比较以上两种计算结果,选取轴径为 8 cm。

3-14 题 3-14 图(a)所示手摇绞车驱动轴 AB 的直径 $d=3 \text{ cm}$,由两人摇动,每人加在手柄上的力 $P=250 \text{ N}$,若轴的许用切应力 $[\tau]=40 \text{ MPa}$,试校核轴 AB 的扭转强度。



题 3-14 图

解 驱动轴 AB 的受力图如题 3-14 图(b)所示。力偶矩 m_1 和 m_2 是每人加在手柄上的力 P 产生的,并且有

$$m_1 = m_2 = 0.4P = 0.4 \times 250 \text{ N} \cdot \text{m} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

力偶矩 m 是绞车工作时,鼓轮对驱动轴的反力偶矩(扭矩图如题 3-14 图(b)所示),平衡时有

$$m = m_1 + m_2 = 2 \times 100 \text{ N} \cdot \text{m} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$$

驱动轴 AB 的扭矩图如题 3-14 图(b)所示。轴 AB 的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m_1}{\pi d^3} = \frac{16 \times 100}{\pi \times 0.03^3} \text{ Pa} = 18.86 \text{ MPa}$$

小于许用切应力 $[\tau]=40 \text{ MPa}$

3-15 汽车的驾驶盘如题 3-15 图所示,驾驶盘的直径 $D_1=52 \text{ cm}$,驾驶员每只手作用于驾驶盘上的最大切向力 $P=200 \text{ N}$,转向轴材料的许用切应力 $[\tau]=50 \text{ MPa}$,试设计实心转向轴的直径。

若改为 $\alpha = \frac{d}{D} = 0.8$ 的空心轴,则空心轴的内径和外径各多大? 并比较两者的重量。

解 (1) 计算转向轴承受的外力偶矩

$$m = D_1 P = (0.52 \times 200) \text{ N} \cdot \text{m} = 104 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 计算实心转向轴的直径

由强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} \leq [\tau]$$

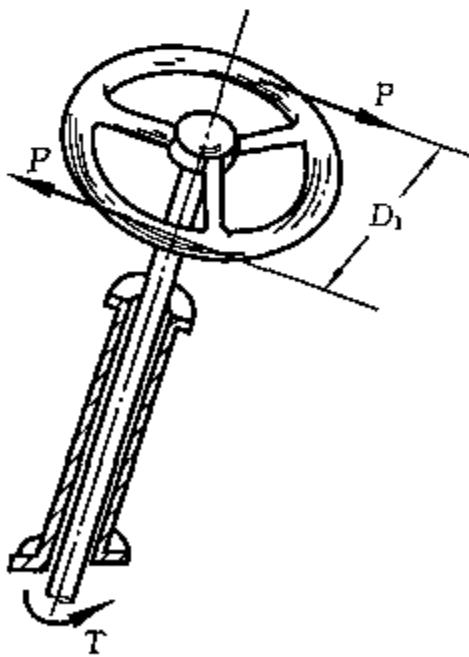
可得实心转向轴的直径

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 104}{\pi \times 50 \times 10^6}} \text{ m} = 2.196 \text{ cm}$$

(3) 计算空心转向轴的外径

$$\text{由强度条件 } \tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi D^3 (1-\alpha^4)} \leq [\tau]$$

可得空心转向轴的外径



题 3-15 图

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16m}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 104}{\pi \times (1-0.8^4) \times 50 \times 10^6}} \text{ m} = 2.618 \text{ cm}$$

空心转向轴的内径 $d_1 = \alpha D = (0.8 \times 2.618) \text{ cm} = 2.094 \text{ cm}$

(4) 实心转向轴与空心转向轴的重量比

因实心与空心转向轴的材料相同, 所以它们的重量比等于其面积比, 即

$$\frac{Q_{\text{实}}}{Q_{\text{空}}} = \frac{\pi d^2}{\pi(D^2 - d_1^2)} = \frac{d^2}{D^2 - d_1^2} = \frac{2.196^2}{2.618^2 - 2.094^2} = 1.953$$

3-16 二级齿轮减速箱如题 3-16 图所示。已知输入功率为 10 kW, 又知减速箱轴 II 的转速为 1530 r/min, 轴的直径 $d = 2.5 \text{ cm}$, 许用切应力 $[\tau] = 30 \text{ MPa}$ 。试按扭转强度校核轴 II 的扭转强度。

解 (1) 计算轴 II 承受的外力偶矩

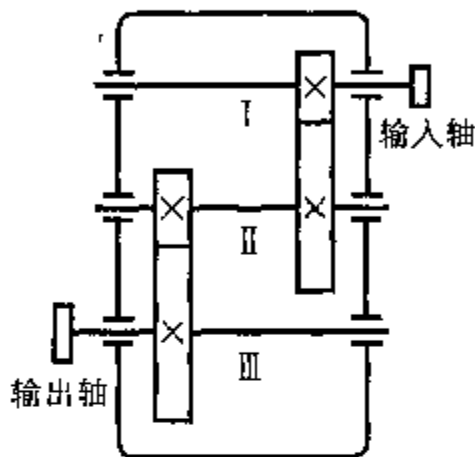
$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{10}{1530} \text{ N} \cdot \text{m} \\ = 62.92 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 计算轴 II 的最大工作切应力

在平衡状态下, 轴 II 的扭矩 $T = m = 62.92 \text{ N} \cdot \text{m}$, 所以, 轴 II 的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} = \frac{16 \times 62.92}{\pi \times 0.025^3} \text{ Pa} = 20.35 \text{ MPa}$$

轴 II 的最大工作切应力小于许用应力, 所以安全。



题 3-16 图

3-17 已知题 3-17 图(a)所示钻探机钻杆的外径 $D = 6 \text{ cm}$, 内径 $d = 5 \text{ cm}$, 功率 $P_k = 7.36 \text{ kW}$, 转速 $n = 180 \text{ r/min}$, 钻杆入土深度 $l = 40 \text{ m}$, $[\tau] = 40 \text{ MPa}$ 。假设土壤对钻杆的阻力沿钻杆长度均匀分布, 试求:

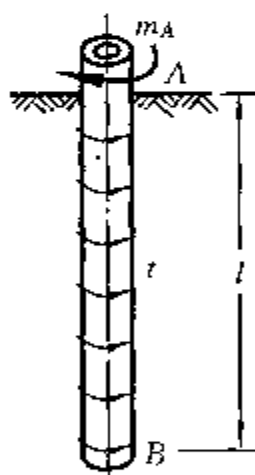
(1) 单位长度上土壤对钻杆的阻力矩 t ;

(2) 作钻杆的扭矩图, 并进行强度校核。

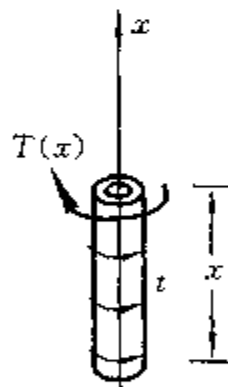
解 (1) 计算单位长度上土壤对钻杆的阻力矩

首先计算外力偶矩

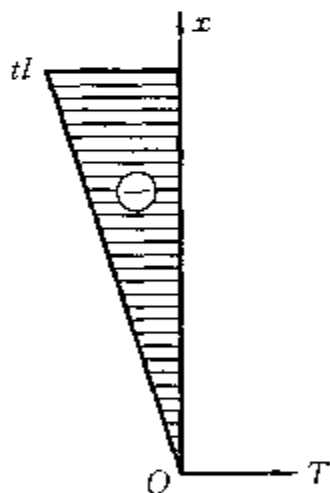
$$m_A = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{7.36}{180} \text{ N} \cdot \text{m} \\ = 390.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$



(a)



(b)



(c)

题 3-17 图

因假设土壤对钻杆的阻力沿杆长度均匀分布, 所以钻杆任一横截面上的扭矩

T 是截面位置坐标 x 的线性函数, 如题 3-17 图(b)所示, 并有

$$T(x) = tx$$

由平衡条件

$$M_A = T(x)|_{x=l} = tx|_{x=l} = tl$$

可得阻力矩集度

$$t = \frac{M_A}{l} = \frac{390.5}{40} \text{ N} \cdot \text{m/m} = 9.763 \text{ N} \cdot \text{m/m}$$

(2) 作扭矩图

因扭矩 $T(x) = tx$, 是 x 的线性函数, 所以, 扭矩图是一条斜直线, 如题 3-17 图(c)所示。

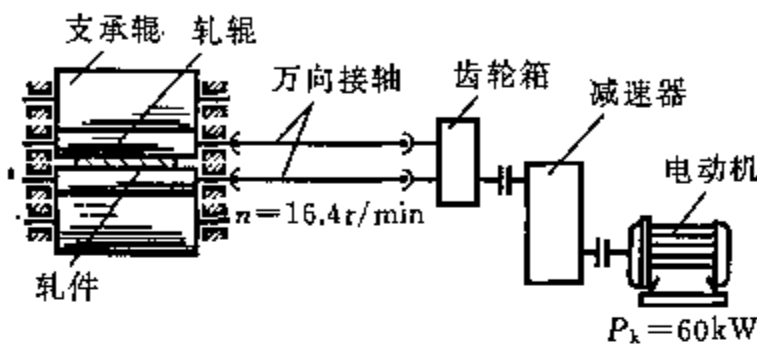
(3) 对钻杆进行强度校核

钻杆的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_t} = \frac{16Tl}{\pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]} = \frac{16 \times 9.763 \times 40}{\pi \times 0.06^3 \left[1 - \left(\frac{5}{6} \right)^4 \right]} \text{ Pa} = 17.78 \text{ MPa} < [\tau]$$

钻杆的最大切应力小于许用应力。

3-18 四辊轧机的传动机构如题 3-18 图所示, 已知万向接轴的直径 $d=11 \text{ cm}$, 材料为 40 Cr, 其剪切屈服点 $\tau_s=450 \text{ MPa}$, 转速 $n=16.4 \text{ r/min}$; 轧机电机的功率 $P_k=60 \text{ kW}$ 。试求此轴的安全系数。



题 3-18 图

解 (1) 计算每一根万向接轴承受的外力偶矩

$$m = \frac{1}{2} \left(9550 \frac{P_k}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(9550 \times \frac{60}{16.4} \right) \text{ N} \cdot \text{m} = 17.47 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 计算万向接轴的最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} = \frac{16 \times 17.47 \times 10^3}{\pi \times 0.11^3} \text{ Pa} = 66.85 \text{ MPa}$$

(3) 计算万向接轴的安全系数

$$n = \frac{\tau_s}{\tau_{\max}} = \frac{450}{66.85} = 6.731$$

第四章 弯曲内力

知识要点

1. 平面弯曲的概念

梁至少有一个纵向对称平面,外力偶或横向力作用在此对称平面内,弯曲变形后,梁的轴线变成在外力作用面内的光滑、平坦的平面曲线,这种弯曲称为平面弯曲,或对称弯曲。

2. 平面弯曲时横截面上的内力

(1) 剪力

作用面平行于横截面的内力,用符号 Q 表示。

(2) 弯矩

作用面垂直于横截面的内力偶矩,用符号 M 表示。

(3) 剪力方程与弯矩方程

将剪力 Q 和弯矩 M 表示为横截面位置坐标 x 的函数

$$Q=Q(x), \quad M=M(x)$$

分别称为剪力方程和弯矩方程。

(4) 剪力图与弯矩图

表示剪力、弯矩沿梁轴线变化规律的图线,即将剪力方程、弯矩方程用图线表示。

3. 剪力、弯矩和分布载荷集度之间的关系

(1) 剪力、弯矩和分布载荷集度之间的微分关系

$$\frac{dQ(x)}{dx}=q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx}=Q(x), \quad \frac{d^2M}{dx^2}=q(x)$$

上面的微分关系说明:剪力图中某点处的斜率,等于梁上对应点处的载荷集度;弯矩图中某点处的斜率,等于梁在对应截面上的剪力。

(2) 剪力、弯矩和分布载荷集度之间的积分关系

$$Q_2 - Q_1 = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx \quad \text{或} \quad Q_2 = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx + Q_1$$
$$M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx \quad \text{或} \quad M_2 = \int_{x_1}^{x_2} Q(x) dx + M_1$$

上面的积分关系说明:剪力图线上任意两点 x_2, x_1 的剪力变化,等于这两点之间分布载荷曲线 F 的面积。弯矩图线上任意两点 x_2, x_1 的弯矩变化,等于剪力图线下夹于该两点间的面积。

(3) 集中力 P 作用处,剪力图、弯矩图的特征

$$Q_2 = Q_1 = P, \quad M_2 = M_1$$

虽然 $M_2 = M_1$,但由于 $Q_2 \neq Q_1$,所以弯矩图的斜率在集中力 F 作用点的两侧不相等,有突变。

(4) 力偶矩 m 作用处,不但剪力相等,而且剪力图的斜率也不变,只是弯矩图突变。

剪力图、弯矩图和载荷间的关系,可由图 4-1 说明。

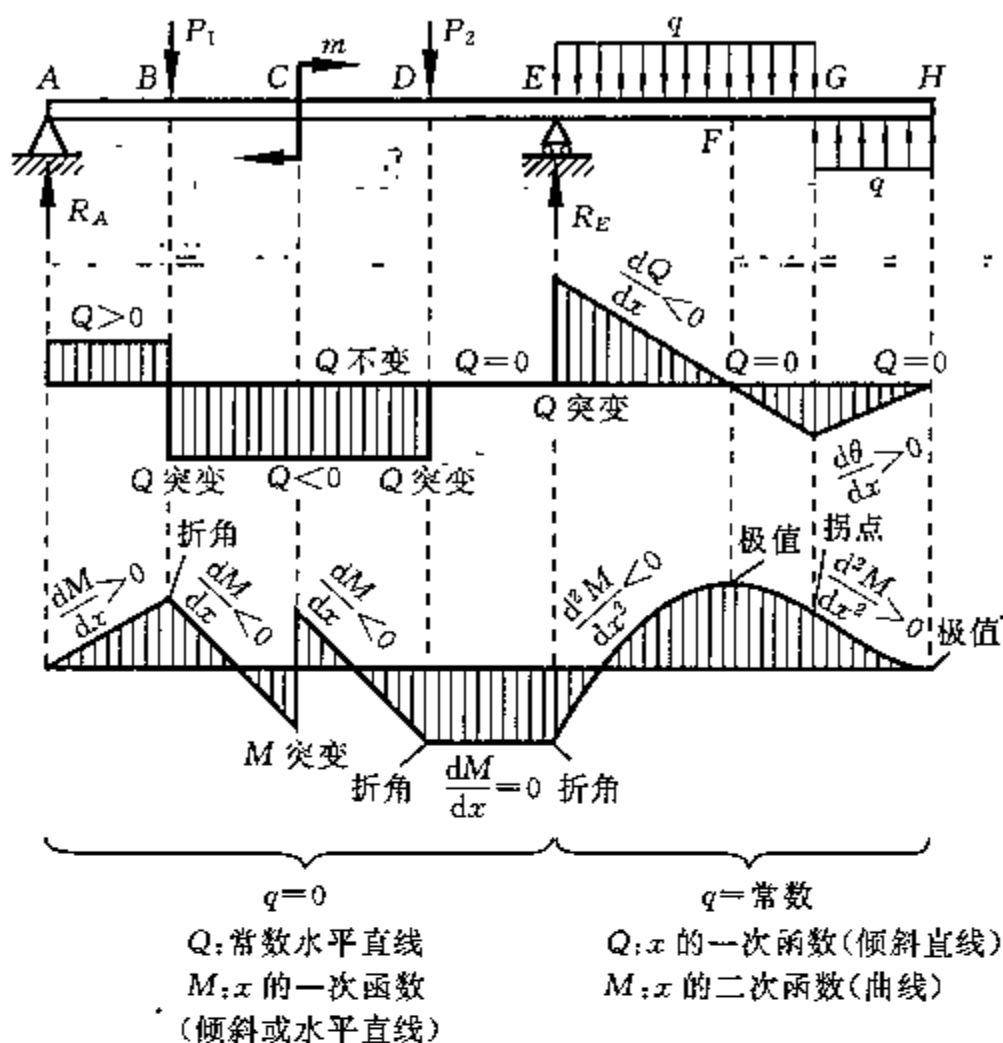
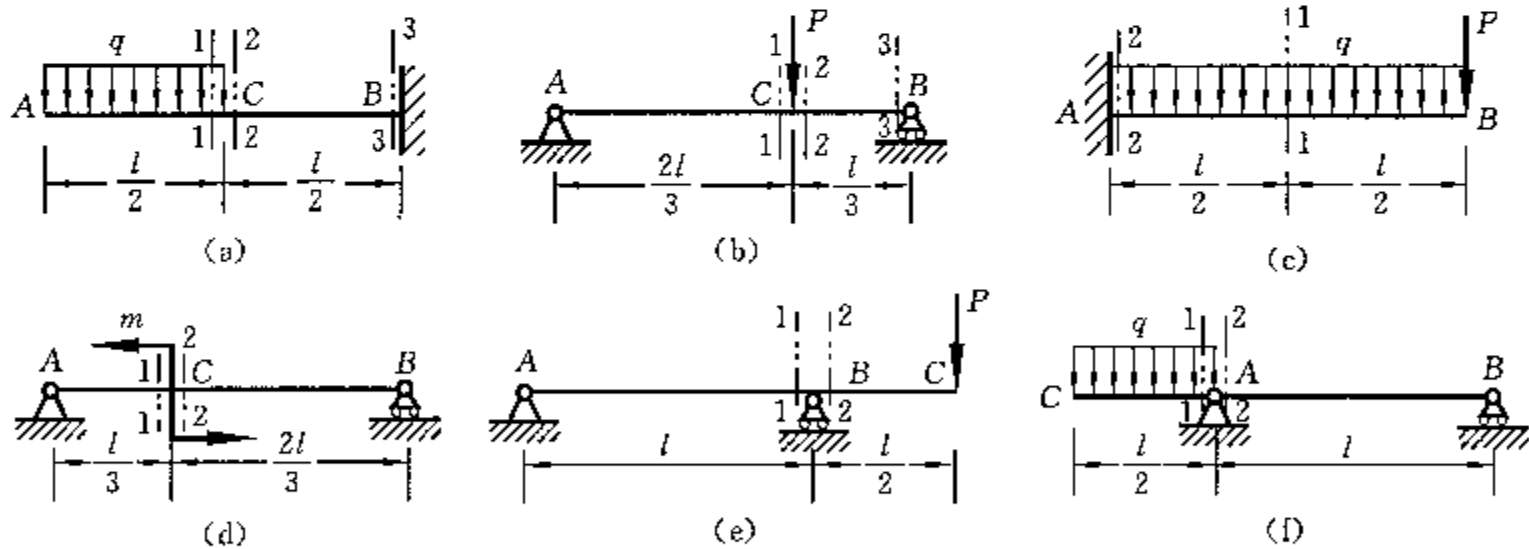


图 4-1

习题详解

4-1 求题 4-1 图所示各梁指定截面上的剪力 Q 和弯矩 M 。各截面无限趋近于梁上 A 、 B 、 C 等点。



题 4-1 图

解法 1 截面法

(1) 计算截面 1-1 上的内力

用截面 1-1 截取左段梁为研究对象, 作受力图如题 4-1 图(a₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad -Q_1 - \frac{1}{2}ql = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 + M_1 = 0$$

得

$$Q_1 = -\frac{1}{2}ql, \quad M_1 = -\frac{1}{8}ql^2$$

(2) 计算截面 2-2 上的内力

用截面 2-2 截取左段梁为研究对象, 作受力图如题

4-1 图(a₂)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad -\frac{1}{2}ql - Q_2 = 0;$$

$$\sum M_C = 0, \quad \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 + M_2 = 0$$

得 $Q_2 = -\frac{1}{2}ql, \quad M_2 = -\frac{1}{8}ql^2$

(3) 计算截面 3-3 上的内力

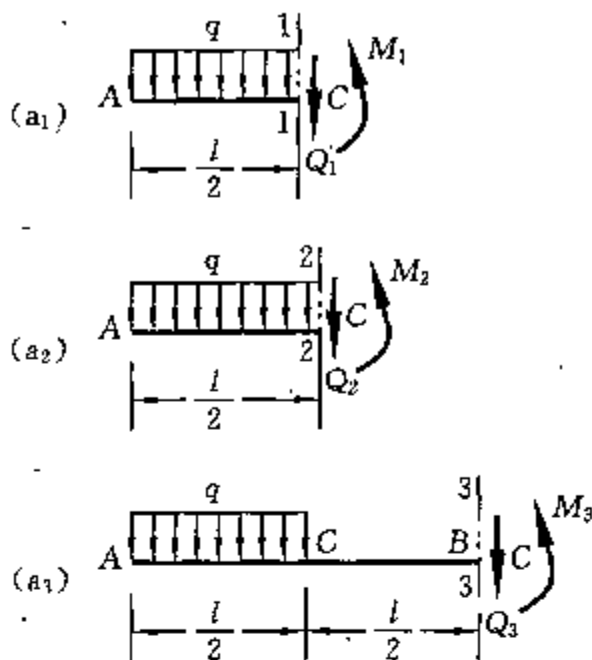
用截面 3-3 截取左段梁为研究对象, 作受力图如题

4-1 图(a₃)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad -\frac{1}{2}ql - Q_3 = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad \frac{1}{2}ql \times \frac{3}{4}l + M_3 = 0$$

得 $Q_3 = -\frac{1}{2}ql, \quad M_3 = -\frac{3}{8}ql^2$



续题 4-1 图

解法 2 外力简化法

梁任意横截面上的剪力和弯矩, 与该截面以左(或右)梁上外力向该截面形心简化后的主矢和主矩大小相等, 方向相反。所以, 梁任一横截面上的剪力 Q 等于该截面以左(或右)侧梁上所有外力的代数和, 对截面形心有顺时针转动趋势的外力取正值, 反之取负值。弯矩 M 在数值上等于此截面左(或右)侧梁上外力对该面形心之矩的代数和, 截面左侧梁上外力对截面形心之矩顺时针转向的取正值, 逆时针转向的取负值。截面右侧外力对截面形心之矩逆时针转向取正值, 顺时针转向取负值。

根据上述方法, 可以直接得出题 4-1 图(a)所示梁指定截面上的内力

1-1 截面上的内力 $Q_1 = -\frac{1}{2}ql, \quad M_1 = -\frac{1}{8}ql^2$

2-2 截面上的内力 $Q_2 = -\frac{1}{2}ql, \quad M_2 = -\frac{1}{8}ql^2$

3-3 截面上的内力 $Q_3 = -\frac{1}{2}ql, \quad M_3 = -\frac{1}{2}ql \times \frac{3}{4}l = -\frac{3}{8}ql^2$

(b) 首先解除题 4-1 图(b)所示梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 4-1 图(b₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{2}{3}Pl - R_B l = 0$$

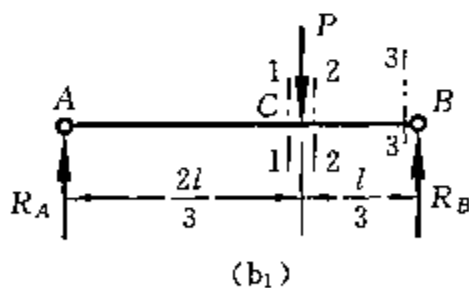
可得支座反力 $R_A = \frac{1}{3}P, \quad R_B = \frac{2}{3}P$

再利用外力简化法, 可直接确定各指定截面上的内力。

1-1 截面上的内力 $Q_1 = R_A = \frac{1}{3}P$

$$M_1 = \frac{2}{3}lR_A = \frac{2}{3}l \times \frac{P}{3} = \frac{2}{9}Pl$$

2-2 截面上的内力 $Q_2 = R_A - P = \frac{1}{3}P - P = -\frac{2}{3}P$



续题 4-1 图

$$M_2 = \frac{2}{3}lR_A = \frac{2}{3}l \times \frac{1}{3}P = \frac{2}{9}Pl$$

$$3-3 \text{ 截面上的内力} \quad Q_3 = R_A - P = \frac{P}{3} - P = -\frac{2}{3}P$$

$$M_3 = R_A l - \frac{1}{3}Pl = \frac{1}{3}Pl - \frac{1}{3}Pl = 0$$

(c) 首先解除题 4-1 图(c)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-1 图(c₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - ql - P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}ql^2 + Pl - M_A = 0$$

可得支座反力 $R_A = ql + P$, $M_A = \frac{1}{2}ql^2 + Pl$

再用外力简化法,确定各指定截面的内力

$$1-1 \text{ 截面上的内力} \quad Q_1 = P + \frac{1}{2}ql$$

$$M_1 = -\frac{1}{2}Pl - \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}Pl - \frac{1}{8}ql^2$$

$$2-2 \text{ 截面上的内力} \quad Q_2 = P + ql, \quad M_2 = -Pl - \frac{1}{2}ql^2$$

(d) 首先解除题 4-1 图(d)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-1 图(d₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad m - R_B l = 0$$

可得支座反力 $R_A = \frac{m}{l}$, $R_B = \frac{m}{l}$

再用外力简化法,确定各指定截面上的内力

$$1-1 \text{ 截面上的内力} \quad Q_1 = R_A = \frac{m}{l}$$

$$M_1 = \frac{1}{3}lR_A = \frac{1}{3}l \times \frac{m}{l} = \frac{m}{3}$$

$$2-2 \text{ 截面上的内力} \quad Q_2 = R_A = \frac{m}{l}$$

$$M_2 = \frac{1}{3}lR_A - m = \frac{l}{3} \times \frac{m}{l} - m = -\frac{2}{3}m$$

(e) 首先解除题 4-1 图(e)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-1 图(e₁)所示。由平衡条件

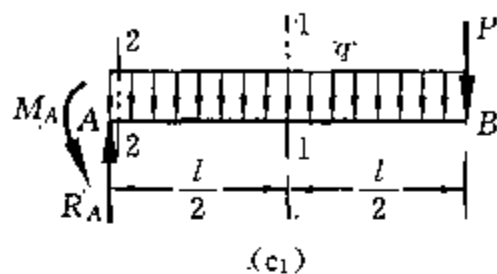
$$\sum Y = 0, \quad R_B - R_A - P = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A l - \frac{1}{2}Pl = 0$$

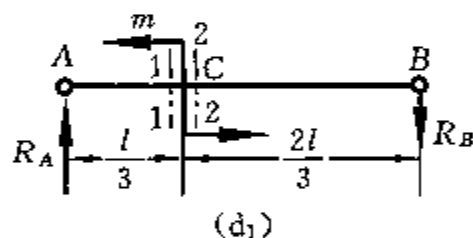
可得支座反力

$$R_A = \frac{P}{2}, \quad R_B = \frac{3}{2}P$$

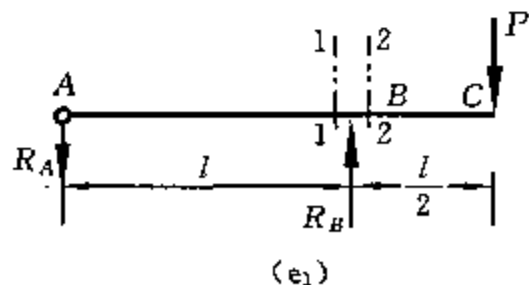
再利用外力简化法,确定各指定截面上的内力



续题 4-1 图



续题 4-1 图



续题 4-1 图

1-1 截面上的内力 $Q_1 = -R_A = -\frac{P}{2}$, $M_1 = -R_A l = -\frac{1}{2}Pl$

2-2 截面上的内力 $Q_2 = P$, $M_2 = -\frac{1}{2}Pl$

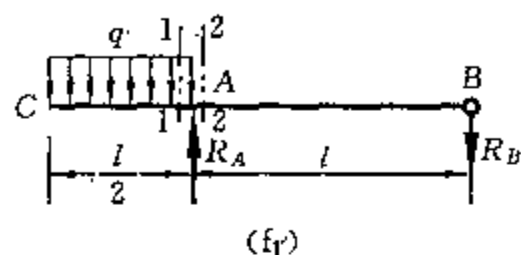
(f) 首先解除题 4-1 图(f)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-1 图(f₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B - \frac{1}{2}ql = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad R_B l - \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0$$

可得支座反力

$$R_A = \frac{5}{8}ql, \quad R_B = \frac{1}{8}ql$$



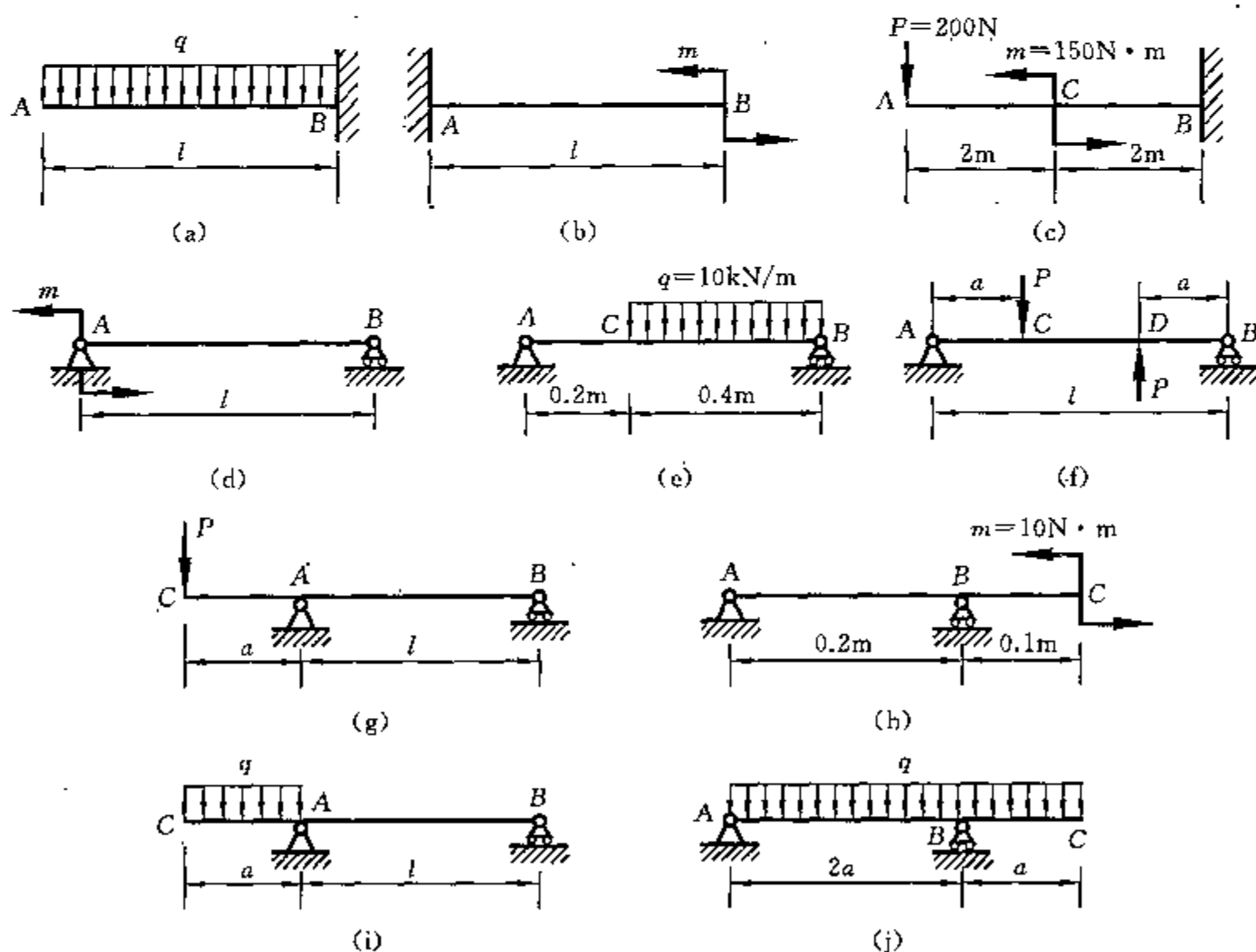
续题 4-1 图

再利用外力简化法,确定各指定截面上的内力

1-1 截面上的内力 $Q_1 = -\frac{1}{2}ql$, $M_1 = -\frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8}ql^2$

2-2 截面上的内力 $Q_2 = R_B = \frac{1}{8}ql$, $M_2 = -R_B l = -\frac{1}{8}ql^2$

4-2 试列出题 4-2 图所示各梁的剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图,并求 $|Q|_{\max}$ 和 $|M|_{\max}$ 。



题 4-2 图

解 (a) 如题 4-2 图(a)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(a)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-1 图(a₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_B - ql = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad \frac{1}{2}ql^2 - M_B = 0$$

可得支座反力 $R_B = ql$; $M_B = \frac{1}{2}ql^2$

(2) 列剪力方程和弯矩方程

利用题 4-1 解法 2 提供的外力简化法, 列剪力方程和弯矩方程

$$Q(x) = -qx \quad (0 \leq x < l)$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x < l)$$

(3) 画剪力图和弯矩图

根据剪力方程和弯矩方程, 画剪力图和弯矩图如题 4-2 图(a₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = ql, \quad |M_{\max}| = \frac{1}{2}ql^2$$

(b) 如题 4-2 图(b)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(b)所示梁的支座, 作受力图如题 4-2 图(b₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A = m$$

可得支座反力

$$R_A = 0, \quad M_A = m$$

(2) 列剪力方程和弯矩方程

$$Q(x) = 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

$$M(x) = -M_A = -m \quad (0 < x < l)$$

(3) 画剪力图和弯矩图

根据剪力方程和弯矩方程, 画剪力图和弯矩图如题 4-2 图(b₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = 0, \quad |M_{\max}| = m$$

(c) 如题 4-2 图(c)所示。

(1) 计算支座反力

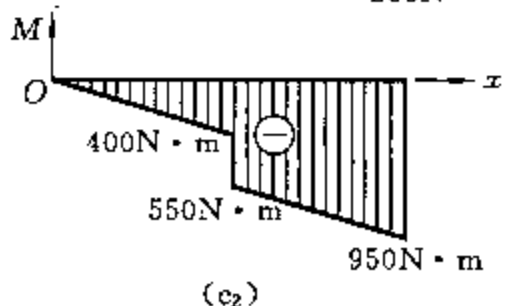
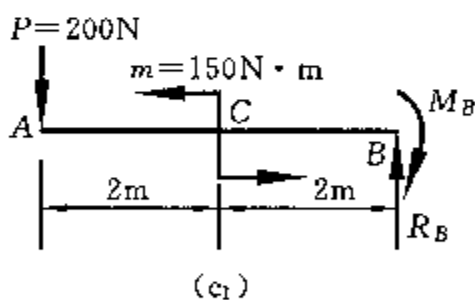
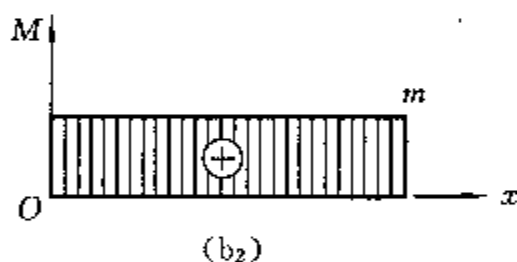
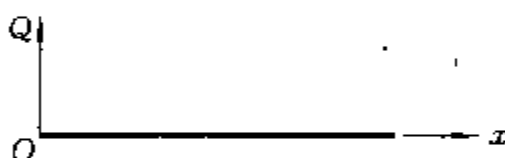
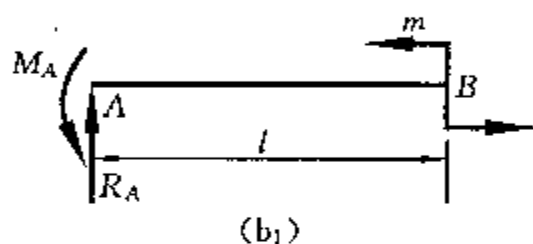
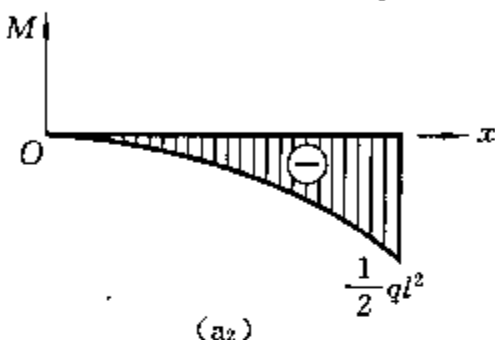
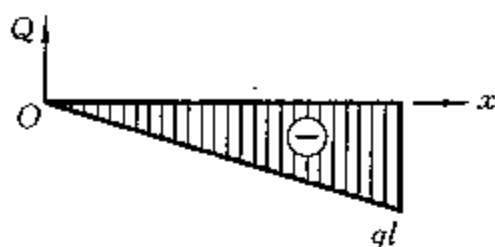
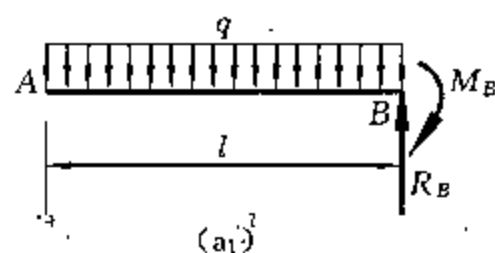
解除题 4-2 图(c)所示梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 4-2 图(c₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_B - P = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad 4P + m - M_B = 0$$

可得支座反力

$$R_B = P = 200, \quad M_B = 950 \text{ N} \cdot \text{m}$$



续题 4-2 图

(2) 列剪力方程和弯矩方程

应用题 4-1 解法 2 提供的外力简化法,列剪力方程和弯矩方程

$$\text{AC 段} \quad Q_1(x) = -P = -200 \quad (0 < x \leq 2)$$

$$M_1(x) = -Px = 200x \quad (0 \leq x < 2)$$

$$\text{CB 段} \quad Q_2(x) = -P = -200 \quad (2 \leq x < 4)$$

$$M_2(x) = -Px - m = -200x - 150 \quad (2 < x < 4)$$

(3) 剪力图和弯矩图

根据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图如题 4-2 图(c₂)所示。

$$(4) \text{ 最大剪力和最大弯矩} \quad |Q_{\max}| = 200 \text{ N}, \quad |M_{\max}| = 950 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(d) 如题 4-2 图(d)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(d)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(d₁)所示。利用平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad m - R_B l = 0$$

$$\text{可得支座反力} \quad R_A = R_B = \frac{m}{l}$$

(2) 列剪力方程和弯矩方程

应用题 4-1 解法 2 提供的外力简化法,列剪力方程和弯矩方程

$$Q(x) = R_A = \frac{m}{l} \quad (0 < x < l)$$

$$M(x) = R_A x - m = \frac{m}{l} x - m = \frac{m}{l} (x - l) \quad (0 < x \leq l)$$

(3) 剪力图与弯矩图

根据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图如题 4-2 图(d₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = \frac{m}{l}, \quad |M_{\max}| = m$$

(e) 如题 4-2 图(e)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(e)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(e₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 0.4q = 0$$

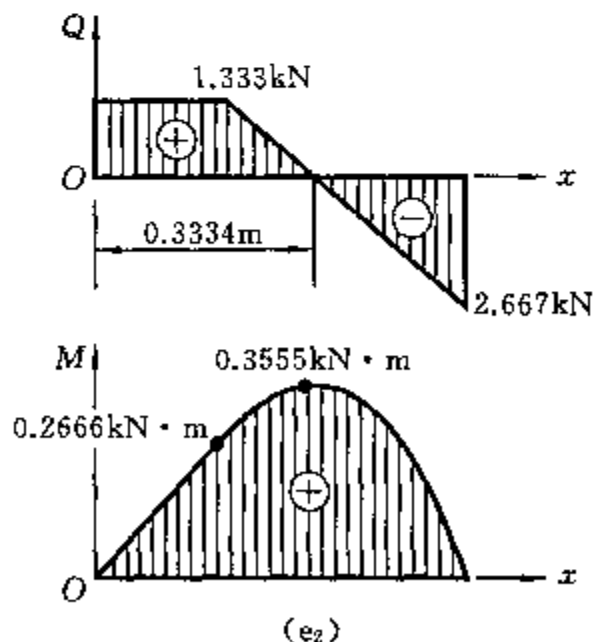
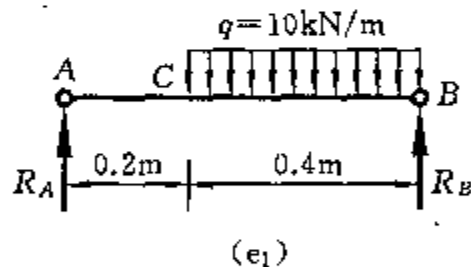
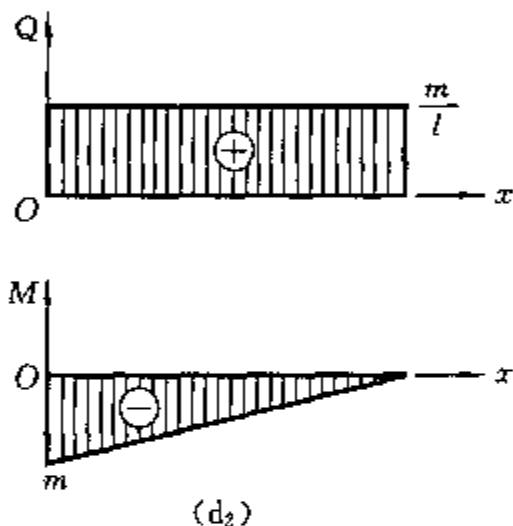
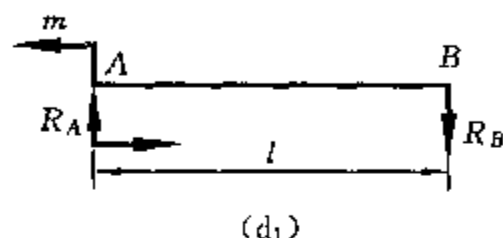
$$\sum M_B = 0, \quad 0.6R_A - \frac{1}{2}q(0.4)^2 = 0$$

可得支座反力

$$R_A = 1.333 \text{ kN}, \quad R_B = 2.667 \text{ kN}$$

(2) 剪力方程和弯矩方程

利用题 4-1 解法 2 提供的外力简化法,列剪力方程和弯矩方程



续题 4-2 图

AC 段

$$Q_1(x) = R_A = 1.333 \text{ kN} \quad (0 < x \leq 0.2)$$

$$M_1(x) = R_A x = 1.333x \quad (0 \leq x \leq 0.2)$$

CB 段

$$Q_2(x) = (0.6 - x)q - R_B = 10(0.6 - x) - 2.667 = 3.334 - 10x \quad (0.2 \leq x < 0.4)$$

$$\begin{aligned} M_2(x) &= R_B(0.6 - x) - \frac{1}{2}q(0.6 - x)^2 = 2.667(0.6 - x) - \frac{10}{2}(0.6 - x)^2 \\ &= (0.6 - x)(5x - 0.333) \quad (0.2 \leq x \leq 0.4) \end{aligned}$$

(3) 剪力图与弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图 and 弯矩图如题 4-2(c₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = 2.666 \text{ kN}, \quad |M_{\max}| = 0.3555 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(f) 如题 4-2 图(f)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(f)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(f₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - P + P - R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad aP - (l - a)P + lR_B = 0$$

可得支座反力 $R_A = R_B = \frac{l - 2a}{l}P$

(2) 剪力方程和弯矩方程

利用题 4-1 解法 2 提供的外力简化法,列剪力方程和弯矩方程

AC 段

$$Q_1(x) = R_A = \frac{l - 2a}{l}P \quad (0 < x < a)$$

$$M_1(x) = R_A x = \frac{l - 2a}{l}Px \quad (0 \leq x \leq a)$$

CD 段

$$Q_2(x) = R_A - P = \frac{l - 2a}{l}P - P = -\frac{2a}{l}P \quad (a < x < (l - a))$$

$$M_2(x) = R_A x - P(x - a) = \frac{l - 2a}{l}Px - Px + Pa = \frac{a(l - 2x)}{l}P \quad (a \leq x \leq (l - a))$$

DB 段

$$Q_3(x) = R_B = \frac{l - 2a}{l}P \quad ((l - a) < x < l)$$

$$M_3(x) = -R_B(l - x) = -\frac{l - 2a}{l}P(l - x) = \frac{(l - 2a)(l - x)}{l}P \quad ((l - a) \leq x \leq l)$$

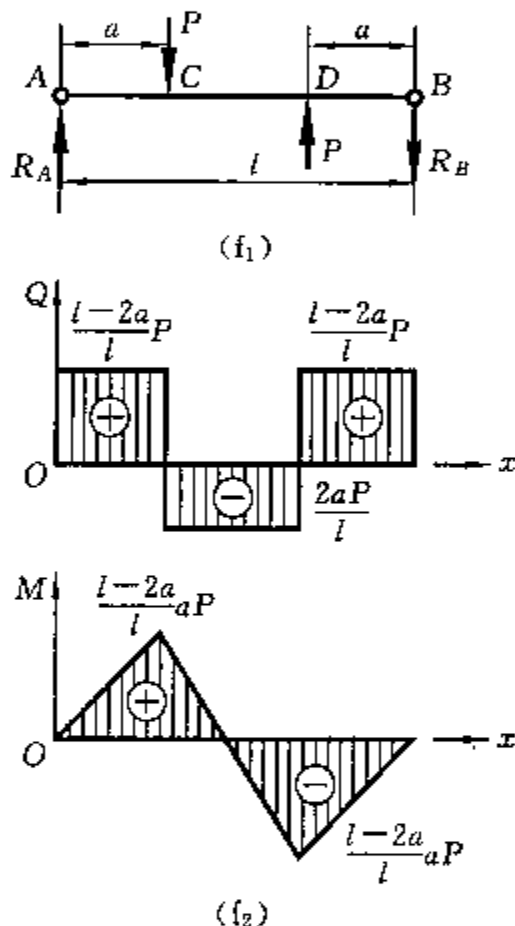
(3) 剪力图 and 弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图 and 弯矩图如题 4-2 图(f₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = \frac{l - 2a}{l}P, \quad |M_{\max}| = \frac{l - 2a}{l}aP$$

(g) 如题 4-2 图(g)所示。



续题 4-2 图

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(g)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(g₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad aP - lR_B = 0$$

可得支座反力 $R_A = \frac{l+a}{l}P$, $R_B = \frac{a}{l}P$

(2) 剪力方程和弯矩方程

CA 段

$$Q_1(x) = -P \quad (0 < x < a)$$

$$M_1(x) = -Px \quad (0 \leq x \leq a)$$

AB 段

$$Q_2(x) = -P + R_A = -P + \frac{l+a}{l}P = \frac{a}{l}P \quad (a < x < (l+a))$$

$$M_2(x) = -R_B(l+a-x) = \frac{a}{l}P(x-l-a) \quad (a \leq x \leq (l+a))$$

(3) 剪力图和弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图如题 4-2 图(g₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = P, \quad |M_{\max}| = aP$$

(h) 如题 4-2 图(h)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(h)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(h₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 0.2R_B - m = 0$$

可得支座反力

$$R_A = R_B = \frac{m}{0.2} = \frac{10}{0.2} \text{ N} \cdot \text{m} = 50 \text{ N}$$

(2) 剪力方程和弯矩方程

AB 段

$$Q_1(x) = R_A = 50 \quad (0 < x < 0.2)$$

$$M_1(x) = R_A x = 50x \quad (0 \leq x \leq 0.2)$$

BC 段

$$Q_2(x) = 0 \quad (0.2 < x \leq 0.3)$$

$$M_2(x) = m = 10 \quad (0.2 \leq x < 0.3)$$

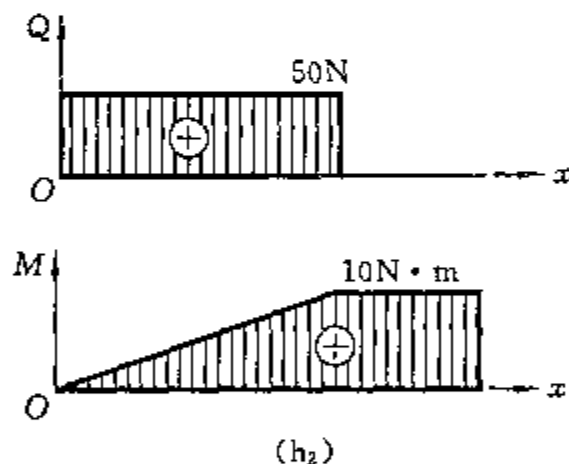
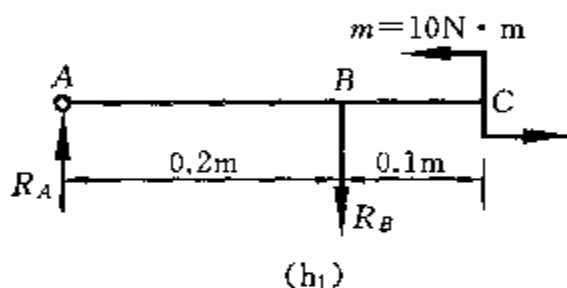
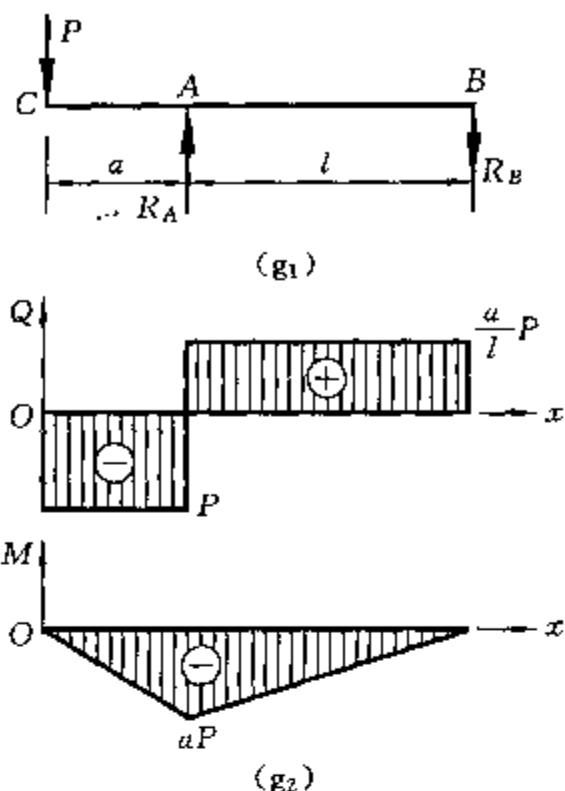
(3) 剪力图和弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程作剪力图和弯矩图如题 4-2 图(h₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = 50 \text{ N}, \quad |M_{\max}| = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(i) 如题 4-2 图(i)所示。



续题 4-2 图

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(i)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(i₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B - qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}qa^2 - R_Bl = 0$$

可得支座反力 $R_A = \frac{a+2l}{2l}qa$, $R_B = \frac{1}{2l}qa^2$

(2) 剪力方程和弯矩方程

CA 段 $Q_1(x) = -qx$ ($0 \leq x < a$)

$$M_1(x) = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq a)$$

AB 段 $Q_2(x) = R_B = \frac{qa^2}{2l}$ ($a < x < (l+a)$)

$$M_2(x) = -R_B(l+a-x) = -\frac{qa^2}{2l}(l+a-x) \quad (a \leq x \leq (l+a))$$

(3) 剪力图和弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图如题 4-2 图(i₂)所示。

(4) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = \frac{1}{2}qa^2$$

(j) 如题 4-2 图(j)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-2 图(j)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-2 图(j₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 3qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 2aR_B - 3qa \times 1.5a = 0$$

可得支座反力 $R_A = 0.75qa$, $R_B = 2.25qa$

(2) 剪力方程和弯矩方程

AB 段 $Q_1(x) = R_A - qx = 0.75qa - qx$ ($0 < x < 2a$)

$$M_1(x) = -\frac{1}{2}qx^2 + R_Ax = -\frac{1}{2}qx^2 + 0.75qax \quad (0 \leq x \leq 2a)$$

BC 段 $Q_2(x) = (3a-x)q$ ($2a < x \leq 3a$)

$$M_2(x) = -\frac{1}{2}q(3a-x)^2 \quad (2a \leq x \leq 3a)$$

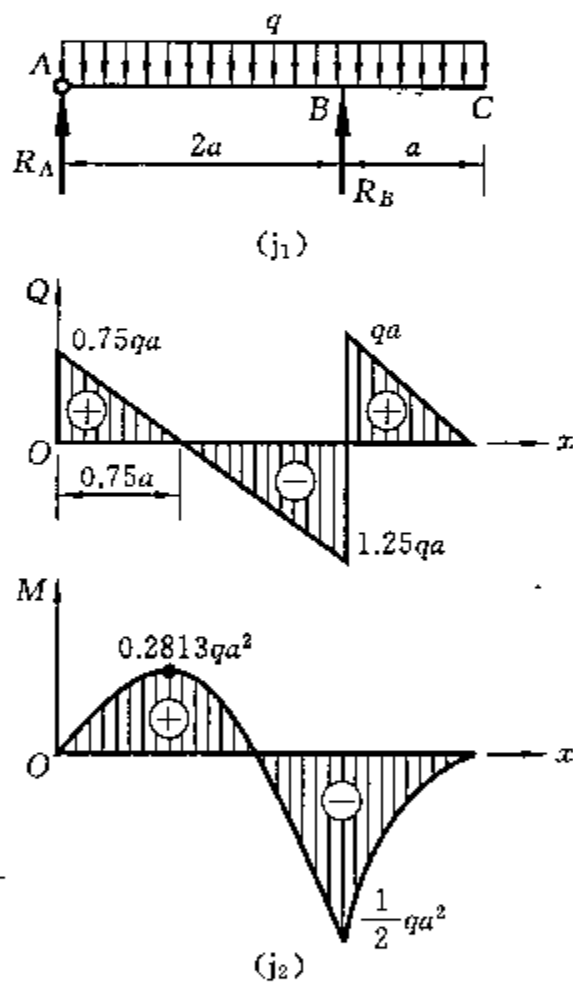
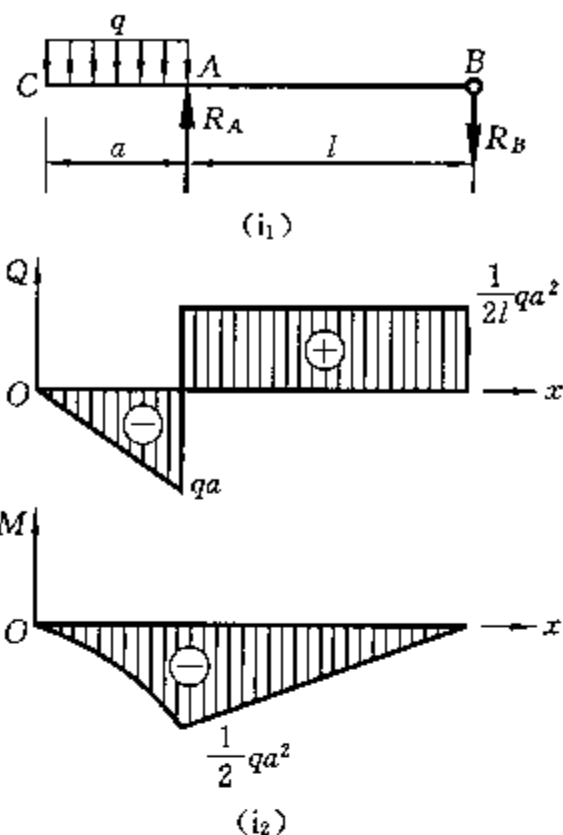
(3) 剪力图和弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图如题 4-2 图(j₂)所示。

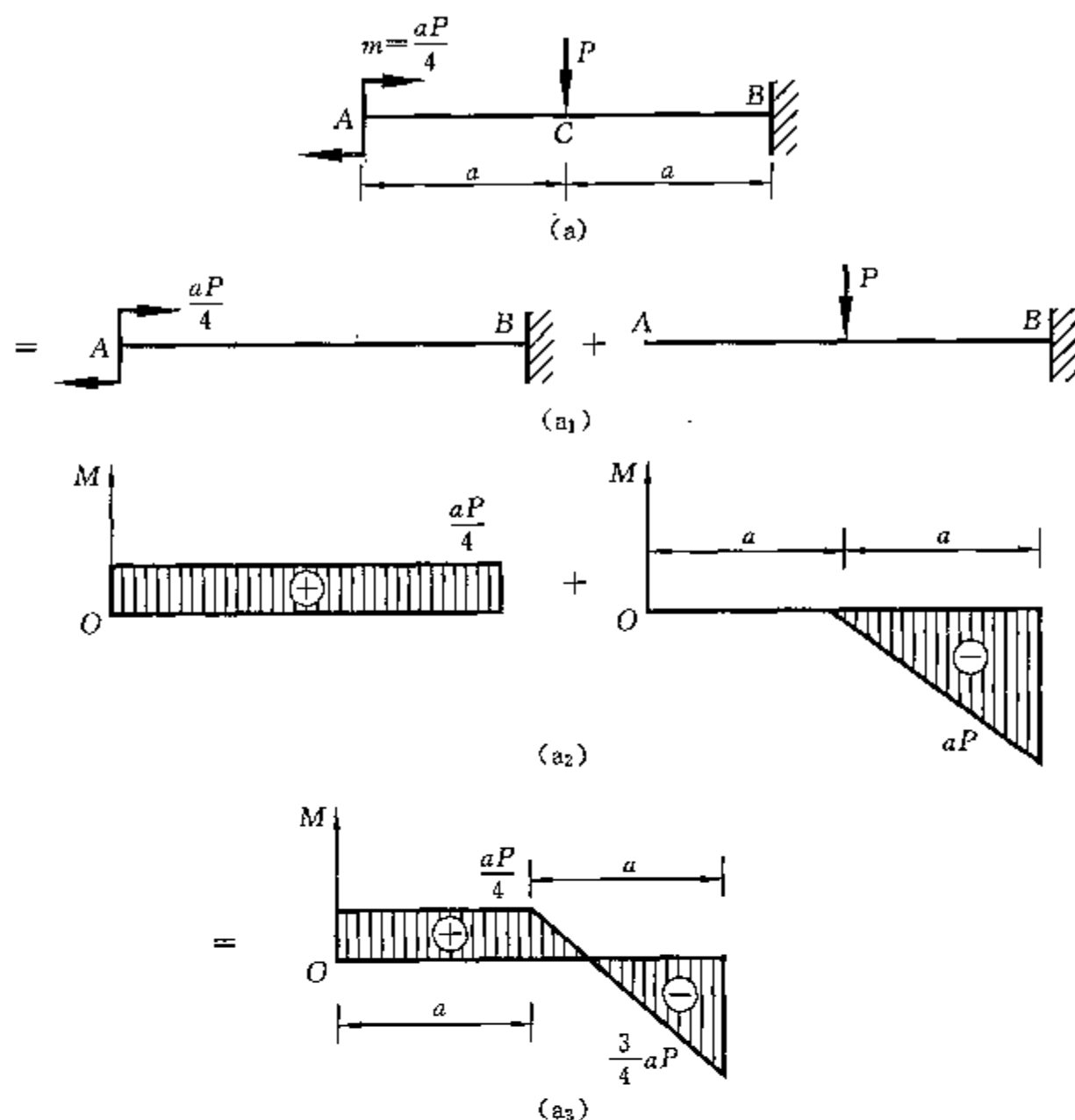
(4) 最大剪力和最大弯矩 $|Q_{\max}| = 1.25qa$, $|M_{\max}| = \frac{1}{2}qa^2$

4-3 用叠加法作题 4-3 图所示各梁的弯矩图。并求出 $|M|_{\max}$ 。

解 (a) 题 4-3 图(a)所示悬臂梁的弯矩图,可由题 4-3 图(a₁)所示两种载荷情况下梁的弯矩图相叠加得到,如题 4-3 图(a₂)、(a₃)所示。

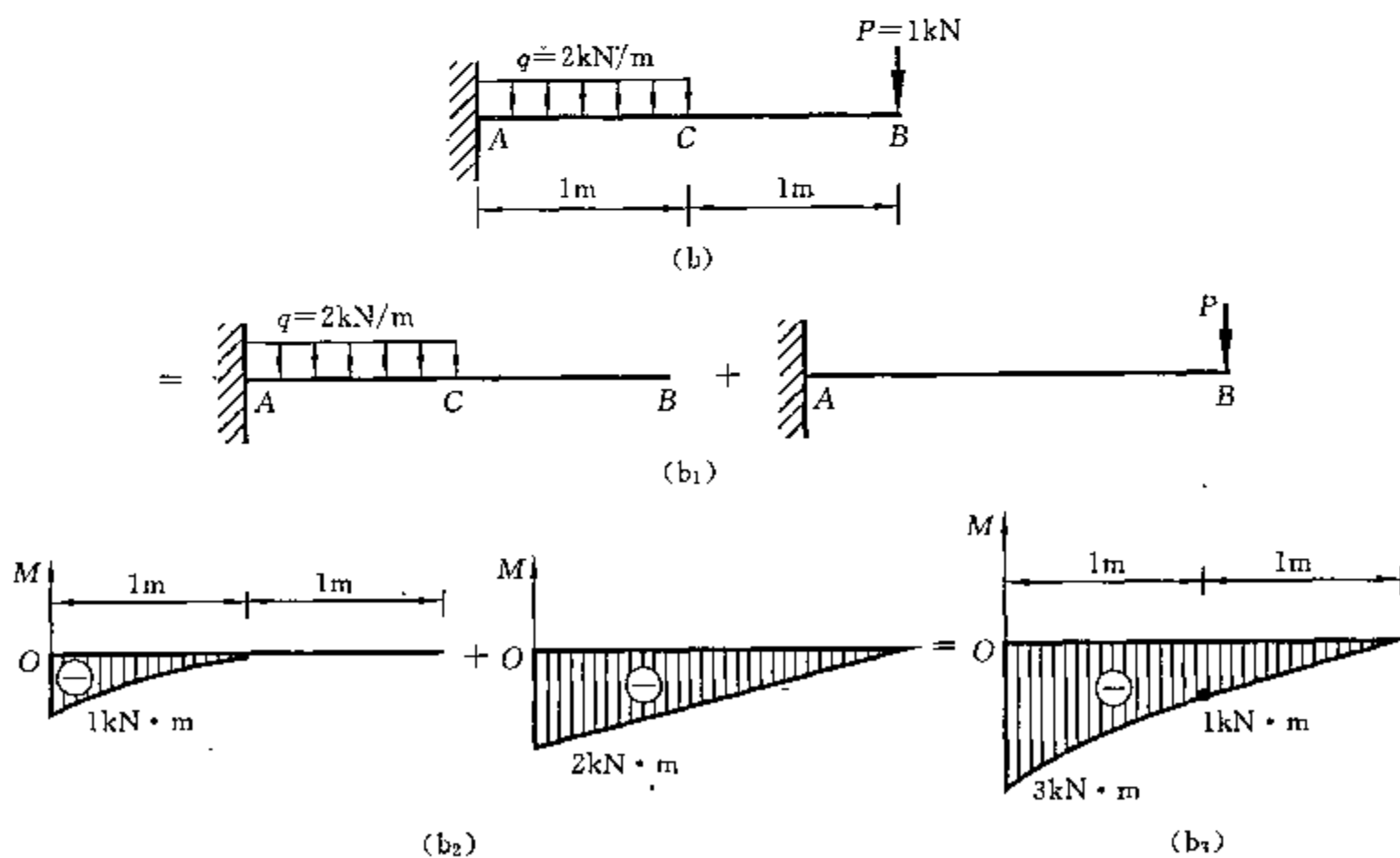


续题 4-2 图



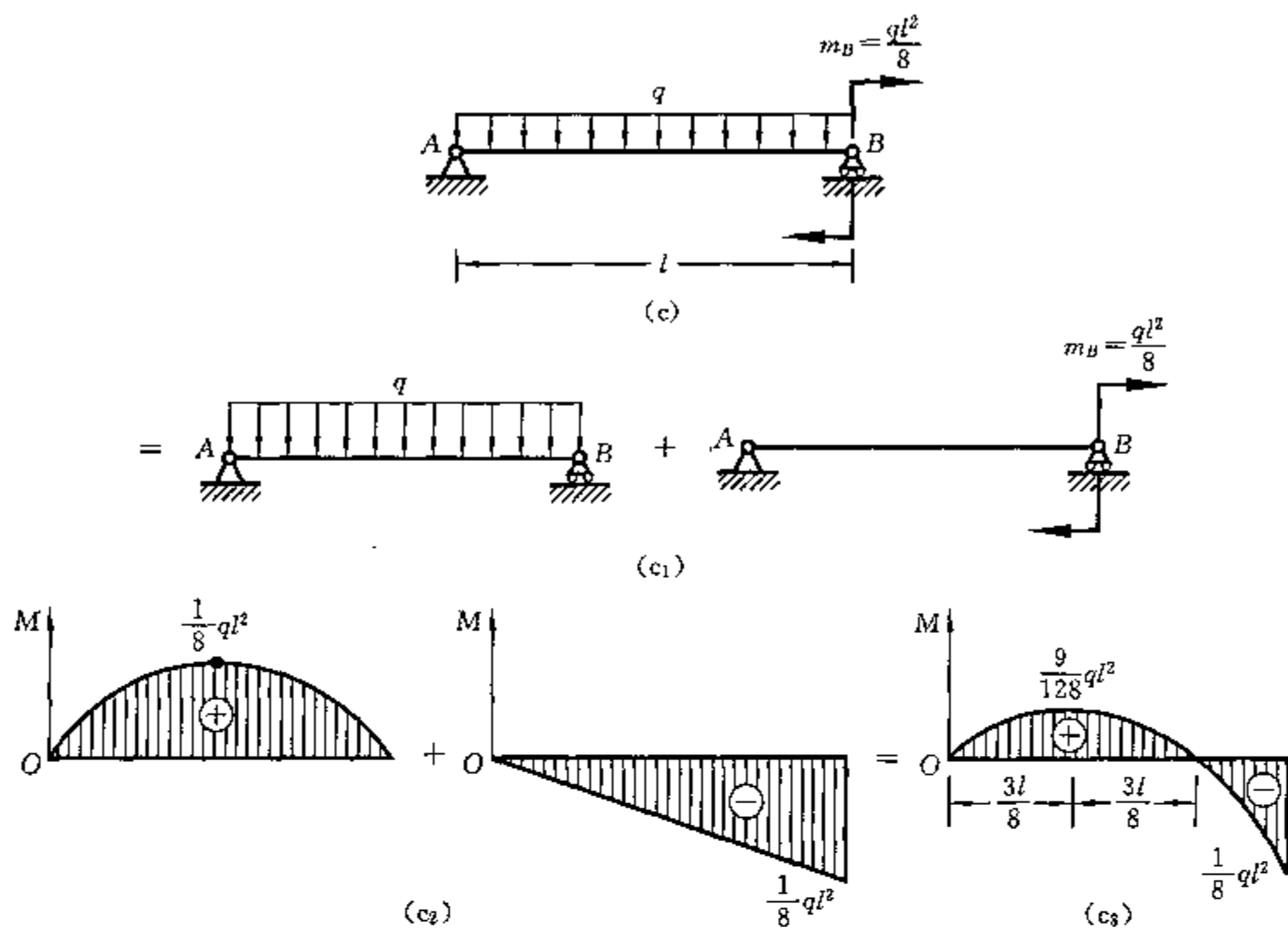
题 4-3 图

(b) 题 4-3 图(b)所示悬臂梁的弯矩图可由题 4-3 图(b₁)所示两种载荷情况下梁的弯矩图相叠加得到,如题 4-3 图(a₂)、(a₃)所示。



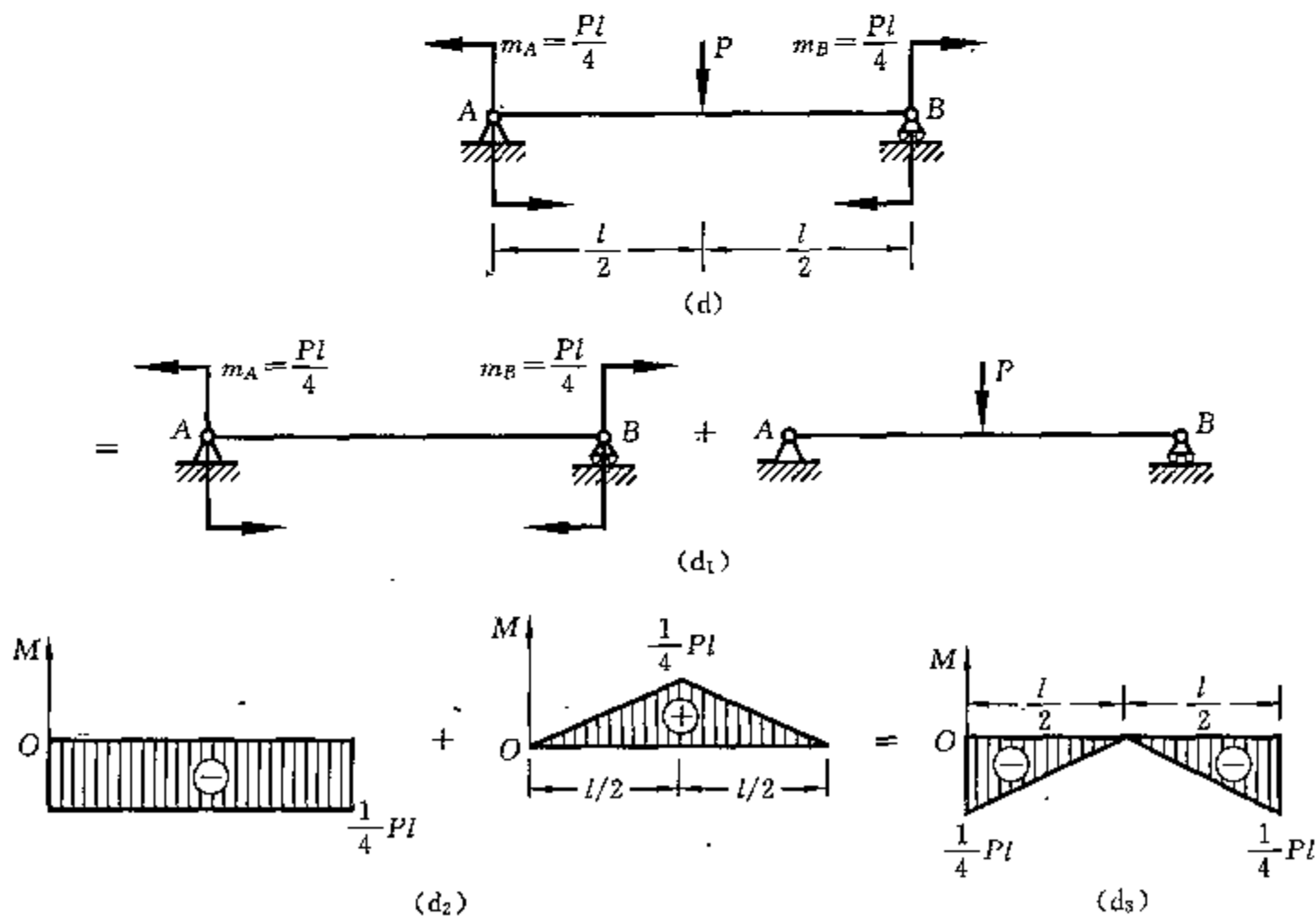
续题 4-3 图

(c) 题 4-3 图(c)所示简支梁的弯矩图可由题 4-3 图(c₁)所示两种载荷情况下梁的弯矩图相叠加得到,如题 4-3 图(c₂)、(c₃)所示。



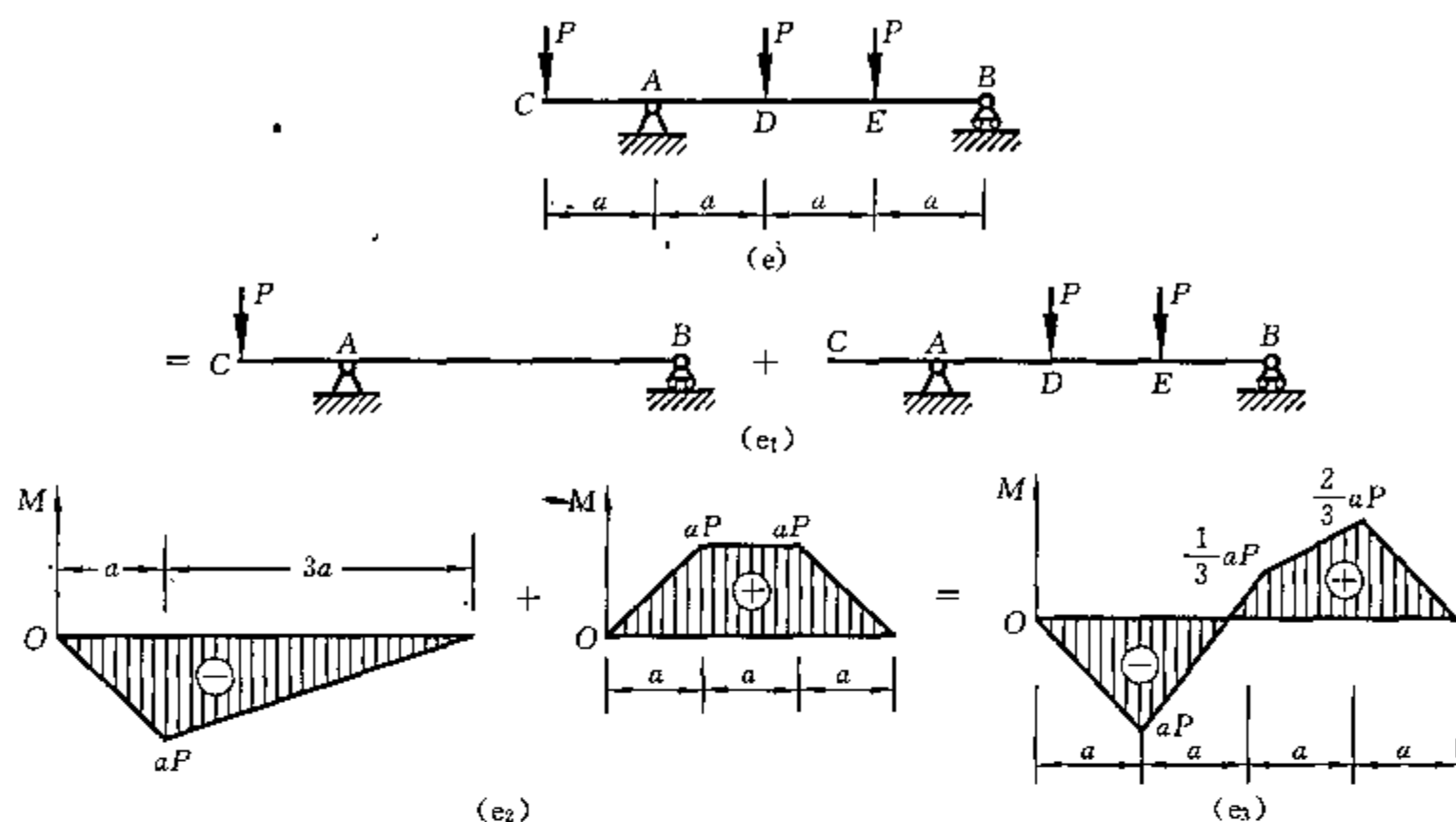
续题 4-3 图

(d) 题 4-3 图(d)所示简支梁的弯矩图可由题 4-3 图(d₁)所示两种载荷情况下梁的弯矩图相叠加得到,如题 4-3 图(d₂)、(d₃)所示。



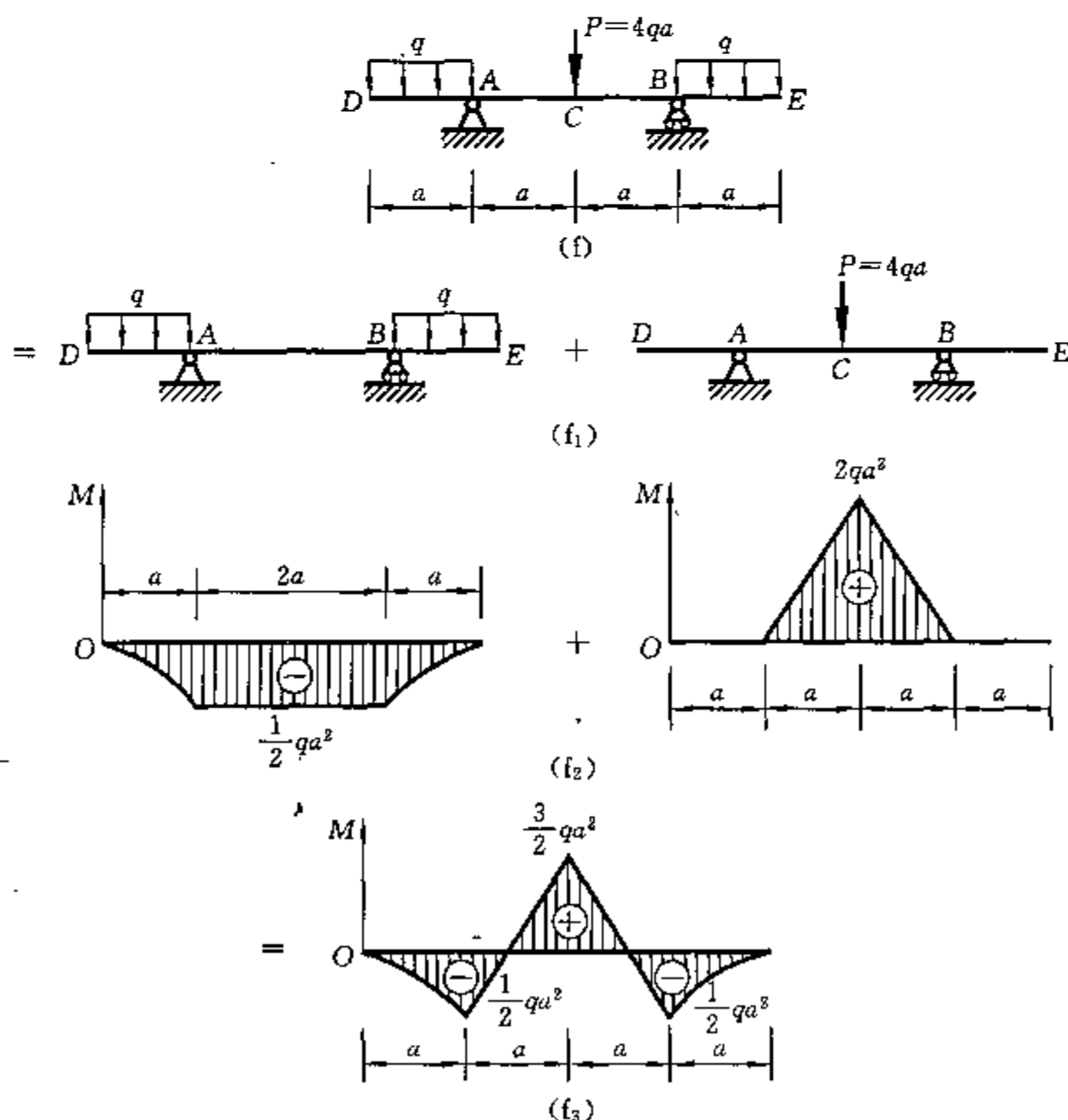
续题 4-3 图

(e) 题 4-3 图(e)所示外伸梁的弯矩图可由题 4-3 图(e₁)所示两种载荷情况下梁的弯矩图相叠加得到,如题 4-3 图(e₂)、(e₃)所示。



续题 4-3 图

(f) 题 4-3 图(f)所示外伸梁的弯矩图可由题 4-3 图(f₁)所示两种载荷情况下梁的弯矩图相叠加得到,如题 4-3 图(f₂)、(f₃)所示。

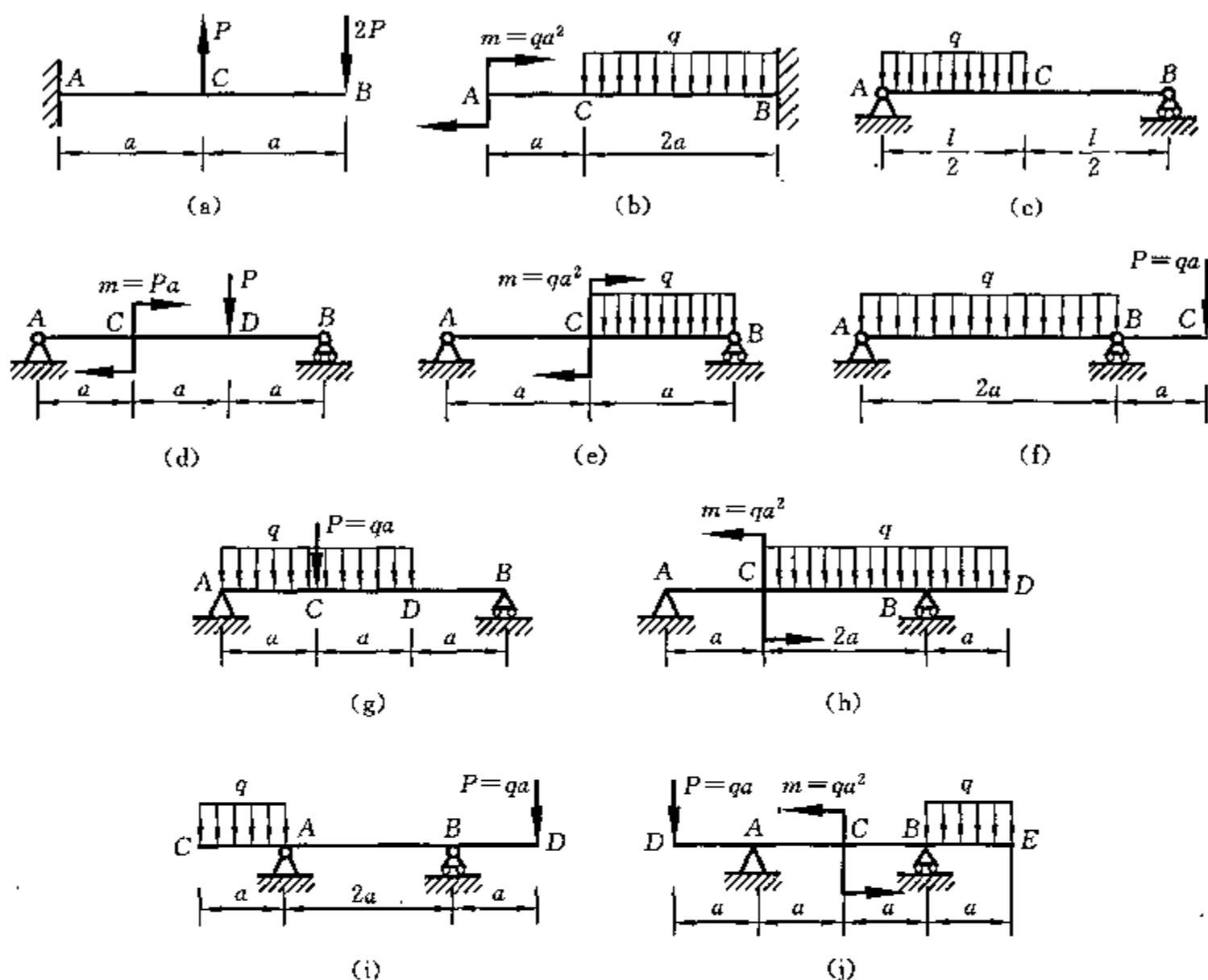


续题 4-3 图

4-4 用剪力、弯矩和分布载荷集度间的微分关系校核前面已画的剪力图和弯矩图是否正确。

解 此题请读者自己试作。

4-5 不列剪力方程和弯矩方程,作题 4-5 图所示各梁的剪力图和弯矩图,并求出 $|Q|_{\max}$ 和 $|M|_{\max}$ 。



题 4-5 图

解 (a) 如题 4-5 图(a)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(a)所示悬臂梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(a₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + P - 2P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad aP - 4aP + M_A = 0$$

可得支座反力 $R_A = P, \quad M_A = 3aP$ 。

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(a₂)所示。

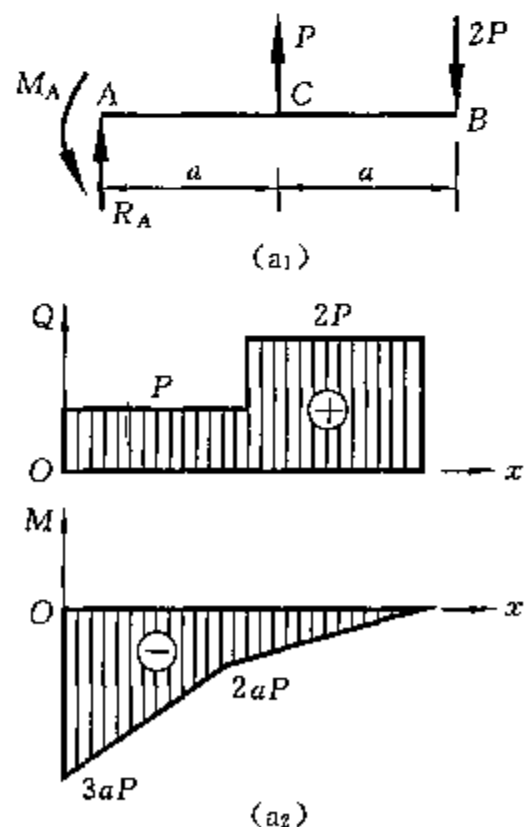
(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q|_{\max} = 2P, \quad |M|_{\max} = 3aP$$

(b) 如题 4-5 图(b)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(b)所示悬臂梁的支座,代之以支座反力,



续题 4-5 图

作受力图如题 4-5 图(b₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_B - 2qa = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad qa^2 - \frac{1}{2}q(2a)^2 + M_B = 0$$

可得支座反力

$$R_B = 2qa, \quad M_B = qa^2$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(b₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = 2qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$$

(c) 如题 4-5 图(c)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(c)所示简支梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(c₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - \frac{1}{2}ql = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad -\frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 + R_B l = 0$$

可得支座反力

$$R_B = \frac{1}{8}ql, \quad R_A = \frac{3}{8}ql$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(c₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = \frac{3}{8}ql, \quad |M_{\max}| = \frac{9}{128}ql^2$$

(d) 如题 4-5 图(d)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(d)所示简支梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(d₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad aP + 2aP - 3aR_B = 0$$

可得支座反力

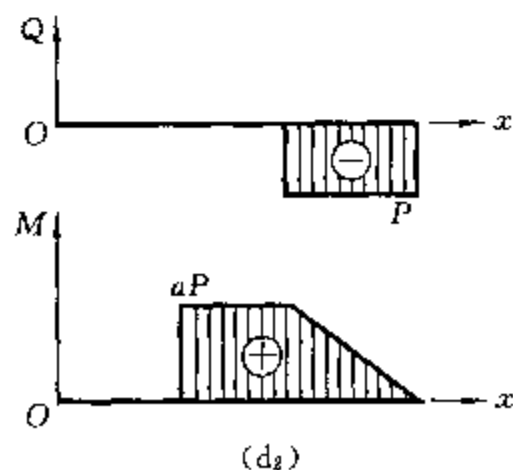
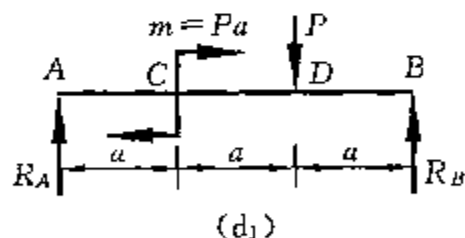
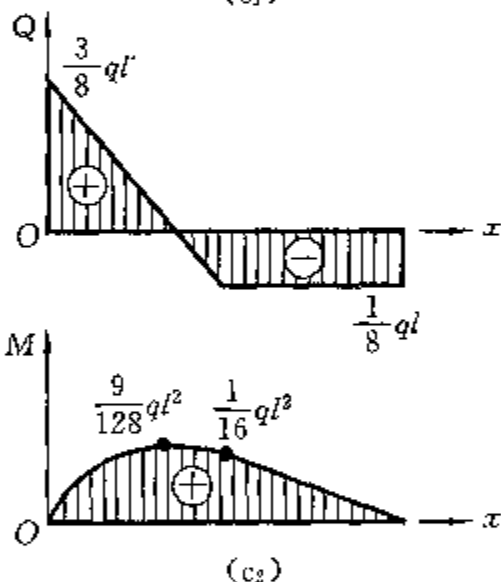
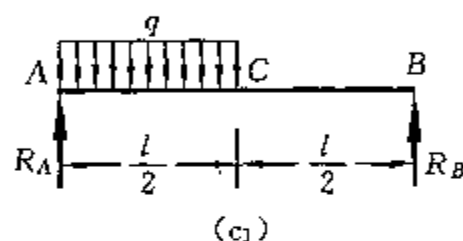
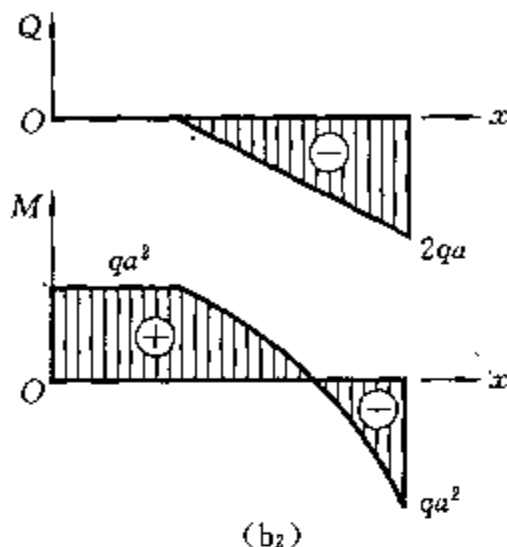
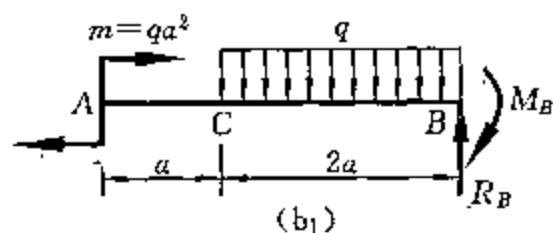
$$R_A = 0, \quad R_B = P$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(d₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = P, \quad |M_{\max}| = aP$$



续题 4-5 图

(e) 如题 4-5 图(e)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(e)所示简支梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(e₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad -R_A + R_B - qa = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad qa^2 - 2aR_A - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

可得支座反力

$$R_A = \frac{1}{4}qa, \quad R_B = \frac{5}{4}qa$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(d₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = \frac{5}{4}qa, \quad |M_{\max}| = \frac{3}{4}qa^2$$

(f) 如题 4-5 图(f)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(f)所示简支梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(f₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 2qa - qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}q(2a)^2 - 2aR_B + 3qa^2 = 0$$

可得支座反力

$$R_A = \frac{1}{2}qa, \quad R_B = \frac{5}{2}qa$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(f₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = \frac{3}{2}qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$$

(g) 如题 4-5 图(g)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(g)的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(g₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 2qa - qa = 0$$

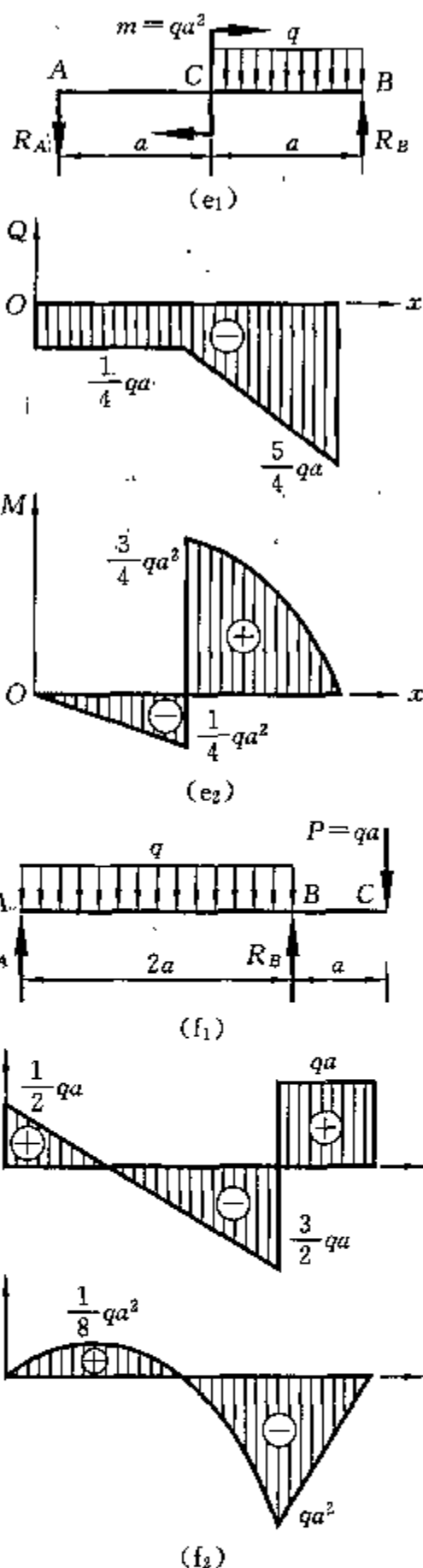
$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}q(2a)^2 + qa^2 - 3aR_B = 0$$

可得支座反力

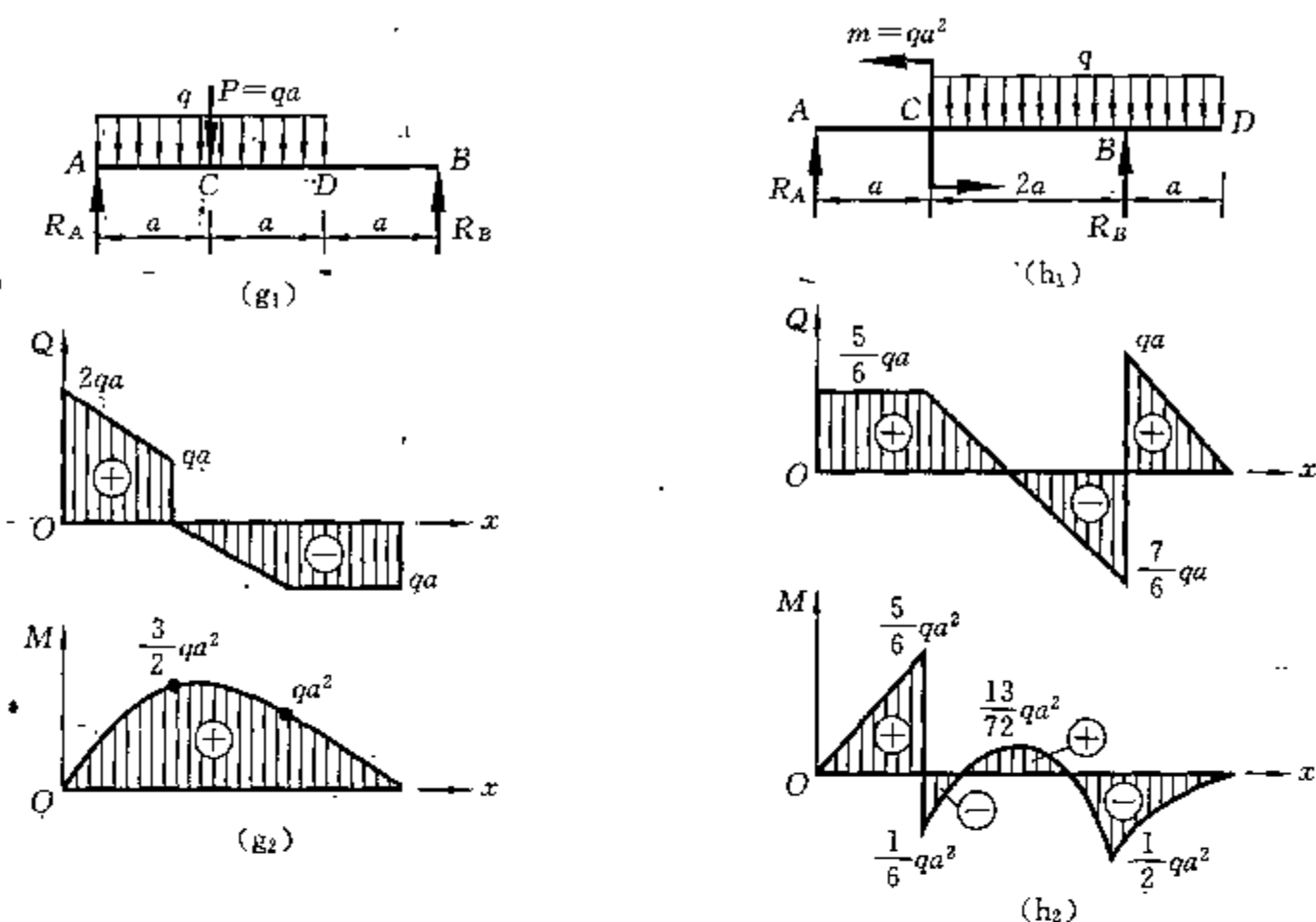
$$R_A = 2qa, \quad R_B = qa$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(g₂)所示。



续题 4-5 图



续题 4-5 图

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = 2qa, \quad |M_{\max}| = \frac{3}{2}qa^2$$

(h) 如题 4-5 图(h)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(h)所示外伸梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(h₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 3qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad qa^2 + 3aR_B - 3qa \times 2.5a = 0$$

$$\text{可得支座反力 } R_A = \frac{5}{6}qa, \quad R_B = \frac{13}{6}qa$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(h₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = \frac{7}{6}qa, \quad |M_{\max}| = \frac{5}{6}qa^2$$

(i) 如题 4-5 图(i)所示。

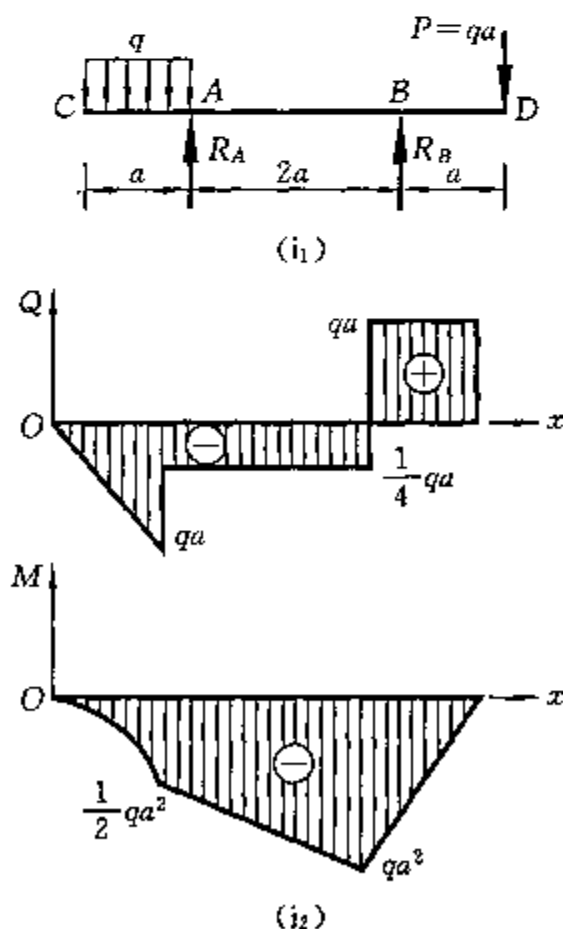
(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(i)所示外伸梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(i₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - qa - qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}qa^2 + 2aR_B - 3qa^2 = 0$$

$$\text{可得支座反力 } R_A = \frac{3}{4}qa, \quad R_B = \frac{5}{4}qa$$



续题 4-5 图

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(j₂)所示。

(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = qa^2$$

(j) 如题 4-5 图(j)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-5 图(j)所示外伸梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-5 图(j₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - qa - qa = 0$$

$$\sum M_B = 0, \quad 3qa^2 - 2aR_A + qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

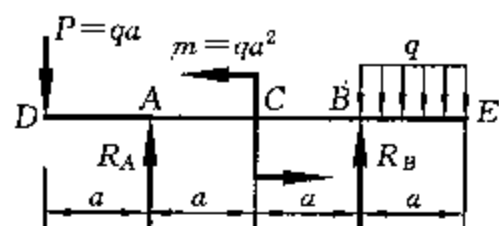
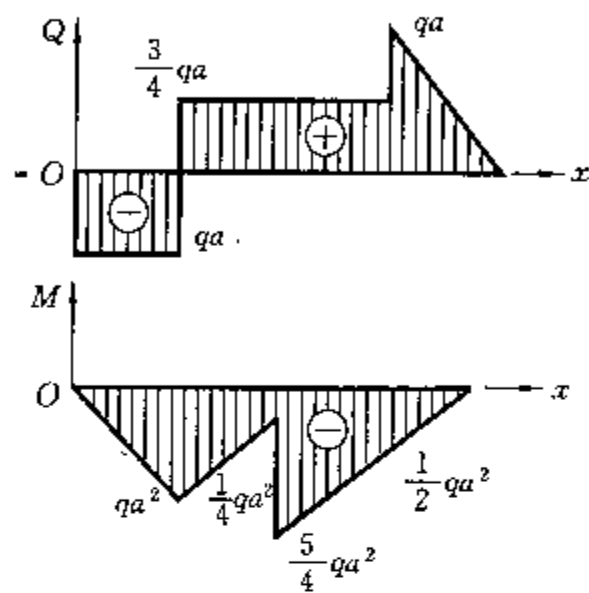
可得支座反力 $R_A = \frac{7}{4}qa, \quad R_B = \frac{1}{4}qa$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-5 图(j₂)所示。

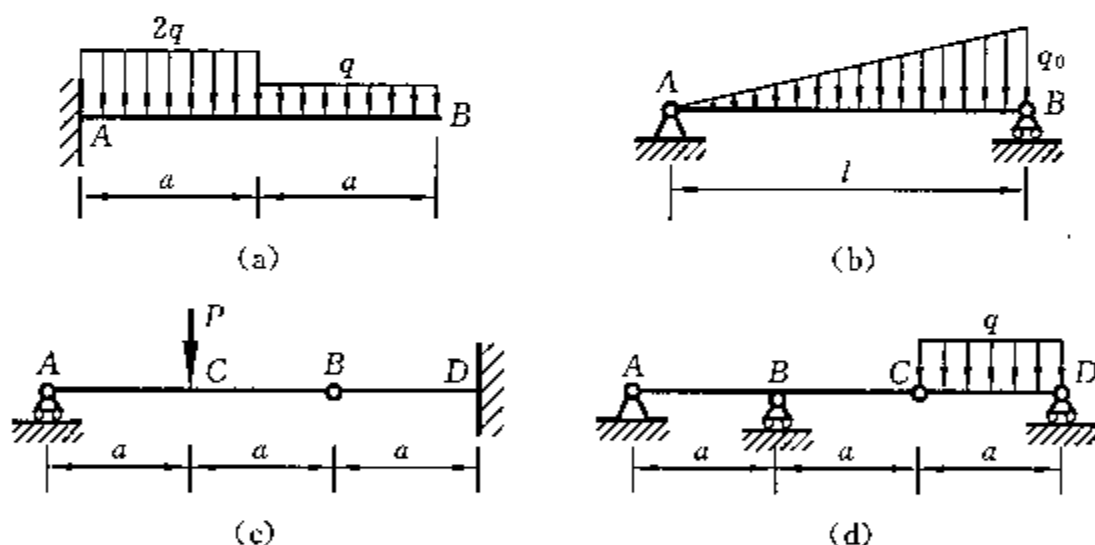
(3) 最大剪力和最大弯矩

$$|Q_{\max}| = qa, \quad |M_{\max}| = \frac{5}{4}qa^2$$

(j₁)(j₂)

续题 4-5 图

4-6 用适当的方法作题 4-6 图所示各梁的剪力图和弯矩图。



题 4-6 图

解 (a) 如题 4-6 图(a)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-6 图(a)所示悬臂梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-6 图(a₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A - 2qa - qa = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}(2q)a^2 + qa \times \frac{3}{2}a - M_A = 0$$

可得支座反力

$$R_A = 3qa, \quad M_A = \frac{5}{2}qa^2$$

(2) 剪力图和弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作剪力图和弯矩图如题 4-6 图(a₂)所示。

(b) 如题 4-6 图(b)所示。

解法 1

(1) 计算支座反力

解除题 4-6 图(b)所示简支梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-6 图(b₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad -\frac{1}{2}q_0 l + R_A + R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}q_0 l \times \frac{2}{3}l - lR_B = 0$$

可得支座反力 $R_A = \frac{1}{6}q_0 l$, $R_B = \frac{1}{3}q_0 l$

(2) 剪力方程和弯矩方程

以点 A 为原点,题 4-6 图(b₁)所示分布载荷的载荷集度为

$$q(x) = -\frac{x}{l}q_0$$

利用题 4-1(a)解法 2 提供的列剪力方程和弯矩方程的外力简化法,有

$$Q(x) = R_A - \frac{x^2}{2l}q_0 = \frac{1}{6}q_0 l - \frac{x^2}{2l}q_0$$

$$M(x) = R_A x + \frac{q(x)x}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{1}{6}q_0 lx - \frac{x^3}{6l}q_0 = \frac{q_0 lx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

(3) 剪力图和弯矩图

依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图,如题 4-6 图(b₂)所示。

解法 2 由剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,有

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) = -\frac{q_0}{l}x$$

将上式积分两次,得

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) = -\frac{q_0}{2l}x^2 + C$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{6l}x^3 + Cx + D$$

对于简支梁,两端的弯矩为零,故有以下边界条件

$$x=0 \text{ 时, } M(x)=0$$

$$x=l \text{ 时, } M(x)=0$$

代入①、②式,得积分常数

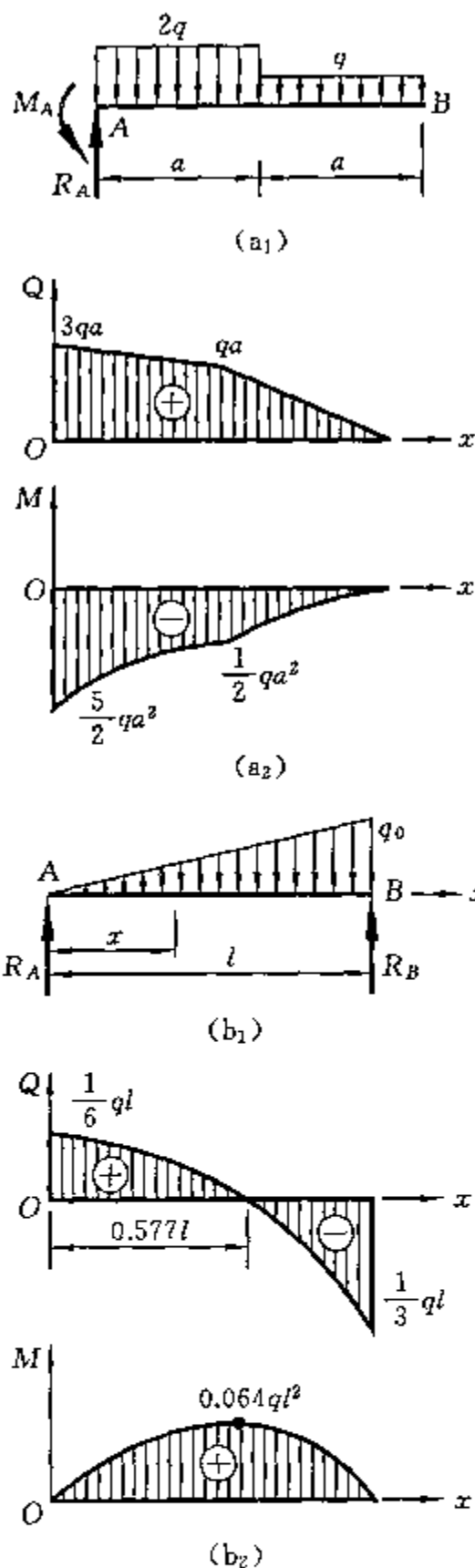
$$C = \frac{q_0 l}{6}, \quad D = 0$$

将积分常数 $C = \frac{q_0 l}{6}$ 、 $D = 0$ 代入①、②式,得剪力方程和弯矩方程

$$Q(x) = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0}{2l}x^2, \quad M(x) = \frac{q_0 lx}{6} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

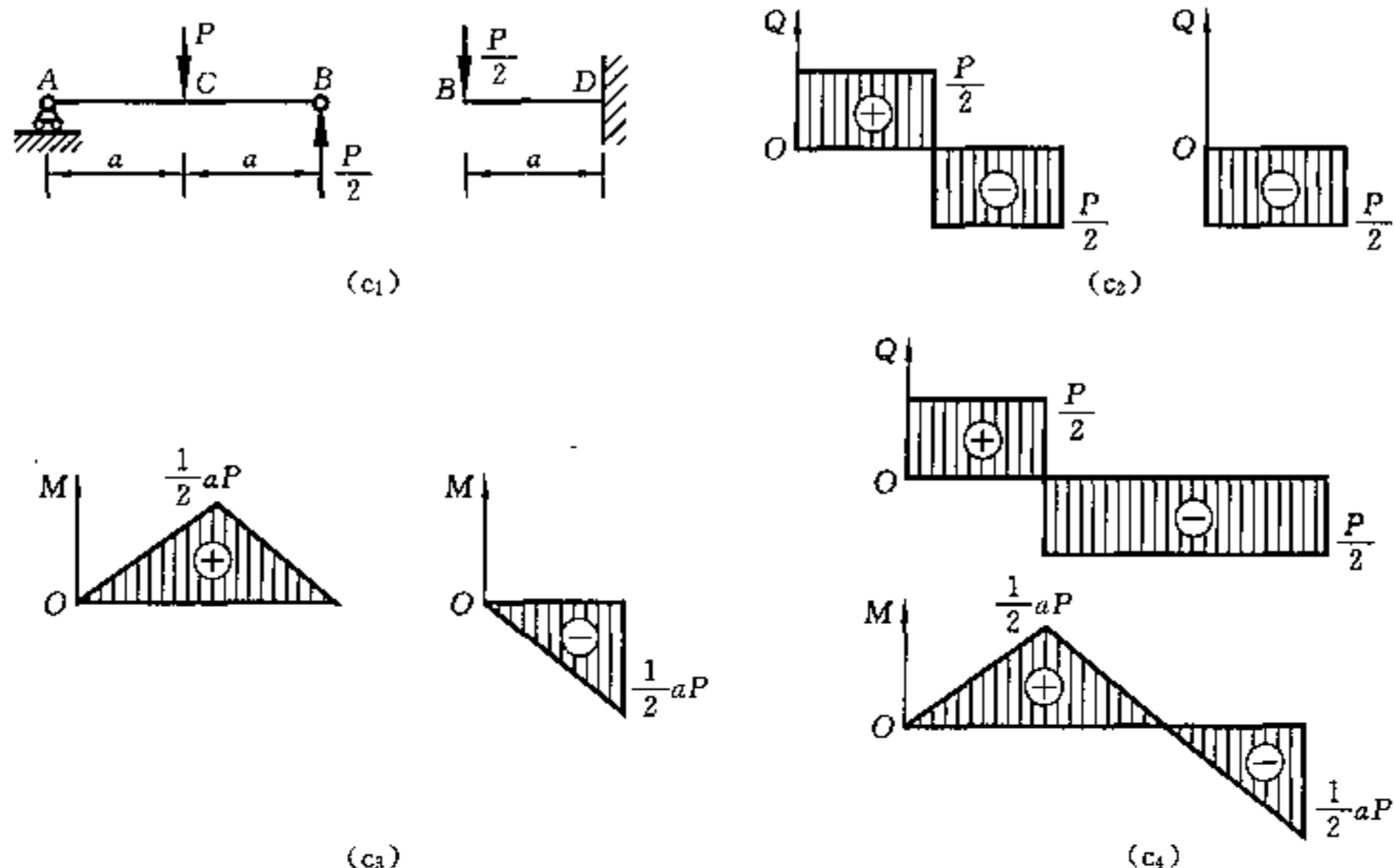
依据剪力方程和弯矩方程,作剪力图和弯矩图如题 4-6 图(b₂)所示。

(c) 如题 4-6 图(c)所示。将梁从中间铰 B 处拆开,分解成为一个简支梁和悬臂梁,如题 4-6 图(c₁)所示。分别作它们的剪力图和弯矩图,如题 4-6 图(c₂)、(c₃)所示。然后分别将剪力图(c₂)



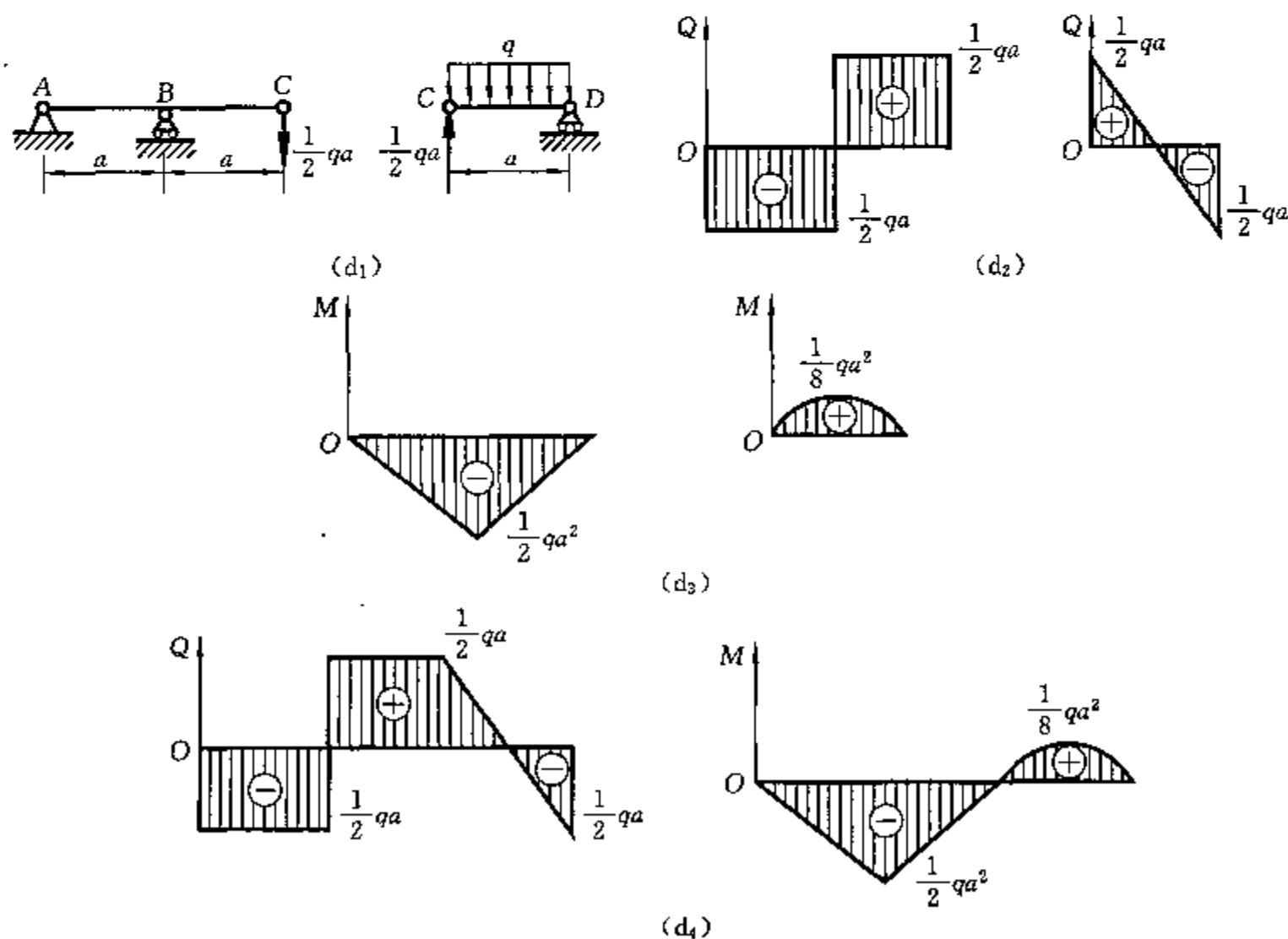
续题 4-6 图

和弯矩图(c₃)连接在一起,便可得到题 4-6 图(c)所示有中间铰的梁的剪力图和弯矩图,如题 4-6 图(c₄)所示。



续题 4-6 图

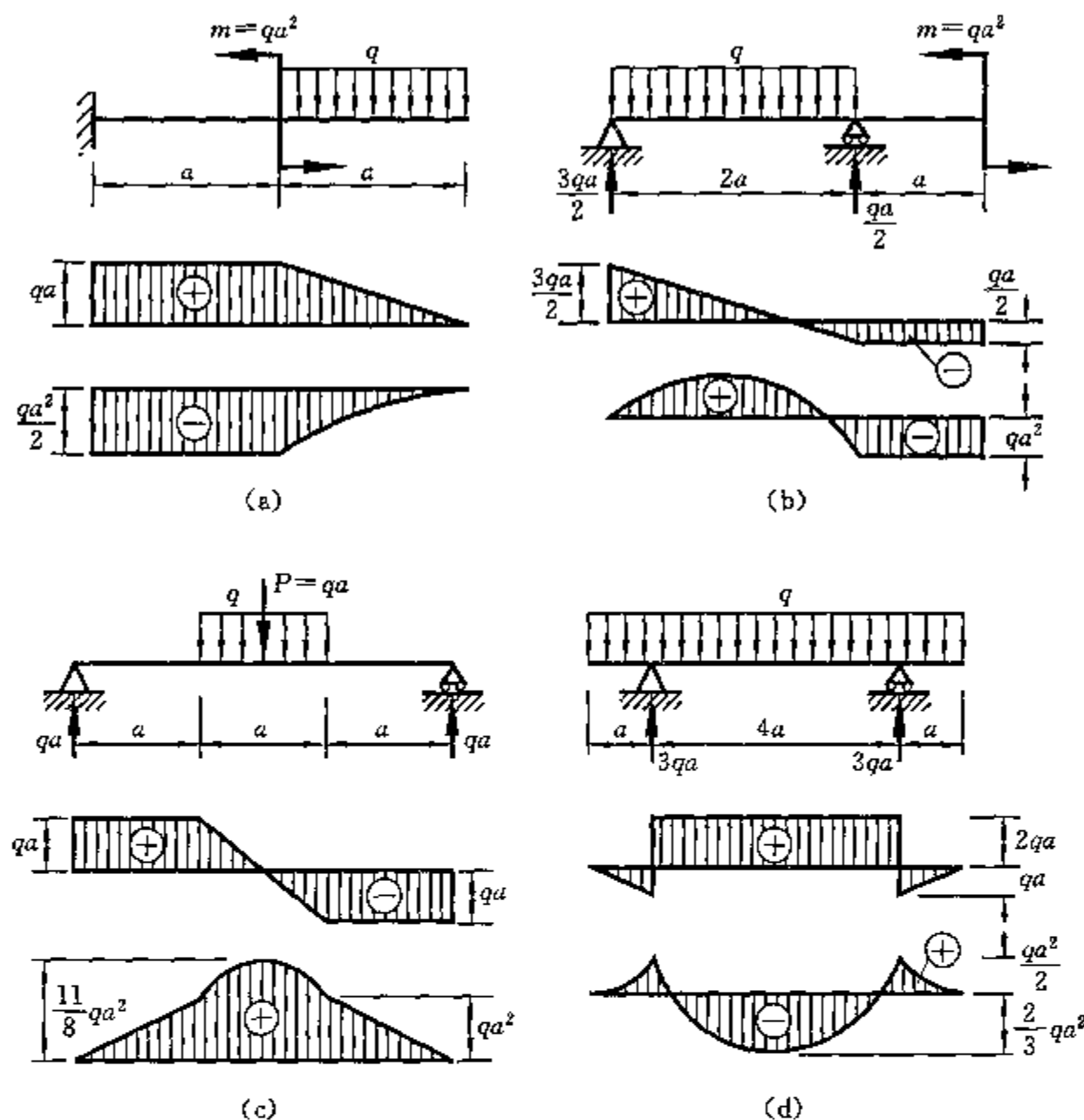
(d) 如题 4-6 图(d)所示。将梁从中间铰 C 处拆开,视梁 AC 为在跨中 B 处受集中载荷为 qa 的简支梁,将梁 CD 视为承受载荷集度为 q 的简支梁,如题 4-6 图(d₁)所示。很容易地画出它们的剪力图和弯矩图如题 4-6 图(d₂)、(d₃)所示。最后将题 4-6 图(d₂)所示剪力图连接起来,将题 4-6



续题 4-6 图

图(d₃)所示弯矩图连接起来,便是题 4-6 图(d)所示梁的剪力图和弯矩图,如题 4-6 图(d₄)所示。

4-7 试根据载荷、剪力图和弯矩图之间的关系,检查题 4-7 图所示各梁的剪力图和弯矩图是否正确,并对错误之处加以改正。



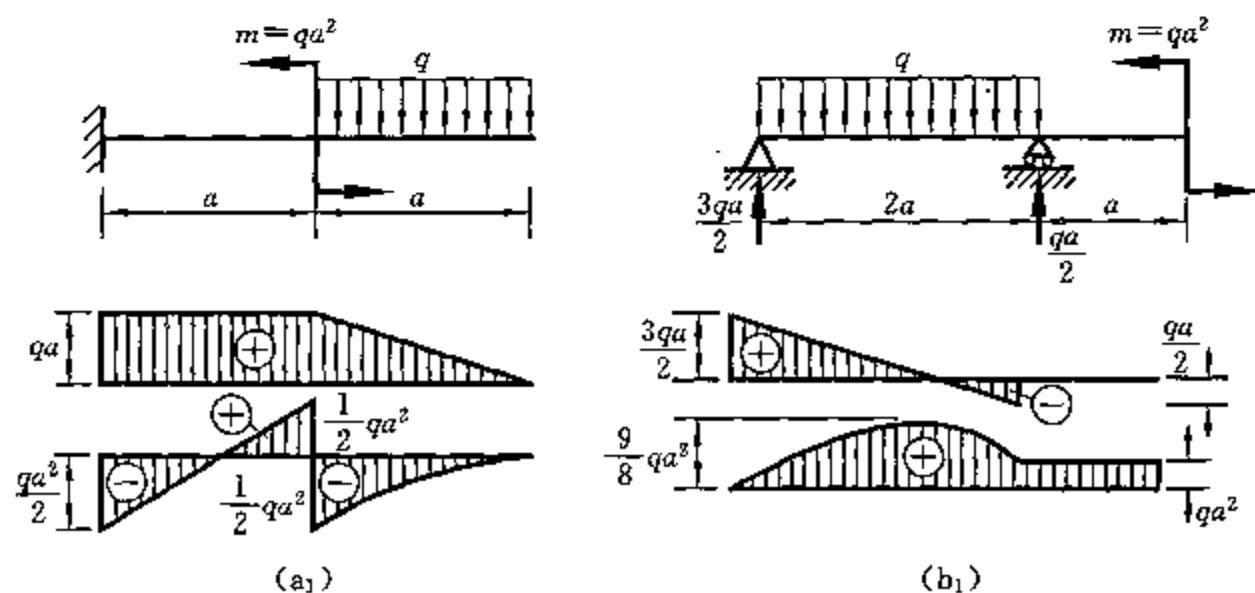
题 4-7 图

解 (a) 题 4-7 图(a)中,剪力图没有错误,弯矩图的错误改正在题 4-7 图(a₁)中。

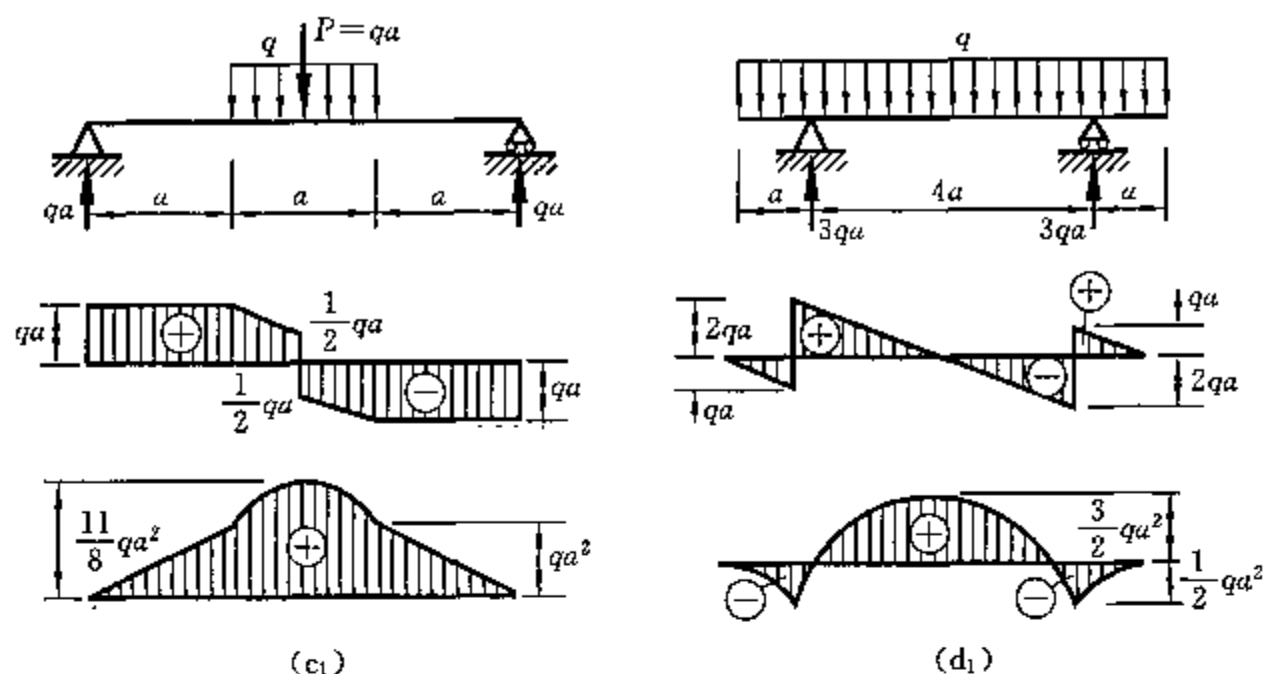
(b) 题 4-7 图(b)中,剪力图和弯矩图都有错误,被改正在题 4-7 图(b₁)中。

(c) 题 4-7 图(c)中,剪力图有错误,被改正在题 4-7 图(c₁)中。

(d) 题 4-7 图(d)中,剪力图有错误,弯矩图仅仅是正负号错误,被改正在题 4-7 图(d₁)中。

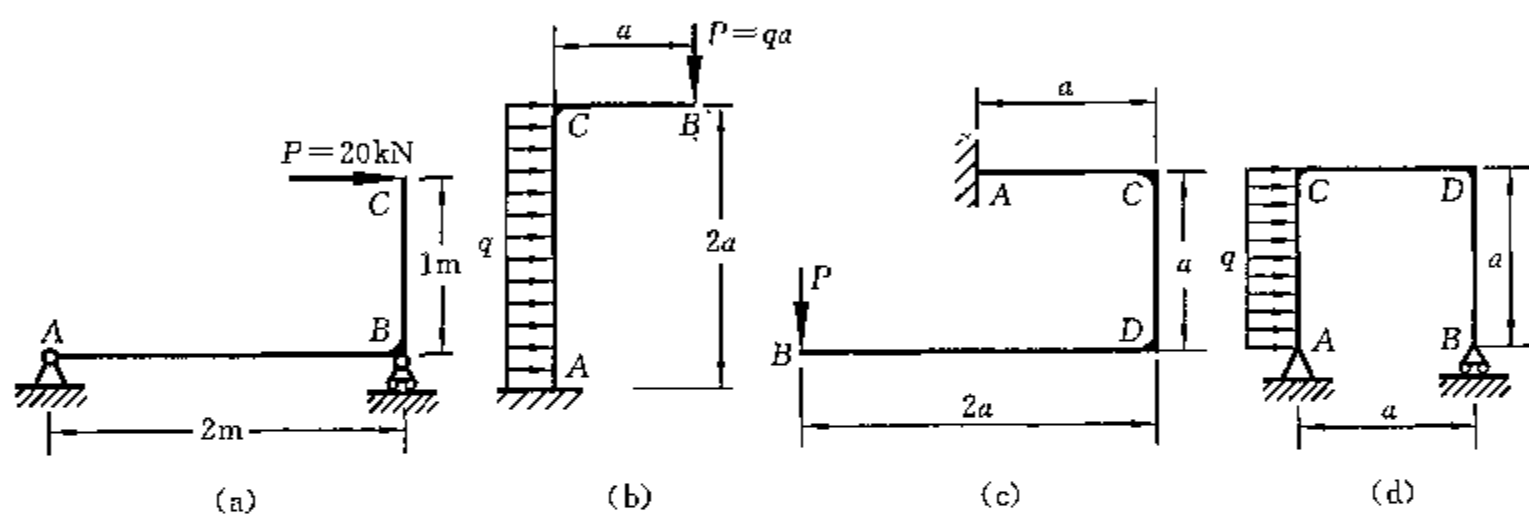


续题 4-7 图



续题 4-7 图

4-8 作题 4-8 图所示构件的内力图。



题 4-8 图

解 (a) 如题 4-8 图(a)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-8 图(a)所示刚架的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-8 图(a₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad P - X_A = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_B - Y_A = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad P - 2R_B = 0$$

可得支座反力 $X_A = 20 \text{ kN}$, $Y_A = 10 \text{ kN}$, $R_B = 10 \text{ kN}$

(2) 列内力方程

AB 段:在 x_1 处截取左侧部分为研究对象,根据其上的外力,可列出

$$N_1 = X_A = 20 \text{ kN} \quad (0 < x_1 < 2)$$

$$Q_1 = -Y_A = -10 \text{ kN} \quad (0 < x_1 < 2)$$

$$M_1 = Y_A x_1 = 10 x_1 \quad (0 \leq x_1 < 2)$$

BC 段:在 x_2 处截取上侧为研究对象,根据其上的外力,可列出

$$N_2 = 0 \quad (0 \leq x_2 < 1)$$

$$Q_2 = P = 20 \text{ kN} \quad (0 < x_2 < 1)$$

$$M_2 = P x_2 = 20 x_2 \quad (0 \leq x_2 < 1)$$

(3) 画内力图

根据内力方程,画内力图如题 4-8 图(a₂)、(a₃)、(a₄)所示。

(b) 如题 4-8 图(b)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-8 图(b)所示刚架的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-8 图(b₁)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad 2qa - X_A = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad Y_A - P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{1}{2}q(2a)^2 + aP - M_A = 0$$

可得支座反力

$$X_A = 2qa, \quad Y_A = qa, \quad M_A = 3qa^2$$

(2) 列内力方程

AC段:在 x_1 处截取下侧部分为研究对象,根据其上的外力,可列出

$$N_1 = -Y_A = -qa \quad (0 < x_1 < 2a)$$

$$Q_1 = X_A - qx_1 = 2qa - qx_1 = q(2a - x_1) \quad (0 < x_1 < 2a)$$

$$M_1 = X_A x_1 - M_A - \frac{1}{2}qx_1^2$$

$$= 2qax_1 - 3qa^2 - \frac{1}{2}qx_1^2 \quad (0 < x_1 < 2a)$$

BC段:在 x_2 处截取右侧为研究对象,根据其上的外力,可列出

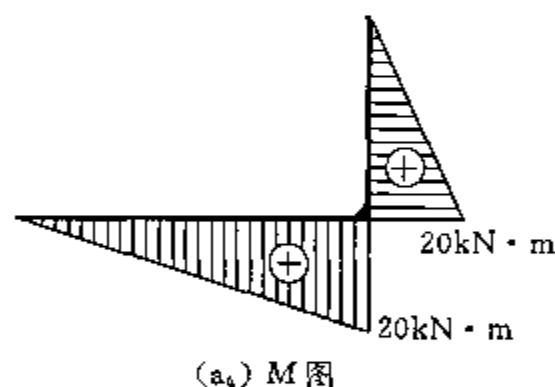
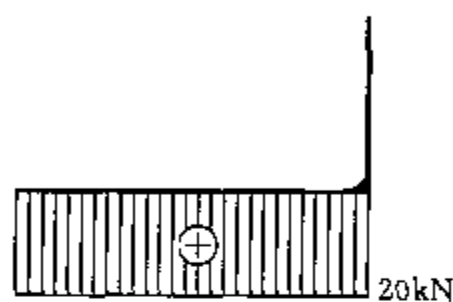
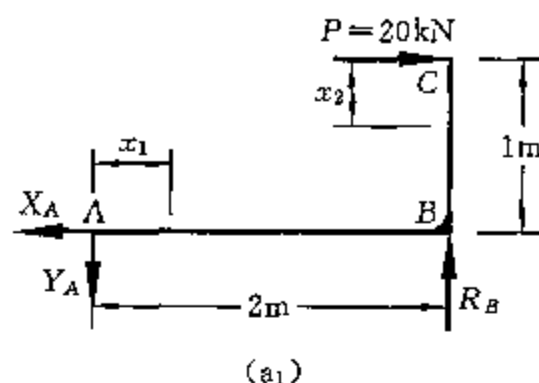
$$N_2 = 0 \quad (0 \leq x_2 \leq a)$$

$$Q_2 = P = qa \quad (0 < x_2 < a)$$

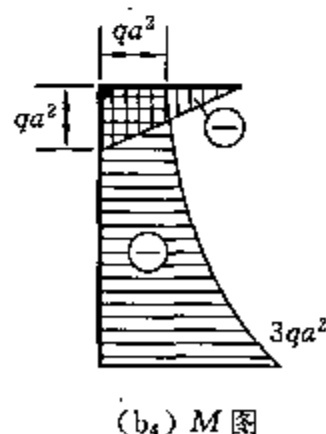
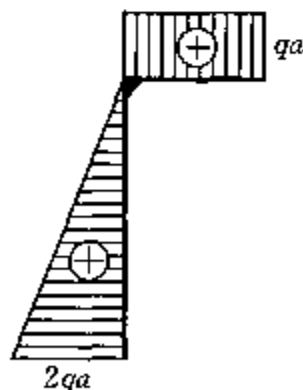
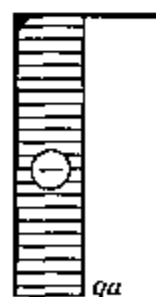
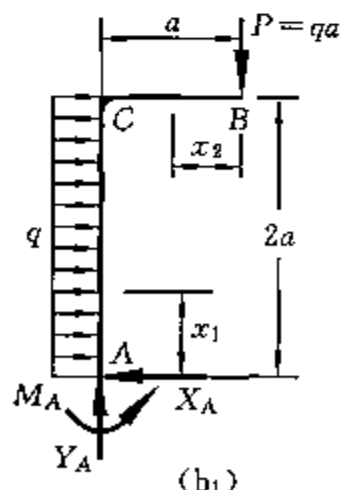
$$M_2 = -Px_2 = -qax_2 \quad (0 < x_2 < a)$$

(3) 画内力图

依据内力方程,画内力图如题 4-8 图(b₂)、(b₃)、(b₄)所示。



续题 4-8 图



续题 4-8 图

(c) 如题 4-8 图(c)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-8 图(c)所示刚架的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-8 图(c₁)所示。由平衡方程

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, & X_A &= 0 \\ \sum Y &= 0, & Y_A - P &= 0 \\ \sum M_A &= 0, & M_A - aP &= 0\end{aligned}$$

可得支座反力

$$X_A = 0, \quad Y_A = P, \quad M_A = aP$$

(2) 列内力方程

AC 段:在 x_1 处截取左侧部分为研究对象,根据其上外力,列出方程

$$\begin{aligned}N_1 &= -X_A = 0 \quad (0 \leq x_1 \leq a) \\ Q_1 &= Y_A = P \quad (0 < x_1 < a) \\ M_1 &= M_A + Y_A x_1 = aP + Px_1 \quad (0 < x_1 < a)\end{aligned}$$

CD 段:在 x_2 处截取上侧部分为研究对象,根据其上外力,列内力方程

$$\begin{aligned}N_2 &= Y_A = P \quad (0 < x_2 < a) \\ Q_2 &= X_A = 0 \quad (0 \leq x_2 \leq a)\end{aligned}$$

$$M_2 = X_A x_2 + Y_A a + M_A = aP + aP = 2aP \quad (0 < x_2 < a)$$

DB 段:在 x_3 处截取左侧部分为研究对象,根据其上外力,列内力方程

$$\begin{aligned}N_3 &= 0 \quad (0 \leq x_3 \leq 2a) \\ Q_3 &= -P \quad (0 < x_3 < 2a) \\ M_3 &= Px_3 \quad (0 \leq x_3 < 2a)\end{aligned}$$

(3) 画内力图

依据内力方程,画内力图如题 4-8 图(c₂)、(c₃)、(c₄)所示。

(d) 如题 4-8 图(d)所示。

(1) 计算支座反力

解除题 4-8 图(d)所示刚架的支座,代之以支座反力,作受力图如题 4-8 图(d₁)所示。由平衡方程

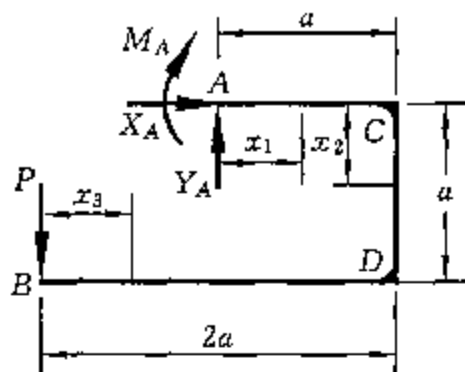
$$\begin{aligned}\sum X &= 0, & qa - X_A &= 0 \\ \sum Y &= 0, & -Y_A + R_B &= 0 \\ \sum M_A &= 0, & R_B a - \frac{1}{2}qa^2 &= 0\end{aligned}$$

可得支座反力

$$X_A = qa, \quad Y_A = \frac{1}{2}qa, \quad R_B = \frac{1}{2}qa^2$$

(2) 列内力方程

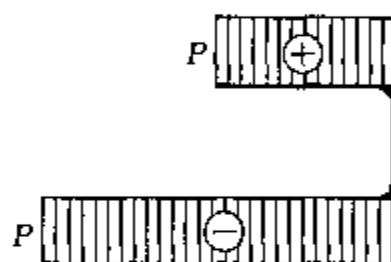
AC 段:在 x_1 处截取下侧部分为研究对象,根据其上的受力,可列出内力方程



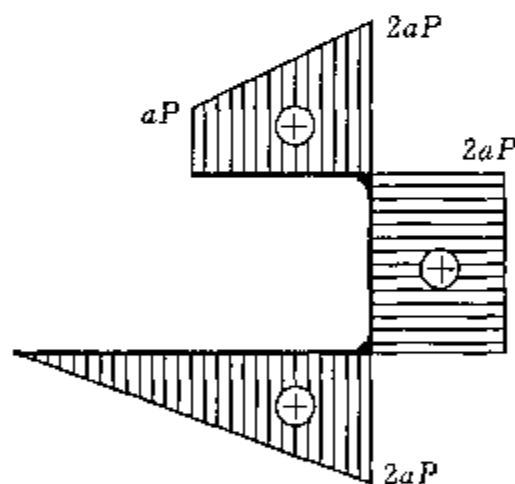
(c₁)



(c₂) N 图

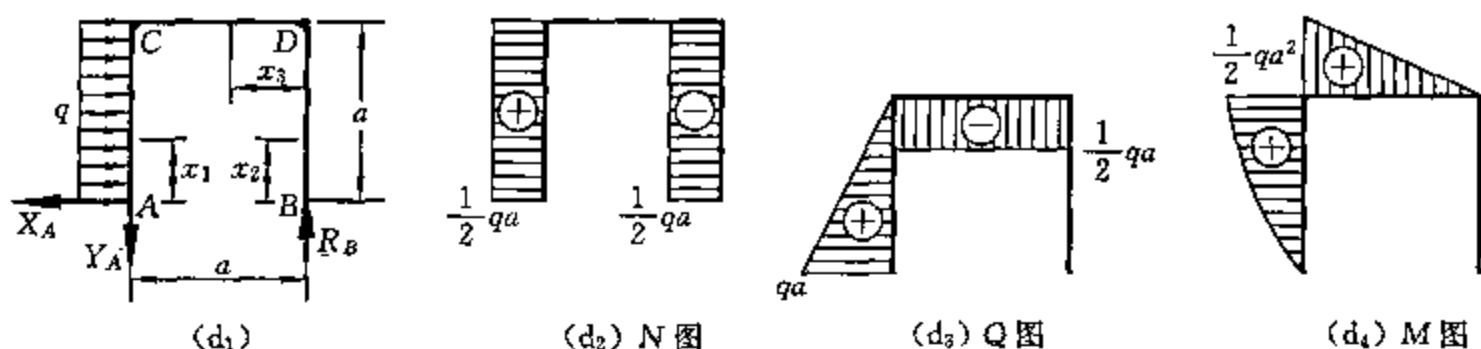


(c₃) Q 图



(c₄) M 图

续题 4-8 图



续题 4-8 图

$$N_1 = Y_A = \frac{1}{2} qa \quad (0 < x_1 < a)$$

$$Q_1 = X_A - qx_1 = qa - qx_1 \quad (0 < x_1 \leq a)$$

$$M_1 = X_A x_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 = qax_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 \quad (0 \leq x_1 < a)$$

BD 段: 在 x_2 处截取下侧部分为研究对象, 根据其上的外力, 列内力方程

$$N_2 = R_B = \frac{1}{2} qa \quad (0 < x_2 < a)$$

$$Q_2 = 0 \quad (0 \leq x_2 \leq a)$$

$$M_2 = 0 \quad (0 \leq x_2 \leq a)$$

CD 段: 在 x_3 截取右侧部分为研究对象, 根据其上的外力, 列内力方程

$$N_3 = 0 \quad (0 \leq x_3 \leq a)$$

$$Q_3 = R_B = \frac{1}{2} qa \quad (0 < x_3 < a)$$

$$M_3 = R_B x_3 = \frac{1}{2} qax_3 \quad (0 \leq x_3 < a)$$

(3) 画内力图

依据内力方程, 画内力图如题 4-8 图(d₂)、(d₃)、(d₄)所示。

4-9 在梁上行走的小车二轮的轮压均为 P , 如题 4-9 图(a)所示。问小车行至何位置时梁内的弯矩最大? 最大弯矩值为多少? 设小车的轮距为 c , 大梁的跨度为 l 。

解 取梁 AB 为研究对象, 作受力图如题 4-9 图(b)所示。

由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad R_B l - Px - P(x+c) = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B = 2P$$

可得支座反力 $R_B = \frac{P(2x+c)}{l}, \quad R_A = \frac{P(2l-c-2x)}{l}$

AC 段的弯矩方程为 $M(x) = \frac{P(2l-c-2x)}{l} x$

弯矩 $M(x)$ 取极值的条件是其一阶导数等于零, 即

$$\frac{dM(x)}{dx} = 2l - c - 4x = 0$$

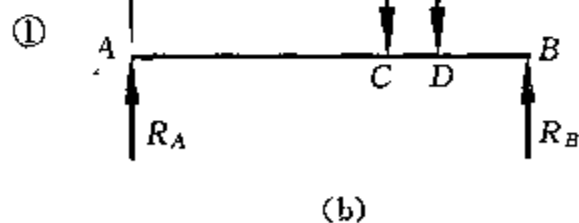
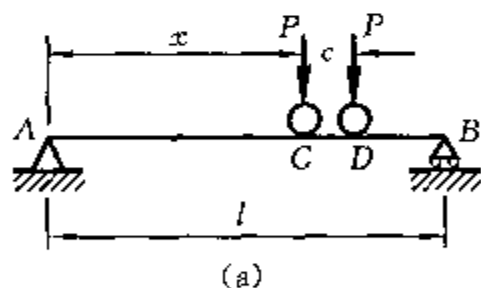
解上式, 得

$$x = \frac{2l-c}{4}$$

将②式代入①式, 可得最大弯矩

$$M_{\max} = \frac{P}{2l} \left(l - \frac{c}{2} \right)^2$$

所以, 当小车轮 C 距梁左端 A 为 $\frac{2l-c}{4}$ 时, 梁内弯矩最大, $M_{\max} = \frac{P}{2l} \left(l - \frac{c}{2} \right)^2$ 。



题 4-9 图

第五章 弯曲应力

知 识 要 点

1. 对称弯曲正应力

(1) 中性层与中性轴

① 中性层 弯曲变形时,梁内有一层纵向纤维,既不伸长,也不缩短,因而它们不承受拉力和压力,该纤维层称为梁的中性层。

② 中性轴 中性层与横截面的交线,也即横截面上正应力为零的各点的连线。

③ 中性轴的位置 在弹性变形范围内,作对称弯曲的梁,其中性轴必通过截面形心,且与载荷作用面垂直。

(2) 弯曲变形后梁轴线的曲率与弯矩间的关系

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

(3) 梁横截面上的正应力

① 分布规律 任意一点的正应力的大小与该点至中性轴的垂直距离成正比,中性轴的一侧为拉应力,另一侧为压应力。

② 计算公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z}, \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{M_{\max}}{W_z}$$

对于纯弯曲梁,上式为精确解。对于横力弯曲梁,上式为近似解,当梁跨度与横截面高之比 $\frac{l}{h} \geq 5$ 时,误差约为 2%。

2. 惯性矩与平行轴公式

(1) 简单截面对中性轴 z 的惯性矩

① 矩形截面的惯性矩

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}$$

抗弯截面系数

$$W_z = \frac{I_z}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

② 圆形截面的惯性矩

$$I_z = \int_A \rho^2 dA = \frac{\pi D^4}{64} \quad (\text{对实心圆截面})$$

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \quad (\text{对空心圆截面})$$

抗弯截面系数

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \quad (\text{对实心圆截面})$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \quad (\text{对空心圆截面})$$

式中, $\alpha = \frac{d}{D}$, 即内、外径之比。

(2) 组合截面的惯性矩 组合截面对某一轴的惯性矩可以视为其各个组成部分(即简单图形)对同一轴的惯性矩之和。

(3) 平行移轴公式 截面对任一轴 z 的惯性矩, 等于对与其平行的形心轴 z_c 的惯性矩加上截面面积与两轴间距离 a 的平方之积, 即

$$I_z = I_{z_c} + Aa^2$$

3. 对称弯曲切应力

(1) 矩形截面梁的弯曲切应力

① 分布规律 切应力方向与剪力方向平行, 大小沿截面宽度均匀分布, 沿高度方向呈抛物线变化。

② 计算公式

$$\tau(y) = \frac{Q}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}$$

(2) 工字形截面梁的弯曲切应力

最大切应力在中性轴上, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{z_{\max}}^*}{I_z d}$$

式中, d ——腹板的宽度;

$S_{z_{\max}}^*$ ——中性轴一侧的截面面积对中性轴的静矩。

在计算工字钢的 τ_{\max} 时, 比值 $\frac{I_z}{S_{z_{\max}}^*}$ 可直接由型钢规格表中查得。

(3) 圆形、圆环形截面梁的弯曲切应力

最大切应力产生在中性轴上, 其值为

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q}{A} \quad (\text{圆截面}), \quad \tau_{\max} = 2 \frac{Q}{A} \quad (\text{圆环截面})$$

4. 梁的强度条件

(1) 弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

(2) 弯曲切应力强度条件

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{z_{\max}}^*}{I_z \delta} \leq [\tau]$$

习题详解

5-1 一矩形截面梁如题 5-1 图所示, 试计算 I-I 截面上 A、B、C、D 各点处的正应力, 并指明是拉应力还是压应力。

解 (1) 计算截面 I-I 上的弯矩

$$M = Pl = -(1.5 \times 0.2) \text{ kN} \cdot \text{m} = -300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(2) 计算截面 I - I 的惯性矩

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.018 \times 0.030^3}{12} \text{ m}^4 \\ = 4.05 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

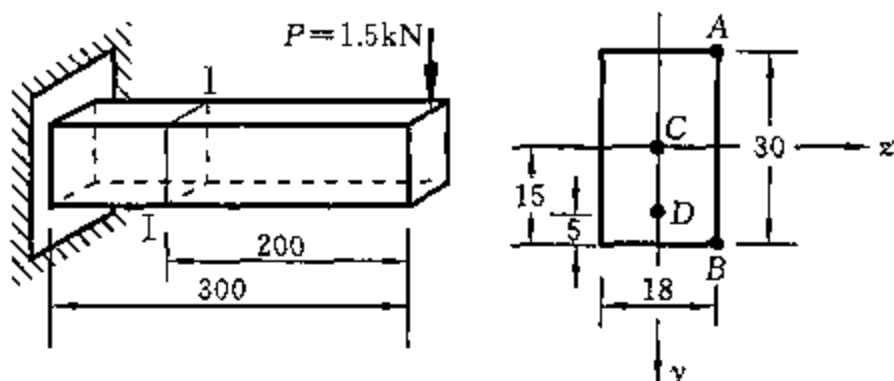
(3) 计算截面 I - I 上指定各点的应力

$$\sigma_A = \frac{M_{yA}}{I_z} = \frac{-300 \times (-0.015)}{4.05 \times 10^{-8}} \text{ Pa} \\ = 111.1 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{M_{yB}}{I_z} = \frac{-300 \times 0.015}{4.05 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = -111.1 \text{ MPa}$$

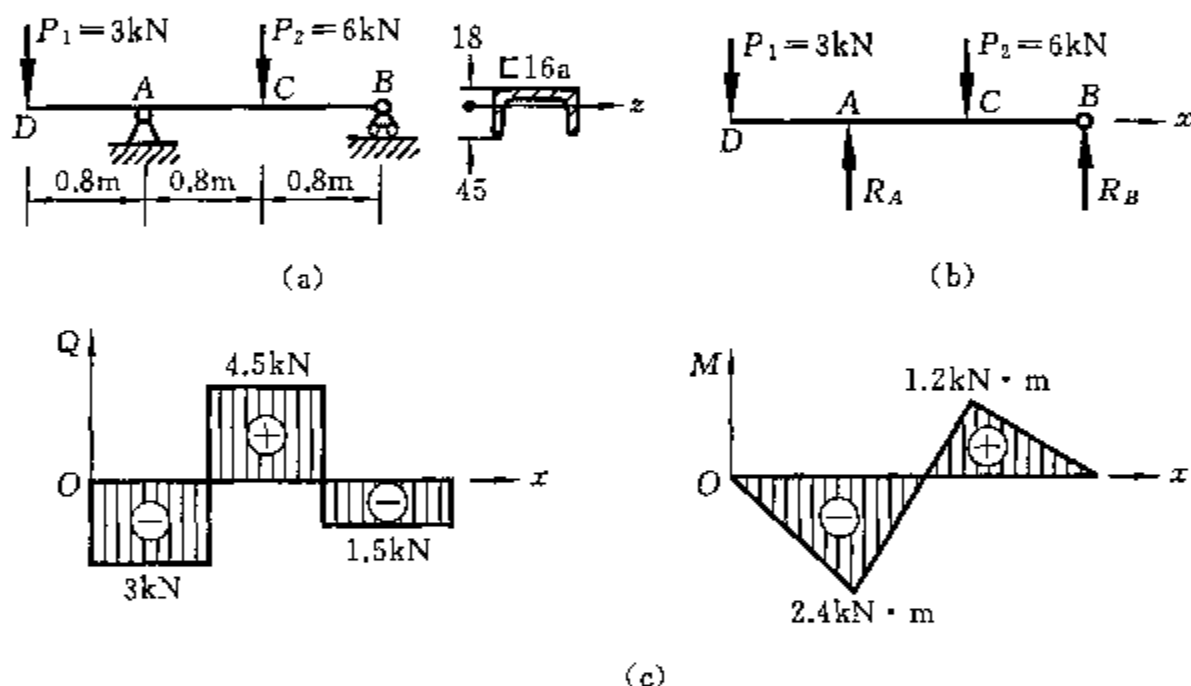
$$\sigma_C = \frac{M_{yC}}{I_z} = \frac{-300 \times 0}{4.05 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = 0$$

$$\sigma_D = \frac{M_{yD}}{I_z} = \frac{-300 \times 0.010}{4.05 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = -74.07 \text{ MPa}$$



题 5-1 图

5-2 一外伸梁如题 5-2 图(a)所示,梁为 16a 号槽钢所制成,试求梁的最大拉应力和最大压应力,并指出其作用截面和位置。



题 5-2 图

解 (1) 计算支座反力

解除题 5-2 图(a)所示梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 5-2 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 0.8P_1 - 0.8P_2 + 1.6R_B = 0$$

可得支座反力

$$R_A = 7.5 \text{ kN}, \quad R_B = 1.5 \text{ kN}$$

(2) 作弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作弯矩图如题 5-2 图(c)所示。两个最大弯矩分别产生在截面 A 和 C 上

$$M_{\max 1} = -2.4 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad M_{\max 2} = 1.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 梁横截面的惯性矩

查文献 1 附录一型钢表,16a 号槽钢的惯性矩

$$I_z = 73.3 \text{ cm}^4$$

主要尺寸如题 5-2 图(a)所示(未标注单位的尺寸,其单位为 mm)。

(4) 计算最大弯曲正应力

最大弯曲正应力将产生在弯矩最大的截面 A 和 C 上。

截面 A 上的最大拉应力和最大压应力

$$\sigma_{Tmax} = \frac{M_{max1} \times 18 \times 10^{-3}}{I_z} = \frac{2.4 \times 10^3 \times 18 \times 10^{-3}}{73.3 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = 58.93 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Cmax} = \frac{M_{max1} \times 45 \times 10^{-3}}{I_z} = \frac{2.4 \times 10^3 \times 45 \times 10^{-3}}{73.3 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = 147.3 \text{ MPa}$$

截面 C 上的最大拉应力和最大压应力

$$\sigma_{Tmax} = \frac{M_{max2} \times 45 \times 10^{-3}}{I_z} = \frac{1.2 \times 10^3 \times 45 \times 10^{-3}}{73.3 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = 73.67 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Cmax} = \frac{M_{max2} \times 18 \times 10^{-3}}{I_z} = \frac{1.2 \times 10^3 \times 18 \times 10^{-3}}{73.3 \times 10^{-8}} \text{ Pa} = 29.47 \text{ MPa}$$

比较以上计算结果,最大拉应力产生在截面 C 的下边, $\sigma_{CT} = 73.67 \text{ MPa}$, 最大压应力产生在截面 A 的下边, $\sigma_{AT} = 147.3 \text{ MPa}$ 。

5-3 一矩形截面梁如题 5-3 图(a)所示,已知 $P=2 \text{ kN}$, 横截面的高宽比 $h/b=3$; 材料为松木, 其许用应力为 $[\sigma]=8 \text{ MPa}$ 。试选择横截面的尺寸。

解 (1) 计算支座反力

解除题 5-3 图(a)所示简支梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 5-3 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum Y = 0, R_A + R_B - 3P = 0$$

$$\sum M_A = 0, P + 2P + 3P - 4R_B = 0$$

可得支座反力

$$R_A = 3 \text{ kN}, R_B = 3 \text{ kN}$$

(2) 画弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作弯矩图如题 5-3 图(c)所示, 并确定最大弯矩

$$M_{max} = 4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 计算横截面的抗弯截面系数

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3b^3}{2}$$

(4) 选择横截面尺寸

$$\text{由强度条件 } \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{4 \times 10^3}{\frac{3}{2}b^3} \leq [\sigma]$$

可得横截面的宽度

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{8 \times 10^3}{3[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 10^3}{3 \times 8 \times 10^6}} \text{ m} = 69.34 \text{ mm}$$

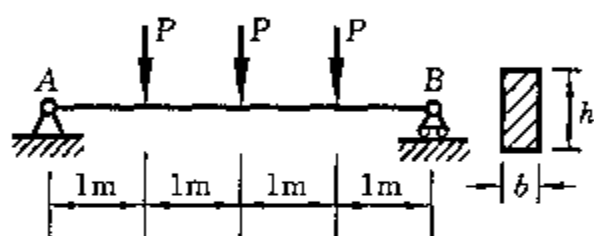
由横截面的高宽比 $h/b=3$, 得横截面的高为

$$h = 3b = 3 \times 69.34 \text{ mm} = 208 \text{ mm}$$

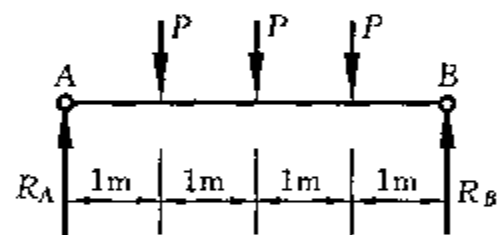
5-4 一圆轴如题 5-4 图(a)所示, 其外伸部分为空心管状, 试作弯矩图, 并求轴内的最大正应力。

解 (1) 计算支座反力

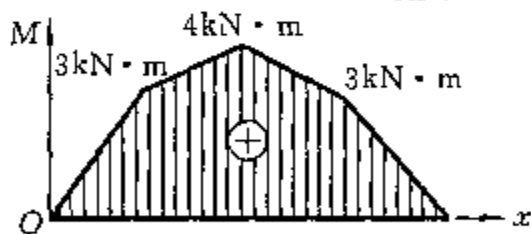
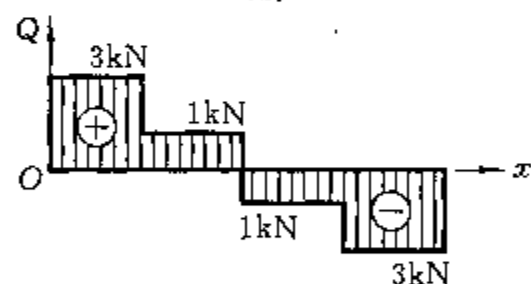
解除题 5-4 图(a)所示圆轴的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 5-4 图(b)所示。由平衡方程



(a)

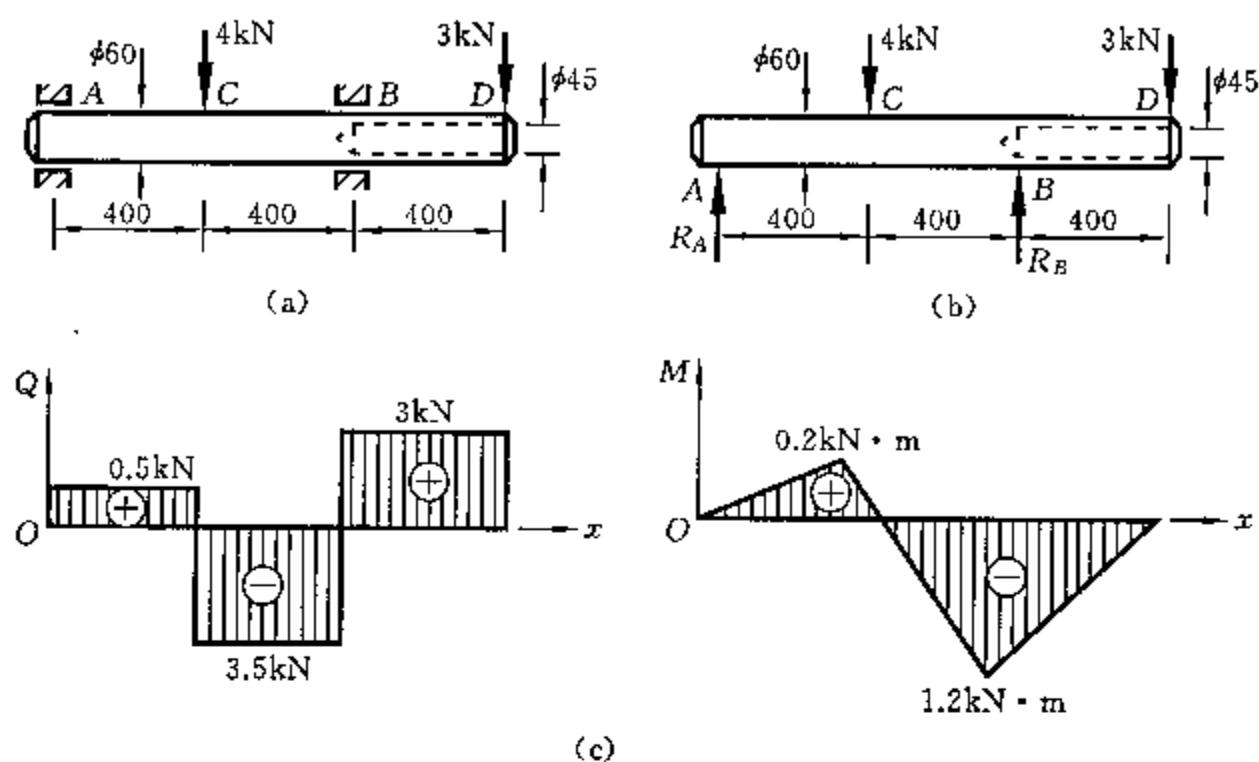


(b)



(c)

题 5-3 图



题 5-4 图

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 4 - 3 = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 0.4 \times 4 - 0.8 R_B + 1.2 \times 3 = 0$$

可得支座反力

$$R_A = 0.5 \text{ kN}, \quad R_B = 6.5 \text{ kN}$$

(2) 画弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作弯矩图如题 5-4 图(c)所示,并可确定最大弯矩

$$M_{\max} = 1.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 计算轴内最大应力

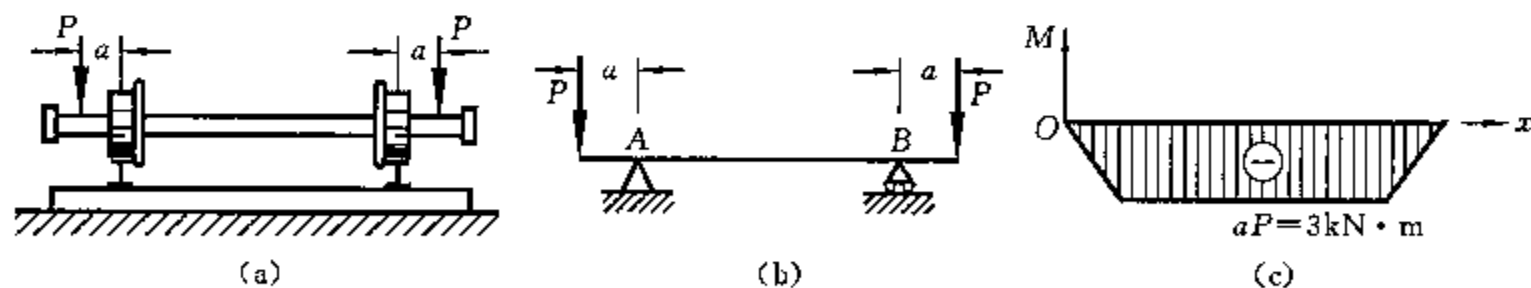
最大弯矩产生在截面 B 上,此处为空心管状,抗弯截面系数

$$W_x = \frac{\pi}{32} D^3 \left[1 - \left(\frac{45}{60} \right)^4 \right] = \frac{\pi}{32} \times 0.06^3 \left[1 - \left(\frac{45}{60} \right)^4 \right] \text{ m}^3 = 1.45 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

最大正应力产生在截面 B 上

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1.2 \times 10^3}{1.45 \times 10^{-5}} \text{ Pa} = 82.76 \text{ MPa}$$

5-5 一矿车车轴如题 5-5 图(a)所示。已知 $a = 0.6 \text{ m}$, $P = 5 \text{ kN}$, 材料的许用应力 $[\sigma] = 80 \text{ MPa}$, 试选择车轴轴径。



题 5-5 图

解 (1) 力学模型

将题 5-5 图(a)所示的车轴简化为题 5-5 图(b)所示的外伸梁。

(2) 最大弯矩

作外伸梁的弯矩图如题 5-5 图(c)所示,最大弯矩产生在受纯弯曲的 AB 段,其弯矩为

$$M_{\max} = aP = (0.6 \times 5) \text{ kN} \cdot \text{m} = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 选择车轴的直径

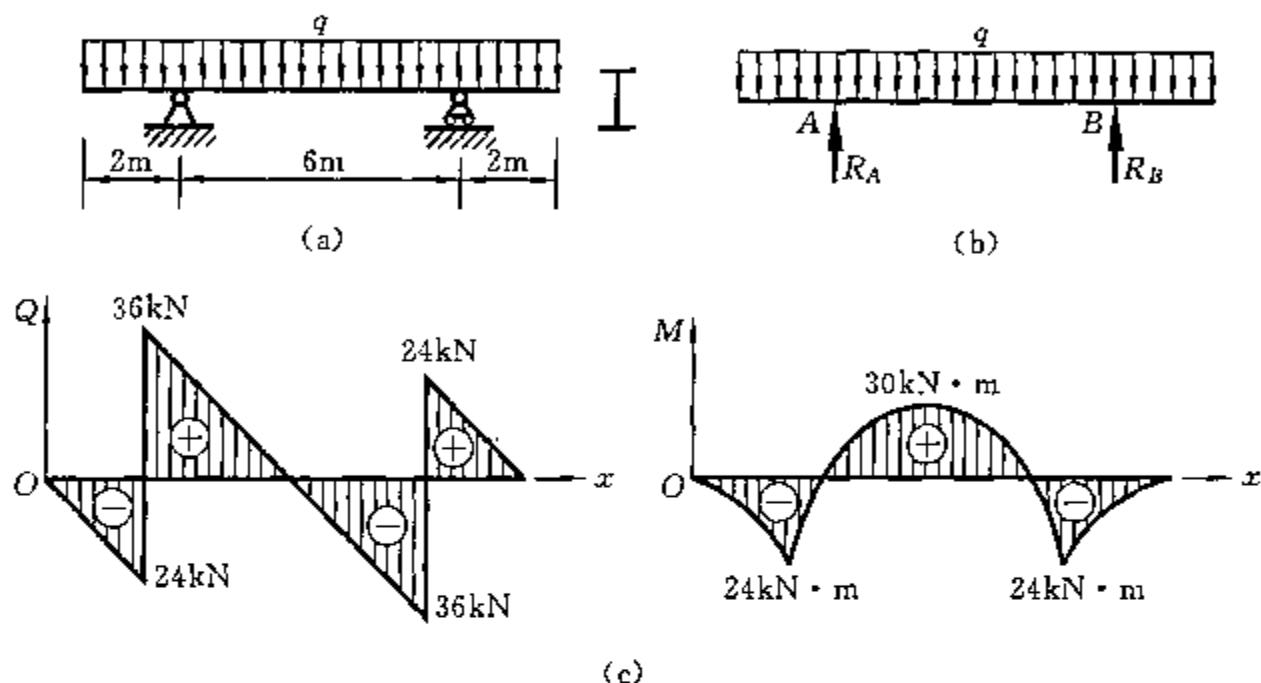
根据强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

可得车轴直径

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \times 3 \times 10^3}{\pi \times 80 \times 10^6}} \text{ m} = 72.56 \text{ mm}$$

5-6 一受均布载荷的外伸钢梁如题 5-6 图(a)所示, 已知 $q=12 \text{ kN/m}$, 材料的许用应力 $[\sigma]=160 \text{ MPa}$ 。试选择此梁的工字钢型号。



题 5-6 图

解 (1) 计算支座反力

解除题 5-6 图(a)所示外伸梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 5-6 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 10q = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 10q \times 3 - 6R_B = 0$$

可得支座反力

$$R_B = \frac{30q}{6} = \frac{30 \times 12}{6} \text{ kN} = 60 \text{ kN}$$

$$R_A = 10q - R_B = (10 \times 12 - 60) \text{ kN} = 60 \text{ kN}$$

(2) 画弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作弯矩图如题 5-6 图(c)所示, 并可确定最大弯矩

$$M_{\max} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 选择工字梁型号

根据强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

可得工字梁所需的抗弯截面系数

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{30 \times 10^3}{160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 187.5 \text{ cm}^3$$

查文献 1 附录一型钢表, 18 号工字钢的抗弯截面系数 $W_z = 185 \text{ cm}^3$, 所以选用 18 号工字钢。

5-7 题 5-7 图所示的空气泵的操纵杆, 右端受力为 8.5 kN , 截面 I-I 和 II-II 为矩形, 其高宽比均为 $h/b=3$, 材料的许用应力 $[\sigma]=50 \text{ MPa}$ 。试求此两截面的尺寸。

解 (1) 计算截面 I-I 和 II-II 上的弯矩

由平衡条件

$$\sum M_0 = 0, \quad 380P - 720 \times 8.5 = 0$$

可得水平外力 $P = \frac{720 \times 8.5}{380} \text{ kN} = 16.11 \text{ kN}$

所以,截面 I-I 和 II-II 上的弯矩分别为

$$M_I = 8.5 \times \left(0.72 - \frac{0.16}{2}\right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 5.44 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{II} = 16.11 \times \left(0.38 - \frac{0.16}{2}\right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 4.833 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 确定截面 I-I 和 II-II 的尺寸

由强度条件

$$\sigma_{I \max} = \frac{M_I}{W_{zI}} = \frac{6M_I}{b_I h_I^2} = \frac{6M_I}{9b_I^3} \leq [\sigma]$$

可得截面 I-I 的宽度

$$b_I \geq \sqrt[3]{\frac{6M_I}{9[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 5.44 \times 10^3}{9 \times 50 \times 10^6}} \text{ m} = 4.17 \text{ cm}$$

由截面的高宽比 $h/b=3$, 得截面的高度

$$h_I = 3b_I = 3 \times 4.17 \text{ cm} = 12.51 \text{ cm}$$

由强度条件

$$\sigma_{II \max} = \frac{M_{II}}{W_{zII}} = \frac{6M_{II}}{h_{II} b_{II}^2} = \frac{6M_{II}}{9b_{II}^3} \leq [\sigma]$$

可得截面 II-II 的宽度 $b_{II} \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{II}}{9[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \times 4.833 \times 10^3}{9 \times 50 \times 10^6}} \text{ m} = 4.009 \text{ cm}$

由截面高宽比 $h/b=3$, 得截面 II-II 的高度

$$h_{II} = 3b_{II} = 3 \times 4.009 \text{ cm} = 12.03 \text{ cm}$$

5-8 题 5-8 图(a)所示为一铸造用的钢水包。试按其耳轴的正应力强度确定充满钢水时所允许的总重量。已知材料的许用应力 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$, $d = 200 \text{ mm}$ 。

解 (1) 力学模型

可将钢水包的耳轴简化为题 5-8 图(b)所示的悬臂梁。

(2) 耳轴承受的最大弯矩

$$M_{\max} = 0.3P = 0.3 \times \frac{G}{2} = 0.15G$$

(3) 计算钢水包允许总重量

根据强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{32 \times 0.15G}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$\begin{aligned} \text{可得 } G &\leq \frac{\pi d^3 [\sigma]}{32 \times 0.15} = \frac{\pi \times 0.2^3 \times 100 \times 10^6}{32 \times 0.15} \text{ N} \\ &= 523.6 \text{ kN} \end{aligned}$$

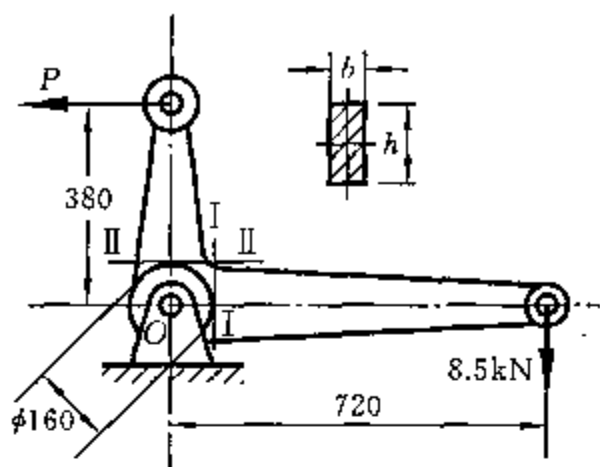
所以,钢水包的允许总重量为 $[G] = 523.6 \text{ kN}$ 。

5-9 求题 5-9 图所示各图形对形心轴 z 的惯性矩。

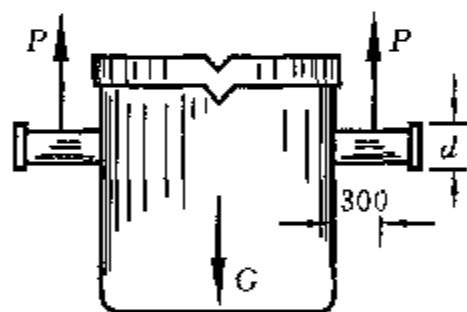
解 (a) 题 5-9 图(a)所示工字形面积对中性轴 z 的惯性矩,等于 126×300 的大矩形面积对 z 轴的惯性矩减去工字形腹板两侧的两个小矩形面积对同一轴的惯性矩,即

$$\begin{aligned} I_z &= I_{zI} - I_{zII} = \frac{126 \times 300^3}{12} - \frac{(126-9)(300-2 \times 14.4)^3}{12} \text{ mm}^4 \\ &= (283.5 \times 10^6 - 194.5 \times 10^6) \text{ mm}^4 = 89 \times 10^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

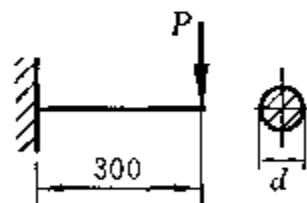
(b) 如题 5-9 图(b)所示 T 形面积可视为由小矩形面积 I 和小矩形面积 II 组合而成,如题 5-9



题 5-7 图

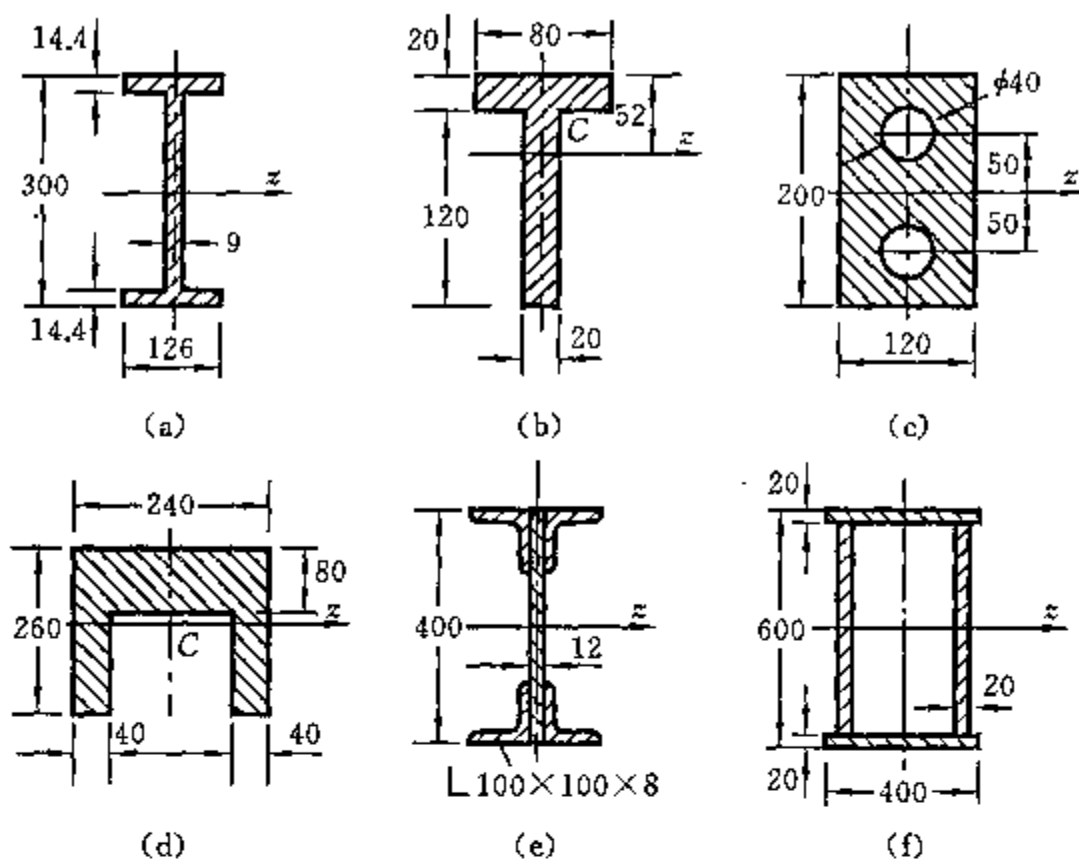


(a)



(b)

题 5-8 图



题 5-9 图

图(b₁)所示。

(1) 小矩形面积 I 对 T 形面积形心轴 z 的惯性矩, 可利用平行轴定理确定

$$I_{zI} = \left[\frac{80 \times 20^3}{12} + 80 \times 20 \times (52 - 10)^2 \right] \text{ mm}^4 = 2.875 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(2) 小矩形面积 II 对 T 形面积形心轴 z 的惯性矩, 可利用平行轴定理确定

$$I_{zII} = \left[\frac{20 \times 120^3}{12} + 20 \times 120 \times (140 - 52 - 60)^2 \right] \text{ mm}^4 = 4.762 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(3) T 形面积对形心轴 z 的惯性矩

$$I_z = I_{zI} + I_{zII} = (2.875 + 4.762) \times 10^6 \text{ mm}^4 = 7.637 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(c) 题 5-9 图(c)所示面积对形心轴 z 的惯性矩等于矩形面积对形心轴 z 的惯性矩减去两个小圆形面积对 z 轴的惯性矩。在计算两个小圆形面积对 z 轴的惯性矩时, 应当利用平行轴定理, 将小圆形面积对自身形心轴的惯性矩转换为对 z 轴的惯性矩, 即

$$I_z = \left[\frac{120 \times 200^3}{12} - 2 \left(\frac{\pi \times 40^4}{64} + \frac{\pi \times 40^2}{4} \times 50^2 \right) \right] \text{ mm}^4$$

$$= 73.47 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

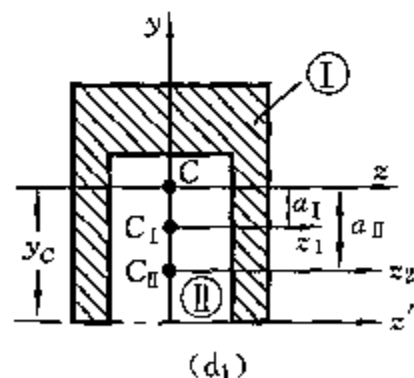
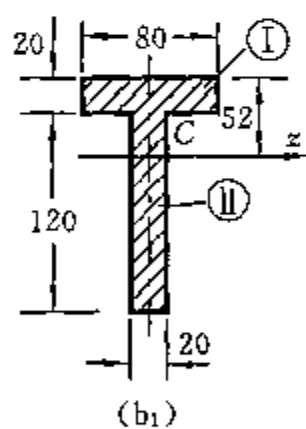
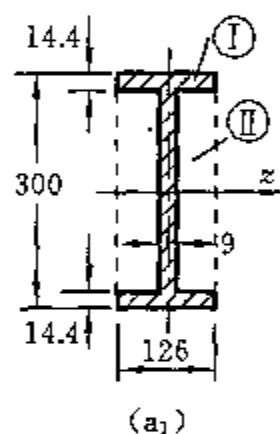
(d) 题 5-9 图(d)所示槽形面积, 可视为由一个 240×260 的大矩形 I 挖去一个小矩形组合面成, 如题 5-9 图(d₁)所示。

(1) 确定形心和中性轴的位置 取与截面底边重合的 z' 轴为参考轴, 点 C 为槽形面积的形心, C_I 和 C_{II} 分别为矩形 I 和矩形 II 的形心, 则两矩形的面积及其形心至 z' 轴的距离分别为

$$A_I = (240 \times 260) \text{ mm}^2 = 62400 \text{ mm}^2$$

$$A_{II} = (240 - 2 \times 40) (260 - 80) \text{ mm}^2 = 28800 \text{ mm}^2$$

$$y_I = \frac{260}{2} \text{ mm} = 130 \text{ mm}, \quad y_{II} = \frac{260 - 80}{2} \text{ mm} = 90 \text{ mm}$$



续题 5-9 图

组合面积(即槽形面积)的形心 C 至 z' 轴的距离为

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{A} = \frac{A_I y_I + A_{II} y_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{62400 \times 130 - 28800 \times 90}{62400 - 28800} \text{ mm} = 164.3 \text{ mm}$$

即槽形面积的中性轴 z 至 z' 轴的距离为 164.3 mm。

(2) 计算两个矩形面积对中性轴 z 的惯性矩

矩形 I 和 II 的形心轴 z_1 和 z_2 至中性轴 z 的距离分别为 a_I 和 a_{II} 如题 5-9 图(d₁)所示, 并且有

$$a_I = CC_I = y_c - y_I = (164.3 - 130) \text{ mm} = 34.3 \text{ mm}$$

$$a_{II} = CC_{II} = y_c - y_{II} = (164.3 - 90) \text{ mm} = 74.3 \text{ mm}$$

利用平行轴定理, 可计算出两矩形 I 和 II 对中性轴 z 的惯性矩分别为

$$I_{zI} = I_{z_1I} + a_I^2 A_I = \left(\frac{240 \times 260^3}{12} + 34.3^2 \times 62400 \right) \text{ mm}^4 = 424.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{zII} = I_{z_2II} + a_{II}^2 A_{II} = \left[\frac{(240-80)(260-80)^3}{12} + 74.3^2 \times 28800 \right] \text{ mm}^4 = 236.8 \text{ mm}^4$$

所以, 槽形面积对中性轴 z 的惯性矩为

$$I_z = I_{zI} - I_{zII} = (424.9 - 236.8) \times 10^6 \text{ mm}^4 = 188.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(e) 题 5-9 图(e)所示组合面积, 是由一个狭长矩形面积和 4 个等边角钢截面构成。

(1) 计算狭长矩形面积对组合面积中性轴 z 的惯性矩

$$I_{zI} = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \times 400^3}{12} \text{ mm}^4 = 64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(2) 计算一个角钢截面对组合面积中性轴 z 的惯性矩

查文献 1 附录一型钢表, L100×100×8 角钢截面对自身形心轴 z_c

的惯性矩和截面面积分别为

$$I_{z_c} = 1.4824 \times 10^6 \text{ mm}^4, \quad A = 0.001564 \times 10^6 \text{ mm}^2$$

截面中性轴 z_c 至底边距离为 27.6 mm, 如题 5-9 图(e₁)所示。利用平行轴定理, 一个角钢截面对组合截面形心轴 z 的惯性矩为

$$I_{zII} = I_{z_c} + A(200 - 27.6)^2 = (1.482 \times 10^6 + 0.001564 \times 10^6 \times 29720) \text{ mm}^4 = 48 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(3) 计算组合面积对中性轴 z 的惯性矩

$$I_z = I_{zI} + 4I_{zII} = (64 \times 10^6 + 4 \times 48 \times 10^6) \text{ mm}^4 = 256 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(f) 题 5-9 图(f)所示组合面积, 可视为由两个小矩形 I 及两个小矩形 II 构成。

(1) 小矩形 I 对组合面积的中性轴 z 的惯性矩

利用平行轴定理, 有

$$I_{zI} = \left[\frac{400 \times 20^3}{12} + 400 \times 20 \times (300 - 10)^2 \right] \text{ mm}^4 = 673.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(2) 小矩形 II 对组合面积的中性轴 z 的惯性矩

$$I_{zII} = \frac{20 \times 560^3}{12} \text{ mm}^4 = 292.7 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

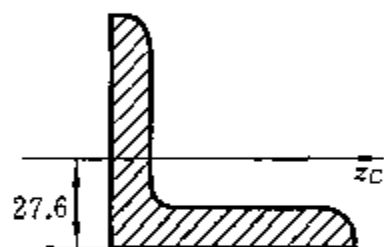
(3) 组合面积对中性轴 z 的惯性矩

$$I_z = 2I_{zI} + 2I_{zII} = (2 \times 673.1 + 292.7) \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1932 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

5-10 横梁受力如题 5-10 图(a)所示。已知 $P=97 \text{ kN}$, 许用应力 $[\sigma]=32 \text{ MPa}$ 。校核其强度。

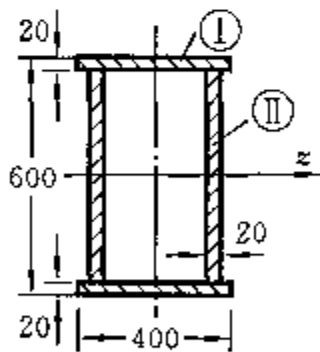
解 (1) 支座反力

因题 5-10 图(a)所示梁, 结构和载荷均对称, 所以支座反力 $R_A=R_B=\frac{1}{2}P$, 如题 5-10 图(b)所示。



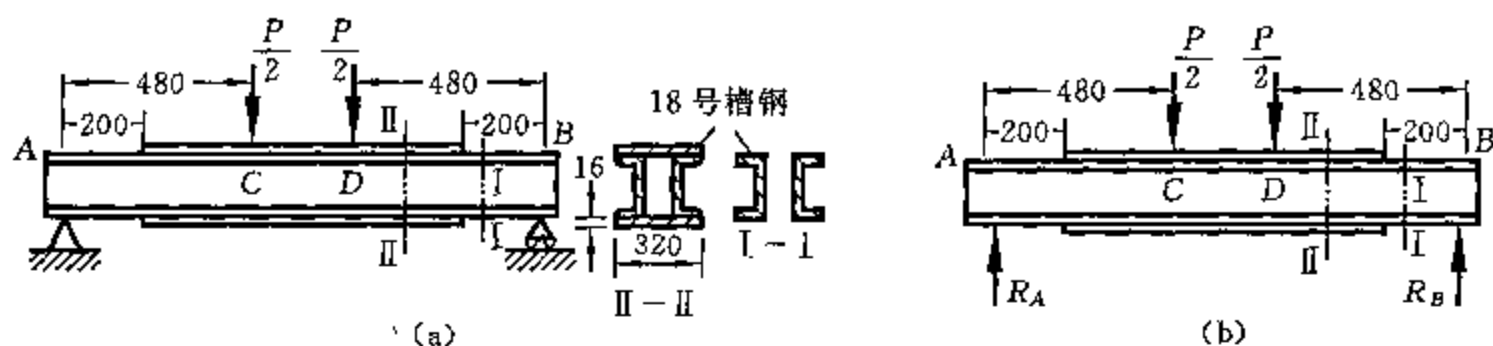
(e₁)

续题 5-9 图



(f₁)

续题 5-9 图



题 5-10 图

(2) 最大弯矩

有盖板部分,梁的最大弯矩为

$$M_{\max,2} = \frac{P}{2} \times 0.48 = \left(\frac{97}{2} \times 0.48 \right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 23.28 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

无盖板部分,梁的最大弯矩为

$$M_{\max,1} = \frac{P}{2} \times 0.2 = \left(\frac{97}{2} \times 0.2 \right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 9.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 截面 I-I 对中性轴的惯性矩

查文献 1 附录一型钢表,18 号槽钢截面的惯性矩

$$I_{x1} = 1370 \text{ cm}^4$$

所以,截面 I-I 对中性轴的惯性矩为

$$I_{xI} = 2I_{x1} = 2 \times 13.70 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 27.4 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

(4) 截面 II-II 对中性轴的惯性矩

截面 II-II 比截面 I-I 多了两块盖板的截面积,利用平行轴定理,先确定盖板截面对截面 II-II 中性轴的惯性矩

$$I_{x2} = 2 \left[\frac{320 \times 16^3}{12} + 320 \times 16 \times \left(\frac{180}{2} + \frac{16}{2} \right)^2 \right] \text{ mm}^4 = 98.56 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

所以截面 II-II 对中性轴的惯性矩为

$$I_{xII} = I_{xI} + I_{x2} = (27.4 \times 10^{-6} + 98.56 \times 10^{-6}) \text{ m}^4 = 126 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

(5) 校核梁的强度

截面 I-I 上的最大应力

$$\sigma_{\max,1} = \frac{M_{\max,1} \times 0.180/2}{I_{xI}} = \frac{9.7 \times 10^3 \times 0.180/2}{27.4 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 31.86 \text{ MPa (无盖板处)}$$

截面 II-II 上的最大应力

$$\sigma_{\max,II} = \frac{M_{\max,2} \times 0.212/2}{I_{xII}} = \frac{23.28 \times 10^3 \times 0.212/2}{126 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 19.59 \text{ MPa (有盖板处)}$$

两个截面上的最大应力均小于许用应力 $[\sigma] = 32 \text{ MPa}$, 所以安全。

5-11 铸铁轴承架尺寸如题 5-11 图(a)所示,受力 $P = 16 \text{ kN}$ 。材料的许用拉应力 $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$,许用压应力 $[\sigma_c] = 100 \text{ MPa}$ 。试校核截面 A-A 的强度,并画出其正应力分布图。

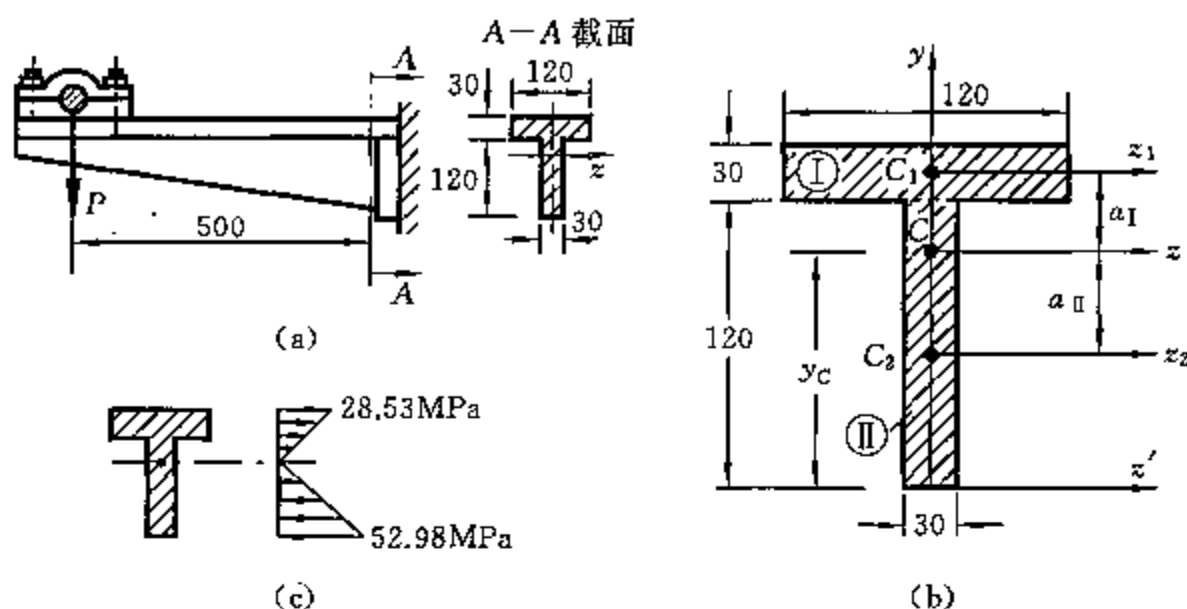
解 (1) 确定 T 形面积的形心和中性轴位置

将题 5-11 图(a)所示 T 形截面分解为小矩形 I 和 II,取与 T 形截面底边重合的 z' 轴为参考轴, c_1 、 c_2 分别为小矩形 I 和 II 的形心, z_1 和 z_2 轴分别为小矩形 I 和 II 的形心轴,点 C 和 z 轴分别为 T 形截面的形心和形心轴,它们的位置待定。

小矩形 I 和 II 的面积及其形心至 z' 轴的距离分别为

$$A_I = 0.12 \times 0.03 \text{ m}^2 = 3.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2, \quad A_{II} = 0.03 \times 0.12 \text{ m}^2 = 3.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$y_I = (0.12 + 0.015) \text{ m} = 0.135 \text{ m}, \quad y_{II} = \frac{0.12}{2} \text{ m} = 0.06 \text{ m}$$



题 5-11 图

T 形截面的形心 C 至 z' 轴的距离为

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_I y_{I1} + A_{II} y_{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{3.6 \times 10^{-3} \times 0.135 + 3.6 \times 10^{-3} \times 0.06}{2 \times 3.6 \times 10^{-3}} \text{ m} = 9.75 \times 10^{-2} \text{ m}$$

(2) 计算两小矩形面积对 T 形截面形心轴 z 的惯性矩

两小矩形面积的形心轴 z_1, z_2 至 T 形截面形心轴 z 的距离分别为

$$a_I = \overline{CC_1} = y_{I1} - y_c = (0.135 - 0.0975) \text{ m} = 0.0375 \text{ m}$$

$$a_{II} = \overline{CC_{II}} = y_c - y_{II} = (0.0975 - 0.06) \text{ m} = 0.0375 \text{ m}$$

利用平行轴定理, 计算两个小矩形面积对 T 形截面中性轴 z 的惯性矩

$$I_{zI} = I_{z_{I1}} + a_I^2 A_I = \left(\frac{0.12 \times 0.03^3}{12} + 0.0375^2 \times 3.6 \times 10^{-3} \right) \text{ m}^4 = 5.333 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{zII} = I_{z_{II2}} + a_{II}^2 A_{II} = \left(\frac{0.03 \times 0.12^3}{12} + 0.0375^2 \times 3.6 \times 10^{-3} \right) \text{ m}^4 = 9.383 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

T 形截面对中性轴 z 的惯性矩

$$I_z = I_{zI} + I_{zII} = (5.333 + 9.383) \times 10^{-6} \text{ m}^4 = 14.72 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

(3) 轴承架内的最大弯矩

最大弯矩产生在 A—A 截面

$$M_{\max} = 0.5P = 0.5 \times 16 \text{ kN} \cdot \text{m} = 8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(4) 强度校核

(a) 抗拉强度校核

最大拉应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} (a_I + 0.03/2)}{I_z} = \frac{8 \times 10^3 (0.0375 + 0.015)}{14.72 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 28.53 \text{ MPa} < [\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$$

(b) 抗压强度校核

最大压应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_c}{I_z} = \frac{8 \times 10^3 \times 9.75 \times 10^{-2}}{14.72 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 52.98 \text{ MPa} < [\sigma_c] = 100 \text{ MPa}$$

(5) 截面 A—A 上的正应力分布如题 5-11 图(c)所示。

5-12 铸铁 T 形截面梁如题 5-12 图(a)所示。设材料的许用拉应力与许用压应力之比为

$$\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3}, \text{ 试确定翼缘的合理宽度 } b.$$

解 (1) 确定 T 形截面的形心 C 和中性轴 z 的位置

将 T 形截面划分为两个小矩形面积 I 和 II, 取与 T 形截面底边重合的 z' 轴为参考轴, C_1, z_1 和 C_2, z_2 分别是小矩形 I 和 II 的形心和形心轴, 如题 5-12 图 (b) 所示。两个小矩形的面积及其形心至 z' 轴的距离为

$$A_I = 0.06b$$

$$A_{II} = 0.03(0.4 - 0.06) \text{ m}^2 = 0.0102 \text{ m}^2$$

$$y_I = \left(400 - \frac{60}{2}\right) \text{ mm} = 0.37 \text{ m}$$

$$y_{II} = \frac{1}{2}(400 - 60) \text{ mm} = 0.017 \text{ m}$$

T 形面积的形心至 z' 轴的距离为

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_I y_I + A_{II} y_{II}}{A_I + A_{II}} \\ &= \frac{0.06b \times 0.37 + 0.0102 \times 0.017}{0.06b + 0.0102} \text{ m} \\ &= \frac{0.0222b + 1.734 \times 10^{-3}}{0.06b + 0.0102} \text{ m} \end{aligned} \quad ①$$

即 T 形面积的形心轴与 z' 轴间的距离为 y_C 。

由题 5-12 图 (b) 所示的几何关系有

$$h_1 = 0.4 - y_C, \quad h_2 = y_C \quad ②$$

(2) 确定 T 形截面翼缘的合理宽度

(a) T 形截面梁受负弯矩作用时

若 T 形面积对其形心轴的惯性矩为 I_x , 由强度条件, 有

$$\sigma_{\text{tmax}} = \frac{M_{\text{max}} h_1}{I_x} \leq [\sigma_t], \quad \sigma_{\text{cmax}} = \frac{M_{\text{max}} h_2}{I_x} \leq [\sigma_c]$$

因 $[\sigma_t]/[\sigma_c] = \frac{1}{3}$, 所以由以上两式得

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3} \quad ③$$

将②式代入③式, 得

$$\begin{aligned} \frac{0.4 - y_C}{y_C} &= \frac{1}{3} \\ y_C &= 0.3 \end{aligned} \quad ④$$

将④式代入①式, 得

$$\frac{0.0222b + 1.734 \times 10^{-3}}{0.06b + 0.0102} = 0.3$$

简化上式, 得

$$4.2 \times 10^{-3} b = 1.33 \times 10^{-3}$$

所以

$$b = 0.316 \text{ m} = 316 \text{ mm}$$

(b) T 形截面梁受正弯矩作用时

若 T 形面积对其形心轴的惯性矩为 I_x , 由强度条件, 有

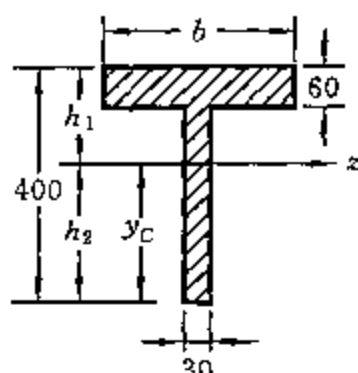
$$\sigma_{\text{tmax}} = \frac{M_{\text{max}} h_2}{I_x} \leq [\sigma_t], \quad \sigma_{\text{cmax}} = \frac{M_{\text{max}} h_1}{I_x} \leq [\sigma_c]$$

因 $\frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3}$, 所以由以上两式得

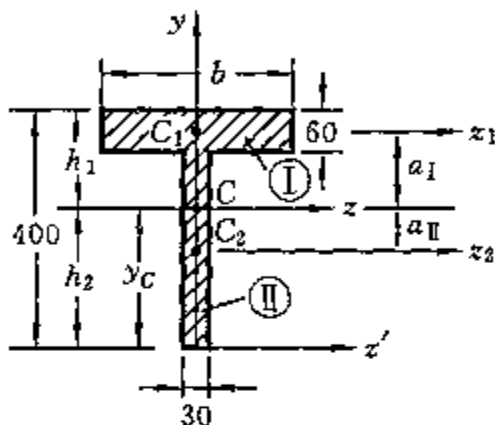
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{[\sigma_t]}{[\sigma_c]} = \frac{1}{3} \quad ⑤$$

将②式代入⑤式, 得

$$\begin{aligned} \frac{y_C}{0.4 - y_C} &= \frac{1}{3} \\ y_C &= 0.1 \end{aligned} \quad ⑥$$



(a)



(b)

题 5-12 图

将⑥式代入①式,得

$$\frac{0.0222b + 1.734 \times 10^{-3}}{0.06b + 0.0102} = 0.1$$

简化上式,得

$$0.0162b = 7.1 \times 10^{-4}$$

所以

$$b = -43.83 \text{ mm}$$

显然翼缘宽为负值不合理,应舍去,取 $b = 316 \text{ mm}$

由以上计算结果说明,因脆性材料(如铸铁)的 $[\sigma_c] > [\sigma_t]$,即抗压不抗拉,所以用脆性材料制作受弯曲零件如梁时,多作成 T 形截面,且使翼缘受拉,腹板受压。

5-13 试求题 5-1 中截面 I-I 上 A、B、C、D 各点处的切应力。

解 (1) 截面 I-I 上的剪力

$$Q = 15 \text{ kN}$$

(2) 截面 I-I 对中性轴 z 的惯性矩

截面尺寸如题 5-13 图所示,惯性矩

$$I_z = \frac{0.018 \times 0.030^3}{12} \text{ m}^4 = 4.05 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

(3) 计算切应力

应用矩形截面梁横截面上任一点处的切

应力公式

$$\tau = \frac{Q}{2I_z} \left(\frac{h^3}{4} - y^2 \right)$$

可计算出各指定点的应力为

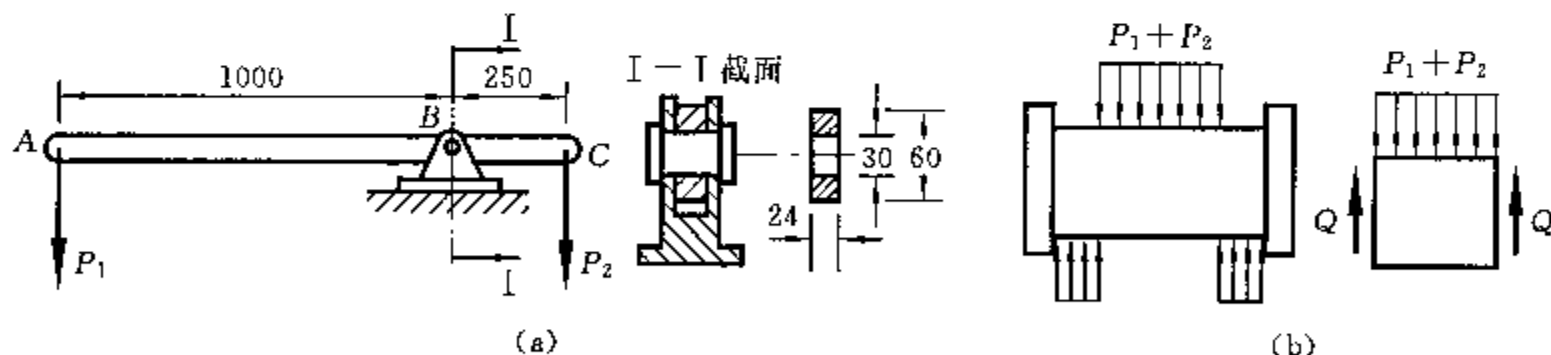
$$\tau_A = \frac{1.5 \times 10^3}{2 \times 4.05 \times 10^{-8}} \left[\frac{0.03^3}{4} - \left(\frac{0.03}{2} \right)^2 \right] \text{ Pa} = 0$$

$$\tau_B = \frac{1.5 \times 10^3}{2 \times 4.05 \times 10^{-8}} \left[\frac{0.03^3}{4} - \left(\frac{0.03}{2} \right)^2 \right] \text{ Pa} = 0$$

$$\tau_C = \frac{1.5 \times 10^3}{2 \times 4.05 \times 10^{-8}} \left(\frac{0.03^3}{4} - 0 \right) \text{ Pa} = 4.167 \text{ MPa}$$

$$\tau_D = \frac{1.5 \times 10^3}{2 \times 4.05 \times 10^{-8}} \left(\frac{0.03^3}{4} - 0.010^2 \right) \text{ Pa} = 2.315 \text{ MPa}$$

5-14 题 5-14 图(a)所示的制动装置的杠杆,在 B 处用直径 $d = 30 \text{ mm}$ 的销钉支承。若杠杆的许用应力 $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$,销钉的 $[\tau] = 100 \text{ MPa}$,试求许可载荷 P_1 和 P_2 。



题 5-14 图

解 (1) 截面 B 对中性轴的惯性矩

杠杆 AC 的截面 B 面积最小,是最薄弱处,其惯性矩为

$$I_z = \left(\frac{24 \times 60^3}{12} - \frac{24 \times 30^3}{12} \right) \text{ mm}^4 = 3.78 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

(2) 截面 B 的弯矩

由平衡条件

$$\sum M_B = 0, \quad 1000P_1 - 250P_2 = 0$$

得

$$P_2 = 4P_1$$

所以,截面 B 上的弯矩

$$M = 0.25P_2 = P_1$$

(3) 由梁的弯曲强度确定许用载荷

根据强度条件 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{P_1 \times 0.03}{3.78 \times 10^{-7}} \text{ Pa} \leq [\sigma]$

得

$$P_1 \leq \frac{3.78 \times 10^{-7} [\sigma]}{0.03} = \frac{3.78 \times 10^{-7} \times 140 \times 10^6}{0.03} \text{ N} = 1764 \text{ N}$$

$$P_2 = 4P_1 = 4 \times 1764 \text{ N} = 7056 \text{ N}$$

(4) 由销钉的剪切强度确定许用载荷

梁上作用的外力 P_1 和 P_2 由销钉承担,销钉受双剪切,其受力图如题 5-14 图(b)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad 2Q - (P_1 + P_2) = 0$$

得

$$Q = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

由剪切强度条件

$$\tau = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4(P_1 + P_2)}{2\pi \times 0.03^2} \leq [\tau]$$

得

$$P_1 + P_2 = \frac{\pi \times 0.03^2 [\tau]}{2} = \frac{\pi \times 0.03^2 \times 100 \times 10^6}{2} \text{ N} = 141.4 \text{ kN}$$

由 $P_2 = 4P_1$, 得 $5P_1 = 141.4 \text{ kN}$

$$P_1 = 28.28 \text{ kN}, \quad P_2 = 113.1 \text{ kN}$$

比较以上两种计算结果,选取许用载荷为

$$[P_1] = 1764 \text{ N}, \quad [P_2] = 7056 \text{ N}$$

5-15 由工字钢制成的外伸梁如题 5-15 图(a)所示。设材料的弯曲许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau] = 100 \text{ MPa}$, 试选择工字钢的型号。

解 (1) 剪力图与弯矩图

首先解除题 5-15 图(a)所示外伸梁的支座, 作受力图如题 5-15 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 200 = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 50 \times 0.15 - 100 \times 0.3 + 0.6R_B - 0.75 \times 50 = 0$$

得支座反力

$$R_A = R_B = 100 \text{ kN}$$

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作剪力图 and 弯矩图如题 5-15 图(c)所示。并确定最大弯矩和最大剪力分别为

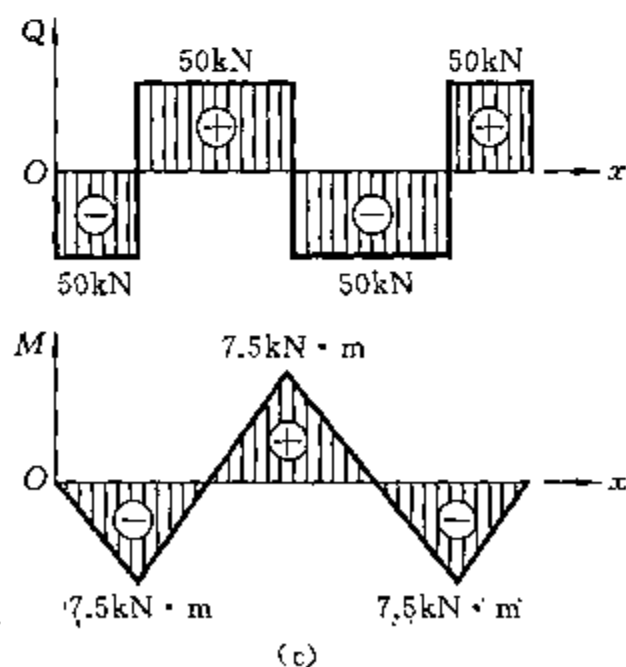
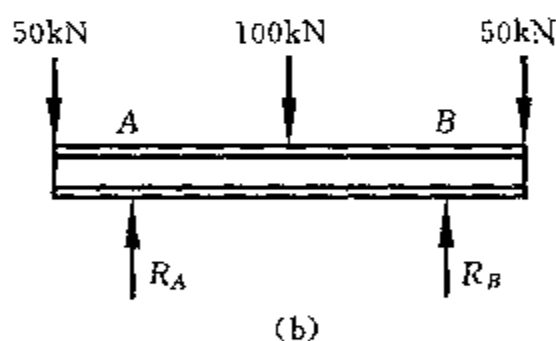
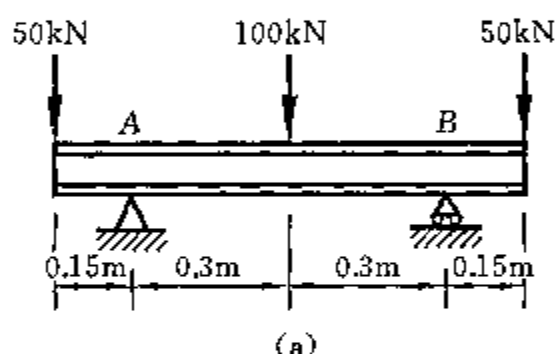
$$M_{\max} = 7.5 \text{ kN} \cdot \text{m}, \quad Q_{\max} = 50 \text{ kN}$$

(2) 由弯曲正应力强度条件选择工字梁型号

由强度条件 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$

得 $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{7.5 \times 10^3}{160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 46.88 \text{ cm}^3$

查文献 1 附录一型钢表, 10 号工字钢的 $W_x = 49.0 \text{ cm}^3$, 所以选用 10 号工字钢。



题 5-15 图

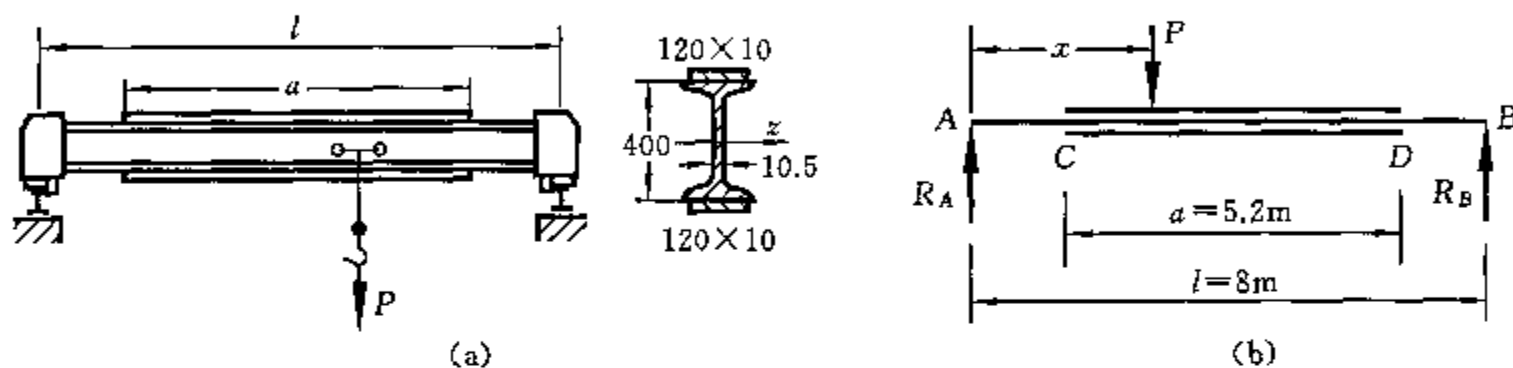
(2) 利用弯曲切应力强度条件进行校核

查文献 1 附录一型钢表, 10 号工字钢的高度 $h=10\text{ cm}$, 惯性矩 $I_x=245\text{ cm}^4$, 所以梁的最大弯曲切应力

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{2I_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{50 \times 10^3}{2 \times 245 \times 10^{-8}} \left(\frac{0.1^2}{4} - 0 \right) \text{ Pa} = 25.5 \text{ MPa} < [\tau] = 100 \text{ MPa}$$

所以, 选择 10 号工字钢。

5-16 一单梁吊车由 40a 号工字钢制成, 在梁中段的上下翼缘上各加焊了一块 $120 \times 10\text{ mm}^2$ 的盖板, 如题 5-16 图 (a) 所示。已知梁跨长 $l=8\text{ m}$, $a=5.2\text{ m}$, 材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=140\text{ MPa}$, 许用切应力 $[\tau]=80\text{ MPa}$ 。试按正应力强度条件确定梁的许可载荷 $[P]$, 并校核梁的切应力。梁的自重暂不考虑。



题 5-16 图

解 (1) 梁内最大弯矩

作吊车梁的受力简图如题 5-16 图 (b) 所示。由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad Px - lR_B = 0$$

可得支座反力

$$R_A = \frac{l-x}{l}P, \quad R_B = \frac{Px}{l}$$

梁任意横截面上的弯矩为 $M(x) = R_A x = \frac{l-x}{l}Px = \frac{P}{l}(lx - x^2)$

弯矩取最大值的条件是 $\frac{dM(x)}{dx} = 0, \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} < 0$

所以有 $l - 2x = 0, \quad x = \frac{1}{2}l$

即力 P 作用于梁跨度中点时, 梁内弯矩最大, 最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{P}{l}(lx - x^2) \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{4}Pl = \frac{P}{4} \times 8 = 2P$$

(2) 确定许用载荷

除了根据最大弯矩所在的跨中截面的强度决定许用载荷外, 还要考虑盖板边缘处的截面 D 的强度, 此处的弯矩虽然不是最大, 但该截面的惯性矩比有盖板的 CD 段梁横截面的惯性矩小, 所以也可能产生较大弯曲正应力。

(a) 跨度中点处横截面上的最大正应力

查文献 1 附录一型钢表, 可得 40a 号工字钢截面的有关几何参数

$$I_{x_1} = 21700\text{ cm}^4, \quad W_{x_1} = 1090\text{ cm}^3, \quad \frac{I_{x_1}}{S_{x_1}} = 34.1\text{ cm}$$

利用平行轴定理, 盖板横截面对梁中性轴 z 的惯性矩为

$$I_{x_2} = \left(\frac{120 \times 420^3}{12} - \frac{120 \times 400^3}{12} \right) \text{ mm}^4 = 1.0088 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

梁跨中横截面对中性轴 z 的惯性矩和抗弯截面系数分别为

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2} = (2.17 \times 10^{-4} + 1.0088 \times 10^{-4}) \text{ m}^4 = 3.179 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$W_z = \frac{I_z}{0.420/2} = \frac{3.179 \times 10^{-4}}{0.21} \text{ m}^3 = 15.14 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

由弯曲正应力强度条件 $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{2P}{15.14 \times 10^{-4}} \leq [\sigma]$

可得许用载荷 $[P] = \frac{15.14 \times 10^{-4} [\sigma]}{2} = \frac{15.14 \times 10^{-4} \times 140 \times 10^6}{2} \text{ N} = 106 \text{ kN}$

(b) 截面 D 上的最大弯曲正应力

截面 D 上的弯矩为 $M_D = \frac{l-a}{2} \times \frac{P}{2} = \frac{8-5.2}{2} \times \frac{P}{2} = 0.7P$

由弯曲正应力强度条件 $\sigma_{0,\max} = \frac{M_D}{W_{z_1}} = \frac{0.7P}{1090 \times 10^{-6}} = 6.422 \times 10^2 P \leq [\sigma]$

可得许可载荷

$$[P] = \frac{[\sigma]}{6.422 \times 10^2} = \frac{140 \times 10^6}{6.422 \times 10^2} \text{ N} = 218 \text{ kN}$$

比较以上两种计算结果,选取许用载荷 $[P] = 106 \text{ kN}$ 。

(3) 校核弯曲切应力

最大剪力发生在力 P 无限接近支座时,此时

$$Q_{\max} = [P] = 106 \text{ kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_z}{I_{z_1} d}$$

将 40a 号工字钢的 $\frac{I_{z_1}}{S_{z_1}} = 34.1 \text{ cm}$ 代入上式,得

$$\tau_{\max} = \frac{106 \times 10^3}{34.1 \times 10^{-2} \times 10.5 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 29.6 \text{ MPa} < [\tau] = 80 \text{ MPa}$$

当确定许用载荷为 $[P] = 106 \text{ kN}$ 时,最大弯曲切应力小于许用切应力。

5-17 某车间用一台 150 kN 的吊车和一台 200 kN 的吊车,借一辅助梁共同起吊一重量 $P = 300 \text{ kN}$ 的设备,如题 5-17 图(a)所示。

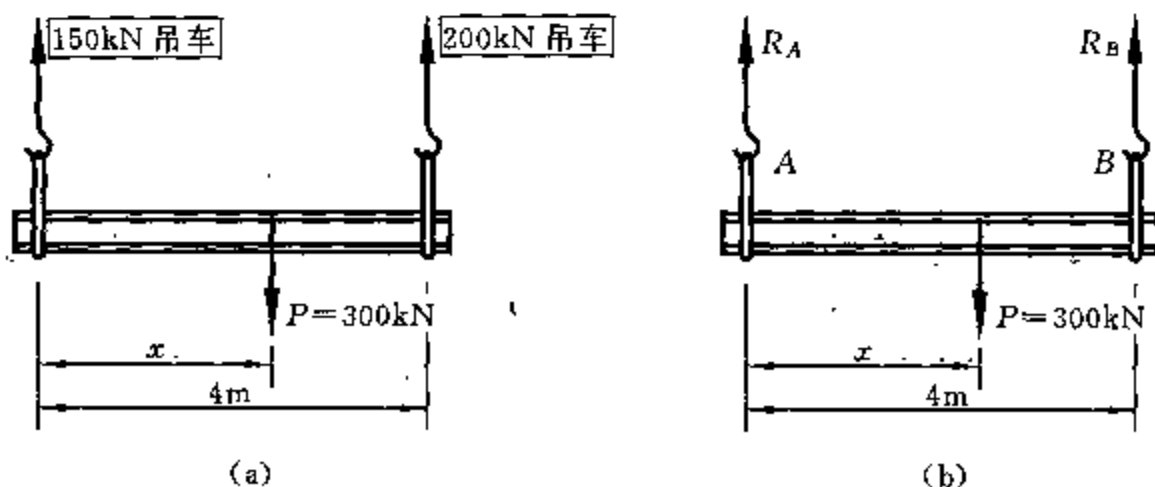
(1) 重量距 150 kN 吊车的距离 x 应在什么范围内,才能保证两台吊车都不致超载;

(2) 若用工字钢作辅助梁,试选择工字钢的型号。已知许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。

解 (1) 确定 x 值的范围

取辅助梁 AB 为研究对象,作受力图如题 5-17 图(b)所示。

(a) 使 R_A 不超过 150 kN 的 x 值



题 5-17 图

由平衡方程

$$\sum M_B = 0, \quad 4R_A - P(4-x) = 0$$

得

$$R_A = \frac{P(4-x)}{4}$$

使 R_A 不超过 150 kN 的条件是

$$R_A = \frac{P(4-x)}{4} \leq 150 \text{ kN}, \quad P(4-x) \leq 600 \text{ kN}$$

所以有

$$x \geq \frac{4P-600}{P} = \frac{4 \times 300 - 600}{300} \text{ m} = 2 \text{ m}$$

(b) 使 R_B 不超过 200 kN 的 x 值

由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad 4R_B - Px = 0$$

得

$$R_B = \frac{Px}{4}$$

保证 R_B 不超过 200 kN 的条件是

$$R_B = \frac{Px}{4} \leq 200 \text{ kN}$$

所以有

$$x \leq \frac{4 \times 200}{P} = \frac{800}{300} \text{ m} = 2.667 \text{ m}$$

由以上计算结果可知,欲使两台吊车都不超载,重量 P 距 150 kN 吊车的距离应为

$$2 \text{ m} \leq x \leq 2.667 \text{ m}$$

(2) 选择辅助梁的工字钢型号

(a) 当 $x=2 \text{ m}$ 时,辅助梁 AB 内的最大弯矩为

$$M_{\max} = 2R_A = 2R_B = 2 \times \frac{P}{2} = 2 \times \frac{300}{2} \text{ kN} \cdot \text{m} = 300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

由强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

可得

$$W_{z1} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{300 \times 10^3}{160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 1875 \text{ cm}^3$$

查文献 1 附录一型钢表,50a 号工字钢截面的 $W_z = 1860 \text{ cm}^3$,50b 号工字钢的 $W_z = 1940 \text{ cm}^3$,所以选用 50a 号工字钢。

(b) 当 $x=2.667 \text{ m}$ 时, $R_B = \frac{Px}{4} = \frac{300 \times 2.667}{4} \text{ kN} = 200 \text{ kN}$, $R_A = P - R_B = (300 - 100) \text{ kN} =$

100 kN,辅助梁内的最大弯矩

$$\begin{aligned} M_{\max} &= 2.667R_A = (4-2.667)R_B = 2.667 \times 100 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ &= 1.333 \times 200 \text{ kN} \cdot \text{m} = 266.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

由强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

可得

$$W_{z2} \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{266.7 \times 10^3}{160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 1667 \text{ cm}^3$$

因 $W_{z2} < W_{z1}$,所以应选 50a 号工字钢。

5-18 题 5-18 图(a)所示简支梁 AB ,若载荷 P 直接作用于梁的中点,梁的最大正应力超过了许可值的 30%。为避免这种过载现象,配置了副梁 CD ,试求此副梁所需的长度 a 。

解 分别作无辅助梁和有辅助梁时的弯矩图如题 5-18 图(b)所示。无辅助梁时,最大弯矩

$$M_1 = \frac{1}{4}Pl$$

有辅助梁时,最大弯矩

$$M_2 = \frac{1}{4}P(l-a)$$

因无辅助梁时,梁内最大正应力超过许用值 30%,所以有

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{W} = (1+30\%)[\sigma]$$

加辅助梁后,满足强度条件,应有

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{W} = \frac{P(l-a)}{4W} \leq [\sigma]$$

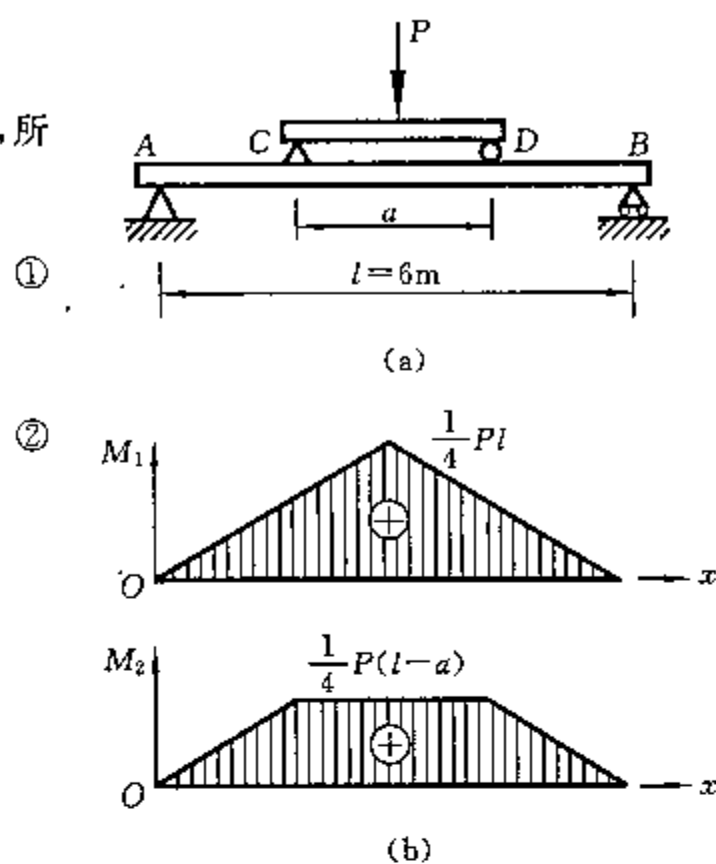
由①式得

$$\frac{Pl}{4W \times 1.3} = [\sigma]$$

代入②式,得 $\frac{P(l-a)}{4W} \leq \frac{Pl}{4W \times 1.3}$

$$a \geq \frac{0.3l}{1.3} = \frac{0.3}{1.3} \times 6 \text{ m} = 1.385 \text{ m}$$

所以,辅助梁的最小长度 $a = 1.385 \text{ m}$ 。



题 5-18 图

第六章 弯曲变形 静不定梁

知 识 要 点

1. 弯曲变形的概念

(1) 挠曲轴

变弯后的梁轴,称为挠曲轴。

(2) 对称弯曲时梁的变形

在小变形情况下,梁的任意两横截面绕各自的中性轴作相对转动,梁的轴线变为平面曲线,其变形程度用挠曲轴的曲率度量。

① 纯弯曲时,弯矩-曲率关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

② 横力弯曲时,弯矩-曲率关系

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI}$$

(3) 对称弯曲时梁的位移

① 挠度 横截面的形心在垂直于梁轴方向的线位移。

② 转角 横截面绕中性轴的角位移。

(4) 挠曲线近似微分方程

$$EIv'' = M(x)$$

(5) 受弯曲构件的刚度条件

$$|f|_{\max} \leq [f], \quad |\theta|_{\max} \leq [\theta]$$

2. 计算梁位移的积分法

将挠曲线近似微分方程积分两次,依次得到转角和挠度

$$EIv' = EI\theta = \int M(x)dx + C$$

$$EIv = \iint M(x)dx dx + Cx + D$$

式中, C 、 D 为积分常数,可用梁支承处或某些截面的已知位移条件(通常称为边界条件)确定。

当弯矩 $M(x)$ 不是 x 的光滑连续函数时,应用积分法,必须分段积分,积分常数将多于两个,除用边界条件外,还要用变形连续性条件确定所有的积分常数。

3. 计算梁位移的叠加法

(1) 叠加原理

各载荷同时作用下梁任一截面的挠度和转角,等于各个载荷单独作用时同一截面的挠度和转角的代数和。

(2) 叠加原理的限制

叠加原理要求梁的挠度和转角与弯矩成线性关系,因此要求:

① 弯矩 M 与曲率 $\frac{1}{\rho}$ 成线性关系,这就要求材料是线弹性的;

② 曲率 $\frac{1}{\rho}$ 与挠度成线性关系,这就要求梁是小变形。

4. 简单静不定梁

(1) 静不定梁的概念

梁的未知反力的数目多于可利用的独立平衡方程的数目,仅由静力平衡方程不能求解,这样的梁称为静不定梁。

(2) 求解静不定梁,必须利用变形相容性条件和力与变形间的物理关系,建立补充方程,将补充方程与静力平衡方程联立,才能求解全部未知反力。

(3) 求解简单静不定梁的变形比较法

① 多余约束 静不定梁中多于维持静力平衡所必须的约束。

② 基本静定梁 解除静不定梁的多余约束并代之以未知约束反力所得到的梁,称为基本静定梁。

② 解题步骤

a. 选择多余约束,确定基本静定梁,并以相应于多余约束的约束反力作为基本静定梁的未知外力;

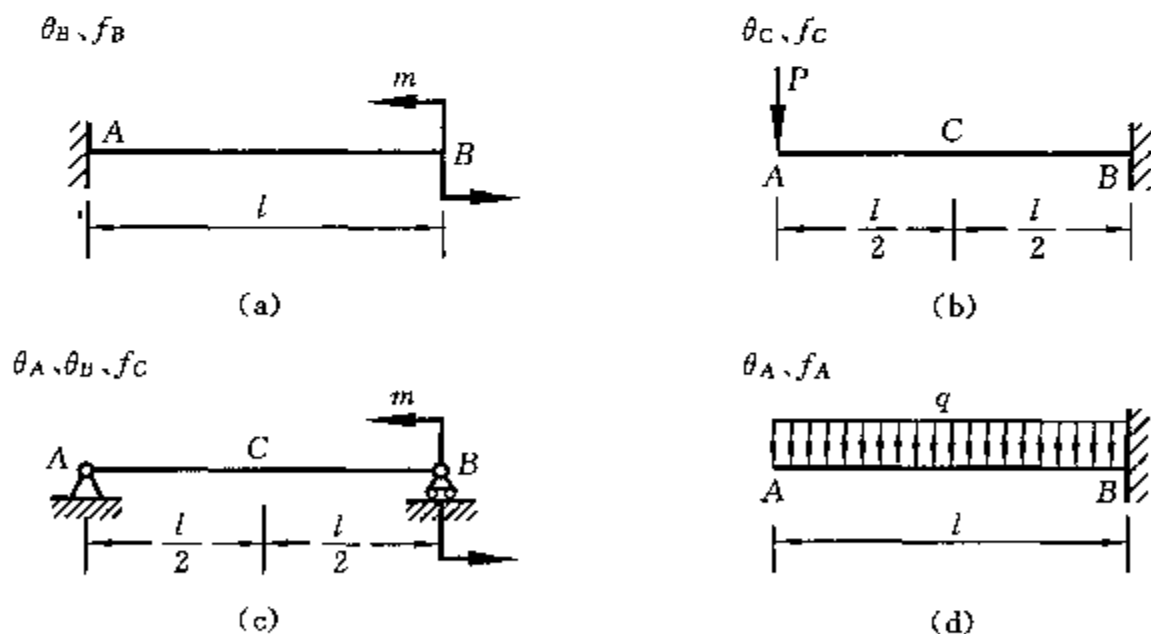
b. 比较基本静定梁与静不定梁在多余约束处的变形,应用叠加法,列出变形相容方程;

c. 查文献 1 表 6-1,写出力-变形间的物理关系,代入变形相容性方程,得到补充方程,由补充方程求解多余的约束反力;

d. 由静力平衡方程求解其余约束反力。

习题详解

6-1 用积分法求题 6-1 图所示各梁的转角方程、挠曲线方程以及指定的转角和挠度。已知抗弯刚度 EI 为常数。



题 6-1 图

解 (a) 如题 6-1 图(a)所示。

(1) 列弯矩方程

以 A 为原点,选取坐标如题 6-1 图(a₁)所示,则梁的弯矩方程为

$$M(x) = m$$

①

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分

将①式代入挠曲线近似微分方程

$$EIv'' = M(x)$$

得

$$EIv'' = m$$

对②式积分两次,得

$$EIv' = mx + C$$

$$EIv = \frac{1}{2}mx^2 + Cx + D$$

(3) 确定积分常数

悬臂梁的边界条件是固定端处的挠度和转角均为零,即

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \theta_A = 0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v_A = 0 \quad (6)$$

将⑤、⑥式分别代入③、④式,得

$$C=0, \quad D=0$$

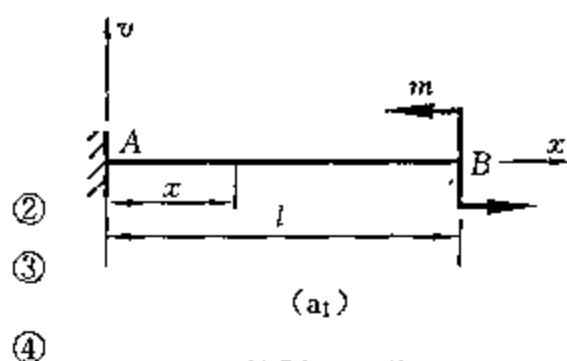
(4) 建立转角方程和挠度方程

将积分常数 C 、 D 分别代入③式和④式中,得

$$\theta = v' = \frac{m}{EI}x, \quad v = \frac{m}{2EI}x^2$$

(5) 确定指定截面的转角和挠度

$$\theta_B = \frac{m}{EI}x \Big|_{x=l} = \frac{ml}{EI}, \quad f_B = v = \frac{m}{2EI}x^2 \Big|_{x=l} = \frac{ml^2}{2EI}$$



续题 6-1 图

(b) 如题 6-1 图(b)所示。

(1) 列弯矩方程

以 A 为原点,选取坐标如题 6-1 图(b₁)所示,则梁的弯矩方程为

$$M(x) = -Px \quad (1)$$

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分

将①式代入挠曲线近似微分方程

$$EIv'' = M(x)$$

得

$$EIv'' = -Px \quad (2)$$

对②式积分两次,得

$$EIv' = -\frac{1}{2}Px^2 + C \quad (3)$$

$$EIv = -\frac{1}{6}Px^3 + Cx + D \quad (4)$$

(3) 确定积分常数

悬臂梁的边界条件是固定端的转角和挠度均为零,即

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } \theta_B = 0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } v_B = 0 \quad (6)$$

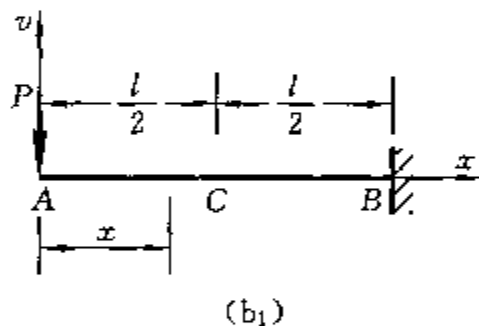
将⑤、⑥式分别代入③、④式中,得

$$-\frac{1}{2}Pl^2 + C = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{1}{6}Pl^3 + Cl + D = 0 \quad (8)$$

由⑦式得

$$C = \frac{1}{2}Pl^2 \quad (9)$$



续题 6-1 图

代入③式,得

$$D = -\frac{1}{3}Pl^3 \quad (10)$$

(4) 建立转角方程和挠度方程

将积分常数 C 、 D 分别代入③、④式中,得

$$v' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{2}Pl^2 \right), \quad v = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}Pl^2x - \frac{1}{3}Pl^3 \right)$$

(5) 确定指定截面的转角与挠度

$$\theta_c = v' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}Px^2 + \frac{1}{2}Pl^2 \right) \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}P \frac{l^2}{4} + \frac{1}{2}Pl^2 \right) = \frac{3Pl^2}{8EI}$$

$$f_c = v = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}Px^3 + \frac{1}{2}Pl^2x - \frac{1}{3}Pl^3 \right) \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}P \frac{l^3}{8} + \frac{1}{2}Pl^2 \frac{l}{2} - \frac{1}{3}Pl^3 \right) = -\frac{5Pl^3}{48EI}$$

(c) 如题 6-1 图(c)所示。

(1) 求支座反力

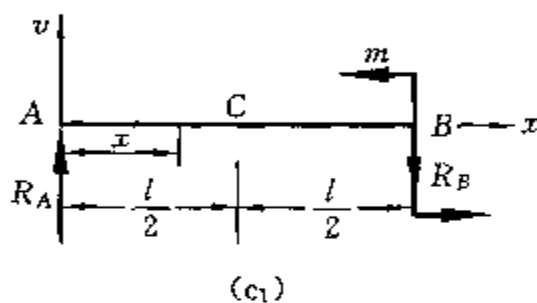
解除题 6-1 图(c)所示简支梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 6-1 图(c₁)所示。由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad m - lR_B = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A - R_B = 0$$

得支座反力

$$R_A = R_B = \frac{m}{l}$$



续题 6-1 图

(2) 列弯矩方程

以梁左端 A 为原点,选取如题 6-1 图(c₁)所示坐标系,则弯矩方程为

$$M(x) = \frac{m}{l}x \quad (1)$$

列挠曲线近似微分方程并积分 将①式代入挠曲线近似微分方程

$$EIv'' = M(x)$$

得

$$EIv'' = \frac{m}{l}x \quad (2)$$

将②式积分两次,得

$$EIv' = \frac{m}{2l}x^2 + C \quad (3)$$

$$EIv = \frac{m}{6l}x^3 + Cx + D \quad (4)$$

(3) 确定积分常数

简支梁的边界条件是在两支座处的挠度均为零,即

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v_A = 0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } v_B = 0 \quad (6)$$

将⑤、⑥式分别代入③、④式,得

$$D = 0, \quad C = -\frac{ml}{6}$$

(4) 建立转角方程和挠度方程

将积分常数 C 、 D 代入③、④式,得 $\theta = v' = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{2l}x^2 - \frac{ml}{6} \right), \quad v = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{6l}x^3 - \frac{ml}{6}x \right)$

(5) 确定指定截面的转角和挠度

$$\theta_A = v' = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{2l}x^2 - \frac{ml}{6} \right) \Big|_{x=0} = -\frac{ml}{6EI}$$

$$\theta_B = v' = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{2l} x^2 - \frac{ml}{6} \right) \Big|_{x=l} = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{2l} l^2 - \frac{ml}{6} \right) = \frac{ml}{3EI}$$

$$f_C = v = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{6l} x^3 - \frac{ml}{6} x \right) \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{1}{EI} \left(\frac{m}{6l} \frac{l^3}{8} - \frac{ml}{6} \frac{l}{2} \right) = -\frac{ml^2}{16EI}$$

(d) 如题 6-1 图(d)所示。

(1) 列弯矩方程

以梁左端 A 为原点, 选取如题 6-1 图(d₁)所示的坐标系, 则弯矩方程为

$$M(x) = -\frac{1}{2}qx^2$$

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分

将①式代入挠曲线近似微分方程

$$EIv'' = M(x)$$

得

$$EIv'' = -\frac{1}{2}qx^2 \quad (2)$$

将②式积分两次, 得

$$EIv' = -\frac{1}{6}qx^3 + C \quad (3)$$

$$EIv = -\frac{1}{24}qx^4 + Cx + D \quad (4)$$

(3) 确定积分常数

悬臂梁的边界条件是在固定端, 截面的转角和挠度均为零, 即

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } \theta_B = 0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } v_B = 0 \quad (6)$$

将⑤式代入③式, 得

$$C = \frac{1}{6}ql^3$$

将⑥式代入④式, 得

$$-\frac{1}{24}ql^4 + \frac{1}{6}ql^4 + D = 0, \quad D = -\frac{ql^4}{8}$$

(4) 建立转角方程和挠度方程

将积分常数 C、D 代入③、④式, 得

$$\theta = v' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{6}ql^3 \right) = \frac{1}{6EI}q(l^3 - x^3), \quad v = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}ql^3x - \frac{1}{8}ql^4 \right)$$

(5) 确定指定截面的转角和挠度

$$\theta_A = v' = \frac{q}{6EI}(l^3 - x^3) \Big|_{x=0} = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$f_A = v = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}ql^3x - \frac{1}{8}ql^4 \right) \Big|_{x=0} = -\frac{ql^4}{8EI}$$

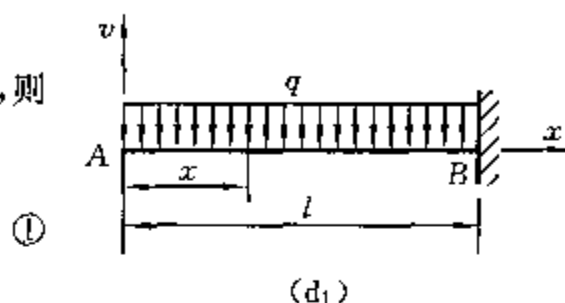
6-2 用积分法求题 6-2 图所示各梁的转角方程、挠曲线方程以及指定的转角和挠度。已知抗弯刚度 EI 为常数。

解 (a) 如题 6-2 图(a)所示。

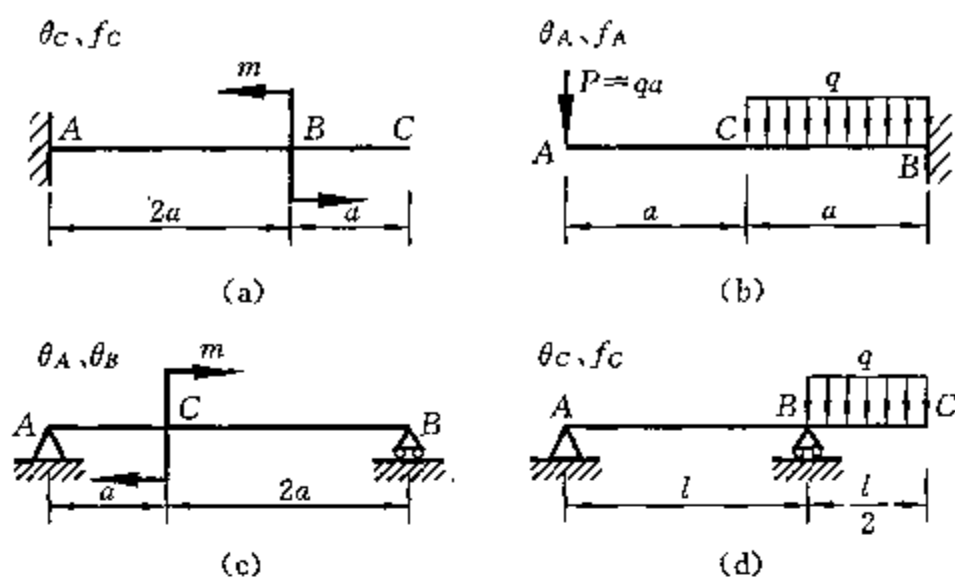
(1) 计算支座反力

解除题 6-2 图(a)所示悬臂梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 6-2 图(a₁)所示, 由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad m - M_A = 0$$



续题 6-1 图



题 6-2 图

$$\sum Y = 0, \quad R_A = 0$$

得支座反力 $R_A = 0, \quad M_A = m$

(2) 列弯矩方程

以梁左端 A 为原点, 选取题 6-2 图 (a₁) 所示坐标系, 则有

弯矩方程

$$AB \text{ 段 } M_1(x) = m \quad (0 < x < 2a)$$

$$BC \text{ 段 } M_2(x) = 0 \quad (2a < x \leq 3a)$$

(3) 列挠曲线近似微分方程并积分

$$AB \text{ 段 } (0 < x < 2a),$$

$$EIv_1'' = m$$

$$EIv_1' = mx + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{1}{2}mx^2 + C_1x + D_1 \quad (2)$$

$$BC \text{ 段 } (2a < x \leq 3a),$$

$$EIv_2'' = 0$$

$$EIv_2' = C_2 \quad (3)$$

$$EIv_2 = C_2x + D_2 \quad (4)$$

(4) 确定积分常数

悬臂梁的边界条件是

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } \theta_A = 0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v_A = 0 \quad (6)$$

连续性条件是

$$\text{在 } x=2a \text{ 处}$$

$$v_1' = v_2' \quad (7)$$

$$v_1 = v_2 \quad (8)$$

将⑤式代入①式, 得

$$C_1 = 0$$

将⑥式代入②式, 得

$$D_1 = 0$$

将⑦式代入①、③式, 得

$$C_2 = 2ma$$

将⑧式代入②、④式, 得

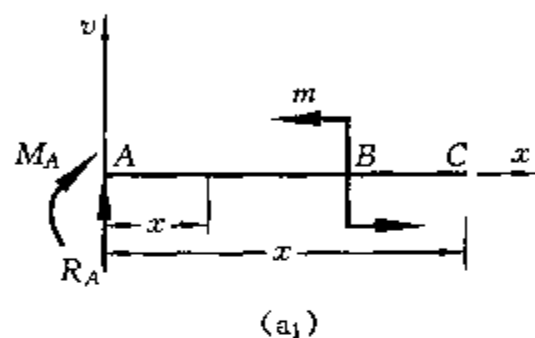
$$D_2 = -2ma^2$$

(5) 建立转角方程和挠度方程

将积分常数 C_1, D_1 和 C_2, D_2 分别代入①、②、③和④式中, 得

$$v_1' = \frac{m}{EI}x, \quad v_1 = \frac{m}{2EI}x^2, \quad v_2' = \frac{2ma}{EI}, \quad v_2 = \frac{2ma}{EI}(x-a)$$

(6) 确定指定截面的转角和挠度 $\theta_C = v_2' = \frac{2ma}{EI}$



续题 6-2 图

$$f_c = v_2 = \frac{2ma}{EI}(x-a) \Big|_{x=3a} = \frac{4ma^2}{EI}$$

(b) 如题 6-2 图(b)所示。

(1) 列弯矩方程

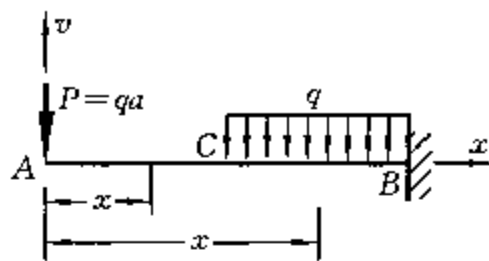
以梁左端 A 为原点, 选取如题 6-2 图(b₁)所示坐标系, 则弯矩方程为

AC 段 ($0 \leq x \leq a$)

$$M_1(x) = -Px = -qax$$

CB 段 ($a \leq x < 2a$)

$$M_2(x) = -qax - \frac{1}{2}q(x-a)^2 = -\frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qa^2$$



(b₁)

续题 6-2 图

(2) 列挠曲线近似微分方程并积分

AC 段

$$(0 \leq x < a)$$

$$EIv_1'' = -qax$$

$$EIv_1' = -\frac{1}{2}qax^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = -\frac{1}{6}qax^3 + C_1x + D_1 \quad (2)$$

CB 段

$$(a \leq x < 2a)$$

$$EIv_2'' = -\frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qa^2$$

$$EIv_2' = -\frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}qa^2x + C_2 \quad (3)$$

$$EIv_2 = -\frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{4}qa^2x^2 + C_2x + D_2 \quad (4)$$

(3) 确定积分常数

边界条件是

$$\text{在 } x=2a \text{ 处, } v_2' = 0, v_2 = 0$$

代入③、④式, 得

$$-\frac{4}{3}qa^3 - qa^3 + C_2 = 0$$

$$-\frac{2}{3}qa^4 - qa^4 + 2aC_2 + D_2 = 0$$

联立以上二方程求解, 得

$$C_2 = \frac{7}{3}qa^3, \quad D_2 = -3qa^4$$

代入③、④式, 得

$$EIv_2' = -\frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{2}qa^2x + \frac{7}{3}qa^3 \quad (5)$$

$$EIv_2 = -\frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{4}qa^2x^2 + \frac{7}{3}qa^3x - 3qa^4 \quad (6)$$

连续性条件是

$$\text{在 } x=a \text{ 处, } v_1' = v_2' \quad (7)$$

$$\text{在 } x=a \text{ 处, } v_1 = v_2 \quad (8)$$

$$\text{将⑦式代入①、⑤式, 得 } -\frac{1}{2}qa(a^2) + C_1 = -\frac{1}{6}qa^3 - \frac{1}{2}qa^3 + \frac{7}{3}qa^3$$

由上式得

$$C_1 = \frac{13}{6}qa^3 \quad (9)$$

$$\text{将⑧、⑨式代入②、⑥式, 得 } -\frac{1}{6}qa^4 + \frac{13}{6}qa^4 + D_1 = -\frac{1}{24}qa^4 - \frac{1}{4}qa^4 + \frac{7}{3}qa^4 - 3qa^4$$

由上式得

$$D_1 = -\frac{71}{24}qa^4$$

将 C_1, D_1 代入①、②式, 得

$$EIv_1' = -\frac{1}{2}qax^2 + \frac{13}{6}qa^3$$

$$EIv_1 = -\frac{1}{6}qax^3 + \frac{13}{6}qa^3x - \frac{71}{24}qa^4$$

(4) 确定指定截面的转角和挠度

$$\theta_A = v_1' = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}qax^2 + \frac{13}{6}qa^3 \right) \Big|_{x=0} = \frac{13}{6EI}qa^3$$

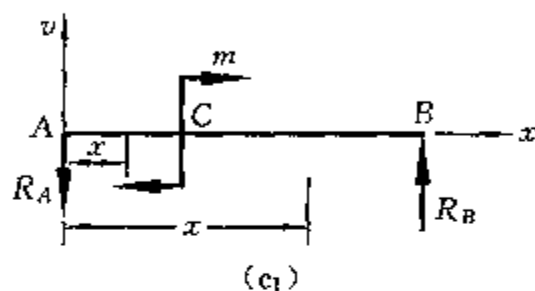
$$f_A = v_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}qax^3 + \frac{13}{6}qa^3x - \frac{71}{24}qa^4 \right) \Big|_{x=0} = -\frac{71}{24EI}qa^4$$

(c) 如题 6-2 图(c)所示。

(1) 确定支座反力

解除题 6-2 图(c)所示简支梁的支座, 代之以支座反力如题 6-2 图(c₁)所示。因外力是一个力偶矩为 m 的力偶, 所以与之平衡的必然也是一个力偶, 这就决定了支座反力

$$R_A = R_B = \frac{m}{3a}$$



续题 6-2 图

(2) 列弯矩方程

$$\text{AC 段} \quad M_1(x) = -\frac{m}{3a}x \quad (0 \leq x < a)$$

$$\text{CB 段} \quad M_2(x) = -\frac{m}{3a}x + m \quad (a < x \leq 3a)$$

(3) 列挠曲线近似微分方程并积分

$$\text{AC 段} \quad (0 \leq x < a)$$

$$EIv_1'' = -\frac{m}{3a}x$$

$$EIv_1' = -\frac{m}{6a}x^2 + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = -\frac{m}{18a}x^3 + C_1x + D_1 \quad (2)$$

$$\text{CB 段} \quad (a < x \leq 3a)$$

$$EIv_2'' = -\frac{m}{3a}x + m$$

$$EIv_2' = -\frac{m}{6a}x^2 + mx + C_2 \quad (3)$$

$$EIv_2 = -\frac{m}{18a}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 + C_2x + D_2 \quad (4)$$

(4) 确定积分常数

$$\text{边界条件} \quad \text{在 } x=0 \text{ 处, } v_1=0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=3a \text{ 处, } v_2=0 \quad (6)$$

$$\text{连续性条件} \quad \text{在 } x=a \text{ 处, } v_1'=v_2' \quad (7)$$

$$\text{在 } x=a \text{ 处, } v_1=v_2 \quad (8)$$

将⑤式代入②式中, 得

$$D_1 = 0$$

将⑥式代入④式, 得

$$-\frac{m}{18a}(3a)^3 + \frac{1}{2}m(3a)^2 + C_2(3a) + D_2 = 0 \quad (9)$$

将⑦式代入①、③式,得 $-\frac{m}{6a}a^2 + C_1 = -\frac{m}{6a}a^2 + ma + C_2$ ⑩

将⑧式和 $D_1=0$ 代入②、④式,得 $-\frac{m}{18a}a^3 + C_1a = -\frac{m}{18a} + \frac{1}{2}ma^2 + aC_2 + D_2$ ⑪

联立⑨、⑩和⑪式求解,得 $C_1 = \frac{1}{6}ma$, $C_2 = -\frac{7}{6}ma$, $D_2 = \frac{1}{2}ma^2$

(5) 建立转角方程和挠度方程

$$EIv'_1 = -\frac{m}{6a}x^2 + \frac{1}{6}ma, \quad EIv_1 = -\frac{m}{18a}x^3 + \frac{1}{6}max$$

$$EIv'_2 = -\frac{m}{6a}x^2 + mx - \frac{7}{6}ma, \quad EIv_2 = -\frac{m}{18a}x^3 + \frac{1}{2}mx^2 - \frac{7}{6}max + \frac{1}{2}ma^2$$

(6) 确定指定截面的转角

$$\theta_A = v'_1 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{m}{6a}x^2 + \frac{1}{6}ma \right) \Big|_{x=0} = \frac{ma}{6EI}$$

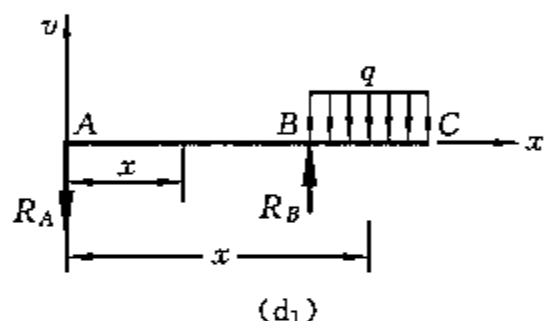
$$\theta_B = v'_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{m}{6a}x^2 + mx - \frac{7}{6}ma \right) \Big|_{x=3a} = \frac{ma}{3EI}$$

(d) 如题 6-2 图(d)所示。

(1) 计算支座反力 解除题 6-2 图(d)所示外伸梁的支座,作受力图如题 6-2 图(d₁)所示。由平衡方程

$$\sum M_B = 0, \quad lR_A - \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad -R_A - \frac{1}{2}ql + R_B = 0$$



可得支座反力 $R_A = \frac{1}{8}ql$, $R_B = \frac{5}{8}ql$

续题 6-2 图

(2) 列弯矩方程

AB 段 $M_1(x) = -\frac{1}{8}qlx \quad (0 \leq x \leq l)$

BC 段 $M_2(x) = -\frac{1}{2}q\left(\frac{3}{2}l - x\right)^2 = -\frac{9}{8}ql^2 - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{3}{2}qlx \quad (l \leq x \leq \frac{3}{2}l)$

(3) 列挠曲线近似微分方程并积分

AB 段 $(0 \leq x \leq l)$, $EIv''_1 = -\frac{1}{8}qlx$

$$EIv'_1 = -\frac{1}{16}qlx^2 + C_1 \quad ①$$

$$EIv_1 = -\frac{1}{48}qlx^3 + C_1x + D_1 \quad ②$$

BC 段 $(l \leq x \leq \frac{3}{2}l)$, $EIv''_2 = -\frac{9}{8}ql^2 - \frac{1}{2}qx^2 + \frac{3}{2}qlx$

$$EIv'_2 = -\frac{9}{8}ql^2x - \frac{1}{6}qx^3 + \frac{3}{4}qlx^2 + C_2 \quad ③$$

$$EIv_2 = -\frac{9}{16}ql^2x^2 - \frac{1}{24}qx^4 + \frac{3}{12}qlx^3 + C_2x + D_2 \quad ④$$

(4) 确定积分常数

边界条件

在 $x=0$ 处, $v_1=0$ ⑤

在 $x=l$ 处, $v_1=0$ ⑥

在 $x=l$ 处, $v_2=0$ ⑦

连续性条件

$$\text{在 } x=l \text{ 处, } v'_1 = v'_2 \quad (8)$$

将⑤式代入②式,得

$$D_1 = 0$$

将⑥式代入②式,得

$$-\frac{1}{48}ql^4 + C_1l + D_1 = 0 \quad (9)$$

将⑦式代入④式,得

$$-\frac{17}{48}ql^4 + C_2l + D_2 = 0 \quad (10)$$

将⑧式代入①、③式,得

$$-\frac{1}{16}ql^3 + C_1 = -\frac{9}{8}ql^3 - \frac{1}{6}ql^3 + \frac{3}{4}ql^3 + C_2 \quad (11)$$

联立⑨、⑩和⑪式求解,得

$$C_1 = \frac{1}{48}ql^3, \quad C_2 = \frac{1}{2}ql^3, \quad D_2 = -\frac{7}{48}ql^4$$

(5) 建立转角方程和挠度方程

因只要求 θ_c 和 f_c , 所以只列 BC 段转角方程和挠度方程

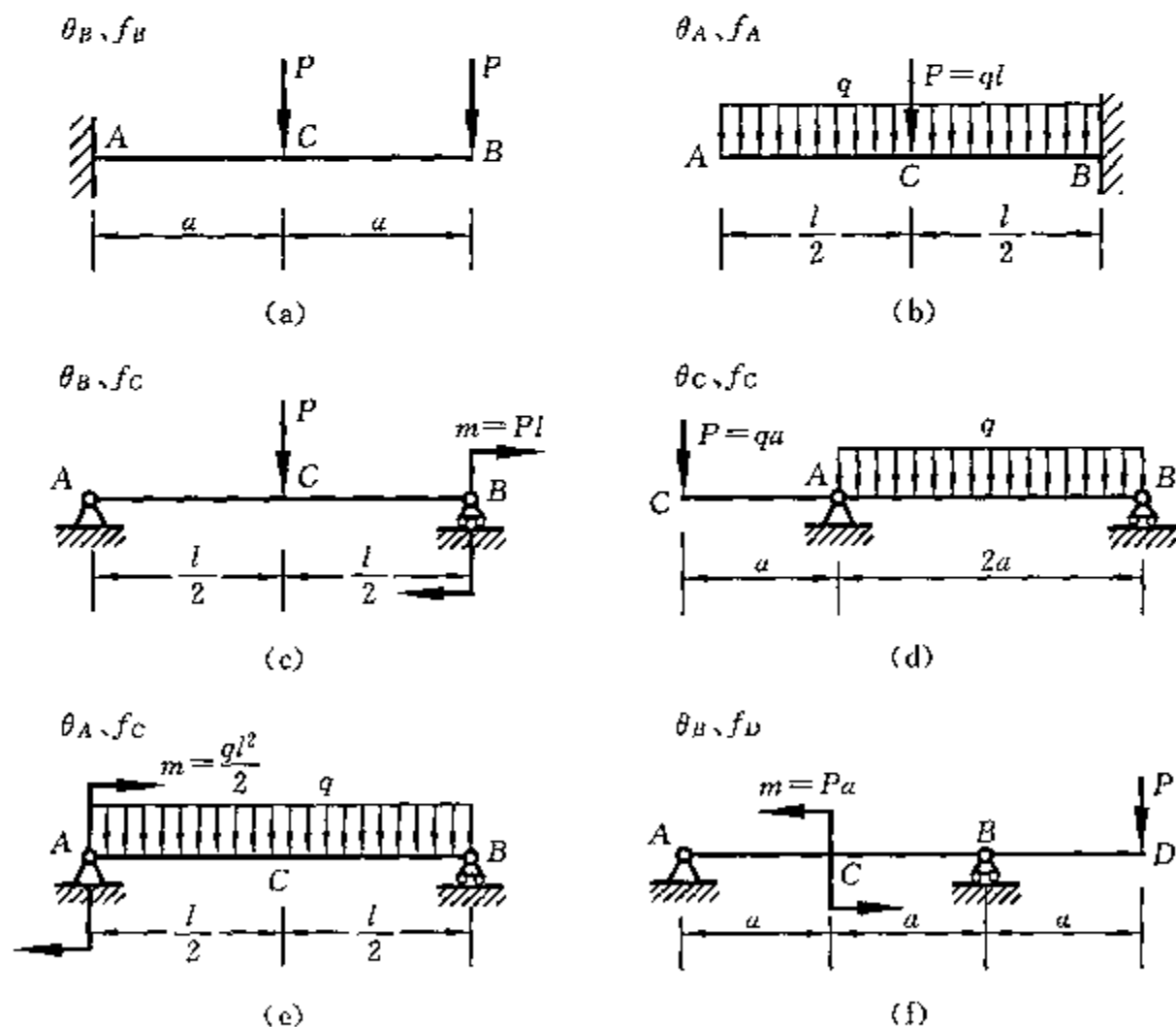
$$v'_2 = -\frac{9}{8}ql^2x - \frac{1}{6}qx^3 + \frac{3}{4}qlx^2 + \frac{1}{2}ql^3$$

$$v_2 = -\frac{9}{16}ql^2x^2 - \frac{1}{24}qx^4 + \frac{3}{12}qlx^3 + \frac{1}{2}ql^4 - \frac{7}{48}ql^4$$

(6) 确定指定截面的转角和挠度

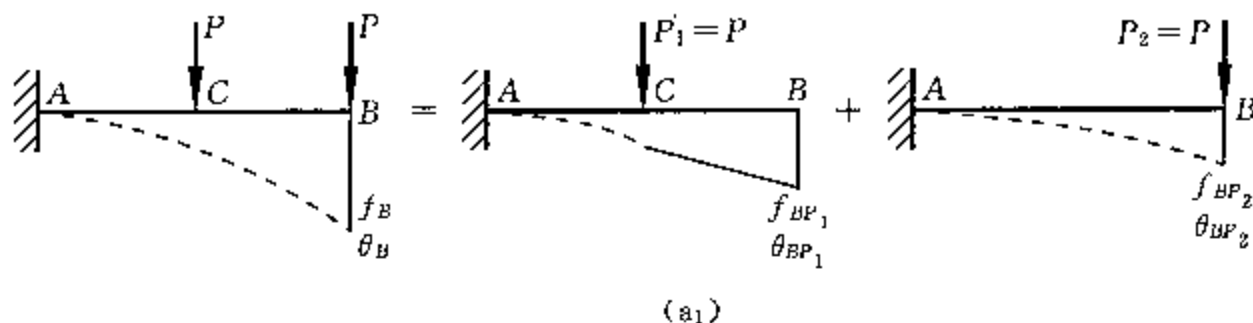
$$\theta_c = v'_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{9}{8}ql^2x - \frac{1}{6}qx^3 + \frac{3}{4}qlx^2 + \frac{1}{2}ql^3 \right) \Big|_{x=\frac{3}{2}l} = -\frac{ql^3}{16EI}$$

$$f_c = v_2 = \frac{1}{EI} \left(-\frac{9}{16}ql^2x^2 - \frac{1}{24}qx^4 + \frac{3}{12}qlx^3 + \frac{1}{2}ql^4 - \frac{7}{48}ql^4 \right) \Big|_{x=\frac{3}{2}l} = -\frac{11}{384EI}ql^4$$

6-3 用叠加法求题 6-3 图示各梁中指定截面的挠度和转角。已知梁的抗弯刚度 EI 为常数。

题 6-3 图

解 (a) 题 6-3 图(a)所示悬臂梁, 截面 B 的转角 θ_B 和挠度 f_B , 等于该梁单独在 $P_1 = P$ 和 $P_2 = P$ 作用下, 截面 B 转角的代数和及截面 B 挠度的代数和, 如题 6-3 图(a₁)所示, 即



续题 6-3 图

$$f_B = f_{BP_1} + f_{BP_2}, \quad \theta_B = \theta_{BP_1} + \theta_{BP_2}$$

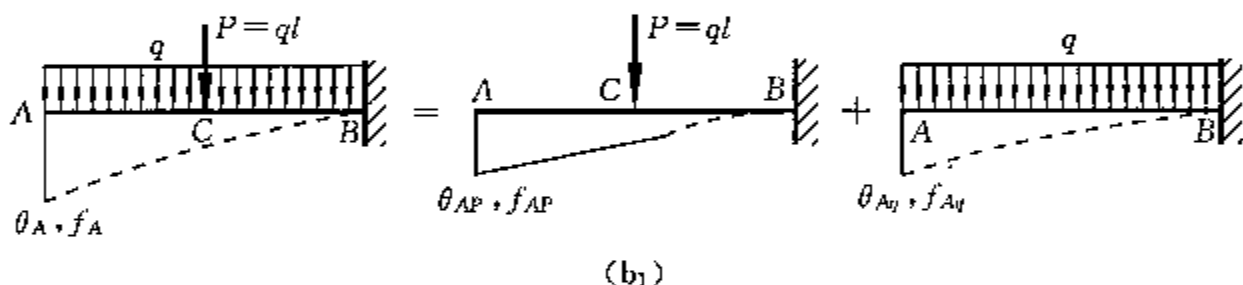
由查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,有

$$\begin{aligned} \theta_{BP_1} &= -\frac{P_1 a^2}{2EI} = -\frac{Pa^2}{2EI}, & f_{BP_1} &= \theta_{BP_1} a + \left(-\frac{P_1 a^3}{3EI}\right) = -\frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = -\frac{5Pa^3}{6EI} \\ \theta_{BP_2} &= -\frac{P_2 (2a)^2}{2EI} = -\frac{2Pa^2}{EI}, & f_{BP_2} &= -\frac{P_2 (2a)^3}{3EI} = -\frac{8Pa^3}{3EI} \end{aligned}$$

所以,截面 B 的转角和挠度分别为

$$\theta_B = \theta_{BP_1} + \theta_{BP_2} = -\frac{Pa^2}{2EI} - \frac{2Pa^2}{EI} = -\frac{5Pa^2}{2EI}, \quad f_B = f_{BP_1} + f_{BP_2} = -\frac{5Pa^3}{6EI} - \frac{8Pa^3}{3EI} = -\frac{7Pa^3}{2EI}$$

(b) 题 6-3 图(b)所示悬臂梁,截面 A 的转角 θ_A 和挠度 f_A ,等于该梁分别在集中力 $P=ql$ 和均布载荷 q 单独作用截面 A 转角的代数和及截面 A 挠度的代数和,如题 6-3 图(b₁)所示,即



续题 6-3 图

$$\theta_A = \theta_{AP} + \theta_{Aq}, \quad f_A = f_{AP} + f_{Aq}$$

由查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,有

$$\begin{aligned} \theta_{AP} &= \frac{P(l/2)^2}{2EI} = \frac{Pl^2}{8EI} = \frac{ql^2}{8EI} \\ f_{AP} &= -\frac{P(l/2)^3}{3EI} - \theta_{AP} \frac{l}{2} = -\frac{Pl^3}{24EI} - \frac{ql^2}{8EI} \times \frac{l}{2} = -\frac{ql^4}{24EI} - \frac{ql^4}{16EI} = -\frac{5ql^4}{48EI} \\ \theta_{Aq} &= \frac{ql^3}{6EI}, & f_{Aq} &= -\frac{ql^4}{8EI} \end{aligned}$$

所以,截面 A 的转角和挠度分别为

$$\theta_A = \theta_{AP} + \theta_{Aq} = \frac{ql^2}{8EI} + \frac{ql^3}{6EI} = \frac{7ql^3}{24EI}, \quad f_A = f_{AP} + f_{Aq} = -\frac{5ql^4}{48EI} - \frac{ql^4}{8EI} = -\frac{11ql^4}{48EI}$$

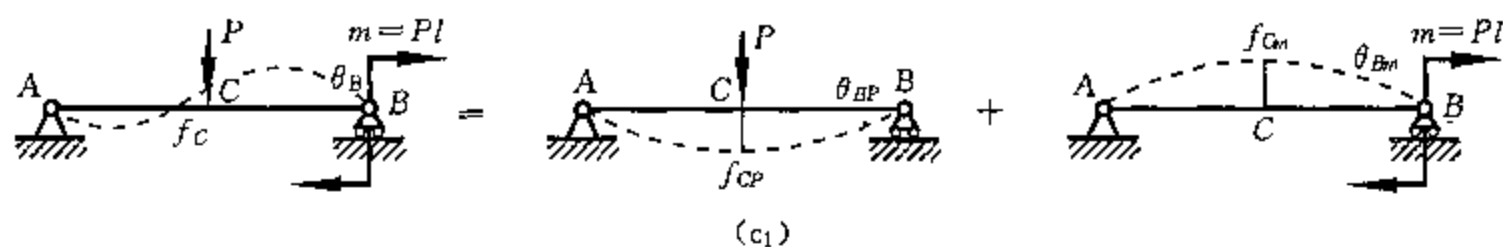
(c) 题 6-3 图(c)所示简支梁,截面 B 的转角和截面 C 的挠度,等于力 P 和力偶 m 单独作用时截面 B 转角之代数和及截面 C 挠度之代数和,即

$$\theta_B = \theta_{BP} + \theta_{Bm}, \quad f_C = f_{CP} + f_{Cm}$$

如题 6-3 图(c₁)所示。

由查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,可得

$$\theta_{BP} = \frac{Pl^2}{16EI}, \quad \theta_{Bm} = -\frac{ml}{3EI} = -\frac{Pl^2}{3EI}, \quad f_{CP} = -\frac{Pl^3}{48EI}, \quad f_{Cm} = \frac{3Pl^3}{48EI}$$



续题 6-3 图

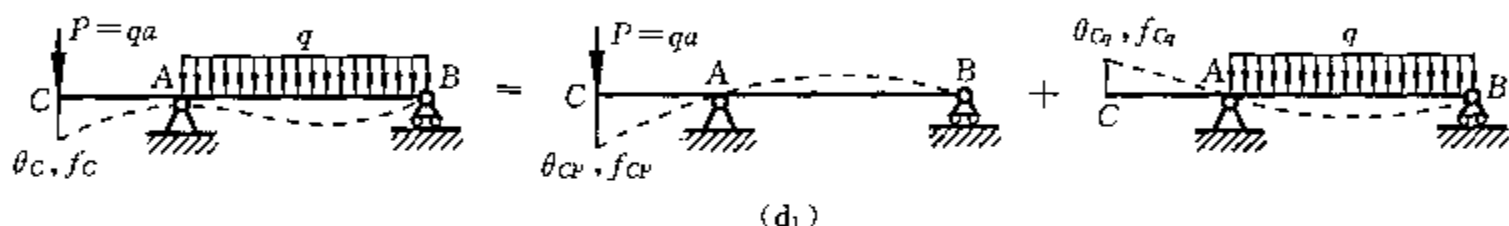
所以,截面 B 的转角和截面 C 的挠度分别为

$$\theta_B = \theta_{BP} + \theta_{Bm} = \frac{Pl^2}{16EI} + \left(-\frac{Pl^2}{3EI}\right) = -\frac{13Pl^2}{48EI}, \quad f_c = f_{CP} + f_{Cm} = -\frac{Pl^3}{48EI} + \frac{3Pl^3}{48EI} = \frac{Pl^3}{24EI}$$

(d) 题 6-3 图(d)所示外伸梁,截面 C 的转角 θ_c 和挠度 f_c , 等于该梁分别在力 P 和均布载荷单独作用时,截面 C 转角之代数和及挠度之代数和,即

$$\theta_c = \theta_{CP} + \theta_{Cq}, \quad f_c = f_{CP} + f_{Cq}$$

如题 6-3 图(d₁)所示。



续题 6-3 图

查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,可得

$$\theta_{CP} = \frac{Pa}{6EI}(4a+3a) = \frac{7Pa^2}{6EI} = \frac{7qa^3}{6EI}, \quad \theta_{Cq} = -\frac{(2a)^3q}{24EI} = -\frac{qa^3}{3EI}$$

$$f_{CP} = -\frac{Pa^2}{3EI}(2a+a) = -\frac{3Pa^3}{3EI} = -\frac{qa^4}{EI}, \quad f_{Cq} = |\theta_{Cq}|a = \frac{qa^4}{3EI}$$

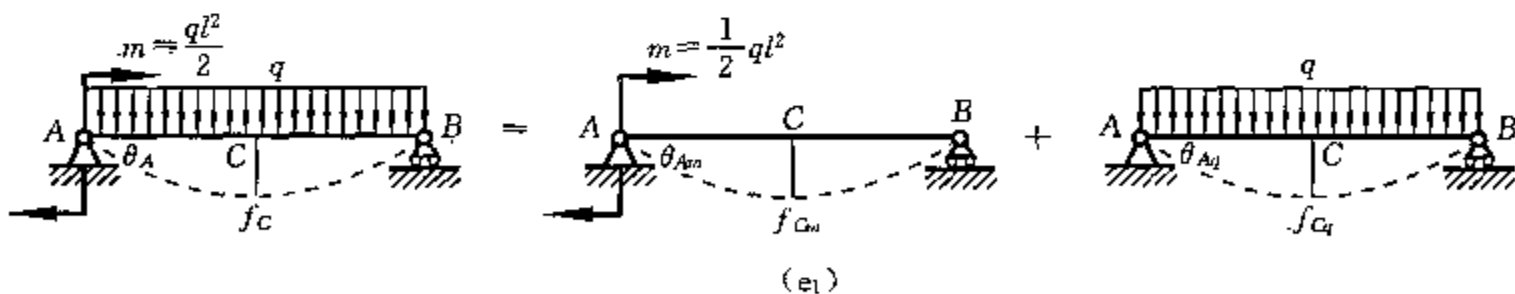
所以,截面 C 的转角和挠度分别为

$$\theta_c = \theta_{CP} + \theta_{Cq} = \frac{7qa^3}{6EI} - \frac{qa^3}{3EI} = \frac{5qa^3}{6EI}, \quad f_c = f_{CP} + f_{Cq} = -\frac{qa^4}{EI} + \frac{qa^4}{3EI} = -\frac{2qa^4}{3EI}$$

(e) 题 6-3 图(e)所示简支梁,截面 A 的转角 θ_A 和截面 C 的挠度 f_c , 等于该梁在力偶矩 m 和均布载荷 q 单独作用下,截面 A 转角的代数和及截面 C 挠度的代数和,即

$$\theta_A = \theta_{Am} + \theta_{Aq}, \quad f_c = f_{Cm} + f_{Cq}$$

如题 6-3 图(e₁)所示。



续题 6-3 图

查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,可得

$$\theta_{Am} = -\frac{ml}{3EI} = -\frac{ql^3}{6EI}, \quad \theta_{Aq} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

$$f_{Cm} = -\frac{mx}{6EI}(l^2 - x^2) \Big|_{x=\frac{l}{2}} = -\frac{ql^4}{32EI}, \quad f_{Cq} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

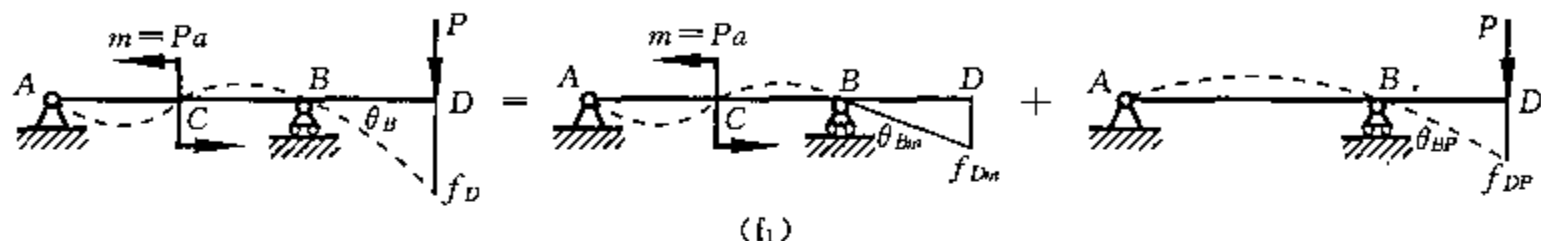
所以,截面 A 的转角和截面 C 的挠度分别为

$$\theta_A = \theta_{Am} + \theta_{Ap} = -\frac{ql^3}{6EI} - \frac{ql^3}{24EI} = -\frac{5ql^3}{24EI}, \quad f_C = f_{Cm} + f_{Cp} = -\frac{ql^4}{32EI} - \frac{5ql^4}{384EI} = -\frac{17ql^4}{384EI}$$

(f) 题 6-3 图(f)所示外伸梁,其截面 B 的转角 θ_B 和截面 D 的挠度 f_D ,分别等于该梁在力偶矩 m 和力 P 单独作用下截面 B 转角的代数和及截面 D 挠度的代数和,即

$$\theta_B = \theta_{Bm} + \theta_{BP}, \quad f_D = f_{Dm} + f_{DP}$$

如题 6-3 图(f₁)所示。



续题 6-3 图

查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,可得

$$\theta_{Bm} = -\frac{m}{6(2a)EI}[(2a)^2 - 3a^2] = -\frac{Pa}{12aEI}(4a^2 - 3a^2) = -\frac{Pa^2}{12EI}$$

$$\theta_{BP} = -\frac{Pa(2a)}{3EI} = -\frac{2Pa^2}{3EI}$$

$$f_{Dm} = \theta_{Bm}a = -\frac{Pa^3}{12EI}, \quad f_{DP} = -\frac{Pa^2}{3EI}(2a + a) = -\frac{Pa^3}{EI}$$

所以,截面 B 的转角和截面 D 的挠度分别为

$$\theta_B = \theta_{Bm} + \theta_{BP} = -\frac{Pa^2}{12EI} - \frac{2Pa^2}{3EI} = -\frac{3Pa^2}{4EI}, \quad f_D = f_{Dm} + f_{DP} = -\frac{Pa^3}{12EI} - \frac{Pa^3}{EI} = -\frac{13Pa^3}{12EI}$$

6-4 阶梯形悬臂梁如题 6-4 图(a)所示,AC 段的惯性矩为 CB 段的两倍。用积分法求 B 端的转角及挠度。

解 (1) 计算支座反力

解除题 6-4 图(a)所示悬臂梁的支座,代之以支座反力,作受力图如题 6-4 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad M_A - Pl = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A - P = 0$$

可得支座反力 $R_A = P, \quad M_A = Pl$

(2) 列弯矩方程

以梁左端点 A 为坐标原点,选取题 6-4 图(b)所示坐标系,则弯矩方程为

AC 段 $(0 < x \leq l/2)$

$$M_1(x) = R_A x - M_A = Px - Pl$$

CB 段 $(l/2 \leq x \leq l)$

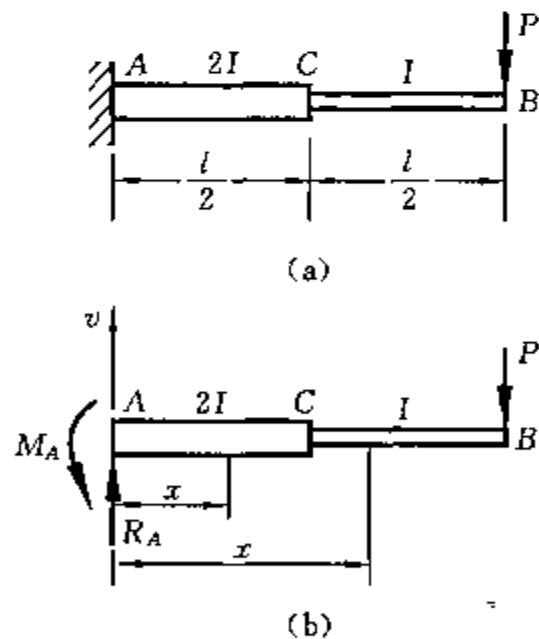
$$M_2(x) = R_A x - M_A = Px - Pl$$

(3) 列挠曲线近似微分方程并积分

$$\text{AC 段} \quad 2EIv_1'' = Px - Pl \quad \left(0 < x \leq \frac{l}{2}\right)$$

或

$$EIv_1'' = \frac{1}{2}Px - \frac{1}{2}Pl$$



题 6-4 图

$$EIv_1' = \frac{1}{4}Px^2 - \frac{1}{2}Plx + C_1 \quad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{1}{12}Px^3 - \frac{1}{4}Plx^2 + C_1x + D_1 \quad (2)$$

CB 段

$$EIv_2'' = Px - Pl \quad \left(\frac{l}{2} \leq x \leq l\right)$$

$$EIv_2' = \frac{1}{2}Px^2 - Plx + C_2 \quad (3)$$

$$EIv_2 = \frac{1}{6}Px^3 - \frac{1}{2}Plx^2 + C_2x + D_2 \quad (4)$$

(4) 确定积分常数

边界条件

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v_1=0 \quad (5)$$

$$\text{在 } x=0 \text{ 处, } v_1'=0 \quad (6)$$

连续性条件

$$\text{在 } x=\frac{l}{2} \text{ 处, } v_1'=v_2' \quad (7)$$

$$\text{在 } x=\frac{l}{2} \text{ 处, } v_1=v_2 \quad (8)$$

将⑥式代入①式,得

$$C_1=0$$

将⑤式代入②式,得

$$D_1=0$$

将⑦式代入①、③式,并注意到 $C_1=0$,得

$$\frac{1}{4}P\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}Pl\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{l}{2}\right)^2 - Pl\left(\frac{l}{2}\right) + C_2 \quad (9)$$

将⑧式代入②、④式,并注意到 $C_1=D_1=0$,得

$$\frac{1}{12}P\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}Pl\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}P\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}Pl\left(\frac{l}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{l}{2}\right) + D_2 \quad (10)$$

解⑨式,得

$$C_2 = \frac{3}{16}Pl^2$$

代入⑩式,得

$$D_2 = -\frac{Pl^3}{24}$$

(5) 建立转角方程和挠度方程

因只要求截面 B 的转角和挠度,所以只将积分常数 C_2, D_2 代入③、④式,得

$$EIv_2' = \frac{1}{2}Px^2 - Plx + \frac{3}{16}Pl^2, \quad EIv_2 = \frac{1}{6}Px^3 - \frac{1}{2}Plx^2 + \frac{3}{16}Pl^2x - \frac{Pl^3}{24}$$

(6) 确定指定截面的转角和挠度

$$\theta_B = v_2' = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}Pl^2 - Plx + \frac{3}{16}Pl^2 \right) \Big|_{x=l} = -\frac{5Pl^2}{16EI}$$

$$f_B = v_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6}Px^3 - \frac{1}{2}Plx^2 + \frac{3}{16}Pl^2x - \frac{Pl^3}{24} \right) \Big|_{x=l} = -\frac{3}{16EI}Pl^3$$

6-5 一齿轮轴受力如题 6-5 图(a)所示,已知 $a=100 \text{ mm}$, $b=200 \text{ mm}$, $c=150 \text{ mm}$, $l=300 \text{ mm}$;材料的弹性模量 $E=210 \text{ GPa}$,轴在轴承处的许用转角 $[\theta]=0.005 \text{ rad}$ 。近似地设全轴的直径均为 $d=60 \text{ mm}$,试校核轴的刚度。

解 题 6-5 图(a)所示齿轮轴可简化为题 6-5 图(b)所示的力学模型,它在轴承 A、B 处的转角可用叠加法确定,即题 6-5 图(b)所示梁,截面 A、B 的转角,等于题 6-5 图(c)、(d)两种受力情况下,截面 A 转角的代数和及截面 B 转角的代数和,即

$$\theta_A = \theta_{AP_1} + \theta_{AP_2}, \quad \theta_B = \theta_{BP_1} + \theta_{BP_2}$$

查文献 1 表 6-1“简单载荷作用下梁的变形”或计算,可得

$$\theta_{AP_1} = -\frac{P_1 ab(l+b)}{6lEI}, \quad \theta_{AP_2} = -\frac{P_2 cl}{6EI}$$

$$\theta_{BP_1} = \frac{P_1 ab(l+a)}{6lEI}, \quad \theta_{BP_2} = \frac{P_2 cl}{3EI}$$

轴的横截面对中性轴的惯性矩为

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.06^4}{64} \text{ m}^4 = 6.362 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

所以有

$$\begin{aligned} \theta_{AP_1} &= -\frac{2850 \times 0.1 \times 0.2 \times (0.3 + 0.2)}{6 \times 0.3 \times 210 \times 10^9 \times 6.362 \times 10^{-7}} \text{ rad} \\ &= -1.185 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{AP_2} &= -\frac{4250 \times 0.15 \times 0.3}{6 \times 210 \times 10^9 \times 6.362 \times 10^{-7}} \text{ rad} \\ &= -2.386 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{BP_1} &= \frac{2850 \times 0.1 \times 0.2 \times (0.3 + 0.1)}{6 \times 0.3 \times 210 \times 10^9 \times 6.362 \times 10^{-7}} \text{ rad} \\ &= 9.481 \times 10^{-5} \text{ rad} \end{aligned}$$

$$\theta_{BP_2} = \frac{4250 \times 0.15 \times 0.3}{3 \times 210 \times 10^9 \times 6.362 \times 10^{-7}} \text{ rad} = 4.772 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

轴承 A 处的转角为

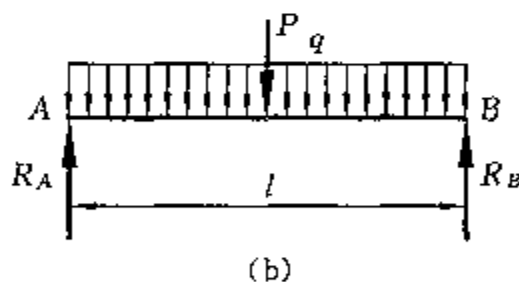
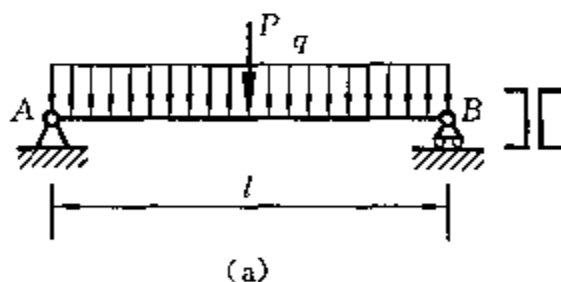
$$\begin{aligned} \theta_A &= \theta_{AP_1} + \theta_{AP_2} = -(1.185 + 2.386) \times 10^{-4} \text{ rad} \\ &= -3.571 \times 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

轴承 B 处的转角为

$$\theta_B = \theta_{BP_1} + \theta_{BP_2} = (9.481 \times 10^{-5} + 4.772 \times 10^{-4}) \text{ rad} = 5.720 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

它们均小于许用转角 $[\theta] = 50 \times 10^{-4} \text{ rad}$ 。

6-6 一跨度 $l = 4 \text{ m}$ 的简支梁如题 6-6 图(a)所示,受集度 $q = 10 \text{ kN/m}$ 的均布载荷和 $P = 20 \text{ kN}$ 的集中载荷作用。梁由两槽钢组成。设材料的许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 梁的许用挠度 $[f] = \frac{l}{400}$ 。试选定槽钢的型号, 并校核其刚度。梁的自重忽略不计。



题 6-6 图

解 (1) 确定支座反力

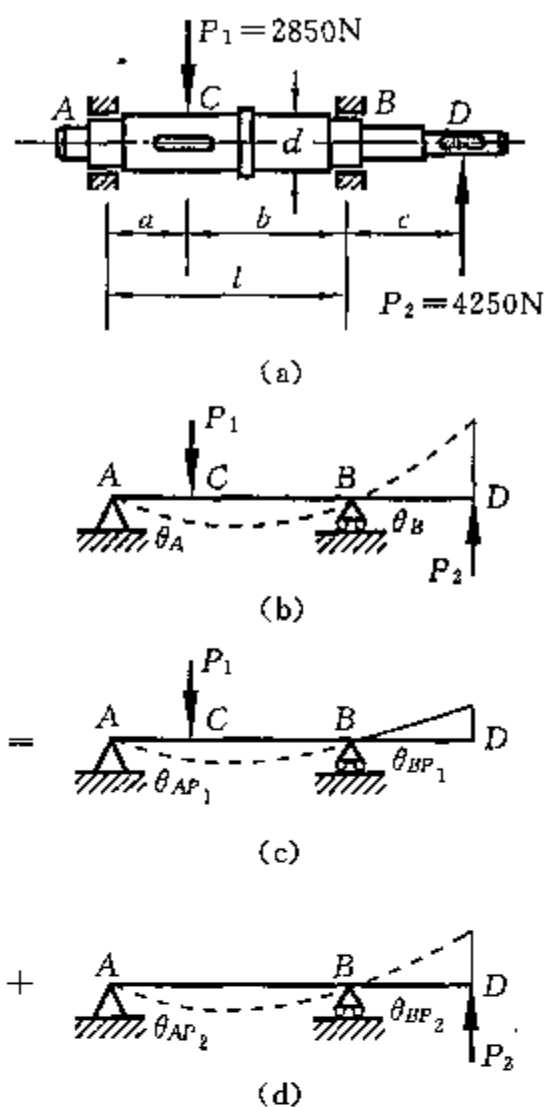
解除题 6-6 图(a)所示简支梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 6-6 图(b)所示。由于结构对称, 载荷也对称, 所以支座反力很容易确定为

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}(P + ql) = \frac{1}{2}(20 + 10 \times 4) \text{ kN} = 30 \text{ kN}$$

(2) 计算最大弯矩

因载荷对称, 所以最大弯矩必产生在跨中截面, 并有

$$M_{\max} = \frac{1}{2}lR_A - \frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left[\frac{1}{2} \times 4 \times 30 - \frac{1}{2} \times 10 \times \left(\frac{4}{2}\right)^2\right] \text{ kN} \cdot \text{m} = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



题 6-5 图

(3) 依据梁的强度要求选择槽钢型号

由强度条件
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2W_z} \leq [\sigma]$$

得
$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{2[\sigma]} = \frac{40 \times 10^3}{2 \times 160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 125 \text{ cm}^3$$

查文献 1 附录一型钢表, 18a 号槽钢的 $W_z = 141 \text{ cm}^3$, $I_z = 1270 \text{ cm}^4$, 暂定选用 18a 号槽钢。

(3) 校核梁的刚度

跨中受集中载荷 P 作用的简支梁的最大挠度产生在跨中, 最大挠度为

$$f_P = \frac{Pl^3}{48EI}$$

受均布载荷作用的简支梁最大挠度也产生在梁的跨中, 最大挠度为

$$f_q = \frac{ql^4}{384EI}$$

利用叠加法, 题 6-6 图(a)所示简支梁的最大挠度为

$$\begin{aligned} f_{\max} &= f_P + f_q = \frac{Pl^3}{48EI \times 2} + \frac{ql^4}{384EI \times 2} \\ &= \left(\frac{20 \times 10^3 \times 4^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 1270 \times 10^{-8} \times 2} + \frac{5 \times 10 \times 10^3 \times 4^4}{384 \times 210 \times 10^9 \times 1270 \times 10^{-8} \times 2} \right) \text{ m} \\ &= (4.999 \times 10^{-2} + 6.249 \times 10^{-2}) \text{ m} = 11.25 \times 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

梁的许用挠度为
$$[f] = \frac{l}{400} = \frac{4}{400} \text{ m} = 10 \times 10^{-2} \text{ m}$$

显然, 选用 18a 号槽钢, 不能满足刚度要求, 应重新再选。

(4) 依据梁的刚度要求选择槽钢型号

由刚度条件
$$f_{\max} = \frac{Pl^3}{48EI \times 2} + \frac{5ql^4}{384EI \times 2} \leq [f]$$

可得
$$I \geq \left(\frac{Pl^3}{48E \times 2} + \frac{5ql^4}{384E \times 2} \right) \frac{1}{[f]} = \left(\frac{20 \times 10^3 \times 4^3}{48 \times 210 \times 10^9 \times 2} + \frac{5 \times 10 \times 10^3 \times 4^4}{384 \times 210 \times 10^9 \times 2} \right) \frac{400}{4}$$

$$= [(0.06349 + 0.07937) \times 10^{-6} \times 100] \text{ m}^4 = 1429 \text{ cm}^4$$

查文献 1 附录一型钢表, 18 号槽钢的 $I = 1370 \text{ cm}^4$, 20a 号槽钢的 $I = 1780 \text{ cm}^4$, 所以, 选 18 号槽钢。

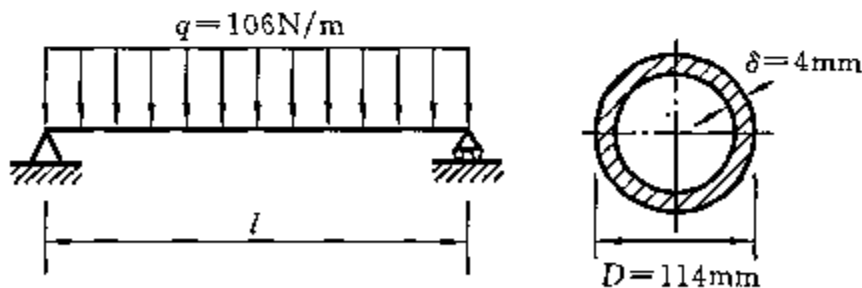
6-7 如题 6-7 图所示, 一两端简支的输气管道, 已知其外径 $D = 114 \text{ mm}$, 壁厚 $\delta = 4 \text{ mm}$, 单位长度重量为 $q = 106 \text{ N/m}$, 材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。设管道的许用挠度 $[f] = \frac{l}{500}$, 试确定此管道的最大跨度。

解 (1) 力学模型

输气管可简化为题 6-7 图所示的承受均布载荷的简支梁, 其跨度 l 待定。

(2) 输气管横截面的惯性矩

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \\ &= \frac{\pi}{64} [0.114^4 - (0.114 - 2 \times 4)^4] \text{ m}^4 \\ &= 2.096 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \end{aligned}$$



题 6-7 图

(3) 确定管道的最大跨度

查文献 1 表 6-1, 管道在两支座间的最大挠度为

$$f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

由梁的刚度条件 $f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \leq [f] = \frac{l}{500}$

可得 $l \leq \frac{384EI}{500 \times 5q} = \sqrt[3]{\frac{384 \times 210 \times 10^9 \times 2.096 \times 10^{-6}}{500 \times 5 \times 106}} \text{ m} = 8.608 \text{ m}$

所以,管道的最大跨度 $l = 8.608 \text{ m}$ 。

6-8 一45a号工字钢的简支梁,长 $l = 10 \text{ m}$,受布满全梁的均布载荷作用,已知材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。若梁的最大挠度不得超过 $\frac{l}{600}$,求最大的均布载荷集度 q 。

解 查文献1附录一型钢表,45a号工字钢横截面的 $I_x = 32200 \text{ cm}^4$,查文献1表6-1,受均布载荷作用的简支梁,其最大挠度为

$$f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

由梁的刚度条件 $f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI} \leq [f] = \frac{l}{600}$

可得 $q \leq \frac{384EI_x l}{600 \times 5l^4} = \frac{384EI_x}{600 \times 5l^3} = \frac{384 \times 210 \times 10^9 \times 32200 \times 10^{-8}}{600 \times 5 \times 10^3} \text{ N/m} = 8.655 \text{ kN/m}$

所以,最大均布载荷集度为 $q = 8.655 \text{ kN/m}$ 。

6-9 一直角拐如题6-9图所示。AB段横截面为圆形,BC段为矩形, A端固定, B端为一滑动轴承, C端作用一集中力 $P = 60 \text{ N}$, 有关尺寸如图所示。已知材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 剪切弹性模量 $G = 0.4E$, 试求 C 端的挠度。

解 直角拐 C 端的挠度由两部分构成,一是圆杆 AB 因扭转变形产生截面 B 相对截面 A 的扭转角,使其面连在一起的矩形截面杆 BC 作刚体位移,使 C 端下移,二是矩形截面杆 BC 本身因弯曲变形使 C 端下移。

(1) 杆 BC 弯曲变形时点 C 的挠度

杆 BC 横截面的惯性矩

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{5 \times 10^3}{12} \text{ mm}^4 = 416.7 \times 10^{-12} \text{ m}^4$$

可将杆 BC 视为 B 为固定端的悬臂梁,查文献1表6-1, C 端挠度为

$$f_{CP} = \frac{Pl_{BC}^3}{3EI_z} = \frac{60 \times 0.3^3}{3 \times 210 \times 10^9 \times 416.7 \times 10^{-12}} \text{ m} = 6.171 \text{ mm} \quad (\downarrow)$$

(2) 圆杆 AB 两端面的相对扭转角

杆 AB 横截面的极惯性矩为

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 0.02^4}{32} \text{ m}^4 = 1.571 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

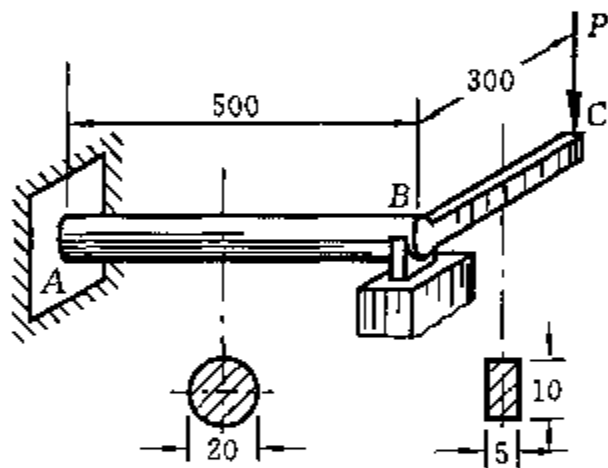
相对扭转角

$$\phi_{AB} = \frac{Tl_{AB}}{GI_P} = \frac{0.3Pl_{AB}}{0.4EI_P} = \frac{0.3 \times 60 \times 0.5}{0.4 \times 210 \times 10^9 \times 1.571 \times 10^{-8}} \text{ rad} = 6.828 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

(3) 直角拐 C 端的挠度

$$f_C = f_{CP} + \phi_{AB} l_{BC} = (6.171 + 6.828 \times 10^{-3} \times 300) \text{ mm} = 8.219 \text{ mm}$$

6-10 以弹性元件作为测力装置的试验如题6-10图(a)所示,通过测量梁 BC 中点的挠度来确定卡头 A 处作用的力 P 。已知 $l = 1 \text{ m}$, $a = 0.1 \text{ m}$, 梁截面宽 $b = 60 \text{ mm}$, 高 $h = 40 \text{ mm}$, 材料的弹性模量 $E = 220 \text{ GPa}$ 。试问当百分表 F 指针转动一小格 ($1/100 \text{ mm}$) 时,载荷 P 增加多少?



题6-9图

解 (1) 力学模型

此问题可简化为简支梁 BC 受对称的集中力 $P/2$ 作用时, 跨中点 F 产生挠度 $f_F = \frac{1}{100}$ mm 时所需的外力 P , 如题 6-10 图(b)所示。

(2) 确定挠度 f_F

梁 BC 横截面的惯性矩

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.06 \times 0.04^3}{12} \text{ m}^4 = 3.2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

查文献 1 表 6-1 可得

$$\begin{aligned} f_F &= 2 \times \frac{(P/2)a}{48EI} [3(l+2a)^3 - 4a^3] \\ &= \frac{0.1P}{48EI} [3(1+2 \times 0.1)^3 - 4 \times 0.1^3] \\ &= \frac{0.1P}{48EI} \times 4.28 = \frac{0.1P \times 4.28}{48 \times 220 \times 10^9 \times 3.2 \times 10^{-7}} \\ &= 1.267 \times 10^{-7} P \end{aligned}$$

当 $f_F = \frac{1}{100} \times 10^{-3}$ m 时, 代入上式, 得

$$P = \frac{1 \times 10^{-3}}{1.267 \times 10^{-7} \times 100} \text{ N} = 78.93 \text{ N}$$

所以, 百分表 F 指针转动一小格时, 载荷 P 应增加 78.93 N。

6-11 试求题 6-11 图所示各梁的支座反力, 并作弯矩图。各梁的 EI 均为常数。

解 (a) 题 6-11 图(a)所示, 是一次静不定梁。

(1) 求多余未知力

若选择支座 C 为多余约束, 解除此多余约束, 以未知支座反力 R_C 代之, 如题 6-11 图(a₁)所示。查文献 1 表 6-1, 题 6-11 图(a₁)所示梁在集中力 R_C 单独作用时, 点 C 的挠度为

$$f_{CR} = \frac{R_C(2l)^3}{48EI}$$

在分布载荷单独作用时, 点 C 的挠度为

$$f_{Cq} = -\frac{5q(2l)^4}{384EI}$$

因 C 处是支座, 所以不允许有位移, 所以有

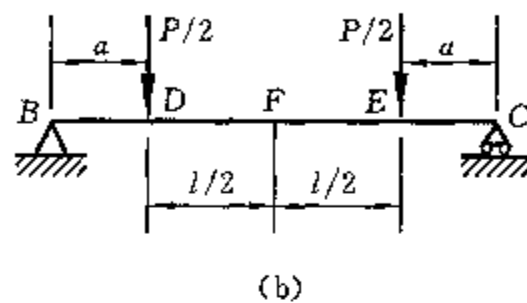
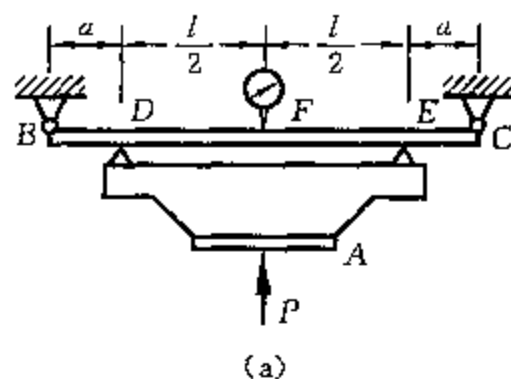
$$\begin{aligned} f_{CR} + f_{Cq} &= 0 \\ \frac{R_C(2l)^3}{48EI} + \left(-\frac{5q(2l)^4}{384EI}\right) &= 0 \end{aligned}$$

由上式得

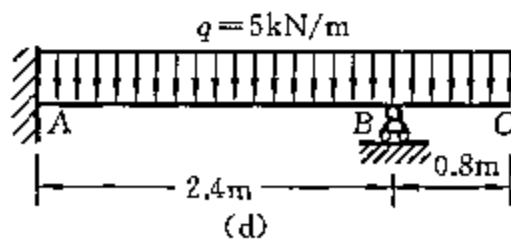
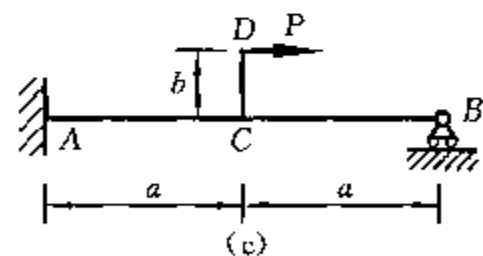
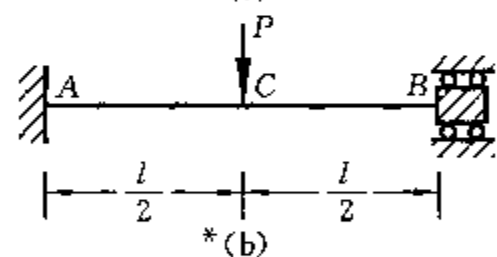
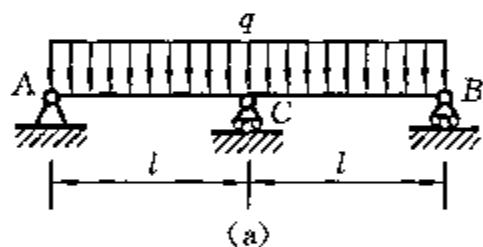
$$R_C = \frac{5}{4}ql$$

(2) 计算支座反力

解除梁的另两个支座 A 和 B , 代之以支座反力, 作受力图如题 6-11 图(a₂)所示。由平衡方程



题 6-10 图



题 6-11 图

$$\sum M_A = 0, \quad \frac{5}{4}ql^2 - \frac{1}{2}q(2l)^2 + 2lR_B = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B + \frac{5}{4}ql - 2ql = 0$$

可得 $R_A = \frac{3}{8}ql, \quad R_B = \frac{3}{8}ql$

(3) 弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作弯矩图如题 6-11 图(a₃)所示。

(b) 如题 6-11 图(b)所示。

(1) 列平衡方程

解除题 6-11 图(b)所示两端固定的梁 AB 的约束,代之以约束反力,作受力图如题 6-11 图(b₁)所示,列平衡方程

$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{1}{2}Pl + M_B - lR_B - M_A = 0 \quad ①$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P = 0 \quad ②$$

两个独立的平衡方程,包含 4 个未知数,所以是个二次静不定问题,必须建立两个补充方程,才能完全求解出所有未知力。

(2) 建立补充方程

选取题 6-11 图(b)所示梁 B 端的固定支座为多余约束,解除后代之以约束反力 R_B 和 M_B ,如题 6-11 图(b₂)所示。查文献 1 表 6-1,在力 R_B 单独作用时,截面 B 的挠度和转角分别为

$$f_{BR} = \frac{R_B l^3}{3EI}, \quad \theta_{BR} = \frac{R_B l^2}{2EI}$$

在力偶矩 M_B 单独作用时,截面 B 的挠度和转角分别为

$$f_{BM} = -\frac{M_B l^2}{2EI}, \quad \theta_{BM} = -\frac{M_B l}{EI}$$

在力 P 单独作用时,截面 B 的挠度和转角分别为

$$f_{BP} = -\frac{5Pl^3}{48EI}, \quad \theta_{BP} = -\frac{Pl^2}{8EI}$$

因 B 端为固定支座,截面 B 不能产生角位线和线位移,所以有

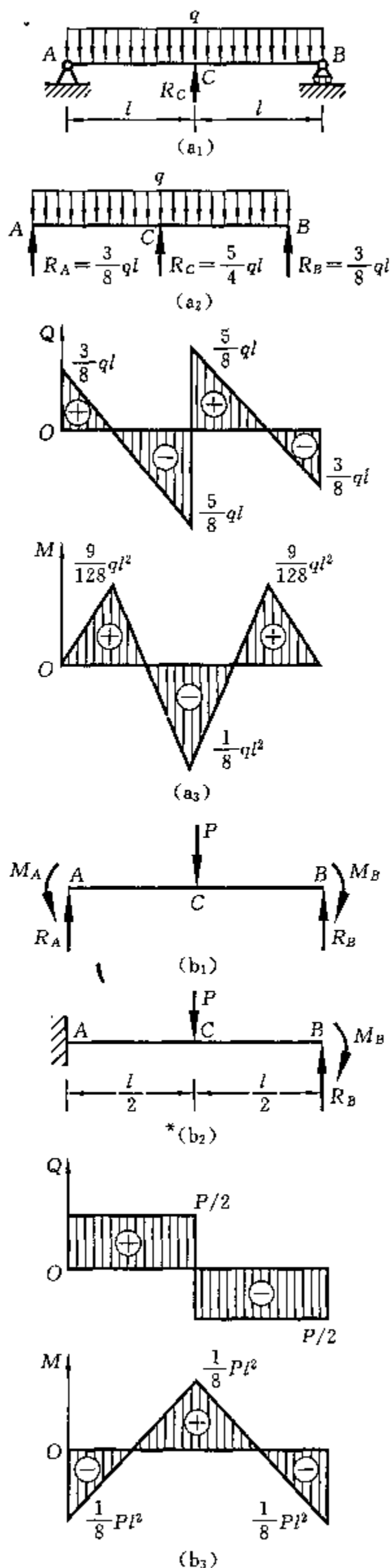
$$\theta_B = \theta_{BR} + \theta_{BM} + \theta_{BP} = 0, \quad f_B = f_{BR} + f_{BM} + f_{BP} = 0$$

即得补充方程

$$\frac{R_B l^2}{2EI} - \frac{M_B l}{EI} - \frac{Pl^2}{8EI} = 0 \quad ③$$

$$\frac{R_B l^3}{3EI} - \frac{M_B l^2}{2EI} - \frac{5Pl^3}{48EI} = 0 \quad ④$$

联立③、④式求解,得



续题 6-11 图

$$R_B = \frac{P}{2}, \quad M_B = \frac{1}{8}Pl$$

代入①、②式, 可得

$$R_A = \frac{P}{2}, \quad M_A = \frac{1}{8}Pl$$

(3) 弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作弯矩图如题 6-11 图(b₃)所示。

(c) 如题 6-11 图(c)所示。

(1) 列平衡方程

解除题 6-11 图(c)所示梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 6-11 图(c₁)所示。列平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad Pb + M_A - 2aR_B = 0 \quad ①$$

$$\sum Y = 0, \quad R_B - Y_A = 0 \quad ②$$

$$\sum X = 0, \quad -X_A + P = 0 \quad ③$$

三个独立方程, 包含有 4 个未知数, 所以是一次静不定问题, 必须建立一个补充方程, 才能解出所有未知数。

(2) 建立补充方程

选取题 6-11 图(c)所示梁的支座 B 为多余约束, 解除之, 并代之以支座反力 R_B , 作受力图如题 6-11 图(c₂)所示。查文献 1 表 6-1, 在 R_B 单独作用时, B 端的挠度为

$$f_{BR} = \frac{R_B(2a)^3}{3EI} = \frac{8R_Ba^3}{3EI}$$

在力 P 单独作用时, B 端的挠度为

$$f_{BP} = -\left(\frac{ma^2}{2EI} + \frac{ma}{EI}a\right) = -\left(\frac{Pba^2}{2EI} + \frac{Pba^2}{EI}\right) = -\frac{3Pba^2}{2EI}$$

因 B 端为支座, 不允许有位移, 所以得补充方程

$$f_B = f_{BR} + f_{BP} = 0, \quad \frac{8R_Ba^3}{3EI} - \frac{3Pba^2}{2EI} = 0$$

解上式, 得补充方程

$$R_B = \frac{9Pb}{16a} \quad ④$$

将④式代入①、②式, 得

$$M_A = \frac{1}{8}Pb, \quad Y_A = \frac{9Pb}{16a}$$

(3) 弯矩图

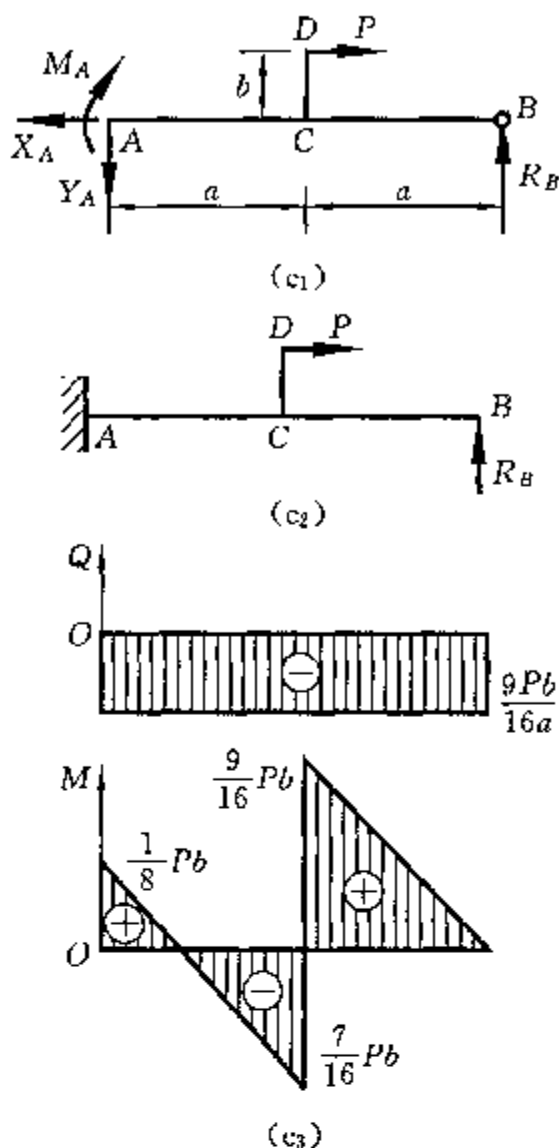
利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作弯矩图如题 6-11 图(c₃)所示。

(d) 如题 6-11 图(d)所示。

(1) 列平衡方程

解除题 6-11 图(d)所示梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题 6-11 图(d₁)所示。列平衡方程

$$\sum M_A = 0, \quad M_A + 2.4R_B - \frac{1}{2} \times 5 \times (3.2)^2 = 0 \quad ①$$



续题 6-11 图

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - 3.2 \times 5 = 0 \quad (2)$$

2个独立方程, 包含有3个未知数, 是一次静不定问题, 须建立一个补充方程。

(2) 建立补充方程

选取支座B为多余约束, 解除之, 代之以支座反力 R_B , 如题6-11图(d₂)所示。查文献1表6-1, 可得在 R_B 单独作用下, 点B的挠度为

$$f_{BR} = \frac{R_B(2.4)^3}{3EI} = \frac{4.608R_B}{EI}$$

在均布载荷单独作用下, 点B的挠度为

$$\begin{aligned} f_{Bq} &= -\frac{qx^2}{24EI}(x^2 + 6l^2 - 4lx) \\ &= -\frac{5 \times 10^3(2.4)^2}{24EI}[(2.4)^2 + 6 \times 3.2^2 - 4 \times 3.2 \times 2.4] \\ &= -\frac{43.78 \times 10^3}{EI} \end{aligned}$$

因B处为支座, 不允许产生位移, 所以可得补充方程

$$f_B = f_{BR} + f_{Bq} = 0, \quad \frac{4.608R_B}{EI} - \frac{43.78 \times 10^3}{EI} = 0$$

解上式, 得补充方程

$$R_B = \frac{43.78 \times 10^3}{4.608} \text{ N} = 9.5 \text{ kN} \quad (3)$$

将③式代入①、②式, 得

$$R_A = 6.5 \text{ kN}, \quad M_A = 2.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 弯矩图

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 画弯矩图如题6-11图(d₃)所示。

6-12 加热炉内的水管横梁支持在3个支点上, 承受着纵管传来的钢锭载荷, 如题6-12图(a)所示。求A、B、C处的支座反力, 并作横管的弯矩图。

解 (1) 力学模型

题6-12图(a)所示水管横梁可简化为题6-12图(b)所示受多个集中载荷的连续梁。

(2) 列平衡方程

解除题6-12图(b)所示连续梁的支座, 代之以支座反力, 作受力图如题6-12图(c)所示。列平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B + R_C - 4P = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0, \quad R_A l - R_B l + \frac{1}{4}Pl + \frac{3}{4}Pl - \frac{1}{4}Pl - \frac{3}{4}Pl = 0 \quad (2)$$

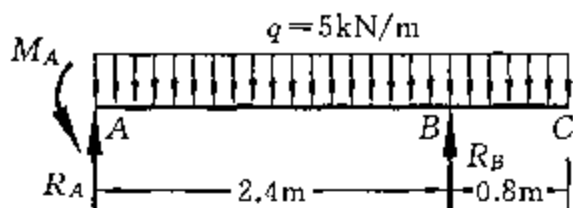
2个独立方程包含3个未知数, 所以是一次静不定问题, 必须建立补充方程再求解。

(3) 建立补充方程

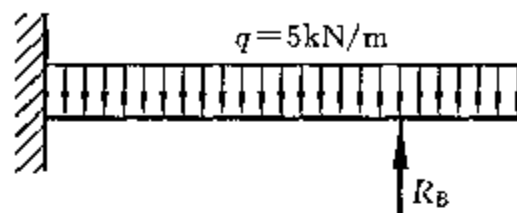
选取题6-12图(b)所示梁的支座C为多余约束, 解除支座C, 代之以支座反力 R_C , 如题6-12图(d)所示。查文献1表6-1, 可得简支梁上任意点受力 P 作用, 在梁跨中产生的挠度

$$f_{\frac{l}{2}} = \frac{Pb}{48EI}(3L^2 - 4b^2)$$

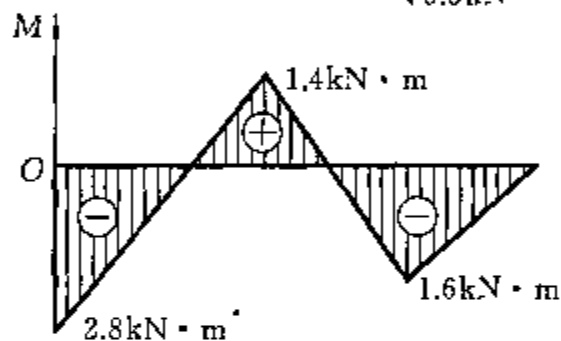
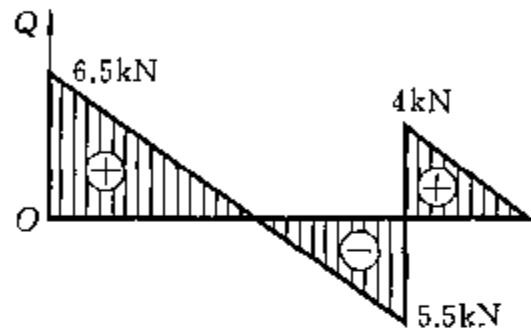
利用上式, 力 P_3 单独作用时, 跨中点C的挠度



(d₁)

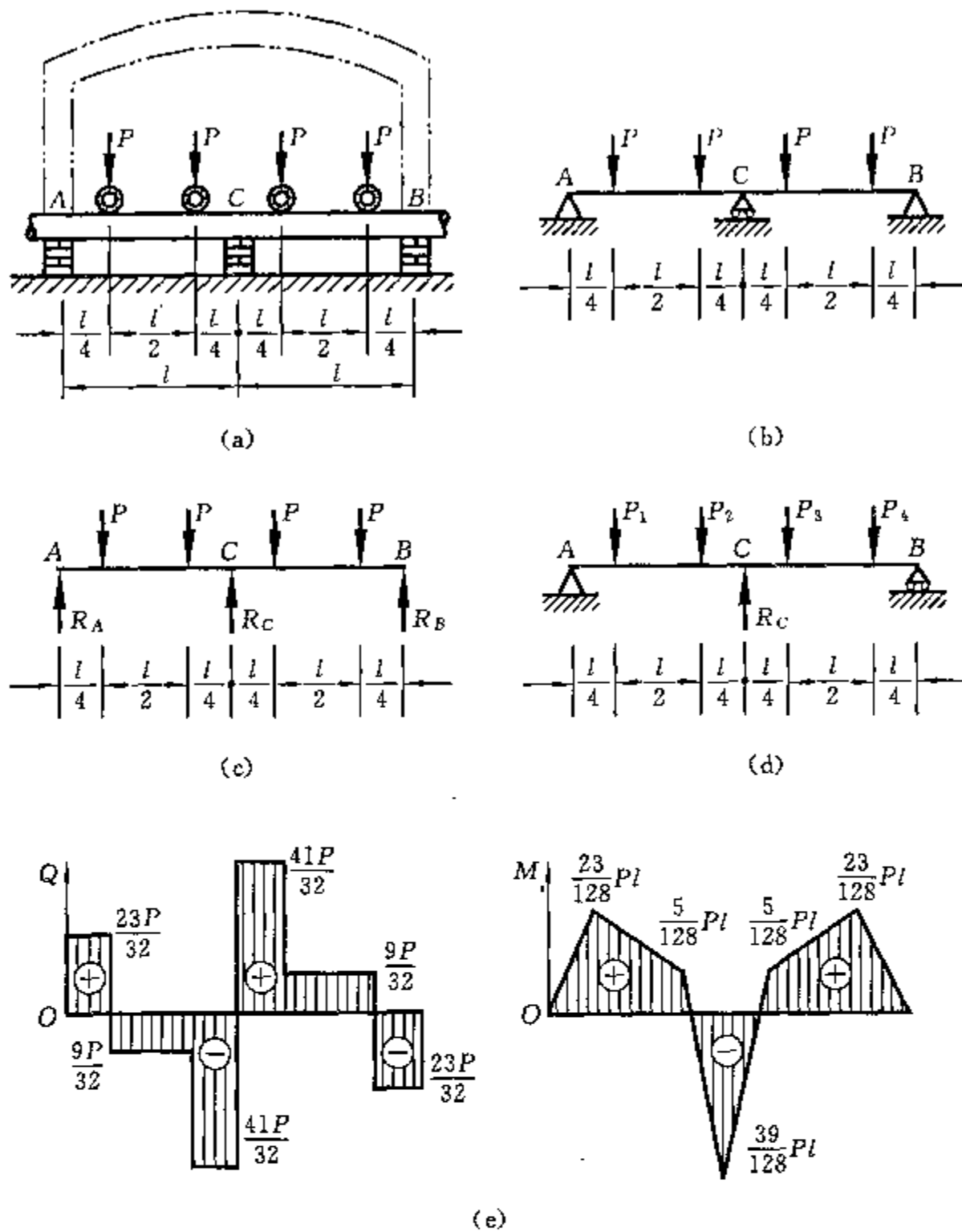


(d₂)



(d₃)

续题6-11图



题 6-12 图

$$f_{CP_3} = -\frac{P\left(\frac{3}{4}l\right)}{48EI} \left[3(2l)^2 - 4\left(\frac{3l}{4}\right)^2 \right] = \frac{-3Pl}{192EI} \left(12l^2 - \frac{9l^2}{4} \right) = -\frac{117Pl^3}{768EI}$$

力 P_4 单独作用时, 跨中点 C 的挠度

$$f_{CP_4} = -\frac{P\left(\frac{l}{4}\right)}{48EI} \left[3(2l)^2 - 4\left(\frac{l}{4}\right)^2 \right] = -\frac{Pl}{192EI} \left(12l^2 - \frac{l^2}{4} \right) = -\frac{47Pl^3}{768EI}$$

因结构和载荷均对称, 所以有 $f_{CP_1} = f_{CP_4}$, $f_{CP_2} = f_{CP_3}$

当力 R_C 单独作用时, 跨中点 C 的挠度 $f_{CR} = \frac{R_C(2l)^3}{48EI} = \frac{R_C l^3}{6EI}$

因跨中 C 处有支座, 所以点 C 的挠度为零, 即

$$f_C = 2f_{CP_1} + 2f_{CP_3} + f_{CR} = 0$$

$$2 \times \frac{-47Pl^3}{768EI} + 2 \times \frac{-117Pl^3}{768EI} + \frac{R_C l^3}{6EI} = 0 \quad (3)$$

化简补充方程③式, 得 $\frac{R_C}{6} - \frac{47P}{384} - \frac{117P}{384} = 0$

解上式,得

$$R_C = \frac{41}{16}P$$

代入式①,得

$$R_A + R_B = 4P - \frac{41}{16}P = \frac{23}{16}P \quad (4)$$

联立式④、②,可解得

$$R_A = R_B = \frac{23}{32}P$$

(4) 弯矩图

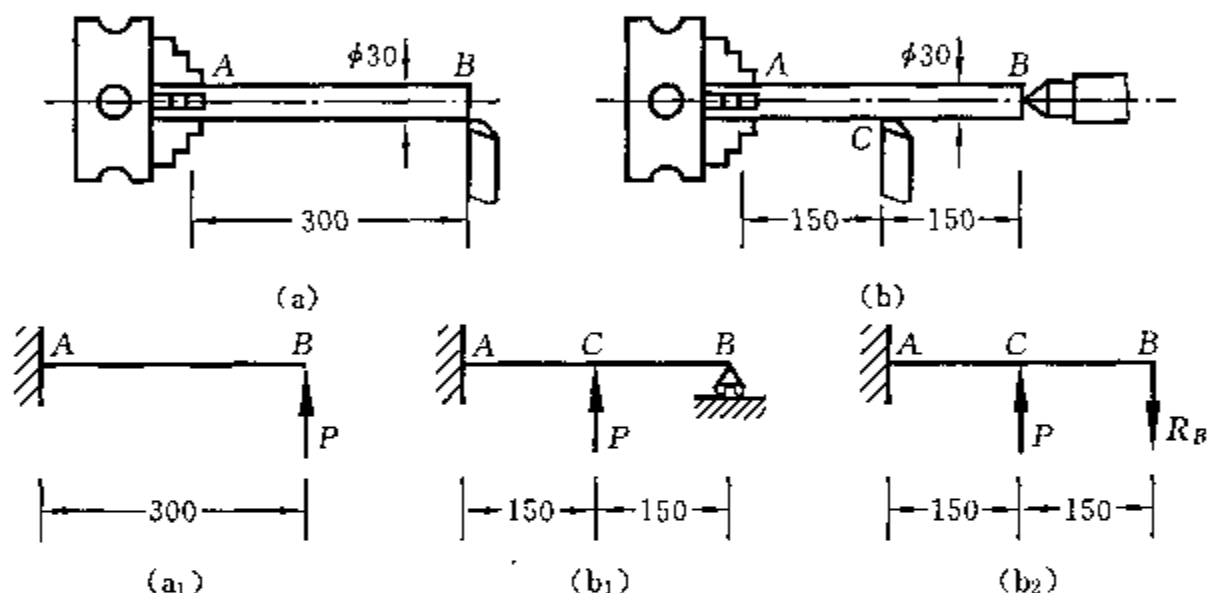
利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作弯矩图如题 6-12 图(c)所示。

6-13 在车床上加工工件,已知工件的弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$,车刀作用于工件上的径向力 $P=360 \text{ N}$,工件的尺寸如题 6-13 图所示。问:

(1) 按图(a)方式加工时,因工件变形而引起的直径误差为多少?

(2) 如在工件自由端加上顶尖后,按车刀行至工件中点时考虑(图(b)),这时因工件变形而引起的直径误差又为多少?

(3) 两者误差的百分比为何?



题 6-13 图

解 (a) 如题 6-13 图(a)所示。

(1) 力学模型

题 6-13 图(a)所示在车床上加工的工件,可简化为题 6-13 图(a₁)所示的自由端受集中力 P 的悬臂梁。

(2) 自由端 B 的挠度

$$\text{工件横截面的惯性矩为 } I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.03^4}{64} \text{ m}^4 = 3.976 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

查文献 1 表 6-1, B 端的挠度为

$$f_B = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{360 \times 0.30^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 3.976 \times 10^{-8}} \text{ m} = 4.074 \times 10^{-4} \text{ m}$$

(3) 引起直径误差

工件若为理想刚性,在切削过程中,切削力 P 不会使工件产生弯曲变形,所以在整个切削过程中,在工件长度范围内的切削深度(吃刀量)相同,故车削后,工件直径在长度范围内保持同一数值。但若工件在切削过程中,产生弯曲变形,越远离卡盘(固定端),挠度越大,加工出来的工件将成圆台形,从固定端到自由端,直径逐渐增大。变形引起的直径误差为

$$\Delta d = 2f_B = 2 \times 4.07 \times 10^{-4} \text{ m} = 0.814 \text{ mm}$$

(b) 如题 6-13 图(b)所示。

(1) 力学模型

工件加顶尖后,可简化为有支座的悬臂梁,如题 6-13 图(b₁)所示。

(2) 计算支座 B 的反力

工件加顶尖后,其力学模型变成有支座的悬臂梁,是个一次静不定问题。解除支座 B,代之以支座反力 R_B ,如题 6-13 图(b₂)所示。查文献 1 表 6-1,支座反力 R_B 和切削力 P 分别单独作用时, B 端的挠度分别为

$$f_{BR} = -\frac{R_B \times 0.3^3}{3EI} = -\frac{9 \times 10^{-3}}{EI} R_B, \quad f_{BP} = \frac{0.15^3 P}{3EI} + \frac{0.15^2 P}{2EI} \times 0.15 = \frac{2.813 \times 10^{-3}}{EI} P$$

因 B 端有支座,此处挠度应为零,即

$$f_B = f_{BR} + f_{BP} = -\frac{9 \times 10^{-3}}{EI} R_B + \frac{2.81 \times 10^{-3}}{EI} P = 0$$

解上式,得 $R_B = \frac{2.813}{9} P = 0.3126 P = 0.3126 \times 360 \text{ N} = 112.5 \text{ N}$

(3) 车刀行至跨中时引起工件直径的误差

查文献 1 表 6-1,工件在支座反力 R_B 和车刀行至跨中 C 点时切削力 P 分别单独作用时引起点 C 的挠度分别为

$$f_{CR} = -\frac{R_B \times 0.15^2}{6EI} (3 \times 0.30 - 0.15) = -\frac{112.5 \times 0.15^2 \times 0.75}{6 \times 200 \times 10^9 \times 3.976 \times 10^{-8}} \text{ m} = -3.979 \times 10^{-5} \text{ m}$$

$$f_{CP} = \frac{P \times 0.15^3}{3EI} = \frac{360 \times 0.15^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 3.976 \times 10^{-8}} \text{ m} = 5.093 \times 10^{-5} \text{ m}$$

工件加顶尖后,在车刀行至跨中点 C 时,点 C 的挠度为

$$f_C = f_{CR} + f_{CP} = (-3.979 + 5.093) \times 10^{-5} \text{ m} = 0.0114 \text{ mm}$$

直径产生的偏差为 $\Delta d' = 2f_C = 2 \times 0.0114 \text{ mm} = 0.0228 \text{ mm}$

(4) 加顶尖和不加顶尖,两种情况下,加工误差的百分比为

$$\frac{\Delta d'}{\Delta d} = \frac{0.0228}{0.814} = 2.80\%$$

6-14 悬臂梁 AB 因强度和刚度不足,用同材料同截面的一根短梁 AC 加固,如题 6-14 图(a)所示。问:

(1) 支座 C 处的反力 R_C 为多少?

(2) 梁 AB 的最大弯矩和点 B 的挠度比没有梁 AC 支承时减少多少?

解 (1) 支座 C 处的反力

将题 6-14 图(a)所示的加强梁拆分为两个悬臂梁如题 6-14 图(b)所示。查文献 1 表 6-1,长梁点 C 和短梁点 E 的挠度分别为

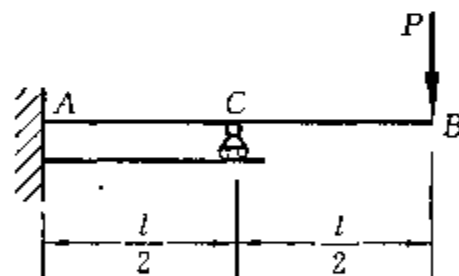
$$f_C = \frac{R_C \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{P \left(\frac{l}{2}\right)^2}{6EI} \left(3l - \frac{l}{2}\right) = \frac{R_C l^3}{24EI} - \frac{5Pl^3}{48EI}$$

$$f_E = \frac{-R'_C \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} = -\frac{R'_C l^3}{24EI}$$

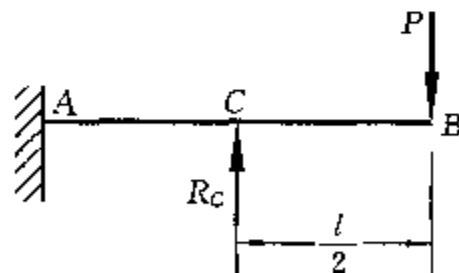
根据变形协调条件, $f_C = f_E$ 并注意到 $R'_C = R_C$, 所以有

$$\frac{R_C l^3}{24EI} - \frac{5Pl^3}{48EI} = -\frac{R_C l^3}{24EI}$$

解上式,得 $R_C = \frac{5}{4} P$



(a)



(b)

题 6-14 图

(2) 梁 AB 的最大弯矩和点 B 的挠度比没有短梁支承时的减少量

(a) 最大弯矩减少量

没有短梁支承时,最大弯矩产生在截面 A, $M_{\max} = Pl$ 。有短梁支承后,最大弯矩产生在截面 C,

$$M'_{\max} = \frac{1}{2}Pl, \text{ 减少了}$$

$$\Delta M_{\max} = Pl - \frac{1}{2}Pl = \frac{1}{2}Pl$$

(b) 点 B 挠度减少量

查文献 1 表 6-1, 题 6-14 图(b)所示梁 AB 在 R_c 单独作用时,使点 B 产生向上的挠度为

$$f_{BR} = \frac{R_c \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{R_c \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2EI} \times \frac{l}{2} = \frac{l^3}{24EI} R_c + \frac{l^3}{16EI} R_c = \left(\frac{l^3}{24EI} + \frac{l^3}{16EI}\right) \frac{5}{4} P = \frac{25Pl^3}{192EI} \quad (\uparrow)$$

它的方向和没有短梁支承,单独在力 P 作用下,梁 AB 的点 B 挠度方向相反,故加短梁支承后,梁 AB 的点 B 挠度减少了 $\frac{25Pl^3}{192EI}$ 。

6-15 题 6-15 图(a)所示一铣床齿轮轴 AB, 已知其传动的功率 $P_k = 7.5 \text{ kW}$, 转速 $n = 230 \text{ r/min}$, D 为主动轮, 现仅考虑齿轮切向力的影响, 试作此轴的弯矩图。

解 (1) 力学模型

将传动轴 AB 简化为题 6-15 图(b)所示力学模型, 其受力图如题 6-15 图(c)所示。

(2) 计算传动轴的外力

外力偶矩

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{7.5}{230} \text{ N} \cdot \text{m} = 311.4 \text{ N} \cdot \text{m}$$

由平衡条件, 有 $R_1 P_{t1} = m$

所以, 齿轮 I 受的切向力

$$P_{t1} = \frac{m}{R_1} = \frac{311.4}{0.1912} \text{ N} = 3278 \text{ N}$$

由平衡条件 $R_1 P_{t1} = R_2 P_{t2}$

可得齿轮 II 受的切向力

$$P_{t2} = \frac{R_1 P_{t1}}{R_2} = \frac{m}{R_2} = \frac{311.4}{0.1/2} \text{ N} = 6228 \text{ N}$$

传动轴的受力图如题 6-15 图(c)所示。列平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad -R_A + R_B + R_C + P_{t1} - P_{t2} = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad 0.4R_A + 0.4R_B - 0.25P_{t1} - 0.25P_{t2} = 0$$

将 $P_{t1} = 3278 \text{ N}$, $P_{t2} = 6228 \text{ N}$ 代入上两式, 得

$$-R_A + R_B + R_C + 0.25 \times 3278 - 6228 = 0$$

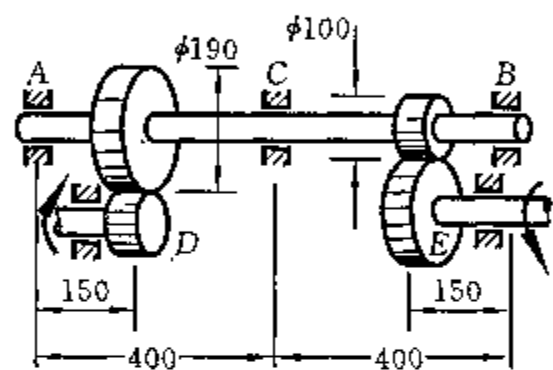
$$0.4R_A + 0.4R_B - 3278 - 0.25 \times 6228 = 0$$

将以上两式化简, 得

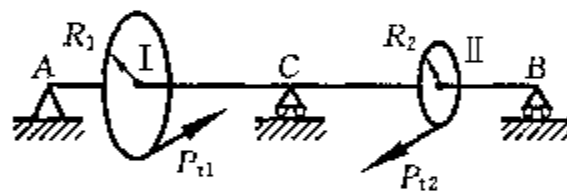
$$-R_A + R_B + R_C - 2950 = 0 \quad ①$$

$$R_A + R_B - 5941 = 0 \quad ②$$

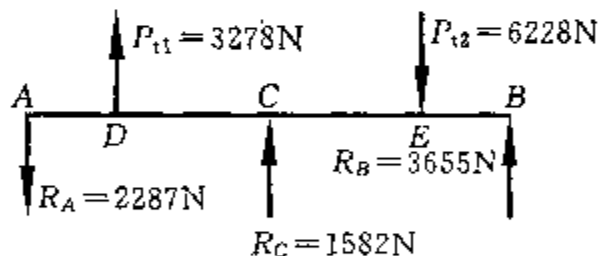
只有 2 个独立平衡方程, 包含 3 个未知数, 所以是一次静



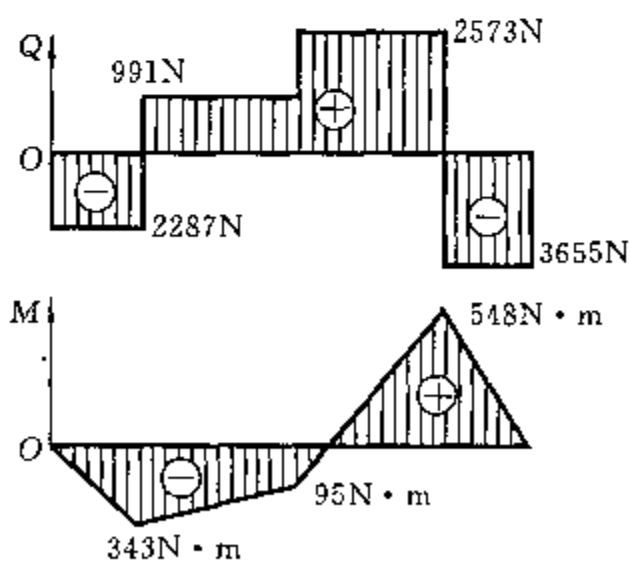
(a)



(b)



(c)



(d)

题 6-15 图

不定问题,应建立补充方程,才能求解。

(3) 建立补充方程

查文献 1 表 6-1,在 R_C 单独作用下,题 6-15 图(c)所示梁 AB 的跨中 C 点挠度

$$f_{RC} = \frac{R_C \times 0.8^3}{48EI} = \frac{0.512R_C}{48EI} \quad (\uparrow)$$

P_{11} 单独作用时,梁 AB 跨中点 C 的挠度

$$f_{CP_{11}} = \frac{P_{11} \times 0.15}{48EI} (3 \times 0.8^2 - 4 \times 0.15^2) = \frac{0.2745P_{11}}{48EI} \quad (\uparrow)$$

因 P_{11} 和 P_{12} 相对于点 C 为反对称,所以 P_{12} 单独作用时,梁 AB 跨中点 C 的挠度

$$f_{CP_{12}} = \frac{0.2745P_{12}}{48EI} \quad (\downarrow)$$

C 处原是支座,所以不允许有挠度,故有

$$f_{C, \frac{l}{2}} = f_{RC} + f_{CP_{11}} + f_{CP_{12}} = 0, \quad \frac{0.512R_C}{48EI} + \frac{0.2745P_{11}}{48EI} - \frac{0.2745P_{12}}{48EI} = 0$$

化简上式,得补充方程

$$0.512R_C + 0.2745(3278 - 6228) = 0$$

$$R_C = 1582 \text{ N} \quad (3)$$

将③式代入①式,得

$$-R_A + R_B + 1582 - 2950 = 0$$

$$-R_A + R_B = 1368 \quad (4)$$

由②和④式,得

$$2R_B = 7309 \text{ N}, \quad R_B = 3655 \text{ N} \quad (5)$$

⑤式代入④式,得

$$R_A = R_B - 1368 = (3655 - 1368) \text{ N} = 2287 \text{ N}$$

(4) 作轴 AB 的弯矩图

将轴所受的外力均标示在题 6-15 图(c)中,利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系,作弯矩图如题 6-15 图(d)所示。

第七章 应力状态和强度理论

知 识 要 点

1. 应力状态

(1) 一点的应力状态

物体受力后,同一截面上不同点的应力各不相同,即使同一点,在不同方向截面上的应力也不同,通过一点所有方向截面上的应力集合,称为该点的应力状态。

(2) 一点的应力状态的表示方法

围绕所研究的点取出一微小六面体(单元体),物体其他部分对该单元体的作用以单元体六个面上的应力分量来表示,这样的单元体就表示物体内一点的应力状态。

(3) 主平面与主应力

① 主平面 单元体上无切应力作用的平面称为主平面。

② 主应力 主平面上的正应力称为主应力,主应力用 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示,并以其代数值的大小排序,即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

(4) 应力状态分类

① 单向应力状态 三个主应力中,只有一个不为零的应力状态。

② 平面应力状态 三个主应力中,有两个不为零的应力状态,又称为二向应力状态。

③ 空间应力状态 三个主应力都不为零的应力状态,又称为三向应力状态。

2. 平面应力状态分析

(1) 斜截面上的应力与应力转换方程

任一斜截面上的应力可用单元体上的应力分量表示为

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

称为应力转换方程。

(2) 正负号规定

① 正应力 σ 以指向截面的为正,背离的为负;

② 切应力 τ 以对单元体内任一点产生顺时针转向的为正,逆时针转向的为负;

③ 方向角 α 以逆时针转向从 x 面转至斜截面的为正,顺时针转至斜截面的为负。

3. 极值应力与主应力

(1) 在平行于 z 轴的各截面中最大与最小正应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$$

最大正应力所在截面的方位角

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}$$

(2) 在平行于 z 轴的各截面中最大与最小切应力

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{\max} \\ \tau_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(3) 主应力

对于平面应力状态,有一个主应力必为零,因此,在由极值应力公式所确定的 σ_{\max} 和 σ_{\min} ,它们只是三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 中的两个,究竟是 σ_1, σ_2 ,抑或是 σ_3 ,应由主应力排序规定($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$)来决定。

至于极值应力公式所计算出的 τ_{\max} ,确切地讲,应称为“平面最大切应力”。

4. 空间应力状态

(1) 空间应力状态的最大应力

① 最大正应力 $\sigma_{\max} = \sigma_1$

② 最大切应力 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

(2) 广义胡克定律

① 广义胡克定律的一般形式 $\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

② 用主应力表示的广义胡克定律 $\sigma_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$

$$\sigma_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

5. 强度理论

(1) 关于脆性断裂的强度理论

① 最大拉应力理论(第一强度理论) 这个理论认为,引起材料发生脆性断裂的主要因素是最大拉应力。强度条件是

$$\sigma_1 \leq [\sigma]$$

② 最大伸长线应变理论(第二强度理论) 这个理论认为,引起材料发生脆性断裂的主要因素是最大伸长线应变。强度条件是

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

(2) 关于塑性屈服的强度理论

① 最大切应力理论(第三强度理论) 这个理论认为,使材料发生塑性屈服的主要因素是最大切应力。强度条件是

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

② 形状改变比能理论(第四强度理论) 这个理论认为,使材料发生塑性屈服的主要因素是形状改变比能。强度条件是

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

习题详解

7-1 直径 $d=2\text{ cm}$ 的拉伸试件,当与杆轴成 45° 斜截面上的切应力 $\tau=150\text{ MPa}$ 时,杆表面上将出现滑移线。求此时试件的拉力 P 。

解 受轴向拉伸杆,当横截面上的正应力达到材料的屈服点时,杆表面将出现与杆轴成 45° 角的滑移线,因在此方向上的切应力 τ_{45° 达到最大值,根据轴向拉伸杆任意斜截面上的切应力公式

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

可得横截面上的正应力 $\sigma = \frac{2\tau_\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\tau_{45^\circ}}{\sin 2 \times 45^\circ} = \frac{2 \times 150}{\sin 90^\circ} \text{ MPa} = 300 \text{ MPa}$

因 $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$

所以试件的拉力 $P = \frac{\pi d^2 \sigma}{4} = \frac{\pi \times 0.02^2 \times 300 \times 10^6}{4} \text{ N} = 94.25 \text{ kN}$

7-2 在拉杆的某一斜截面上,正应力为 50 MPa ,切应力为 50 MPa 。试求最大正应力和最大切应力。

解 根据轴向拉伸杆任意斜截面上应力公式

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$$

可得 $50 = \sigma \cos^2 \alpha$ ①

$$50 = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha$$
 ②

由②式÷①式,得 $\tan \alpha = 1, \quad \alpha = 45^\circ$

①、②式中的正应力 σ 是轴向拉伸杆横截面上的应力,也是所有截面中正应力的最大值,所以将 $\alpha = 45^\circ$ 代入式①,得

$$\sigma_{\max} = \sigma = \frac{50}{\cos^2 \alpha} = \frac{50}{\cos^2 45^\circ} \text{ MPa} = 100 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \tau_{45^\circ} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \Big|_{\alpha=45^\circ} = \frac{100}{2} \sin 90^\circ = 50 \text{ MPa}$$

最大正应力和最大切应力均为 100 MPa 。

7-3 已知应力状态如题 7-3 图(a)、(b)、(c)所示,求指定斜截面 ab 上的应力,并画在单元体上。

解 应用应力转换方程

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

解题 7-3 图(a)、(b)、(c)。

(a) 如题 7-3 图(a)所示。单元体上各应力分量为

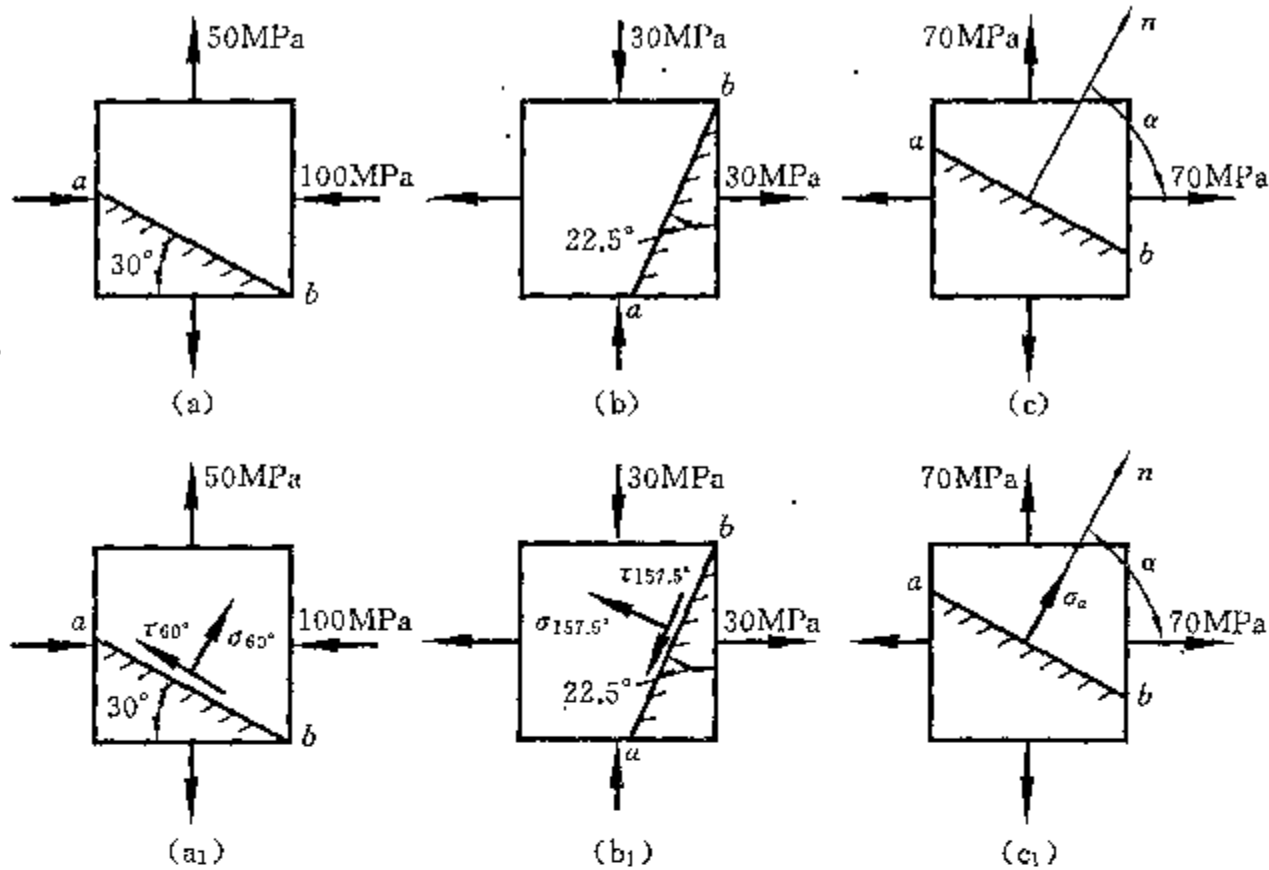
$$\sigma_x = -100 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa}, \quad \tau_x = 0, \quad \alpha = 60^\circ$$

所以斜截面上的应力为

$$\sigma_{60^\circ} = \frac{-100 + 50}{2} + \frac{-100 - 50}{2} \cos(2 \times 60^\circ) = -25 + [-75 \times (-0.5)]$$

$$= (-25 + 37.5) \text{ MPa} = 12.5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{60^\circ} = \frac{-100 - 50}{2} \sin(2 \times 60^\circ) = -64.95 \text{ MPa}$$



题 7-3 图

(b) 如题 7-3 图(b)所示。单元体上各应力分量为

$$\sigma_x = 30 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = -30 \text{ MPa}, \quad \tau_x = 0, \quad \alpha = 157.5^\circ$$

所以,斜截面上的应力为

$$\sigma_{157.5^\circ} = \frac{30 - 30}{2} + \frac{30 + 30}{2} \cos(2 \times 157.5^\circ) = 21.21 \text{ MPa}$$

$$\tau_{157.5^\circ} = \frac{30 + 30}{2} \sin(2 \times 157.5^\circ) = -21.21 \text{ MPa}$$

(c) 如题 7-3 图(c)所示。单元体上各应力分量为

$$\sigma_x = 70 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 70 \text{ MPa}, \quad \alpha = \alpha$$

所以,斜截面上的应力为

$$\sigma_\alpha = \frac{70 + 70}{2} + \frac{70 - 70}{2} \cos 2\alpha = 70 \text{ MPa}, \quad \tau_\alpha = \frac{70 - 70}{2} \sin 2\alpha = 0$$

各指定截面上的应力分别标示在题 7-3 图(a₁)、(b₁)、(c₁)中。

7-4 已知应力状态如题 7-4 图(a)、(b)、(c)所示,求指定斜截面 ab 上的应力,并画在单元体上。

解 应用应力转换方程

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

确定题 7-4 图(a)、(b)、(c)所示斜截面上的应力。

(a) 如题 7-4 图(a)所示。单元体上各应力分量为

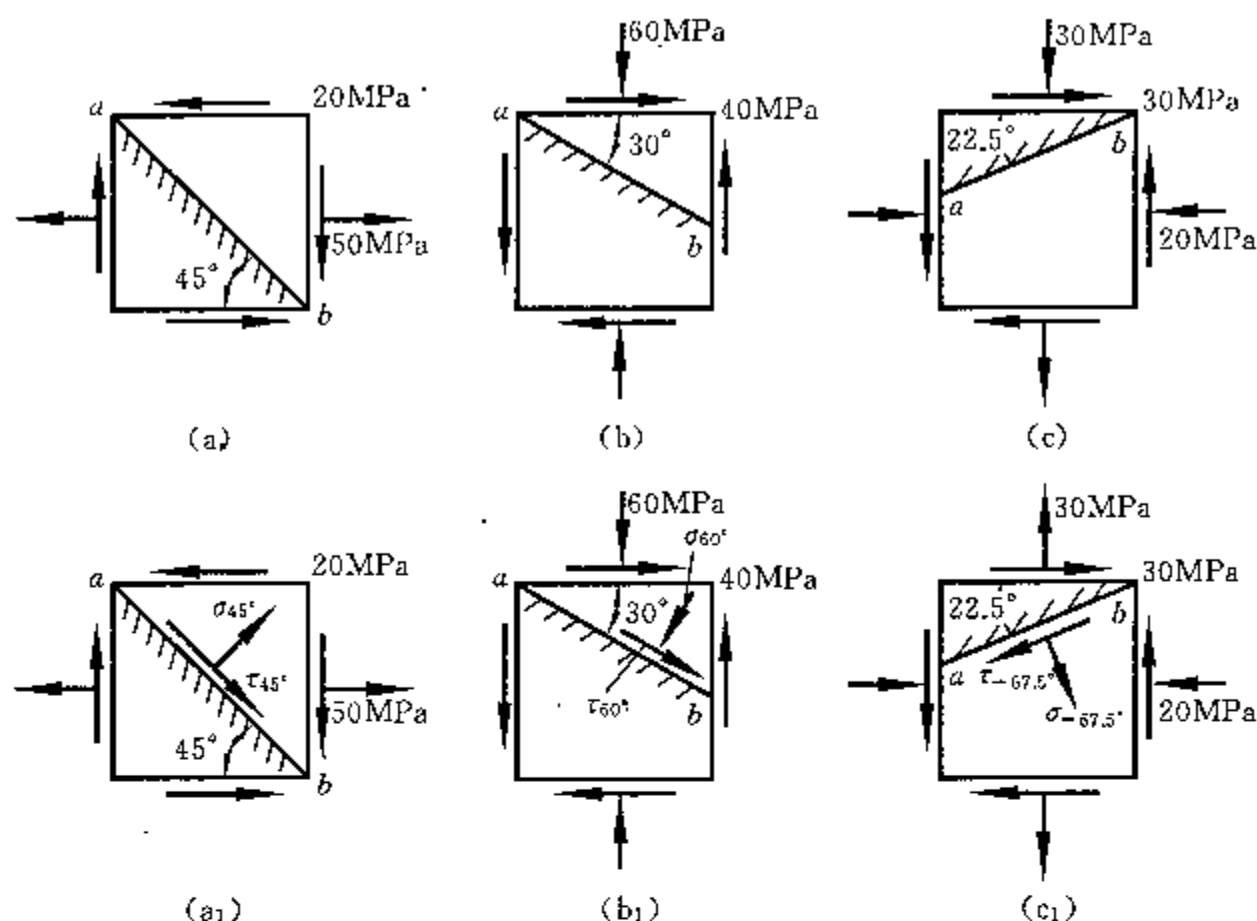
$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_x = 20 \text{ MPa}, \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{50 + 0}{2} + \frac{50 - 0}{2} \cos(2 \times 45^\circ) - \tau_x \sin(2 \times 45^\circ) = \left(\frac{50}{2} + \frac{50}{2} \cos 90^\circ - 20 \sin 90^\circ \right) \text{ MPa} = 5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{50 - 0}{2} \sin(2 \times 45^\circ) + 20 \cos(2 \times 45^\circ) = \left(\frac{50}{2} \sin 90^\circ + 20 \cos 90^\circ \right) \text{ MPa} = 25 \text{ MPa}$$

(b) 如题 7-4 图(b)所示。单元体上各应力分量为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -60 \text{ MPa}, \quad \tau_x = -40 \text{ MPa}, \quad \alpha = 60^\circ$$



题 7-4 图

$$\sigma_{60^\circ} = \frac{0-60}{2} + \frac{0+60}{2} \cos(2 \times 60^\circ) + 40 \sin(2 \times 60^\circ) = (-30-15+34.64) \text{ MPa} = -10.36 \text{ MPa}$$

$$\tau_{60^\circ} = \frac{0+60}{2} \sin(2 \times 60^\circ) - 40 \cos(2 \times 60^\circ) = (25.98+20) \text{ MPa} = 45.98 \text{ MPa}$$

(c) 如题 7-4 图(c)所示。单元体上各应力分量为

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 30 \text{ MPa}, \quad \tau_x = -30 \text{ MPa}, \quad \alpha = -67.5^\circ$$

$$\begin{aligned} \sigma_{-67.5^\circ} &= \frac{-20+30}{2} + \frac{-20-30}{2} \cos(2 \times 67.5^\circ) + 30 \sin[2 \times (-67.5^\circ)] \\ &= (5+17.7-21.2) \text{ MPa} = 1.5 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_{-67.5^\circ} = \frac{-20-30}{2} \sin(2 \times 67.5^\circ) - 30 \cos(67.5^\circ) = 17.7+21.2 = 38.9 \text{ MPa}$$

各指定斜截面上的应力被标示在题 7-4 图(a₁)、(b₁)和(c₁)上。

7-5 求题 7-5 图所示各单元体的三个主应力、最大切应力和它们的作用面方位,并画在单元体图上。

解 (a) 如题 7-5 图(a)所示,单元体上的应力分量为

$$\sigma_x = 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_x = -30 \text{ MPa}$$

(1) 求主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2} = \left(\frac{80+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80-0}{2} \right)^2 + (-30)^2} \right) \text{ MPa} = \begin{cases} 90 \text{ MPa} \\ -10 \text{ MPa} \end{cases}$$

主应力为

$$\sigma_1 = 90 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -10 \text{ MPa}$$

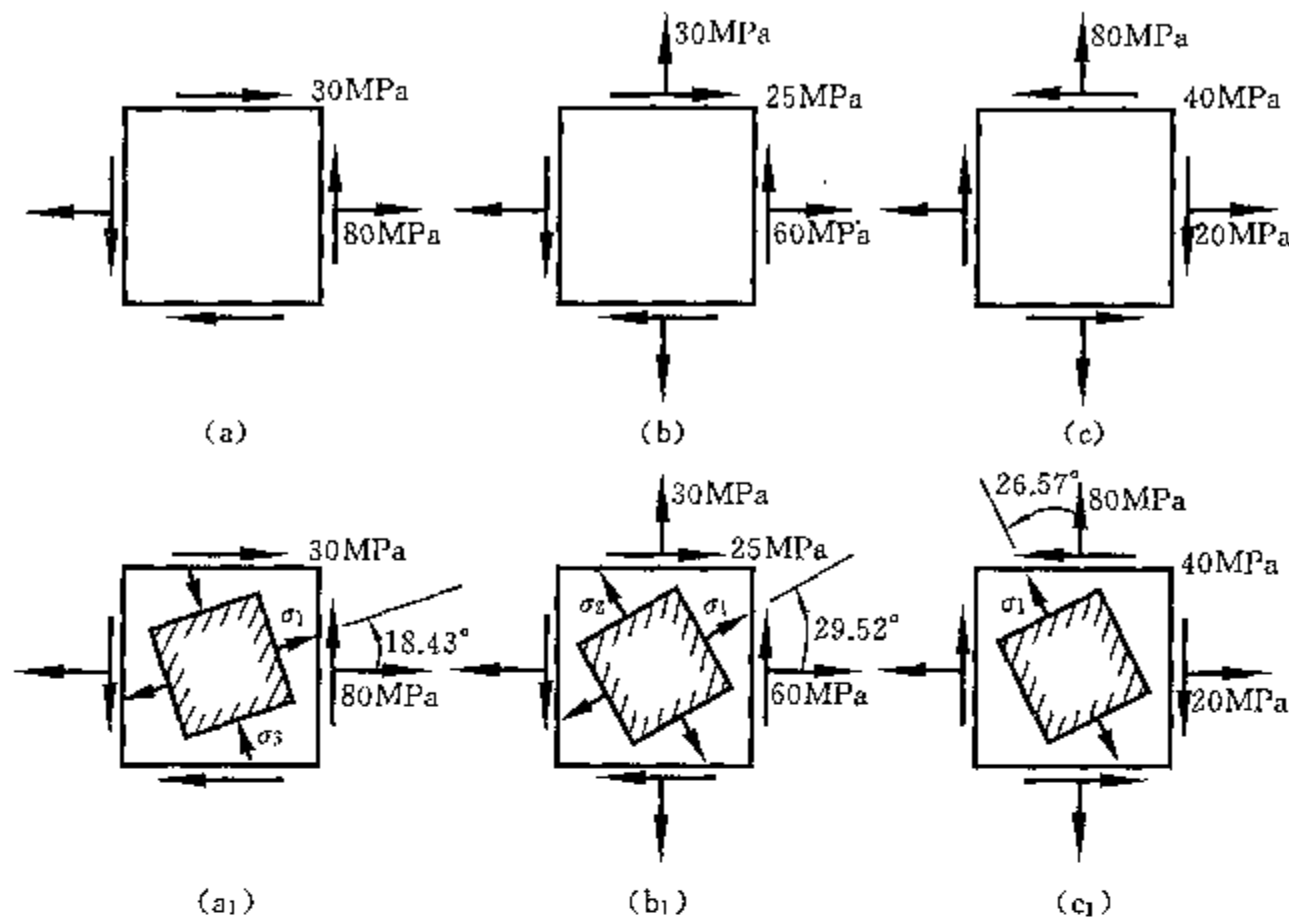
(2) 确定主平面的位置

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-30)}{90-0} = 0.75$$

取主值 $2\alpha_0 = 36.87^\circ$, $\alpha_0 = 18.43^\circ$, 被标示在题 7-5 图(a₁)所示的单元体上。

(3) 最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{90 - (-10)}{2} \text{ MPa} = 50 \text{ MPa}$$



题 7-5 图

(b) 如题 7-5 图(b)所示,单元体上的应力分量为

$$\sigma_x = 60 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 30 \text{ MPa}, \quad \tau_x = -25 \text{ MPa}$$

(1) 计算主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2} = \left(\frac{60 + 30}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 30}{2} \right)^2 + (-25)^2} \right) \text{ MPa} = \begin{cases} 74.15 \text{ MPa} \\ 15.85 \text{ MPa} \end{cases}$$

主应力为 $\sigma_1 = 74.15 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 15.85 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 0$

(2) 确定主平面的位置

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-25)}{60 - 30} = 1.667$$

取主值 $2\alpha_0 = 59.04^\circ, \alpha_0 = 29.52^\circ$, 被标示在题 7-5 图(b₁)所示的单元体上。

(3) 最大切应力 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{74.15 - 0}{2} \text{ MPa} = 37.08 \text{ MPa}$

(c) 如题 7-5 图(c)所示,单元体上的应力分量为

$$\sigma_x = 20 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 80 \text{ MPa}, \quad \tau_x = 40 \text{ MPa}$$

(1) 计算主应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2} = \left(\frac{20 + 80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20 - 80}{2} \right)^2 + 40^2} \right) \text{ MPa} = \begin{cases} 100 \text{ MPa} \\ 0 \end{cases}$$

主应力为 $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0$

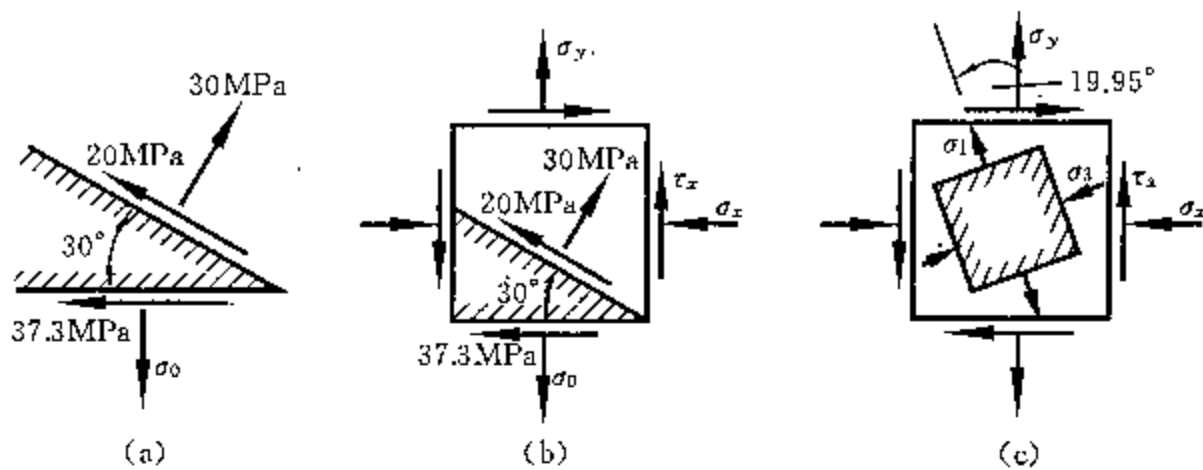
(2) 确定主平面的位置

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 40}{20 - 80} = 1.333$$

取主值, $2\alpha_0 = 53.13^\circ, \alpha_0 = 26.57^\circ$, 被标示在题 7-5 图(c₁)所示的单元体上。

(3) 最大切应力 $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{100 - 0}{2} \text{ MPa} = 50 \text{ MPa}$

7-6 已知一点为平面应力状态,过该点两平面上的应力如题 7-6 图(a)所示,求 σ_x 及主应力、主方向和最大切应力。



题 7-6 图

解 这是个已知 60° 斜面上的正应力 $\sigma_{60} = 30 \text{ MPa}$ 和切应力 $\tau_{60} = -20 \text{ MPa}$ 以及应力分量 $\tau_x = -37.3 \text{ MPa}$, 通过求解另两个应力分量 σ_x 和 σ_y , 进而计算主应力的问题。在应力转换方程中, 共有 σ_x 、 σ_y 、 τ_x 及 σ_α 和 τ_α 等 5 个参数, 只要已知其中任意三个参数, 便可计算出另 2 个参数。

(1) 计算应力分量 σ_x 和 σ_y

将题 7-6(a) 图改画成题 7-6 图(b) 所示单元体, 已知 $\tau_x = -37.3 \text{ MPa}$, $\sigma_{60} = 30 \text{ MPa}$, $\tau_{60} = -20 \text{ MPa}$, $\alpha = 60^\circ$, 代入应力转换方程

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha$$

得

$$\sigma_{60} = 30 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2 \times 60^\circ) - (-37.3) \sin(2 \times 60^\circ)$$

$$\tau_{60} = -20 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2 \times 60^\circ) + (-37.3) \cos(2 \times 60^\circ)$$

将以上两方程化简, 得

$$\sigma_x + 3\sigma_y + 9.2 = 0 \quad (1)$$

$$0.866\sigma_x - 0.866\sigma_y + 77.3 = 0 \quad (2)$$

由①式得

$$\sigma_x = -3\sigma_y - 9.2 \quad (3)$$

将③式代入②式, 得

$$-3.464\sigma_y + 69.33 = 0$$

$$\sigma_y = 20 \text{ MPa} \quad (4)$$

将④式代入③式, 得 $\sigma_x = (-3 \times 20 - 9.2) \text{ MPa} = -69.2 \text{ MPa}$

在题 7-6 图(b) 中, $\sigma_0 = \sigma_y = 20 \text{ MPa}$ 。

(2) 计算主应力

已知应力分量 $\sigma_x = -69.2 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$, $\tau_x = -37.3 \text{ MPa}$ 代入极值应力方程, 得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2} = \left(\frac{-69.2 + 20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-69.2 - 20}{2} \right)^2 + (-37.3)^2} \right) \text{ MPa}$$

$$= (-24.6 \pm 58.14) \text{ MPa} = \begin{cases} 33.54 \text{ MPa} \\ -82.74 \text{ MPa} \end{cases}$$

主应力为

$$\sigma_1 = 33.54 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -82.74 \text{ MPa}$$

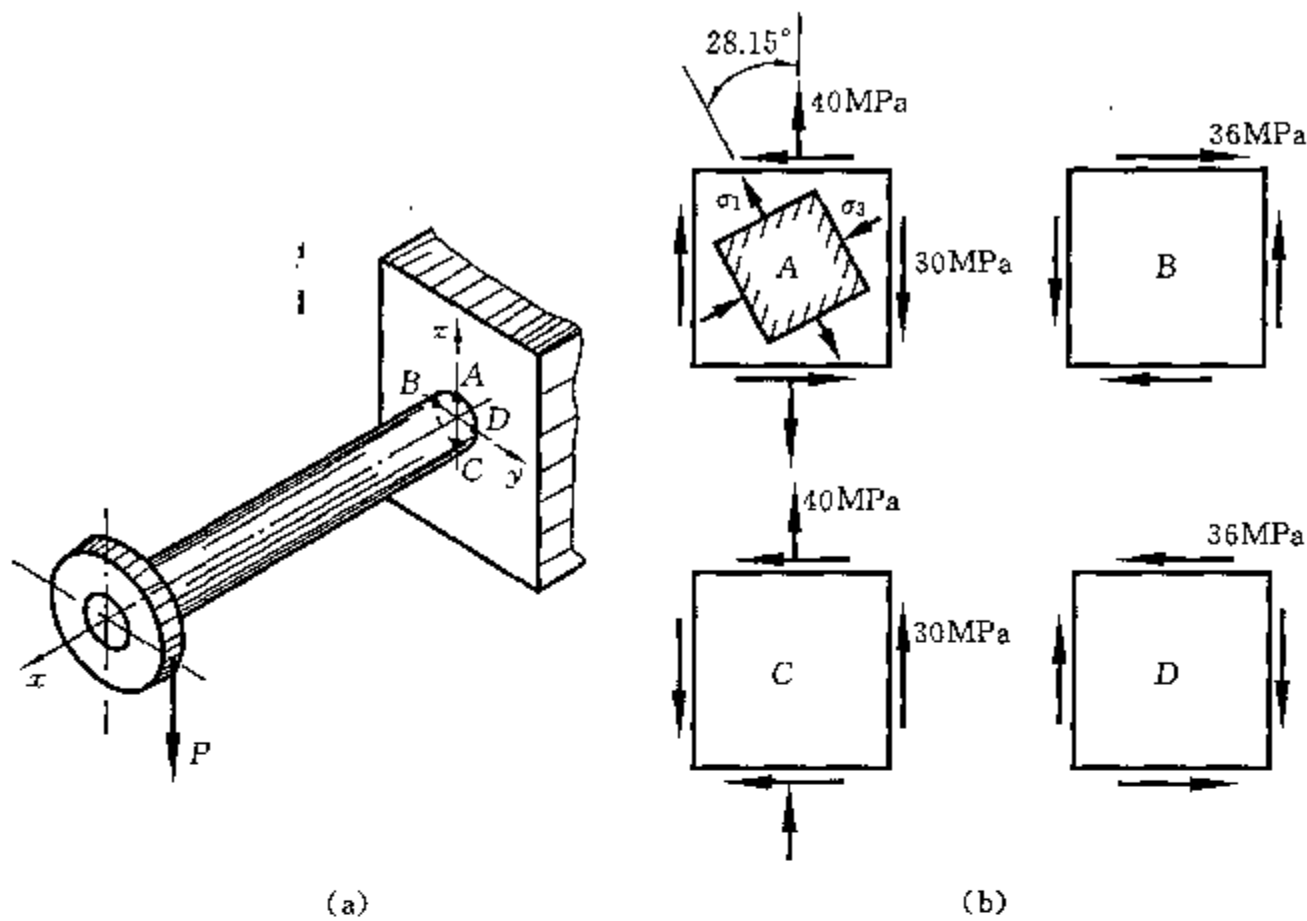
(3) 确定主平面方向

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-37.3)}{-69.2 - 20} = 0.8363$$

取主值, $2\alpha_0 = 39.9^\circ$, $\alpha_0 = 19.95^\circ$, 被标示在题 7-6 图(c) 中。

$$(4) \text{ 最大切应力 } \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{33.54 - (-82.74)}{2} \text{ MPa} = 58.14 \text{ MPa}$$

7-7 一圆轴受力如题 7-7 图(a) 所示, 已知固定端横截面上的最大弯曲应力为 40 MPa , 最大扭转切应力为 30 MPa , 因剪力面引起的最大切应力为 6 kPa 。



题 7-7 图

- (1) 用单元体画出在 A、B、C、D 各点处的应力状态；
 (2) 求点 A 的主应力和最大切应力及其作用面的方位。

解 (1) 各指定点的应力状态

点 A: 最大弯曲正应力发生在此点, 此点的弯曲切应力为零, 只有扭转切应力, 所以, 点 A 的应力分量为 $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = 30 \text{ MPa}$ 。

点 B: 点 B 位于横截面的中性轴上, 此点的弯曲正应力为零, 弯曲切应力达到最大值, 此外, 还有扭转切应力, 所以点 B 的应力分量为 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_y = -(30 - 6) \text{ MPa} = 24 \text{ MPa}$ 。

点 C: 点 C 与点 A 对称于中性轴, 所以弯曲正应力与点 A 的正应力数值相等, 但为压应力, 弯曲剪应力也为零, 只有扭转切应力。点 C 的应力分量为 $\sigma_y = 0$, $\sigma_x = -40 \text{ MPa}$, $\tau_y = -30 \text{ MPa}$ 。

点 D: 此点也在中性轴上, 所以弯曲切应力达到最大值, 此外还有扭转切应力, 弯曲正应力为零, 故点 D 的应力分量为 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_x = 36 \text{ MPa}$ 。

A、B、C、D 各点的应力状态用单元体表示在题 7-7 图(b)中。

- (2) 点 A 的主应力和最大切应力

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2} = \left(\frac{0 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 40}{2}\right)^2 + 30^2}\right) \text{ MPa}$$

$$= (20 \pm 36.06) \text{ MPa} = \begin{cases} 56.06 \text{ MPa} \\ -16.06 \text{ MPa} \end{cases}$$

主应力为

$$\sigma_1 = 56.06 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -16.06 \text{ MPa}$$

最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{56.06 - (-16.06)}{2} \text{ MPa} = 36.1 \text{ MPa}$$

主平面的位置

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times 30}{0 - 40} = 1.5$$

取主值, $2\alpha_0 = 56.31^\circ$, $\alpha_0 = 28.15^\circ$, 被标示在题 7-7 图(b)所示点 A 的应力状态单元体图上。

7-8 求题 7-8 图示各应力状态的主应力、最大切应力以及它们的作用面的方位。

解 (a) 题 7-8 图(a)所示应力状态,可分别考查在 yz 平面和 xy 平面内的两种平面应力状态,如题 7-8 图(a₁)所示。因 z 面上无切应力,所以作用于其上的应力 $\sigma_z = 50 \text{ MPa}$ 便是主应力。 xy 平面的单元体,其应力分量为

$$\sigma_x = 80 \text{ MPa}, \quad \sigma_y = 40 \text{ MPa}, \quad \tau_x = -20 \text{ MPa}$$

利用极值应力公式,确定最大和最小正应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2}$$

$$= \left(\frac{80 + 40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 - 40}{2} \right)^2 + (-20)^2} \right) \text{ MPa}$$

$$= (60 \pm 28.28) \text{ MPa} = \begin{cases} 88.28 \text{ MPa} \\ 31.72 \text{ MPa} \end{cases}$$

所以主应力为

$$\sigma_1 = 88.28 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_z = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 31.72 \text{ MPa}$$

最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{88.28 - 31.7}{2} \text{ MPa} = 28.3 \text{ MPa}$$

确定主方向

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \times (-20)}{80 - 40} = 1$$

取主值, $2\alpha_0 = 45^\circ$, $\alpha_0 = 22.5^\circ$, 被标示在题 7-8 图(a₁)中。

(b) 题 7-8 图(b)所示应力状态,可分别考查在 yz 平面和 xy 平面内的两种平面应力状态,如题 7-8 图(b₁)所示。因 x 面上无切应力,所以作用于其上的正应力 $\sigma_x = 50 \text{ MPa}$ 便是主应力。 yz 平面的单元体,其应力分量为

$$\sigma_z = \sigma_y = 0, \quad \tau_z = -50 \text{ MPa}$$

利用极值应力公式,确定最大和最小正应力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_z^2} = \pm \tau_z = \pm 50 \text{ MPa}$$

所以,主应力为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 50 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -50 \text{ MPa}$$

确定主方向

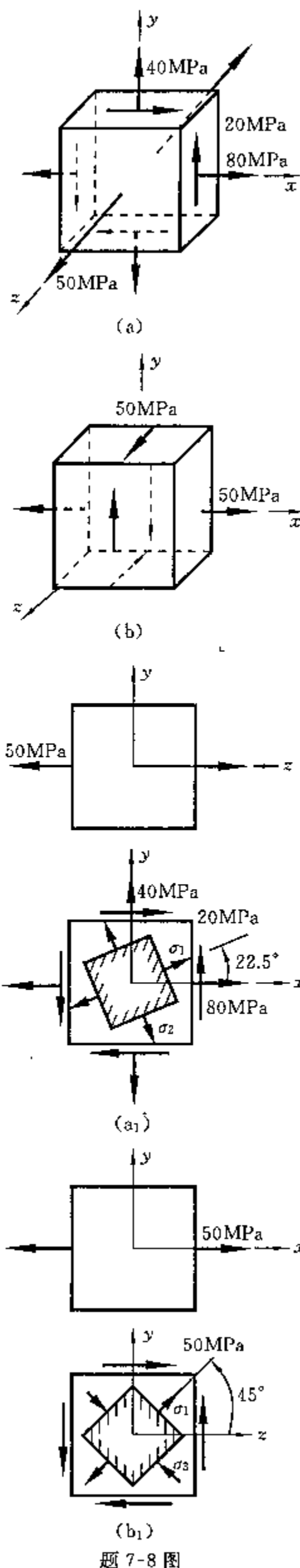
$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_z}{\sigma_z - \sigma_y} = \frac{0}{0} = \infty, \quad 2\alpha_0 = 90^\circ, \quad \alpha_0 = 45^\circ$$

主方向被标示在题 7-8 图(b₁)所示的单元体图上。最大切应力

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{50 - (-50)}{2} \text{ MPa} = 50 \text{ MPa}$$

7-9 设地层为石灰岩,泊松比 $\nu = 0.2$, 单位体积重 $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ 。试计算离地面 400 m 深处的压应力。

解 如题 7-9 图所示,在离地面 $h = 400 \text{ mm}$ 深处,一点的压应力



题 7-8 图

$$\sigma_3 = h\gamma = (400 \times 10^{-3} \times 25) \text{ Pa} = 10 \text{ MPa}$$

在地层一定深度处所取的单元体, 竖向受到地层的压力, 所以在上、下平面上有主应力 σ_3 , 但由于局部材料被周围大量材料所包围, 侧向变形受到阻碍, 故单元体的 4 个侧面也受到压力, 有主应力 σ_1 和 σ_2 , 但变形近于零, 即

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$$

应用广义胡克定律

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases} \quad (3)$$

将 $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ 代入①、②式, 得

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad (4)$$

$$\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) = 0 \quad (5)$$

再将 $\sigma_3 = -10 \text{ MPa}$ 代入④和⑤式, 得

$$\sigma_1 = \frac{\nu(1+\nu)\sigma_3}{1-\nu^2} = \frac{0.2(1+0.2)(-10)}{1-0.2^2} \text{ MPa} = -2.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_3 + \sigma_1) = 0.2(-10 - 2.5) \text{ MPa} = -2.5 \text{ MPa}$$

所以离地面 400 m 深处的压应力为

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = 10 \text{ MPa}$$

7-10 题 7-10 图(a)所示一钢制圆截面轴, 直径 $d = 60 \text{ mm}$, 材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。泊松比 $\nu = 0.28$, 用电测法测得点 A 与水平线成 45° 方向的线应变 $\epsilon_{45^\circ} = 431 \times 10^{-6}$, 求轴受的外力偶矩 m 。

解 题 7-10 图(a)所示受扭圆轴表面上点 A 受纯剪切, 其应力状态如题 7-10 图(b)所示。点 A 的切应力为

$$\tau = \frac{T}{W_t} = \frac{16m}{\pi d^3} \quad (1)$$

极值正应力

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^2} = \pm \sqrt{\tau^2} = \pm \tau$$

所以主应力为

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

主方向由下式确定

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2\tau}{0} = -\infty$$

$$2\alpha_0 = -90^\circ, \quad \alpha_0 = -45^\circ$$

主方向被标示在题 7-10 图(b)所示的单元体上。

应用广义胡克定律

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

将 $\sigma_1 = \sigma_{-45^\circ} = \tau, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_{45^\circ} = -\tau, \epsilon_1 = 431 \times 10^{-6}$ 代入上式, 得

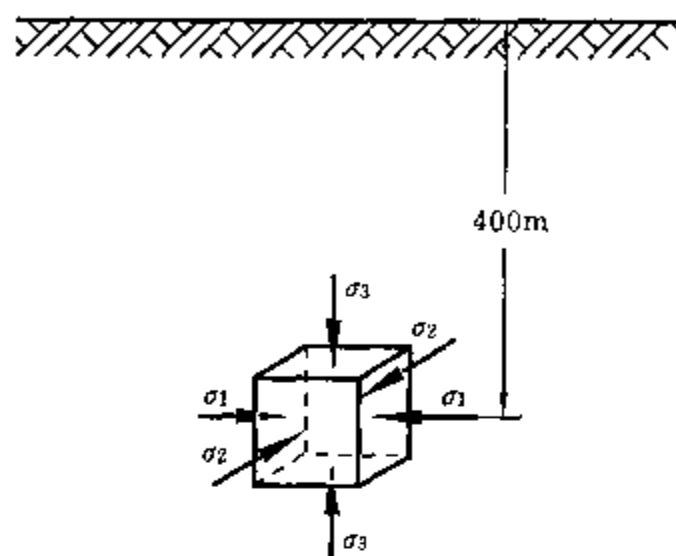
$$\frac{1}{E} [\tau - \nu(0 - \tau)] = 431 \times 10^{-6}$$

由上式得

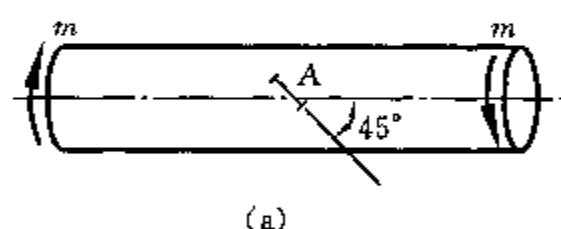
$$\tau = \frac{431 \times 10^{-6} E}{1 + \nu} \quad (2)$$

把①式代入②式, 得

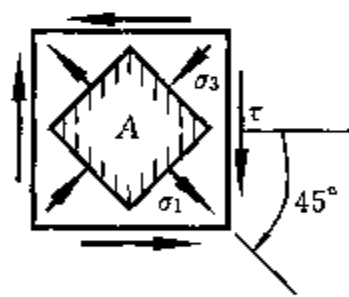
$$\frac{16m}{\pi d^3} = \frac{431 \times 10^{-6} E}{1 + \nu}$$



题 7-9 图



(a)



(b)

题 7-10 图

$$m = \frac{431 \times 10^{-6} \pi d^3 E}{16(1+\nu)} = \frac{431 \times 10^{-6} \pi \times 0.06^3 \times 210 \times 10^9}{16(1+0.28)} \text{ N} \cdot \text{m} = 2992 \text{ N} \cdot \text{m}$$

所以,轴受的外力偶矩 $m=2992 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。

7-11 列车通过钢桥时,在大梁侧表面某点测得 x 和 y 向的线应变 $\epsilon_x = 400 \times 10^{-6}$, $\epsilon_y = -120 \times 10^{-6}$,材料的弹性模量 $E=200 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,求该点 x 、 y 面的正应力 σ_x 和 σ_y 。

$$\text{解 应用广义胡克定律} \quad \epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad ①$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad ②$$

由①式得

$$\sigma_x = \epsilon_x E + \nu\sigma_y \quad ③$$

代入②式,得

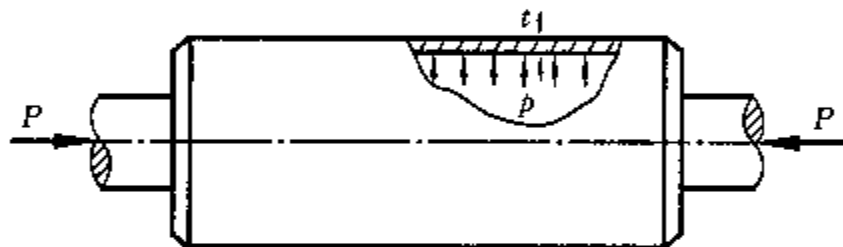
$$\epsilon_y E = \sigma_y - \nu(\epsilon_x E + \nu\sigma_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)}{1 - \nu^2} = \frac{200 \times 10^9 + (-120 \times 10^{-6} + 0.3 \times 400 \times 10^{-6})}{1 - 0.3^2} \text{ Pa} = 0$$

将 $\sigma_y=0$ 代入③式,得

$$\sigma_x = \epsilon_x E = (400 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9) \text{ Pa} = 80 \text{ MPa}$$

7-12 铸铁薄壁管如题 7-12 图所示,管的外直径 $D=200 \text{ mm}$,壁厚 $t=15 \text{ mm}$,内压 $p=4 \text{ MPa}$,轴向压力 $P=200 \text{ kN}$,许用应力 $[\sigma]=30 \text{ MPa}$,泊松比 $\nu=0.25$,试用第二强度理论校核该管的强度。



题 7-12 图

$$\text{解 周向应力} \quad \sigma' = \frac{pD}{2t} = \frac{4 \times 10^6 \times (200 - 15) \times 10^{-3}}{2 \times 15 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 24.67 \text{ MPa}$$

轴向应力

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \frac{pD}{4t} - \frac{P}{A} = \left[\frac{4 \times 10^6 \times (200 - 15) \times 10^{-3}}{4 \times 15 \times 10^{-3}} - \frac{200 \times 10^3}{\pi(200 - 15) \times 10^{-3} \times 15 \times 10^{-3}} \right] \text{ Pa} \\ &= (12.33 - 22.94) \text{ MPa} = -10.61 \text{ MPa} \end{aligned}$$

径向应力

$$\sigma''' = -p = -4 \text{ MPa}$$

按主应力排序的记号规定

$$\sigma_1 = 24.67 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -4 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -10.61 \text{ MPa}$$

按第二强度理论校核

$$\sigma_{eq2} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = [24.67 - 0.25(-4 - 10.61)] \text{ MPa} = 28.32 \text{ MPa} < [\sigma] = 30 \text{ MPa}$$

7-13 薄壁锅炉的平均直径为 1250 mm ,最大内压为 23 个大气压(1 大气压 $\approx 0.1 \text{ MPa}$),在高温下工作,屈服点 $\sigma_s=182.5 \text{ MPa}$ 。若安全系数为 1.8 ,试按第三和第四强度理论设计锅炉的壁厚。

$$\text{解 许用应力} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{182.5}{1.8} \text{ MPa} = 101.4 \text{ MPa}$$

按第三强度理论

$$\sigma_{eq3} = \frac{pD}{2\delta} = \frac{0.1 \times 23 \times 1.25}{2\delta} \leq [\sigma]$$

锅炉壁厚应为

$$\delta \geq \frac{0.1 \times 23 \times 1.25}{2[\sigma]} \text{ m} = \frac{0.1 \times 23 \times 1.25}{2 \times 101.4} \text{ m} = 14.18 \text{ mm}$$

按第四强度理论

$$\sigma_{eq4} = \frac{pD}{2.3\delta} = \frac{0.1 \times 23 \times 1.25}{2.3\delta} \leq [\sigma]$$

锅炉壁厚应为

$$\delta \geq \frac{0.1 \times 23 \times 1.25}{2.3[\sigma]} = \frac{0.1 \times 23 \times 1.25}{2.3 \times 101.4} \text{ m} = 12.33 \text{ mm}$$

第八章 组合变形构件的强度

知 识 要 点

1. 弯曲与拉伸(压缩)的组合

(1) 危险点上的最大拉应力

$$\sigma_{tmax} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z}$$

(2) 危险点上的最大压应力

$$\sigma_{cmax} = \frac{N}{A} - \frac{M_{max}}{W_z}$$

(3) 强度条件

$$\sigma_{tmax} = \frac{N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma_t], \quad \sigma_{cmax} = \frac{N}{A} - \frac{M_{max}}{W_z} \leq [\sigma_c]$$

2. 弯曲与扭转的组合

(1) 第三强度理论

① 用危险点的主应力表示

$$\sigma_{eq3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

② 用危险点的弯曲正应力 σ_B 和扭转切应力 τ_t 表示

$$\sigma_{eq3} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_t^2} \leq [\sigma]$$

③ 用危险截面上的弯矩 M 和扭矩 T 表示

$$\sigma_{eq3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (\text{仅适用于圆截面杆})$$

式中, W 为圆截面的惯性矩。

(2) 第四强度理论

① 用危险点的主应力表示

$$\sigma_{eq4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

② 用危险点的弯曲正应力 σ_B 和扭转切应力 τ_t 表示

$$\sigma_{eq4} = \sqrt{\sigma_B^2 + 3\tau_t^2} \leq [\sigma]$$

③ 用危险截面的弯矩 M 和扭矩 T 表示

$$\sigma_{eq4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma] \quad (\text{仅对圆截面杆适用})$$

式中, W 为圆截面的惯性矩。

3. 承受内压的薄壁圆筒的强度计算

(1) 圆筒横截面上的轴向正应力

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta}$$

(2) 圆筒周向正应力

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta}$$

以上两式中, D 为圆筒的平均直径, δ 为圆筒的壁厚度。

(3) 圆筒内表面上径向压应力

$$\sigma_r = p$$

(4) 主应力

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}, \quad \sigma_2 = \sigma_r = \frac{pD}{4\delta}, \quad \sigma_3 = 0$$

(5) 强度条件

① 第三强度理论

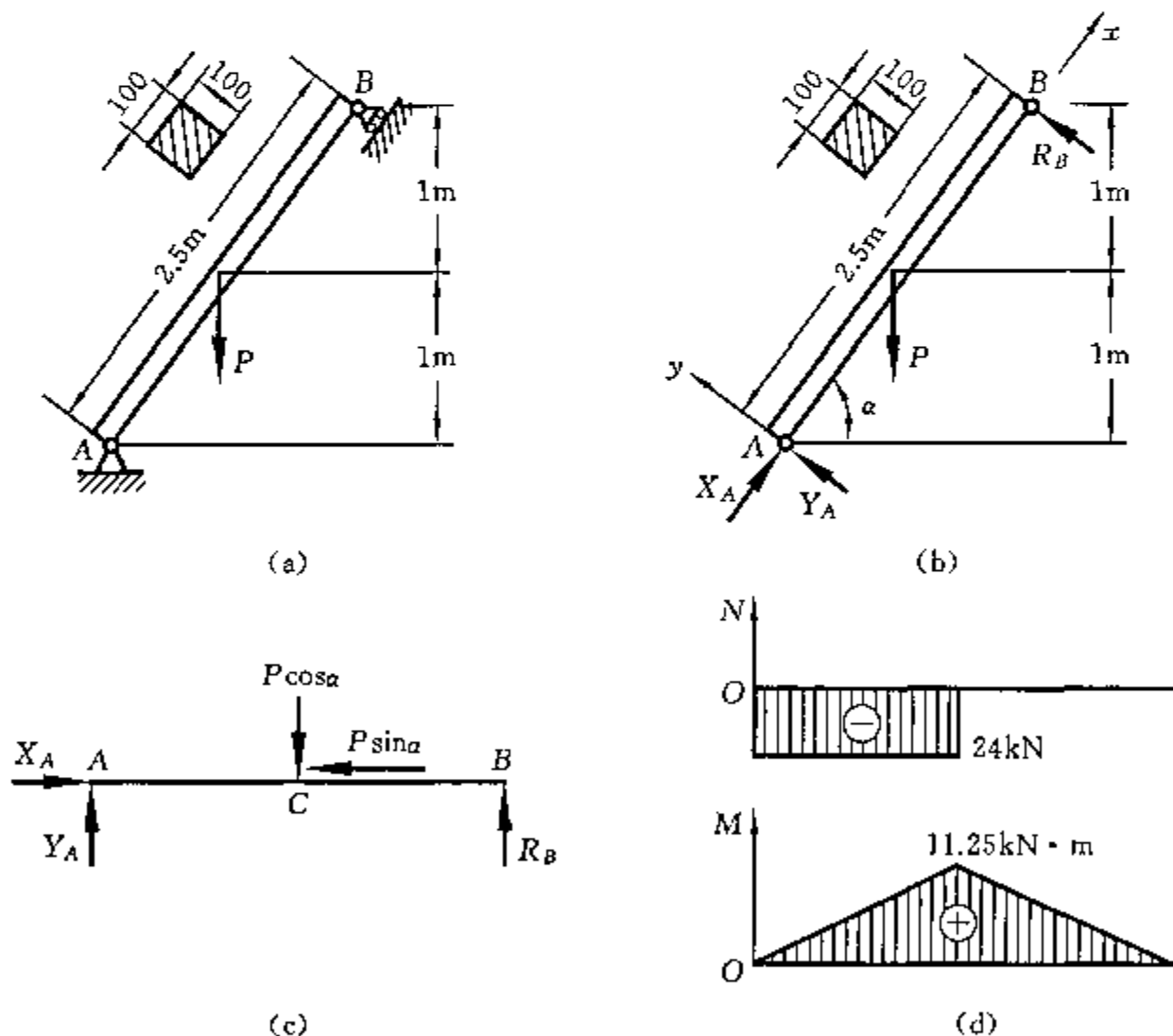
$$\sigma_{eq3} = \frac{pD}{2\delta} \leq [\sigma]$$

② 第四强度理论

$$\sigma_{eq4} = \frac{pD}{2.3\delta} \leq [\sigma]$$

习题详解

8-1 如题 8-1 图(a)所示,斜杆 AB 的横截面为 $100 \times 100 \text{ mm}^2$ 的正方形,若 $P = 3 \text{ kN}$,试求其最大拉应力和最大压应力。



题 8-1 图

解 (1) 计算外力

解除题 8-1 图(a)所示斜杆的支座,代之以支座反力,作受力图如题 8-1 图(b)所示,由几何关系可得斜杆与水平线夹角

$$\alpha = \arcsin \frac{2}{2.5} = 53.13^\circ$$

由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad X_A - P \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad Y_A - P \cos \alpha + R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0, \quad 2.5 R_B - \frac{2.5}{2} P \cos \alpha = 0$$

得

$$X_A = 3x \sin 53.13^\circ \text{ kN} = 2.4 \text{ kN}$$

$$R_B = \frac{1}{2} \times 3 \times \cos 53.13^\circ \text{ kN} = 0.9 \text{ kN}$$

$$Y_A = (3 \times \cos 53.13^\circ - 0.9) \text{ kN} = 0.9 \text{ kN}$$

(2) 计算内力

梁除受弯曲外, AC 段还承受轴向压缩, 如题 8-1 图(c)所示。最大弯矩产生在截面 C 上

$$M_{\max} = \frac{2.5}{2} R_B = \left(\frac{2.5}{2} \times 0.9 \right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 1.125 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

AC 段梁承受的轴向压力

$$N = x_A = 2.4 \text{ kN}$$

(3) 计算应力

梁的横截面面积

$$A = bh = 0.1^2 \text{ m}^2 = 0.01 \text{ m}^2$$

梁横截面的抗弯截面系数

$$W_z = \frac{bh^3}{6} = \frac{0.1^3}{6} \text{ m}^3 = 1.667 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

危险截面 C 上的最大拉应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} - \frac{N}{A} = \left(\frac{1.125 \times 10^3}{1.667 \times 10^{-4}} - \frac{2.4 \times 10^3}{0.01} \right) \text{ Pa} = (6.749 - 0.24) \text{ MPa} = 6.51 \text{ MPa}$$

最大压应力

$$\sigma_{\min} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{A} = \left(\frac{1.125 \times 10^3}{1.667 \times 10^{-4}} + \frac{2.4 \times 10^3}{0.01} \right) \text{ Pa} = (6.749 + 0.24) \text{ MPa} = 6.989 \text{ MPa}$$

8-2 题 8-2 图(a)所示, 水塔受水平风力的作用, 风压的合力 $P = 60 \text{ kN}$, 作用在离地面高 $H = 15 \text{ m}$ 的位置, 基础入土深度 $h = 3 \text{ m}$, 设土的许用压应力 $[\sigma_c] = 0.3 \text{ MPa}$, 基础的直径 $d = 5 \text{ m}$, 为使基础不受拉应力, 最大压应力又不超过 $[\sigma_c]$, 求水塔连同基础总重 G 允许的范围。

解 题 8-2 图(a)所示水塔的受力图如题 8-2 图(b)所示。这是个压弯组合变形问题, 基础底面的最大拉应力和最大压应力分别为

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} - \frac{N}{A} = \frac{P(H+h)}{W_z} - \frac{G}{A}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M}{W_z} + \frac{N}{A} = \frac{P(H+h)}{W_z} + \frac{G}{A}$$

(1) 基础不受拉应力的条件

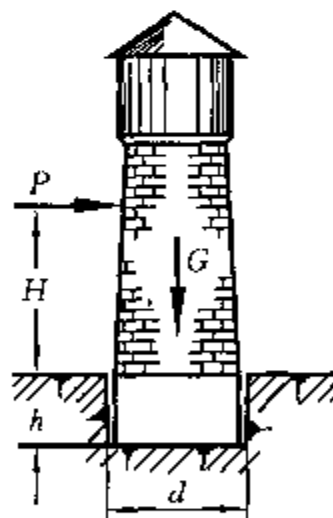
$$\sigma_{\max} = \frac{P(H+h)}{W_z} - \frac{G}{A} \leq 0$$

$$G \geq \frac{AP(H+h)}{W_z} = \frac{8\pi d^2 P(H+h)}{\pi d^3} = \frac{8P(H+h)}{d} \\ = \frac{8 \times 60 \times 10^3 \times (15+3)}{5} \text{ N} = 1728 \text{ kN}$$

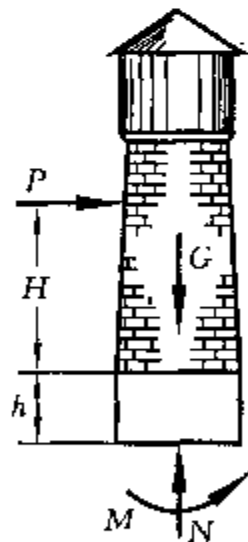
(2) 最大压应力不超过 $[\sigma_c]$ 的条件

$$\sigma_{\min} = \frac{M}{W_z} + \frac{N}{A} = \frac{32P(H+h)}{\pi d^3} + \frac{4G}{\pi d^2} \leq [\sigma_c]$$

$$G \leq \left[[\sigma_c] - \frac{32P(H+h)}{\pi d^3} \right] \frac{\pi d^2}{4} = \left[0.3 \times 10^6 - \frac{32 \times 60 \times 10^3 (15+3)}{\pi \times 5^3} \right] \frac{\pi \times 5^2}{4}$$



(a)



(b)

题 8-2 图

$$=(360000-88000) \times 19.64 \text{ N}=4164 \text{ kN}$$

所以,为使基础不受拉应力,最大压应力又不超过 $[\sigma_c]=0.3 \text{ MPa}$,水塔连同基础的总重应小于4164 kN,大于1728 kN。

8-3 悬臂吊如题8-3图(a)所示,起重量(包括电葫芦) $G=30 \text{ kN}$,横梁BC为工字钢,许用应力 $[\sigma]=140 \text{ MPa}$,试选择工字钢的型号(可近似按G行至梁中点位置计算)。

解 (1) 计算外力

取横梁BC为研究对象,其受力图如题8-3图(b)所示。起重量G作用在横梁跨中点D。斜杆AB的拉力S可分解为 X_B 和 Y_B 两个分力。梁在力G和 Y_C 、 Y_B 作用下产生弯曲,同时在 X_C 和 X_B 作用下产生轴向压缩,这是个弯曲与压缩组合变形问题。由平衡条件

$$\sum M_C = 0, \quad Y_B l - \frac{1}{2} G l = 0$$

得
$$Y_B = \frac{G}{2} = \frac{30}{2} \text{ kN} = 15 \text{ kN}$$

而
$$X_B = \frac{Y_B}{\tan 30^\circ} = \frac{15}{0.577} \text{ kN} = 25.98 \text{ kN}$$

又由平衡条件 $\sum Y = 0, \quad Y_C + Y_B - G = 0$

$$\sum X = 0, \quad X_C - X_B = 0$$

得
$$Y_C = G - Y_B = (30 - 15) \text{ kN} = 15 \text{ kN}$$

$$X_C = X_B = 25.98 \text{ kN}$$

(2) 内力和应力计算

梁的最大弯矩产生在跨中截面C上,其值为

$$M_{\max} = \frac{1}{4} G l = \left(\frac{1}{4} \times 30 \times 2.5 \right) \text{ kN} \cdot \text{m} = 18.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

应用弯曲正应力强度条件

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

可得
$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{18.75 \times 10^3}{140 \times 10^6} \text{ m}^3 = 133.9 \text{ cm}^3$$

在弯压组合变形中,弯曲正应力是主要的,所以先按弯曲正应力强度要求选择工字钢型号,然后用弯压组合变形的正应力强度进行校核。查文献1附录一型钢表,16号工字钢的 $W_z=141 \text{ cm}^3$, $A=26.131 \text{ cm}^2$ 。所以暂定选择16号工字钢。

梁在弯曲变形的同时,还受轴向压缩,轴向压力为

$$N = X_B = 25.98 \text{ kN}$$

危险截面D上,轴向压缩产生的压应力为

$$\sigma_c = \frac{N}{A} = \frac{25.98 \times 10^3}{26.131 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 9.942 \text{ MPa}$$

(3) 校核梁的强度

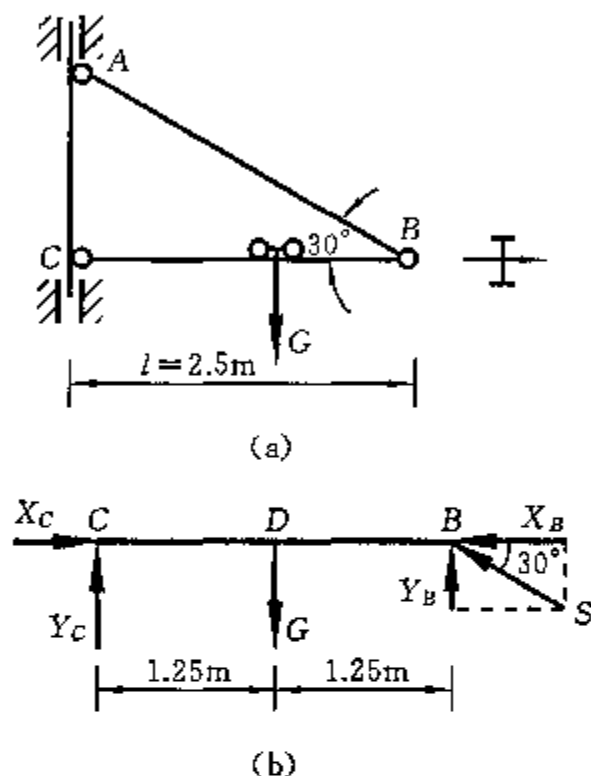
最大弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{18.75 \times 10^3}{141 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 133 \text{ MPa}$$

危险截面D上总的最大正应力是压应力

$$\sigma_{\text{cmax}} = \sigma_{\max} + \sigma_c = (133 + 9.942) \text{ MPa} = 143 \text{ MPa}$$

超出许用应力 $[\sigma]=140 \text{ MPa}$ 的2%,在工程实际中是允许的。



题8-3图

8-4 一夹具如题 8-4 图(a)所示,已知 $P=2\text{ kN}$, 偏心距 $e=6\text{ cm}$, 竖杆的矩形截面尺寸 $b=1\text{ cm}$, $h=2.2\text{ cm}$ 。材料是 Q235 钢, $\sigma_s=240\text{ MPa}$, 规定安全系数 $[n]=1.5$ 。试校核竖杆的强度。

解 (1) 计算内力

竖杆在力 P 作用下, 产生偏心拉伸。用一假想平面将竖杆截开, 取下段为研究对象, 作受力图如题 8-4 图(b)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad N - P = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad M - Pe = 0$$

可得竖杆的轴力和弯矩分别为

$$N = P = 2\text{ kN}$$

$$M = Pe = (2 \times 0.06)\text{ kN} \cdot \text{m} = 0.12\text{ kN} \cdot \text{m}$$

这是弯曲与拉伸组合变形问题。

(2) 弯拉强度校核

竖杆内弯拉产生的总的最大正应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{N}{bh} + \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \left(\frac{2 \times 10^3}{0.01 \times 0.022} + \frac{6 \times 120}{0.01 \times 0.022^2} \right) \text{ Pa} \\ &= (9.091 + 148.8)\text{ MPa} = 157.9\text{ MPa} \end{aligned}$$

由弯拉强度条件

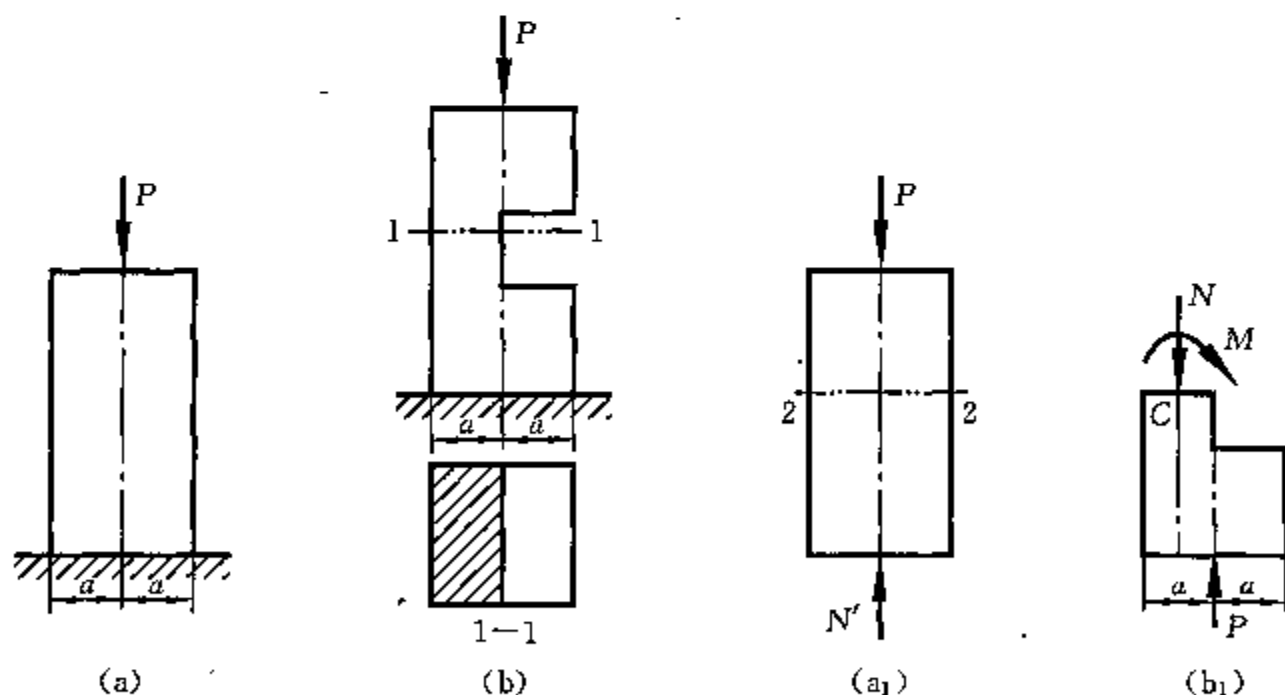
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n}$$

可得安全系数

$$n \geq \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{240}{157.9} = 1.52 > [n] = 1.50$$

满足强度要求。

8-5 若在题 8-5 图(a)所示正方形截面短柱的中间处开一个槽, 如题 8-5 图(b)所示, 使横截面面积减小为原截面面积的一半, 问最大压应力将比不开槽时增大几倍?



题 8-5 图

解 (1) 计算开槽时的最大压应力

用一假想截面 1—1 将有槽短柱从开槽处截开, 取下半段为研究对象, 作受力图如题 8-5 图(b₁)所示。由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad P - N = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad \frac{1}{2}Pa - M = 0$$

可得有槽处横截面上的内力

$$N = P, \quad M = \frac{1}{2}Pa$$

这是弯曲与压缩的组合变形问题,最大压应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W_z} = \frac{P}{2a^2} + \frac{\frac{1}{2}Pa}{\frac{1}{6}2a^2} = \frac{2P}{a^2}$$

(2) 计算不开槽时的最大压应力

用一假想截面 2—2 将图 8-5 图(a)所示短柱的受力图(a₁)截开,截面 2—2 上的最大压应力

$$\sigma'_{\max} = \frac{N'}{A} = \frac{P}{A} = \frac{P}{4a^2}$$

(3) 开槽与不开槽两种情况下最大压应力的比较

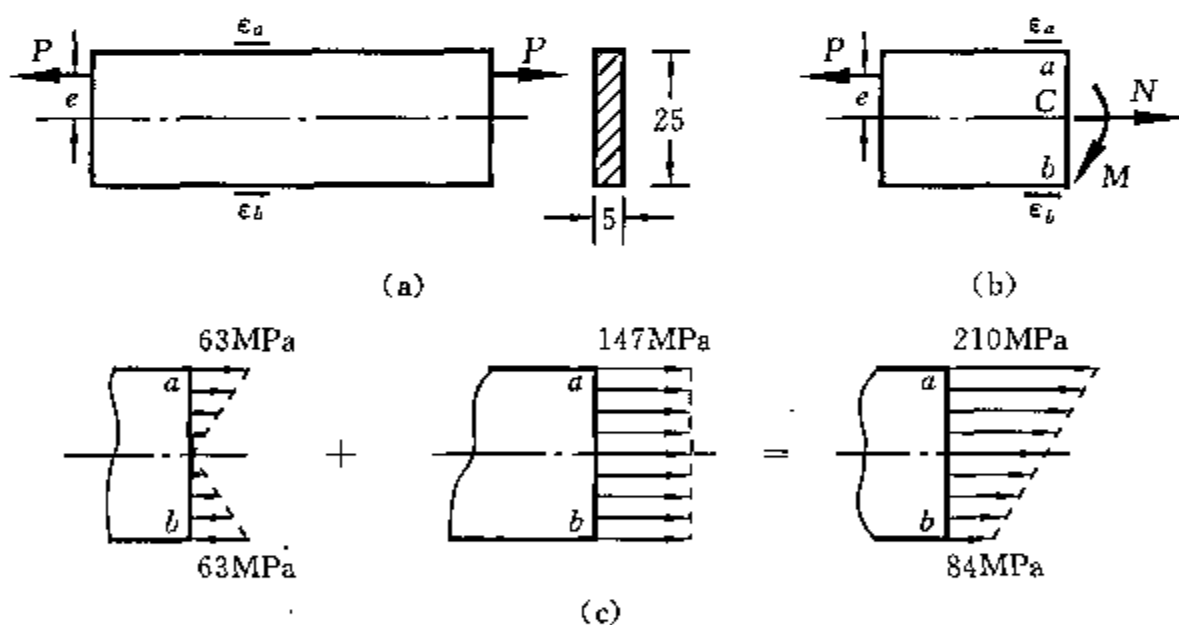
$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma'_{\max}} = \frac{2P/a^2}{P/4a^2} = 8$$

开槽比不开槽,最大压应力增大 7 倍。

8-6 题 8-6 图(a)所示一矩形截面杆,用应变片测得杆件上、下表面的轴向应变分别为 $\epsilon_a = 1 \times 10^{-3}$, $\epsilon_b = 0.4 \times 10^{-3}$, 材料的弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$ 。

(1) 试绘制横截面的正应力分布图;

(2) 求拉力 P 及其偏心距 e 的数值。



题 8-6 图

解 (1) 横截面上的内力

用一假想的平面 a—a 将杆截开,取左侧部分为研究对象,作受力图如题 8-6 图(b)所示。由平衡条件

$$\sum X = 0, \quad N - P = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad Pe - M = 0$$

可得

$$N = P, \quad M = Pe$$

(2) 计算应力

横截面的面积和抗弯截面系数分别为

$$A=bh, \quad W=\frac{1}{6}bh^2$$

这是因偏心拉伸产生的弯拉组合变形问题,点 a 和 b 处的正应力分别为

$$\sigma_a = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^2} = \frac{P}{bh^2}(h+6e) \quad (1)$$

$$\sigma_b = \frac{N}{A} - \frac{M}{W} = \frac{P}{bh} - \frac{6Pe}{bh^2} = \frac{P}{bh^2}(h-6e) \quad (2)$$

应用胡克定律

$$\sigma_a = E\epsilon_a, \quad \sigma_b = E\epsilon_b$$

①、②式可改写为

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} = \frac{P}{Ebh^2}(h+6e) = 1.0 \times 10^{-3} \quad (3)$$

$$\epsilon_b = \frac{\sigma_b}{E} = \frac{P}{Ebh^2}(h-6e) = 0.4 \times 10^{-3} \quad (4)$$

③式+④式,得

$$\frac{2Ph}{Ebh^2} = 1.4 \times 10^{-3}$$

$$P = \frac{1.4 \times 10^{-3} Ebh^2}{2h} = \frac{1.4 \times 10^{-3} \times 210 \times 10^9 \times 0.005 \times 0.025^2}{2 \times 0.025} \text{ N} = 18.38 \text{ kN}$$

将 P 值代入式④,得偏心距

$$e = \frac{Ph - 0.4 \times 10^{-3} Ebh^2}{6P} = \frac{18.38 \times 10^3 \times 0.025 - 0.4 \times 10^{-3} \times 210 \times 10^9 \times 0.005 \times 0.025^2}{6 \times 18.38 \times 10^3} \text{ m}$$

$$= 1.786 \text{ mm}$$

弯拉组合变形产生的最大弯曲正应力

$$\sigma_M = \frac{M}{W} = \frac{6Pe}{bh^2} = \frac{6 \times 18.38 \times 10^3 \times 1.786 \times 10^{-3}}{0.005 \times 0.025^2} \text{ Pa} = 63 \text{ MPa}$$

弯拉组合变形产生的拉伸正应力

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{P}{bh} = \frac{18.38 \times 10^3}{0.005 \times 0.025} \text{ Pa} = 147 \text{ MPa}$$

弯拉组合变形产生在点 a 、 b 处总的正应力分别为

$$\sigma_a = \sigma_N + \sigma_M = (147 + 63) \text{ MPa} = 210 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = \sigma_N - \sigma_M = (147 - 63) \text{ MPa} = 84 \text{ MPa}$$

(3) 横截面上正应力分布图如题 8-6 图(c)所示。

8-7 一矩形截面短柱,受题 8-7 图(a)所示偏心压力 P 作用,已知许用拉应力 $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$,许用压应力 $[\sigma_c] = 90 \text{ MPa}$,求许用压力 $[P]$ 。

解 (1) 短柱的内力

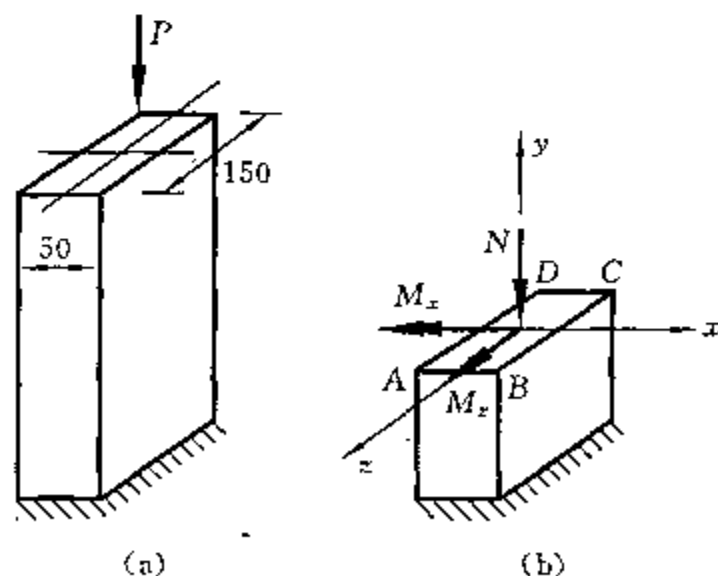
用一假想的平面 $ABCD$,将短柱截开,取下侧一段为研究对象,作受力图如题 8-7 图(b)所示,并用双箭矢表示弯矩矢量,横截面上的轴力和弯矩分别为

$$N = P, \quad M_x = 0.025P, \quad M_z = 0.075P$$

(2) 短柱的应力

这是个弯曲与压缩组合变形问题,最大应力将产生在横截面的 4 个角点 A 、 B 、 C 、 D 处。横截面的面积和抗弯截面系数分别为

$$A = (0.15 \times 0.05) \text{ m}^2 = 7.5 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$



题 8-7 图

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0.05 \times 0.15^2}{6} \text{ m}^3 = 1.875 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$W_y = \frac{b^2h}{6} = \frac{0.05^2 \times 0.15}{6} \text{ m}^3 = 6.25 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

4 个角点上总的正应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_y} + \frac{M_z}{W_x} = -\frac{P}{7.5 \times 10^{-3}} - \frac{0.025P}{6.25 \times 10^{-5}} + \frac{0.075P}{1.875 \times 10^{-4}} \\ &= (-133.3 - 400 + 400)P = -133.3P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_y} + \frac{M_z}{W_x} = -\frac{P}{7.5 \times 10^{-3}} + \frac{0.025P}{6.25 \times 10^{-5}} + \frac{0.075P}{1.875 \times 10^{-4}} \\ &= -133.3P + 400P + 400P = 666.7P \end{aligned}$$

$$\sigma_C = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_y} - \frac{M_z}{W_x} = -133.3P + 400P - 400P = -133.3P$$

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_y} - \frac{M_z}{W_x} = -133.3P - 400P - 400P = -933.3P$$

(3) 确定许用压力

比较 4 个角点上的应力可知,最大拉应力和最大压应力分别产生在点 B 和点 D,应用强度条件

$$\sigma_B = 666.7P \leq [\sigma_t], \quad \sigma_D = 933.3P \leq [\sigma_c]$$

可得许用压力

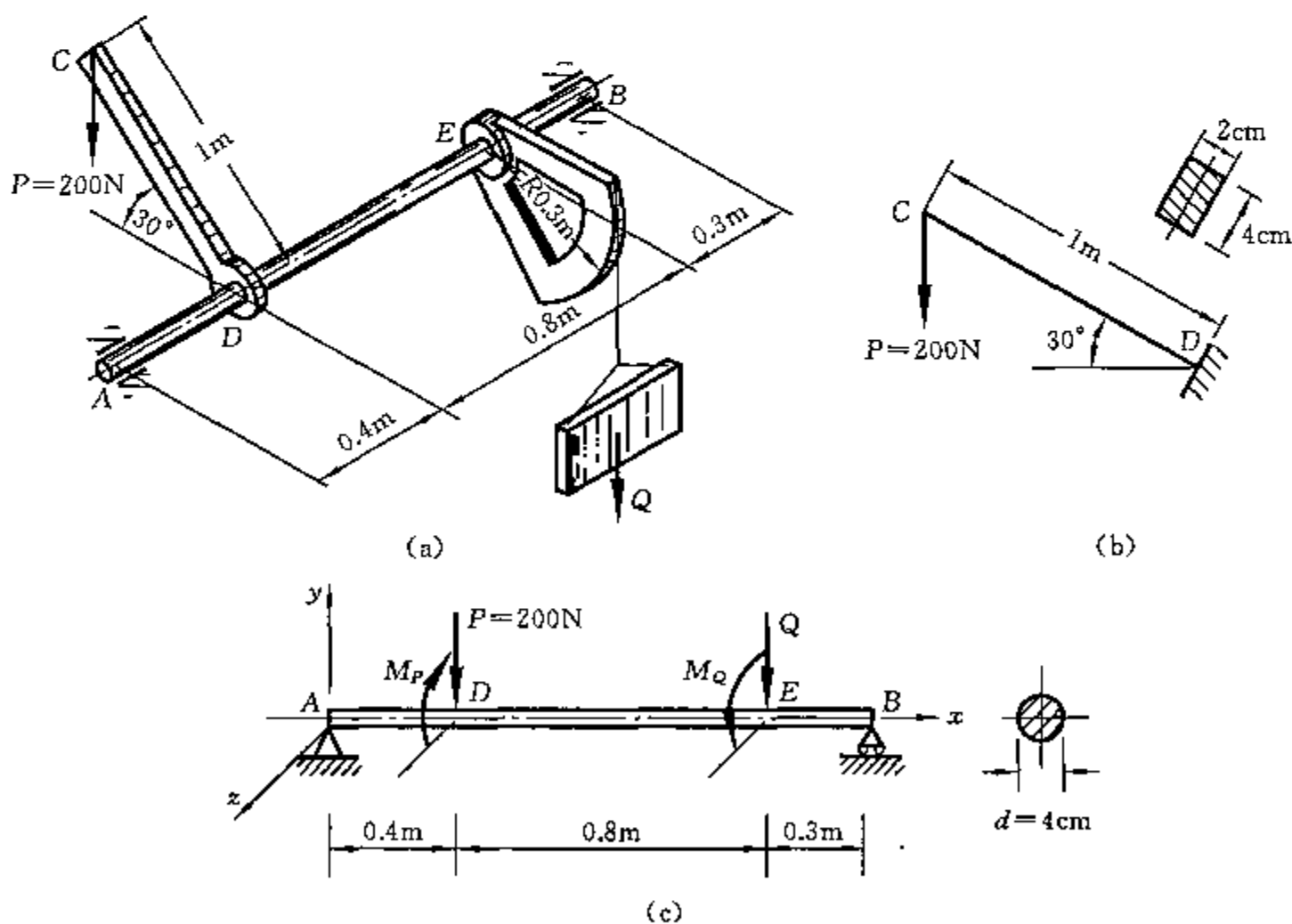
$$[P_1] = \frac{[\sigma_t]}{666.7} = \frac{30 \times 10^6}{666.7} \text{ N} = 45 \text{ kN}$$

$$[P_2] = \frac{[\sigma_c]}{933.3} = \frac{90 \times 10^6}{933.3} \text{ N} = 96.43 \text{ kN}$$

比较两种计算结果,选其小者

$$[P] = [P_1] = 45 \text{ kN}$$

8-8 加热炉炉门的升降装置如题 8-8 图(a)所示。轴 AB 的直径 $d = 4 \text{ cm}$, CD 为 $4 \times 2 \text{ cm}^2$ 的矩形截面杆,材料都是 Q235 钢, $\sigma_s = 240 \text{ MPa}$, 已知力 $P = 200 \text{ N}$ 。



题 8-8 图

(1) 试求杆 CD 的最大正应力;

(2) 求轴 AB 的工作安全系数。

解 (1) 力学模型

将矩形截面杆 CD 简化为题 8-8 图(b)所示的悬臂梁, 将轴 AB 简化为受弯曲和扭转共同作用的简支梁, 如题 8-8 图(c)所示。

(2) 计算杆 CD 的最大正应力

杆 CD 受压弯组合作用, 最大正应力产生在危险截面 D 上, 该截面上的轴力和弯矩分别为

$$N = P \sin 30^\circ = 200 \sin 30^\circ \text{ N} = 100 \text{ N}$$

$$M = (P \cos 30^\circ \times 1) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= 200 \cos 30^\circ \text{ N} \cdot \text{m} = 173.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

最大正应力为

$$\sigma_{\max} = - \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{W} \right)$$

$$= - \left(\frac{100}{0.02 \times 0.04} + \frac{6 \times 173.2}{0.02 \times 0.04^2} \right) \text{ Pa}$$

$$= - (0.125 \times 10^6 + 32.48 \times 10^6) \text{ Pa}$$

$$= -32.61 \text{ MPa (压)}$$

(3) 计算轴 AB 的工作安全系数

(a) 轴 AB 的外力 轴 AB 的受力

图如题 8-8 图(d)所示。由平衡条件

$$\sum M_x = 0, \quad M_Q - M_P = 0$$

$$QR - P \cos 30^\circ \times 1 = 0$$

得

$$Q = \frac{P \cos 30^\circ}{R} = \frac{200 \cos 30^\circ}{0.30} \text{ N} = 577.4 \text{ N}$$

再由平衡条件

$$\sum M_x = 0, \quad -0.4P - 1.2Q + 1.5R_B = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - P - Q = 0$$

可得支座反力

$$R_B = \frac{0.4P + 1.2Q}{1.5} = \frac{0.4 \times 200 + 1.2 \times 577.4}{1.5} \text{ N} = 515.3 \text{ N}$$

$$R_A = P + Q - R_B = (200 + 577.4 - 515.3) \text{ N} = 262.1 \text{ N}$$

(b) 轴 AB 的内力

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作轴 AB 的弯矩图如题 8-8 图(d)所示。轴 AB 的扭矩图也画在该图中。轴 AB 受弯扭组合作用, 从题 8-8 图(d)可知, 危险截面在 E 处, 抗弯截面系数为

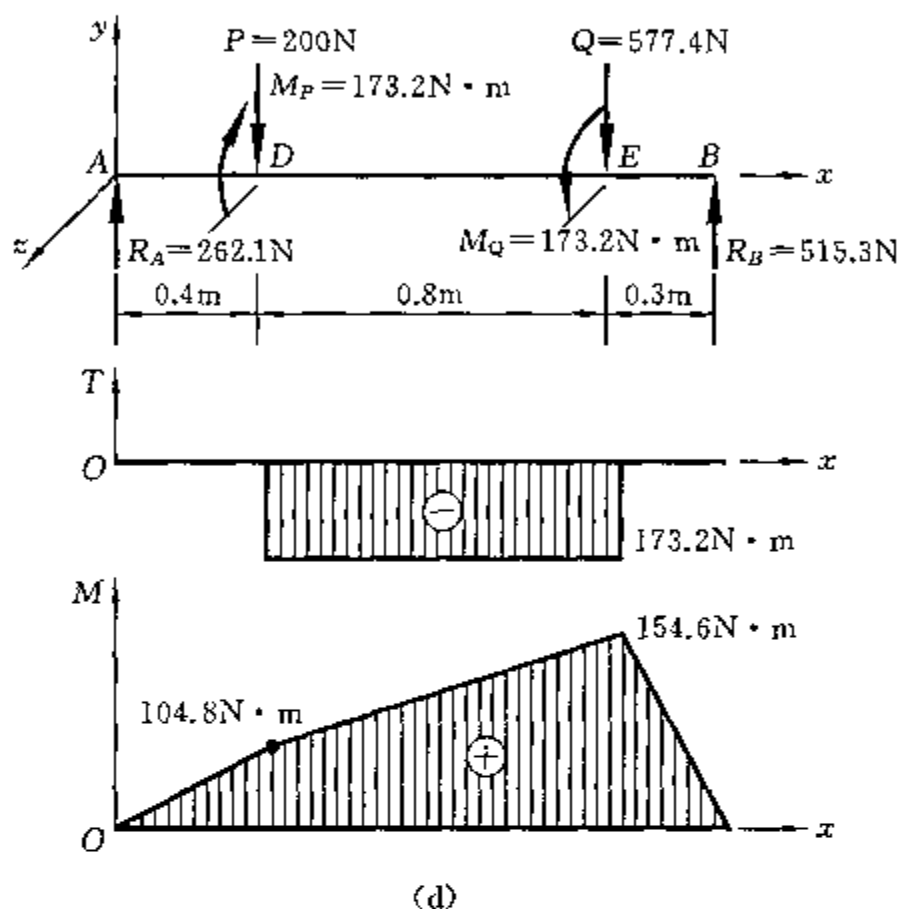
$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \times 0.04^3}{32} \text{ m}^3 = 6.283 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

(c) 轴 AB 的工作安全系数

按第三强度理论, 相当应力为

$$\sigma_{\text{eq3}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{\sqrt{154.6^2 + 173.2^2}}{6.283 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = \frac{2.322 \times 10^5}{6.283 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 36.96 \text{ MPa}$$

按第四强度理论, 相当应力为



续题 8-8 图

$$\sigma_{eq4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} = \frac{\sqrt{154.6^2 + 0.75 \times 173.2^2}}{6.283 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = \frac{2.154 \times 10^2}{6.283 \times 10^{-6}} \text{ Pa} = 34.28 \text{ MPa}$$

所以,按第三强度理论和第四强度理论,安全系数分别为

$$n_3 = \frac{\sigma_s}{\sigma_{eq3}} = \frac{240}{36.96} = 6.494, \quad n_4 = \frac{\sigma_s}{\sigma_{eq4}} = \frac{240}{34.28} = 7.001$$

8-9 一轴上装有两个圆轮如题 8-9 图(a)所示, P 、 Q 两力分别作用于两轮上并处于平衡状态。圆轴直径 $d=110 \text{ mm}$, $[\sigma]=60 \text{ MPa}$, 试按第四强度理论确定许用载荷。

解 (1) 力学模型

题 8-9 图(a)所示的轴 AB 可简化为受弯曲和扭转组合作用的简支梁, 如题 8-9 图(b)所示。

(2) 轴的外力

轴 AB 的受力图如题 8-9 图(c)所示。由平衡条件

$$\sum M_i = 0, \quad M_C - M_D = 0$$

$$0.5Q - 1 \times P = 0$$

$$\text{得} \quad Q = 2P, \quad M_C = M_D = P$$

由平衡条件

$$\sum M_x = 0, \quad -1.5Q - 3.5P + 5R_B = 0$$

$$\text{得} \quad R_B = 1.3P$$

由平衡条件

$$\sum Y = 0, \quad R_A + R_B - Q - P = 0$$

$$\text{得} \quad R_A = 1.7P$$

(3) 轴的内力

利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作轴的弯矩图如题 8-9 图(d)所示。轴的扭矩图也画在题 8-9 图(d)中。从弯矩图和扭矩图可以确定, 截面 C 是危险截面, 它上面的弯矩和扭矩分别为

$$M = 2.55P, \quad T = P$$

抗弯截面系数为

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \times 0.11^3}{32} \text{ m}^3$$

$$= 1.307 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

(4) 确定许用载荷

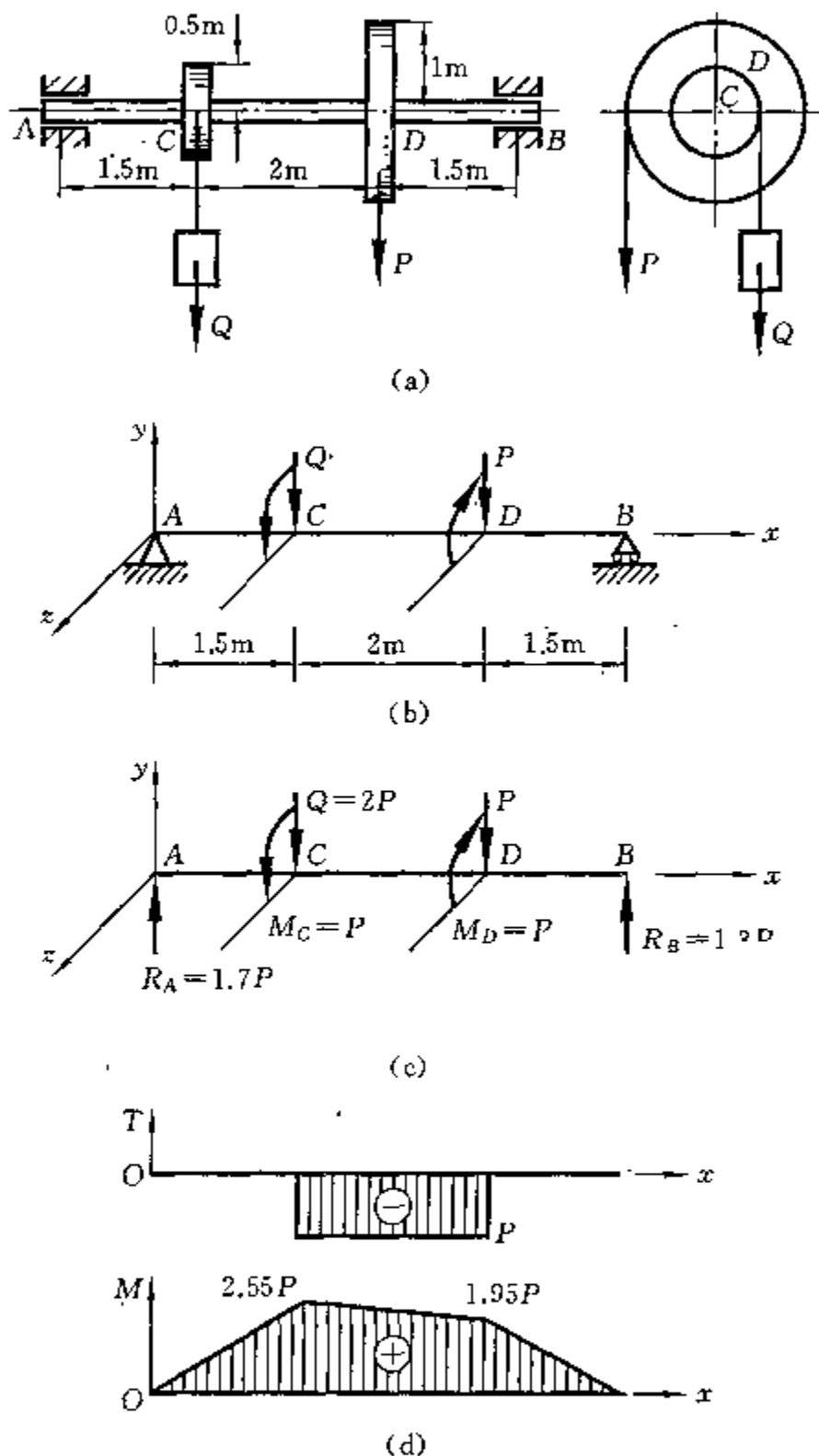
按第四强度理论

$$\sigma_{eq4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\text{有} \quad M^2 + 0.75T^2 \leq [\sigma]^2 W^2, \quad (2.55P)^2 + 0.75P^2 \leq (60 \times 10^6)^2 (1.307 \times 10^{-4})^2$$

$$7.253P^2 \leq 6150 \times 10^4, \quad P \leq 2912 \text{ N} = 2.912 \text{ kN}$$

所以, 许用载荷 $[P] = 2.912 \text{ kN}$ 。



题 8-9 图

8-10 题 8-10 图所示铁路路标的圆信号板,装在外径 $D=60\text{ mm}$ 的空心圆柱上。若信号板上作用的最大风载的压强 $p=2\text{ kPa}$,已知 $[\sigma]=60\text{ MPa}$,试按第三强度理论选定空心柱的壁厚 δ 。

解 (1) 信号板受的外力

在风力作用下,信号板的空心圆柱受弯曲和扭转组合作用,作用于信号板中心的风载合力为

$$P = Ap = \frac{\pi D^2}{4} p = \left(\frac{\pi \times 0.5^2}{4} \times 2000 \right) \text{ N} = 392.7 \text{ N}$$

(2) 立柱的内力

立柱的危险截面在其根部,危险截面上的扭矩和弯矩分别为

$$T = 0.6P = (0.6 \times 392.7) \text{ N} \cdot \text{m} = 235.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M = 0.8P = (0.8 \times 392.7) \text{ N} \cdot \text{m} = 314.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(3) 计算空心圆柱的壁厚

应用第三强度理论

$$\sigma_{\text{eq3}} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32 \sqrt{M^2 + T^2}}{\pi D^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]} = \frac{32 \sqrt{314.2^2 + 235.6^2}}{\pi \times 0.06^3 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]} \leq [\sigma] = 60 \times 10^6$$

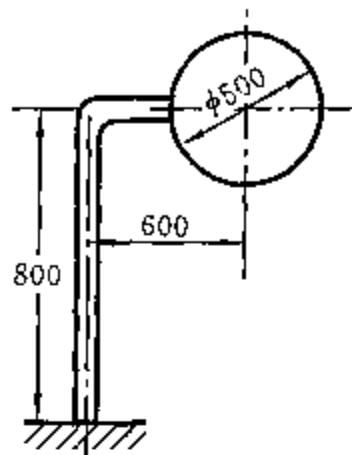
简化上式,得

$$0.3807 \leq 1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4$$

$$d \leq 0.05471 \text{ m} = 54.71 \text{ mm}$$

空心柱的厚度

$$\delta \geq \frac{D - d}{2} = \frac{60 - 54.71}{2} \text{ mm} = 2.645 \text{ mm}$$



题 8-10 图

8-11 一传动轴其尺寸如题 8-11 图(a)所示,传递的功率 $P_k=7\text{ kW}$,转速 $n=200\text{ r/min}$,齿轮 I 上的啮合力 P_t 与齿轮节圆切线成 $\alpha=20^\circ$ 的夹角,皮带轮 II 上的两胶带平行,拉力为 F_1 和 F_2 ,且 $F_1=2F_2$ 。若 $[\sigma]=80\text{ MPa}$,试在下列两种情形下,按第三强度理论选择轴的直径。

(1) 带轮质量忽略不计;

(2) 考虑带轮质量,设其重 $Q=1.8\text{ kN}$ 。

解 (1) 力学模型

题 8-11 图(a)所示传动轴,可简化为题 8-11 图(b)所示的受弯曲和扭转组合作用的外伸梁。

(2) 传动轴的外力

传给齿轮 I 的外力偶矩为

$$m = 9550 \frac{P_k}{n} = 9550 \times \frac{7}{200} \text{ N} \cdot \text{m} = 334.3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

齿轮 I 上的切向力 P_t 和径向力 P_r 分别为

$$P_t = \frac{m}{0.3/2} = \frac{334.3 \times 2}{0.3} \text{ N} = 2229 \text{ N}, \quad P_r = P_t \tan 20^\circ = 2229 \tan 20^\circ \text{ N} = 811.3 \text{ N}$$

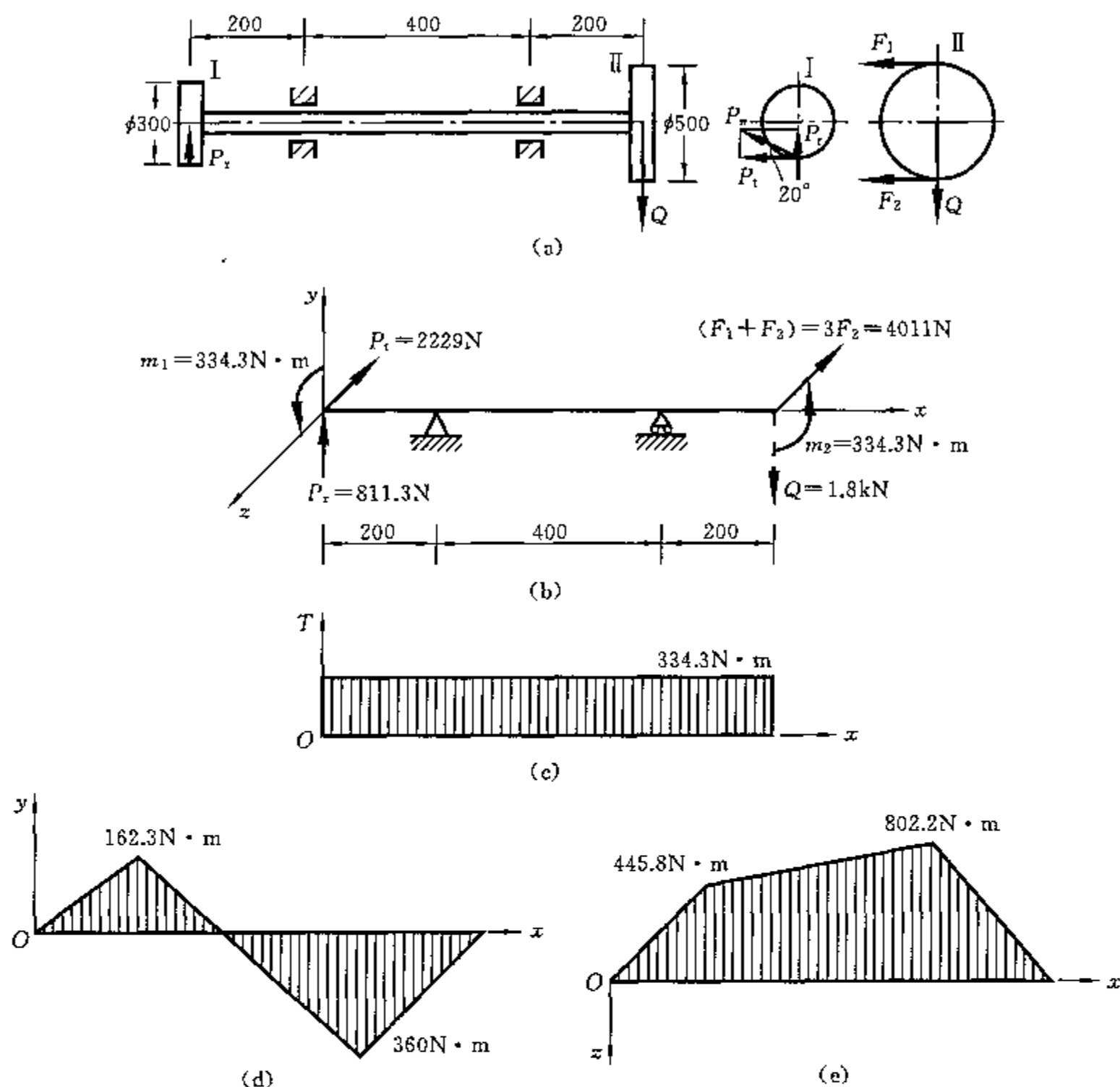
由平衡条件可知 $m_2 = m_1 = m$, 所以有

$$m_2 = \frac{0.5}{2} F_1 - \frac{0.5}{2} F_2 = \frac{0.5}{2} (2F_2) - \frac{0.5}{2} F_2 = 0.25 F_2, \quad F_2 = \frac{m_2}{0.25} = \frac{m}{0.25} = \frac{334.3}{0.25} \text{ N} = 1337 \text{ N}$$

以上各外力均被标示在题 8-11 图(b)中。

(3) 传动轴的内力

依据传动轴的外力图(题 8-11 图(b)),作传动轴的扭矩图和弯矩图如题 8-11 图(c)、(d)、(e)所示。其中弯矩图(d)是考虑了带轮重量。由于传动轴横截面为圆形,所以轴的总弯矩可以由绕 y 轴弯曲和绕 z 轴弯曲两个方向的弯矩合成确定,危险截面在右支座处,其内力分量为



题 8-11 图

$$M_1 = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{802.2^2 + 360^2} \text{ N}\cdot\text{m} = 879.3 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\text{考虑皮带轮重量})$$

$$M_2 = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{802.2^2 + 0} \text{ N}\cdot\text{m} = 802.2 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (\text{不考虑皮带轮重量})$$

$$T = 334.3 \text{ N}\cdot\text{m}$$

(4) 选择圆轴直径

按第三强度理论

$$(a) \text{ 考虑皮带轮重量} \quad \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32 \sqrt{M_1^2 + T^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$d^3 \geq \frac{32 \sqrt{M_1^2 + T^2}}{\pi [\sigma]} = \frac{32 \sqrt{879.3^2 + 334.3^2}}{\pi \times 80 \times 10^6} \text{ m}^3, \quad d \geq 49.29 \text{ mm}$$

$$(b) \text{ 不考虑皮带轮重量} \quad \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} = \frac{32 \sqrt{M_2^2 + T^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$d^3 \geq \frac{32 \sqrt{M_2^2 + T^2}}{\pi [\sigma]} = \frac{32 \sqrt{802.2^2 + 334.3^2}}{\pi \times 80 \times 10^6} \text{ m}^3, \quad d \geq 48.09 \text{ mm}$$

8-12 已知题 8-12 图所示牙轮钻机的钻杆为无缝钢管, 外直径 $D = 152 \text{ mm}$, 内直径 $d = 120 \text{ mm}$, 许用应力 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$ 。钻杆的最大推进压力 $P = 180 \text{ kN}$, 扭矩 $T = 17.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 试按

第三强度理论校核钻杆的强度。

解 (1) 钻杆横截面的几何参数

横截面面积

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(0.152^2 - 0.120^2) \text{ m}^2 = 6.836 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

抗扭截面系数

$$W_t = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) = \frac{\pi \times 0.152^3}{16} \left[1 - \left(\frac{120}{152} \right)^4 \right] \text{ m}^3 = 4.216 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

(2) 钻杆的内力

轴力

$$N = P = 180 \text{ kN}$$

扭矩

$$T = 17.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(3) 钻杆的应力

$$\text{压缩正应力} \quad \sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{180 \times 10^3}{6.836 \times 10^{-3}} \text{ Pa} = 26.33 \text{ MPa}$$

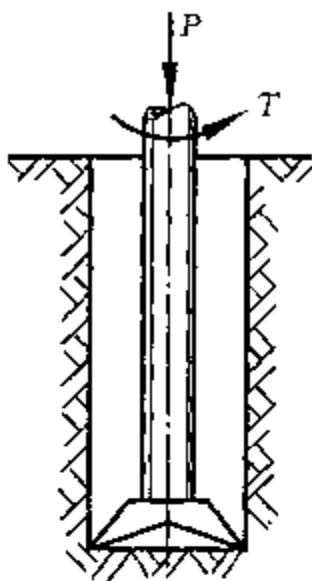
$$\text{最大扭转切应力} \quad \tau_T = \frac{T}{W_t} = \frac{17.3 \times 10^3}{4.216 \times 10^{-4}} \text{ Pa} = 41.03 \text{ MPa}$$

(4) 强度校核

按第三强度理论

$$\sigma_{eq3} = \sqrt{\sigma_N^2 + 4\tau_T^2} = \sqrt{26.33^2 + 4 \times 41.03^2} \text{ Pa} = 86.18 \text{ MPa} < [\sigma]$$

相当应力小于许用应力。



题 8-12 图

第九章 压杆的稳定

知识要点

1. 稳定的概念

(1) 平衡的稳定性

构件在外力作用下处于平衡状态,如果由于某种原因,有干扰力作用于该构件,使其偏离原平衡位置,在干扰去除后,若构件仍能回到原平衡位置,则原来的平衡是稳定平衡,否则为不稳定平衡。在材料力学中,仅研究压杆的稳定问题。

(2) 压杆的临界力

使压杆由原来的直线平衡状态转变为曲线平衡状态的外力,称为临界力。或者说临界力是使压杆丧失稳定的最小外力,也可以说是保持压杆稳定平衡时杆件能承受的最大外力。

2. 临界力的计算

(1) 细长杆(大柔度杆)的临界力

① 欧拉公式
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad \text{或} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

式中: μ —压杆的长度系数;

l —压杆长度;

I —压杆横截面最小的惯性矩;

λ —压杆的柔度。

② 欧拉公式的适用范围 只适用于压杆处于弹性变形范围内,压杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

应满足

$$\lambda \geq \lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}, \quad \lambda = \frac{\mu l}{i}$$

λ_p 称为对应于比例极限的界限柔度,只与压杆材料的比例极限有关,与压杆的几何尺寸无关。

(2) 中长杆(中柔度杆)的临界力

① 计算临界应力的经验公式

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad P_{cr} = A\sigma_{cr}$$

式中, a 、 b 可从文献 1 表 9-2 查得。

② 经验公式的适用范围 压杆的临界应力不得达到材料的屈服点 σ_s , 因此,应用经验公式时,压杆柔度应满足

$$\lambda_s \leq \lambda \leq \lambda_p$$

式中, λ_s 称为对应屈服点的界限柔度。

(3) 粗短杆(小柔杆)的临界力

当 $\lambda < \lambda_s$ 时,实质上不是压杆稳定问题,而属于强度破坏,其临界力为

$$F_{cr} = A\sigma_{cr} = A\sigma_s \quad (\text{对塑性材料})$$

$$F_{cr} = A\sigma_b \quad (\text{对脆性材料})$$

3. 压杆稳定计算

压杆的稳定条件为

$$P \leq \frac{P_{cr}}{[n_{st}]}$$

或

$$n_{st} = \frac{P_{cr}}{P} \geq [n_{st}]$$

式中: P —压杆的工作压力;

P_{cr} —压杆的临界力;

n_{st} —压杆的工作稳定安全系数;

$[n_{st}]$ —规定的稳定安全系数。

习题详解

9-1 题9-1图所示的细长压杆均为圆杆,其直径 d 均相同,材料是 Q235 钢, $E=210 \text{ GPa}$ 。其中:图(a)为两端铰支;图(b)为一端固定,一端铰支;图(c)为两端固定。试判别哪一种情形的临界力最大,哪种其次,哪种最小? 若圆杆直径 $d=16 \text{ cm}$,试求最大的临界力 P_{cr} 。

解 压杆横截面的惯性矩

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.16^4}{64} \text{ m}^4 = 3.217 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

对应于比例极限的界限柔度

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \sqrt{\frac{210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 100$$

压杆横截面的惯性半径

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}} = \frac{d}{4} = \frac{0.16}{4} \text{ m} = 0.04 \text{ m}$$

情况(a) $\mu=1, l=5 \text{ m}$

因柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 5}{0.04} = 125 > \lambda_p$

所以可以用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 3.217 \times 10^{-5}}{(1 \times 5)^2} \text{ N} = 2667 \text{ kN}$$

情况(b) $\mu=0.7, l=7 \text{ m}$

因柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.7 \times 7}{0.04} = 122.5 > \lambda_p$

所以可以用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 3.217 \times 10^{-5}}{(0.7 \times 7)^2} \text{ N} = 2777 \text{ N}$$

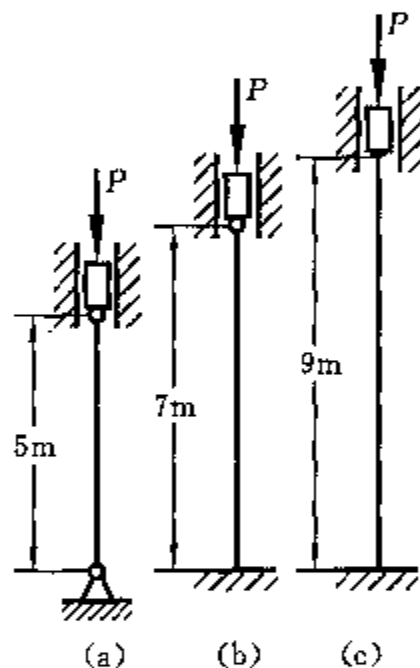
情况(c) $\mu=0.5, l=9 \text{ m}$

因柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5 \times 9}{0.04} = 112.5 > \lambda_p$

所以可以用欧拉公式计算临界力

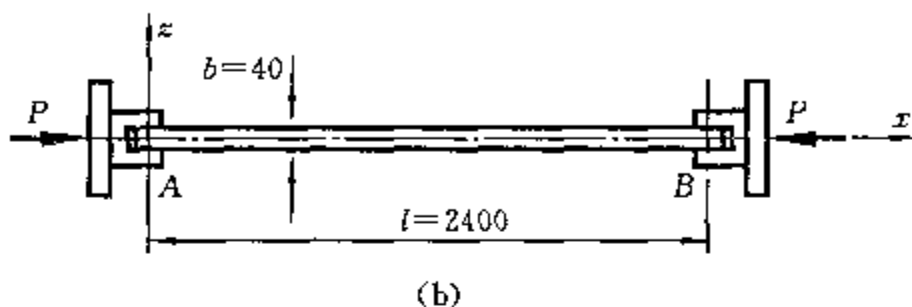
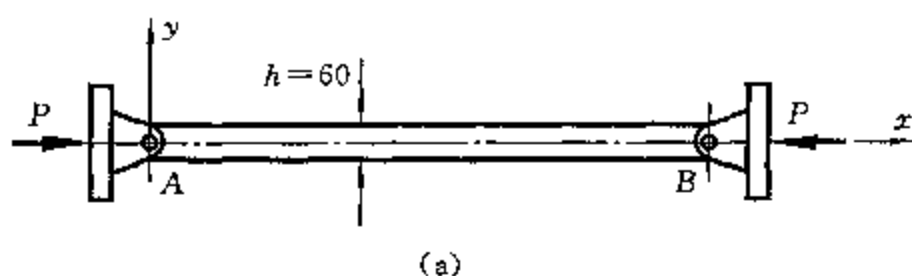
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 3.217 \times 10^{-5}}{(0.5 \times 9)^2} \text{ N} = 3293 \text{ kN}$$

比较(a)、(b)、(c)三种情况的临界力数值,情况(c)的临界力最大,情况(b)次之,情况(a)最小。



题9-1图

9-2 题 9-2 图所示压杆的材料为 Q235 钢, $E = 210 \text{ GPa}$, $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, 在正视图(a)的平面内, 两端为铰支, 在俯视图(b)的平面内, 两端认为固定。试求此杆的临界力。



题 9-2 图

解 (1) 情况(a) 如题 9-2 图(a)所示。

若杆在 xy 平面内屈曲, 则压杆两端可视为铰支, 长度系数 $\mu = 1$, 横截面面积和对 z 轴的惯性矩分别为

$$A = bh = (0.04 \times 0.06) \text{ m}^2 \\ = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.04 \times 0.06^3}{12} \text{ m}^4 = 7.2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

惯性半径为
$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{7.2 \times 10^{-7}}{2.4 \times 10^{-3}}} \text{ m} = 1.732 \times 10^{-2} \text{ m}$$

对应于比例极限的界限柔度
$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 101$$

压杆的柔度为
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_z} = \frac{1 \times 2.4}{1.732 \times 10^{-2}} = 138 > \lambda_p$$

所以可用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 7.2 \times 10^{-7}}{(1 \times 2.4)^2} \text{ N} = 259.0 \text{ N}$$

(2) 情况(b) 如题 9-2 图(b)所示。

若杆在 xz 平面内屈曲, 则压杆两端可视为固定, 长度系数 $\mu = 0.5$, 横截面对 y 轴的惯性矩为

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{0.06 \times 0.04^3}{12} \text{ m}^4 = 3.2 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

惯性半径为
$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{3.2 \times 10^{-7}}{2.4 \times 10^{-3}}} = 1.15 \times 10^{-2} \text{ m}$$

压杆的柔度为
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0.5 \times 2.4}{1.15 \times 10^{-2}} = 104 > \lambda_p$$

所以可用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 3.2 \times 10^{-7}}{(0.5 \times 2.4)^2} \text{ N} = 460.5 \text{ N}$$

比较(a)、(b)两种情况下的临界应力, 取其较小者, 所以压杆的临界力 $P_{cr} = 259 \text{ N}$ 。

9-3 题 9-3 图(a)所示立柱由两根 10 号槽钢组成, 立柱上端为球铰, 下端固定, 柱长 $L = 6 \text{ m}$, 试求两槽钢距离 a 值取多少, 立柱的临界力最大? 其值是多少? 已知材料的弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 比例极限 $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ 。

解 (1) 确定间距 a

查文献 1 附录一型钢表, 10 号槽钢横截面的有关几何尺寸如题 9-3 图(b)所示, 其截面面积和惯性矩分别为

$$A_1 = 12.748 \text{ cm}^2$$

$$I_{yc} = 25.6 \text{ cm}^4, \quad I_{xc} = 198 \text{ cm}^4$$

因此, 题 9-3 图(a)所示立柱的横截面面积与惯性矩分别为

$$A = 2A_1 = 2 \times 12.748 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 2I_{x_c} = 2 \times 198 \text{ cm}^4 = 396 \text{ cm}^4 \quad (1)$$

$$I_y = 2 \left[I_{y_c} + A \left(1.52 + \frac{a}{2} \right)^2 \right] \text{ cm}^4 = 2 \left[25.6 + 12.748 \left(1.52 + \frac{a}{2} \right)^2 \right] \text{ cm}^4$$

$$= (51.2 + 58.9 + 6.374a^2 + 38.75a) \text{ cm}^4 \quad (2)$$

当 $a=0$ 时, 由式②得

$$I_{y_0} = (51.2 + 58.9) \text{ cm}^4 = 110.1 \text{ cm}^4 \quad (3)$$

比较①、③式可知, 当 $a=0$ 时, 即两根槽钢并拢在一起, 无间距地组成一根立柱时, 因 $I_{y_0} < I_x$, 所以立柱将绕 y 轴屈曲, 立柱的临界载荷由惯性矩 I_y 决定。若使两根槽钢分离, 相距为 a , 则可增大截面对 y 轴的惯性矩 I_y , 但顶多增大到与 I_x 的数值相等, 超过 I_x 的数值, 并不能增加立柱的临界载荷, 因 I_y 无论增加到多大, 当它的数值超过 I_x 时, 立柱将绕 z 轴屈曲。因此, 立柱的最大临界载荷由下式决定, 从而也确定 a 的数值

$$I_y = I_x$$

即

$$(51.2 + 58.90 + 6.374a^2 + 38.75a) = 396$$

整理上式, 得

$$3.187a^2 + 19.38a - 143.0 = 0$$

解以上以 a 为未知数的二次方程, 得

$$a = \frac{-19.38 \pm \sqrt{19.38^2 + 4 \times 3.187 \times 143.0}}{2 \times 3.187} \text{ cm} = \begin{cases} 43.16 \text{ mm} \\ -104 \text{ mm} \end{cases}$$

舍去 $a = -104 \text{ mm}$, 所以两槽钢的间距 $a = 43.16 \text{ mm}$ 。

(2) 计算最大临界载荷

对应于比例极限的界限柔度为

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.35$$

当两根槽钢的间距 $a = 43.16 \text{ mm}$ 时, 立柱的惯性半径

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{396 \times 10^{-8}}{2 \times 12.7 \times 10^{-4}}} \text{ m} = 3.941 \times 10^{-2} \text{ m}$$

立柱的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{0.7 \times 6}{3.941 \times 10^{-2}} = 106.6$$

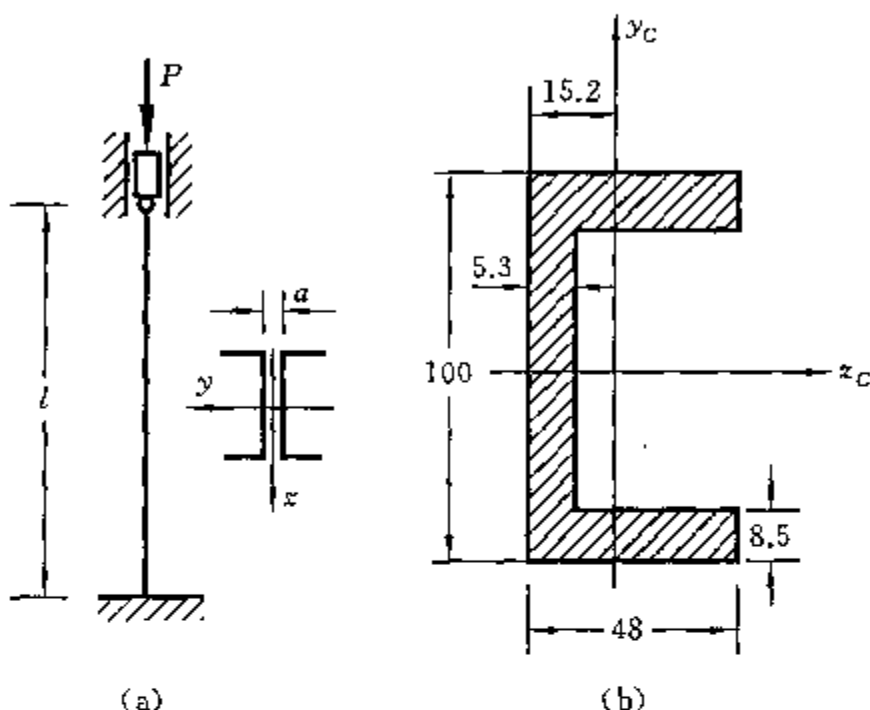
因 $\lambda > \lambda_p$, 所以可以利用欧拉公式计算临界载荷

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 396 \times 10^{-8}}{(0.7 \times 6)^2} \text{ N} = 444.4 \text{ kN}$$

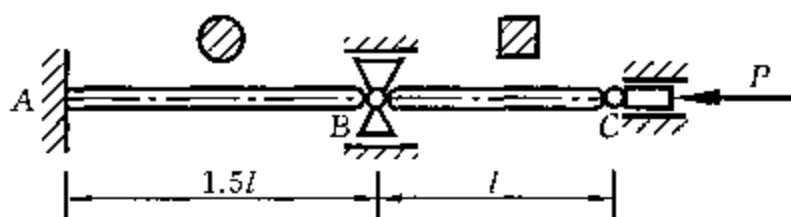
所以, 立柱的最大临界力为 444.4 kN。

9-4 题 9-4 图所示结构 AB 为圆截面直杆, 直径 $d = 80 \text{ mm}$, A 端固定, B 端与直杆 BC 用球铰连接。杆 BC 为正方形截面, 边长 $a = 70 \text{ mm}$, C 端也是球铰。两杆材料相同, 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 比例极限 $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$, 长度 $l = 3 \text{ m}$, 求该结构的临界力。

解 (1) 杆 AB 的临界力



题 9-3 图



题 9-4 图

杆 AB 的 A 端固定, B 端铰支, 所以长度系数 $\mu=0.7$, 横截面的面积和惯性矩分别为

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 0.08^2}{4} \text{ m}^2 = 5.027 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.08^4}{64} \text{ m}^4 = 2.011 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

惯性半径
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4/64}{\pi d^2/4}} = \frac{d}{4} = \frac{0.08}{4} \text{ m} = 0.02 \text{ m}$$

对应于比例极限的界限柔度

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 99.3$$

杆 AB 的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.70 \times 4.5}{0.02} = 157 > \lambda_p$$

所以可用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 2.011 \times 10^{-6}}{(0.7 \times 4.5)^2} \text{ N} = 400 \text{ kN}$$

(2) 杆 BC 的临界力

杆 BC 的 B 端和 C 端均为铰支, 所以长度系数 $\mu=1$, 杆横截面面积和惯性矩分别为

$$A = a^2 = 0.07^2 \text{ m}^2 = 4.9 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{a^4}{12} = \frac{0.07^4}{12} \text{ m}^4 = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

惯性半径
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{a^4/12}{a^2}} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{0.07}{2\sqrt{3}} \text{ m} = 0.02021 \text{ m}$$

杆的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 3}{0.02021} = 148 > \lambda_p$$

所以可用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6}}{(1 \times 3)^2} \text{ N} = 438.6 \text{ kN}$$

比较杆 AB 和杆 BC 的临界力, 取其较小者, 所以结构临界力为 400 kN。

9-5 题 9-5 图(a)所示托架中杆 AB 的直径 $d=4 \text{ cm}$, 长度 $l=80 \text{ cm}$, 两端可视为铰支, 材料是 Q235 钢。

(1) 试按杆 AB 的稳定条件求托架的临界力 Q_{cr} ;

(2) 若已知实际载荷 $Q=70 \text{ kN}$, 稳定安全系数 $[n_{st}]=2$, 问此托架是否安全?

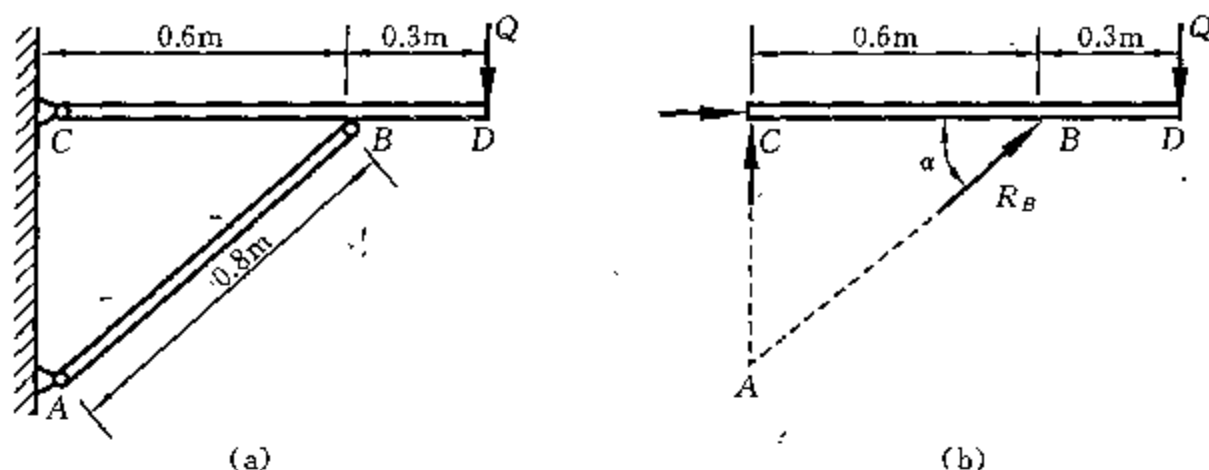
解 (1) 托架的临界力

斜杆 AB 与水平线夹角

$$\alpha = \arccos \frac{0.6}{0.8} = 41.4^\circ$$

取横杆 CD 为研究对象, 作受力图如题 9-5 图(b)所示, 由平衡条件

$$\sum M_C = 0, \quad 0.9Q - R_B \sin \alpha \times 0.6 = 0$$



题 9-5 图

可得杆 AB 的轴力

$$R_B = \frac{0.9Q}{0.6\sin 41.4^\circ} = 2.268Q$$

杆 AB 两端铰支, 所以其长度系数 $\mu=1$ 。杆 AB 的材料是 Q235 钢, 对应于比例极限的界限柔度 $\lambda_p=100$, 对应于屈服极限的界限柔度 $\lambda_s=60$, 横截面的惯性矩为

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.04^4}{64} \text{ m}^4 = 1.257 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

惯性半径

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{0.04}{4} \text{ m} = 0.01 \text{ m}$$

杆 AB 的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 0.8}{0.01} = 80$$

因 $\lambda_p > \lambda > \lambda_s$, 所以不能用欧拉公式计算临界力, 应当用经验公式

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

计算临界力。查文献 1 表 9-2, Q235 钢的 $a=310 \text{ MPa}$, $b=1.14 \text{ MPa}$, 所以杆 AB 的临界力

$$R_{B,cr} = A\sigma_{cr} = \frac{\pi d^2}{4} (a - b\lambda) = \frac{\pi \times 0.04^2}{4} (310 - 1.14 \times 80) \times 10^6 \text{ N} = 275 \text{ kN}$$

因 $R_B = 2.268Q$, 所以托架的临界力

$$Q_{cr} = \frac{R_{B,cr}}{2.268} = \frac{275}{2.268} \text{ kN} = 121.3 \text{ kN}$$

(2) 校核托架的稳定安全性

若实际载荷 $Q=70 \text{ kN}$, 规定的稳定安全系数 $[n_{st}]=2$, 则因实际的稳定安全系数

$$n_{st} = \frac{Q_{cr}}{Q} = \frac{121.3}{70} = 1.733 < [n_{st}]$$

所以不安全。

9-6 悬臂回转吊车如题 9-6 图(a)所示, 斜杆 AB 由钢管制成, 在点 B 铰支, 钢管的外径 $D=100 \text{ mm}$, 内径 $d=86 \text{ mm}$, 杆长 $l=3 \text{ m}$, 材料为 Q235 钢, $E=200 \text{ GPa}$, 起重量 $Q=20 \text{ kN}$, 稳定安全系数 $[n_{st}]=2.5$ 。试校核斜杆的稳定性。

解 (1) 斜杆 AB 受的轴向力

取定滑轮 A 为研究对象, 作受力图如题 9-6 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum Y = 0, \quad -\frac{Q}{2} \cos 45^\circ - \frac{Q}{2} \cos 45^\circ + S \sin 25^\circ = 0$$

可得

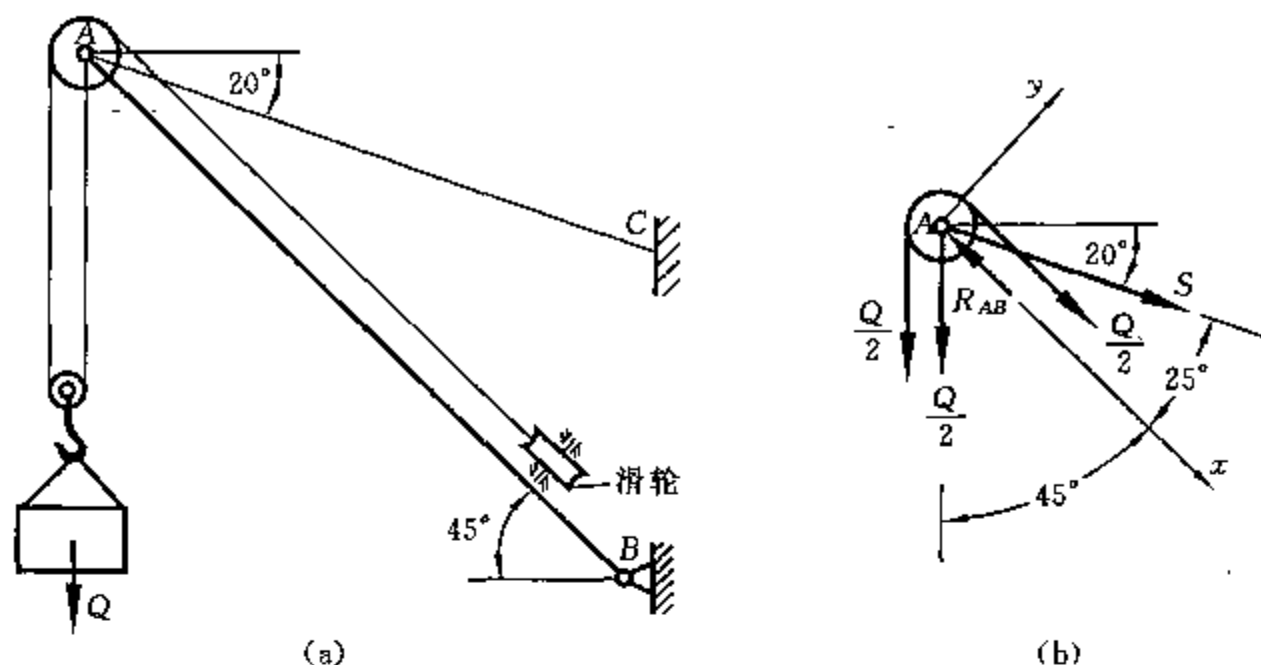
$$S = \frac{Q \cos 45^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{20 \times 10^3 \times 0.7071}{0.4226} \text{ N} = 33.46 \text{ kN}$$

再由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad -R_{AB} + S \cos 25^\circ + \frac{Q}{2} + 2 \times \frac{Q}{2} \cos 45^\circ = 0$$

可得

$$R_{AB} = \left(33.46 \cos 25^\circ + \frac{20}{2} + 20 \cos 45^\circ \right) \text{ kN} = 54.47 \text{ kN}$$



题 9-6 图

(2) 斜杆的临界力

斜杆 AB 在 xy 平面内失稳时, 两端可简化为铰支; 在 xz 平面内失稳时, 应简化为 B 端固定, A 端自由。

(a) 考虑在 xy 平面内失稳

杆的横截面面积和惯性矩分别为

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(0.1^2 - 0.086^2) \text{ m}^2 = 2.045 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64}(0.1^4 - 0.086^4) \text{ m}^4 = 2.224 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

杆 AB 横截面的惯性半径

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2.224 \times 10^{-6}}{2.045 \times 10^{-3}}} \text{ m} = 3.298 \times 10^{-2} \text{ m}$$

杆 AB 的长度系数 $\mu = 1$, 所以柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 3}{3.298 \times 10^{-2}} = 90.96$$

查文献 1 表 9-2, Q235 钢的对应比例极限的界限柔度 $\lambda_p = 100$, 因 $\lambda < \lambda_p$, 所以不能用欧拉公式计算临界力, 应用经验公式

$$\sigma_{cr} = a - \lambda b$$

先计算临界应力, 然后再计算临界力。查文献 1 表 9-2, Q235 钢的 $a = 310 \text{ MPa}$, $b = 1.14 \text{ MPa}$, 所以有

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = (310 - 1.14 \times 90.96) \text{ MPa} = 206.3 \text{ MPa}$$

斜杆 AB 的临界力

$$P_{cr} = A\sigma_{cr} = 2.045 \times 10^{-3} \times 206.3 \times 10^6 \text{ N} = 412.9 \text{ kN}$$

工作稳定安全系数

$$n_{st} = \frac{P_{cr}}{R_{AB}} = \frac{412.9}{54.7} = 7.58$$

(b) 考虑在 xz 平面内失稳

这种情况下, 杆的长度系数 $\mu = 2$, 所以其柔度为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 3}{3.298 \times 10^{-2}} = 182 > \lambda_p$$

因 $\lambda > \lambda_p$, 故可以用欧拉公式计算临界力

$$P'_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 2.224 \times 10^{-6}}{(2 \times 3)^2} \text{ N} = 122 \text{ kN}$$

杆 AB 的工作稳定安全系数为

$$n_{st} = \frac{P'_{cr}}{R_{AB}} = \frac{122}{54.47} = 2.24$$

小于规定的稳定安全系数 $[n_{st}] = 2.5$, 所以不安全。

9-7 如题 9-7 图所示, 矿井采空区在充填前为防止顶板陷落, 常用木柱支撑, 若木柱为红松, 弹性模量 $E = 10 \text{ GPa}$, 直径 $d = 14 \text{ cm}$, 规定稳定安全系数 $[n_{st}] = 4$, 求木柱所允许承受的顶板最大压力。

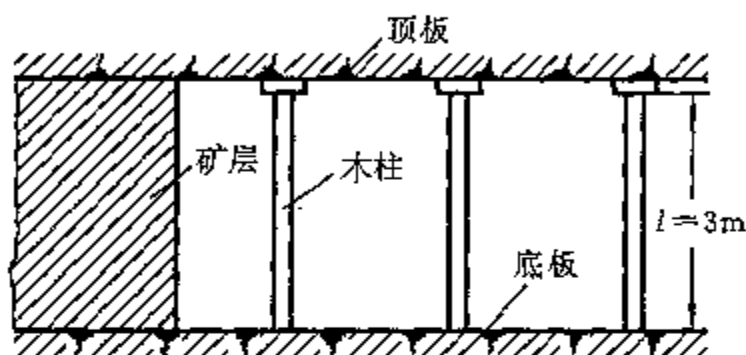
解 木柱可简化为两端铰支的压杆, 横截面的惯性矩和惯性半径分别为

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.14^4}{64} \text{ m}^4 = 1.886 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{0.14}{4} \text{ m} = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

木柱的长度系数 $\mu = 1$, 则其柔度为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 3}{3.5 \times 10^{-2}} = 85.7$$



题 9-7 图

查文献 1 表 9-2, 红松的对应比例极限的界限柔度 $\lambda_p = 59$, 因 $\lambda > \lambda_p$, 所以可以用欧拉公式计算临界力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 1.886 \times 10^{-5}}{(1 \times 3)^2} \text{ N} = 206.8 \text{ kN}$$

由压杆的稳定条件

$$n_{st} = \frac{P_{cr}}{P} \geq [n_{st}]$$

可得木柱允许承受的最大压力为

$$P \leq \frac{P_{cr}}{[n_{st}]} = \frac{206.8}{4} \text{ kN} = 51.7 \text{ kN}$$

9-8 题 9-8 图(a)所示螺旋千斤顶的最大起重量 $P = 150 \text{ kN}$, 丝杠长 $l = 0.5 \text{ m}$, 材料为 45 号钢, $E = 210 \text{ GPa}$, 规定稳定安全系数 $[n_{st}] = 4.2$, 求丝杠所允许的最小内直径 d 。(提示: 可采用试算法, 在文献 1 稳定性条件公式(9-11)中的临界力按大柔度公式计算, 若由求出的直径算得的柔度大于 λ_p , 则即为所求直径。否则, 需改用中柔度杆临界力公式计算)

解 (1) 力学模型

将螺旋千斤顶的丝杠简化为一端固定, 另一端自由的压杆, 如题 9-8 图(b)所示。压杆长度 $l = 0.5 \text{ m}$, 直径 d 待求, 长度系数 $\mu = 2$ 。

(2) 按大柔度杆临界应力计算公式确定直径 d

由欧拉公式, 临界力

$$\begin{aligned} P_{cr} &= \frac{\pi EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi E}{(\mu l)^2} \times \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{256(2l)^2} \\ &= \frac{\pi d^4}{256(2 \times 0.5)^2} = 101.7 \times 10^9 d^4 \end{aligned}$$

由压杆稳定条件

$$\begin{aligned} n_{st} = \frac{P_{cr}}{P} &\geq [n_{st}], \quad P_{cr} \geq [n_{st}]P \\ 101.7 \times 10^9 d^4 &\geq [n_{st}]P \end{aligned}$$

可得丝杠直径

$$d^4 \geq \frac{[n_{st}]P}{101.7 \times 10^9} = \frac{4.2 \times 150 \times 10^3}{101.7 \times 10^9} \text{ m}^4 = 6.195 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$d \geq 49.89 \text{ mm}$$

(3) 计算 $d=49.89 \text{ mm}$ 时丝杠的柔度

丝杠横截面的惯性半径

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = \frac{49.89 \times 10^{-3}}{4} \text{ m} = 12.47 \times 10^{-3} \text{ m}$$

丝杠的柔度

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \times 0.5}{12.47 \times 10^{-3}} = 80.2$$

查文献 1 表 9-2, 45 号钢的对应比例极限的界限柔度 $\lambda_p = 100$, 因 $d=49.89 \text{ mm}$ 时, 丝杠的柔度 $\lambda < \lambda_p$, 所以不能用欧拉公式计算临界力, 应改用经验公式。

(4) 改用经验公式计算临界力确定直径

查文献 1 表 9-2, 45 号钢的 $a=589 \text{ MPa}$, $b=3.82$

MPa, 代入临界应力公式 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$

得

$$\sigma_{cr} = (589 - 3.82\lambda) \times 10^6 \quad (1)$$

式中

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{d/4} = \frac{4 \times 2 \times 0.5}{d} = \frac{4}{d}$$

代入①式, 得

$$\sigma_{cr} = \left(589 - 3.82 \times \frac{4}{d} \right) \times 10^6 = \left(589 - \frac{15.28}{d} \right) \times 10^6 \quad (2)$$

由压杆稳定条件

$$n_{st} = \frac{P_{cr}}{P} \leq [n_{st}]$$

得

$$P_{cr} = [n_{st}]P = 4.2 \times 150 \times 10^3 \text{ N} = 630 \times 10^3 \text{ N} \quad (3)$$

丝杠横截面面积

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 0.7854 d^2 \quad (4)$$

丝杠的临界力

$$P_{cr} = A \sigma_{cr} \quad (5)$$

将②、③、④式代入⑤式, 得 $630 \times 10^3 = 0.7854 d^2 \left(589 - \frac{15.28}{d} \right) \times 10^6$

整理上式, 得

$$462.6 d^2 - 12 d - 0.63 = 0$$

$$d = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \times 462.6 \times 0.63}}{2 \times 463} \text{ m} = \begin{cases} 0.052 \text{ m} \\ -0.026 \text{ m} \end{cases}$$

舍去 $d = -0.026 \text{ m}$, 选择 $d = 52 \text{ mm}$ 。

9-9 一根 20a 号工字钢的直杆, 长 $l=6 \text{ m}$, 两端固定。在温度 $T_1=20^\circ\text{C}$ 时进行安装, 此时杆不受力。若钢的线膨胀系数 $\alpha=1.25 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$, $\sigma_p=210 \text{ MPa}$, $E=210 \text{ GPa}$, 试问当温度升高到多少度时, 杆将丧失稳定。

解 (1) 工字钢直杆的临界应力

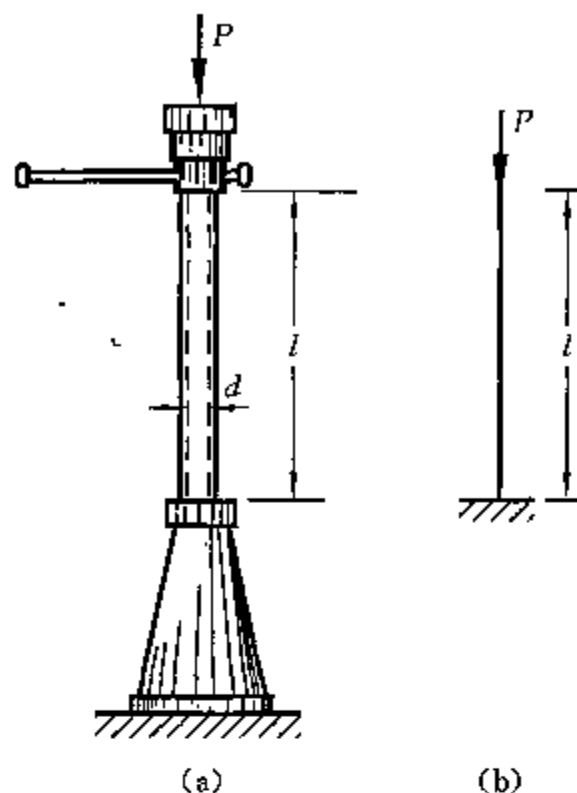
查文献 1 附录一型钢表, 20a 号工字钢横截面的最小惯性矩 $I_{\min}=158 \text{ cm}^4$, 最小惯性半径 $i_{\min}=2.12 \text{ cm}$, 面积 $A=35.58 \text{ cm}^2$, 则对应比例极限的界限柔度

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 200 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 102$$

杆的柔度(长度系数 $\mu=0.5$)

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0.5 \times 6}{2.12 \times 10^{-2}} = 142$$

因 $\lambda > \lambda_p$, 所以可以用欧拉公式计算临界应力



题 9-8 图

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{142^2} \text{ Pa} = 102.8 \text{ MPa}$$

(2) 计算工字钢直杆的温度应力

$$\sigma_T = \alpha E \Delta T = 1.25 \times 10^{-5} \times 210 \times 10^9 \Delta T = 262.5 \times 10^6 \Delta T$$

当 $\sigma_T \geq \sigma_{cr}$ 时, 杆将失稳, 所以有

$$262.5 \times 10^6 \Delta T \geq 102.8 \times 10^6, \quad \Delta T \geq \frac{102.8}{262.5} ^\circ\text{C} = 39.16 ^\circ\text{C}$$

因

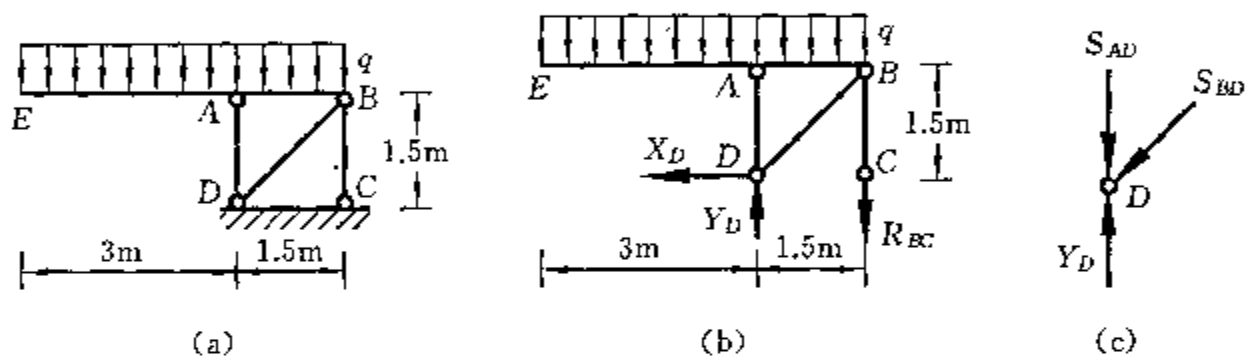
$$\Delta T = T_2 - T_1$$

所以

$$T_2 = \Delta T + T_1 = 39.16 ^\circ\text{C} + 20 ^\circ\text{C} = 59.16 ^\circ\text{C}$$

当温度升高到 $59.16 ^\circ\text{C}$ 时, 杆将失稳。

9-10 题 9-10 图(a)所示结构, AD 为铸铁圆杆, 直径 $d_1 = 6 \text{ cm}$, 弹性模量 $E = 91 \text{ GPa}$, 许用压应力 $[\sigma_c] = 120 \text{ MPa}$, 规定稳定安全系数 $[n_{st}] = 5.5$ 。横梁 EB 为 18 号工字钢, BC、BD 为直径 $d = 1 \text{ cm}$ 的直杆, 材料均为 Q235 钢, 许用应力 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, 各杆间的连接均为铰接。求该结构的许用载荷 $[q] = ?$



题 9-10 图

解 (1) 计算约束反力

解除题 9-10 图 C、D 处约束, 代之以约束反力, 作受力图如题 9-10 图(b)所示。由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad X_D = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad Y_D - R_{BC} - 4.5q = 0$$

$$\sum M_C = 0, \quad 1.5Y_D - 4.5q \times \frac{4.5}{2} = 0$$

可得

$$X_D = 0, \quad Y_D = \frac{4.5^2}{1.5 \times 2} q = 6.75q$$

$$R_{BC} = Y_D - 4.5q = 6.75q - 4.5q = 2.25q$$

(2) 计算三根杆 AD、BC 和 BD 受力

取题 9-10 图(b)中点 D 为研究对象, 作受力图如题 9-10 图(c)所示, 由平衡方程

$$\sum X = 0, \quad S_{BD} \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0, \quad -S_{AD} + Y_D = 0$$

得

$$S_{BD} = 0, \quad S_{AD} = Y_D = 6.75q$$

(3) 杆 AD 的强度计算

最大压应力

$$\sigma_{c, \max} = \frac{N}{A} = \frac{4Y_D}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 6.75q}{\pi \times 0.06^2} = 2387q$$

由强度条件

$$\sigma_{c, \max} \leq [\sigma_c]$$

$$2387q \leq 120 \times 10^6$$

可得

$$q \leq \frac{120 \times 10^6}{2387} = 50.27 \text{ kN/m}$$

(4) 杆 AD 的稳定性计算

杆 AD 受压, 因两端铰支, 所以其长度系数 $\mu=1$, 横截面的惯性矩和惯性半径分别为

$$I = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi \times 0.06^4}{64} \text{ m}^4 = 6.362 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d_1}{4} = \frac{0.06}{4} \text{ m} = 0.015 \text{ m}$$

杆 AD 的柔度 $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 1.5}{0.015} = 100$

查文献 1 表 9-2, 铸铁的对应比例极限的界限柔度 $\lambda_p = 80$, 因 $\lambda > \lambda_p$, 所以可用欧拉公式计算临界应力

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 91 \times 10^9 \times 6.362 \times 10^{-7}}{(1 \times 1.5)^2} \text{ N} = 254 \text{ kN}$$

由压杆稳定性条件 $n_{st} = \frac{P_{cr}}{P} \geq [n_{st}]$

可得 $P \leq \frac{P_{cr}}{[n_{st}]} = \frac{254 \times 10^3}{5.5} \text{ N} = 46.18 \times 10^3 \text{ N}$

因 $P = Y_D = 6.75q$, 所以有 $6.75q \leq 46.18 \times 10^3$

$$q \leq \frac{46.18 \times 10^3}{6.75} \text{ N/m} = 6.842 \text{ kN/m}$$

(5) 杆 BC 的强度计算

杆 BC 受轴向拉伸, 拉力 $R_{BC} = 2.25q$, 拉应力

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} = \frac{4R_{BC}}{\pi d^2} = \frac{4 \times 2.25q}{\pi \times 1 \times 10^{-4}}$$

由强度条件 $\sigma_1 \leq [\sigma]$

$$\frac{4 \times 2.25q}{\pi \times 1 \times 10^{-4}} \leq 160 \times 10^6$$

可得 $q \leq \frac{\pi \times 10^{-4} \times 160 \times 10^6}{4 \times 2.25} \text{ N/m} = 5.585 \text{ kN/m}$

(6) 横梁 EB 的强度计算

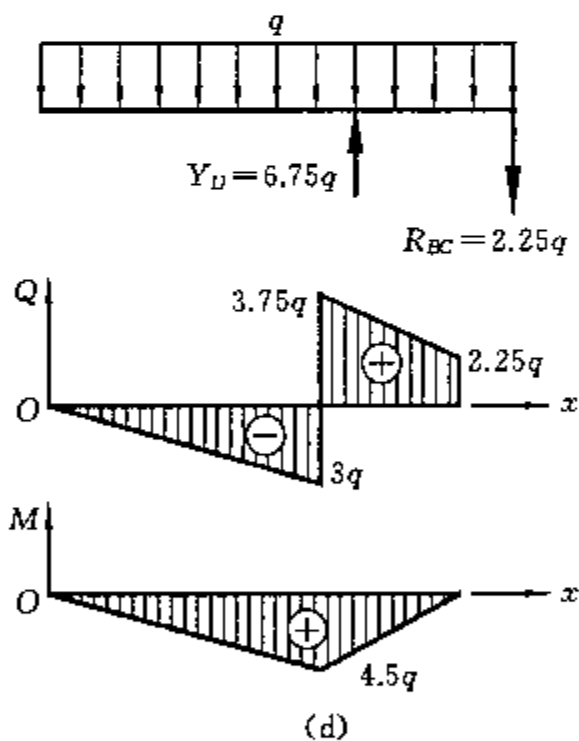
根据梁的受力图, 利用剪力、弯矩和分布载荷集度间的关系, 作弯矩图如题 9-10 图 (d) 所示。从弯矩图中可知, 最大弯矩 $M_{\max} = 4.5q$ 。查文献 1 附录一型钢表, 18 号工字钢的 $W = 1660 \text{ cm}^3$, 所以, 梁的最大弯曲正应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{4.5q}{1660 \times 10^{-6}} = 2.711 \times 10^3 q$$

由强度条件 $\sigma_{\max} \leq [\sigma] = 160 \times 10^6$

可得 $q \leq \frac{160 \times 10^6}{2.711 \times 10^3} \text{ N/m} = 59.02 \text{ kN/m}$

综合上述计算结果, 共有 4 个许用载荷 $[q]$ 值, 选其中较小者为 $[q] = 5.585 \text{ kN/m}$ 。



参 考 文 献

北京科技大学,东北大学合编.工程力学(静力学、运动学和动力学、材料力学)(1997年修订版).
北京:高等教育出版社,2007.

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名=工程力学（静力学、运动学和动力学、材料力学）习题全解 （高教版）

作者=

页数= 3 2 1

S S 号= 0

出版日期=

V s s 号= 6 5 0 8 6 5 9 2