

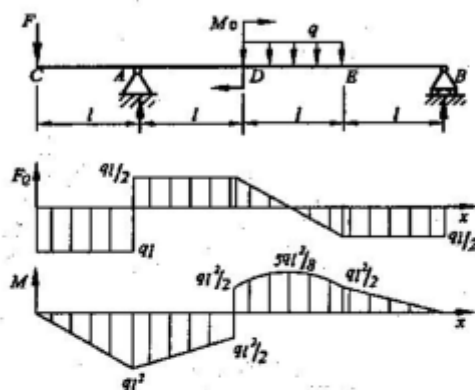
试题 1

一、画图示梁的剪力图和弯矩图, 已知: q 、 L 、 $F = qL$ 、 $M_0 = qL^2$ 。(15 分)

解:

$$F_{Ay} = 3ql/2 (\uparrow)$$

$$F_{By} = ql/2 (\uparrow)$$



试题1-1图

二、钢制平面直角曲拐为圆截面, 受力如图所示, 已知 $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$, $F_x = F_y = 10 \text{ kN}$, $L = 10d$ 。试求: (1) 用单元体表示出危险点处的应力状态; (2) 设计 AB 段的直径 d 。
(15 分) 解: 1、外力分析: 将载荷向 B 点简化,

$$M_x = F_y \cdot l, \quad M_z = F_x \cdot l.$$

AB 圆轴为拉伸、扭转与两个弯曲的组合变形。

2、内力分析: 危险截面是固定端 A,

其合成弯矩 M 为:

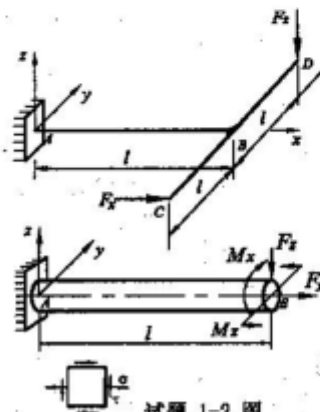
$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{(Fl)^2 + (Fl)^2} = \sqrt{2}Fl$$

3、应力分析: 危险点是固定端上边缘点。

其应力状态如图所示,

$$\sigma = \frac{F_z}{A} + \frac{M}{W} = \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{32\sqrt{2}Fl}{\pi d^3} = \frac{457F}{\pi d^2}$$

$$\tau = \frac{M_x}{W_p} = \frac{16 \cdot Fl}{\pi d^3} = \frac{160F}{\pi d^2}$$



试题 1-2 图

4、因为是塑性材料, 所以用第三强度理论设计 AB 轴的直径 d 。

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{F}{\pi d^2} \sqrt{457^2 + 4 \times 160^2} = \frac{558F}{\pi d^2} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt{\frac{558F}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{558 \times 10 \times 10^3}{\pi \times 160 \times 10^6}} = 0.105\text{m} = 105\text{mm}$$

三、结构受力如图，AB 梁和 CD 杆的材料相同，且 $EI = EAl^2$ ，材料的线膨胀系数为

α ，均布荷载集度为 q ，若 CD 杆温度升高 ΔT 度时，试求 CD 杆的内力。(20 分)

解：一次超静定。去掉 C 处的多余约束，取 AB 梁为静定基，用变形比较法，

确定 C 处的变形协调条件： $|f_c| = |\Delta l_{CD}|$

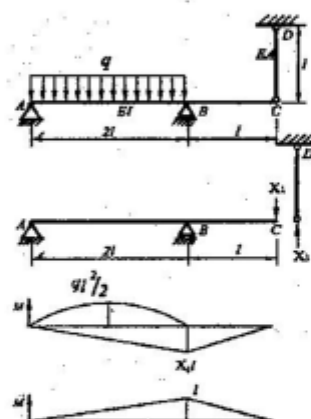
$$\text{即：} |(f_c)_q| - |(f_c)_T| = |\Delta l_n| - |\Delta l_r|$$

$$\text{由图乘法：} (f_c)_q = \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI} = \frac{ql^4}{3EI}$$

$$(f_c)_T = \frac{x_1 l^3}{EI}$$

$$\text{代入有：} \frac{ql^4}{3EI} - \frac{x_1 l^3}{EI} = \frac{x_1 l}{EA} - 2\Delta T \cdot l$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{ql}{3} + 2 \cdot \Delta T \cdot EA \right] \quad (\text{受压})$$



试题1-3图

四、结构受力如图，AB 为 $b=4\text{cm}$ ， $h=6\text{cm}$ 的矩形截面梁，AC 和 CD 杆为 $d=3\text{cm}$ 的圆截面杆，材料均为 Q235，

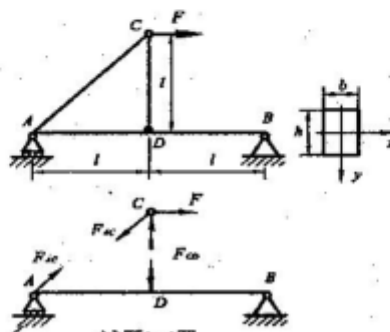
$$E=200\text{GPa}, \quad \sigma_p=200\text{MPa},$$

$$\sigma_s=240\text{MPa}, \quad [\sigma]=120\text{MPa},$$

$$L=1\text{m}, \quad \text{稳定安全系数 } n_{st}=4,$$

$$\text{经验公式 } \sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda)\text{MPa}.$$

试求：该结构的许用载荷 $[F]$ 。(20 分)



试题1-4图

解：对节点C列平衡方程： $F_{AC} = \sqrt{2}F$ （拉）， $F_{CD} = F$ （压）

1、AC 拉杆的强度： $\sigma = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{4\sqrt{2}F}{\pi d^2} \leq [\sigma]$ ； $F_1 \leq \frac{\pi d^2 [\sigma]}{4\sqrt{2}} = 60kN$

2、AB 梁的强度：AB 梁受压、弯组合变形，危险点是D截面的上边缘点，

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{F}{bh} + \frac{3Fl}{bh^2} \leq [\sigma]；F_2 \leq \frac{bh^2 [\sigma]}{h+3l} = 5.68kN$$

3、CD 压杆的稳定性： $\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{4 \times 100}{30} = 133 > \lambda_p$

用欧拉公式 $F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^3 d^2 E}{4\lambda^2}$

$$n = \frac{F_{cr}}{F_{CD}} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\pi^3 d^2 \cdot E}{4\lambda^2 \cdot F} \leq n_{st}；F_3 \leq \frac{\pi^3 d^2 E}{4\lambda^2 n_{st}} = 19.7kN$$

$$[F] = \min\{F_1, F_2, F_3\} = 5.68kN$$

五、某结构危险点处的应力状态如图所示，已知 $E = 200GPa$ ， $\mu = 0.3$ ， $\alpha = 45^\circ$ 。

试求图示单元体：（1）主应力；（2）最大切应力；（3）最大线应变；（4）画出相应的三向应力圆草图；（5）并在三向应力圆上标出指定斜截面上应力所对应的点D。（15分）

解：已知： $\sigma_x = 80MPa$ ， $\sigma_y = 20MPa$ ， $\tau_{xy} = 40MPa$

1)

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 100MPa$$

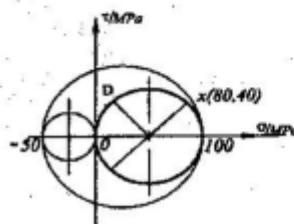
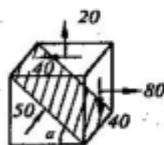
$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0MPa$$

$$\sigma_1 = 100MPa, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -50MPa$$

2) $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 75MPa$

3) $\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 5.75 \times 10^{-4}$

4), 5) 如图所示。



试题1-5图

六、结构受力如图所示，已知 AB 梁的抗弯刚度为 EI ， BC 和 BD 杆抗拉刚度为 EA ， $\alpha = 30^\circ$ ，且 $EI = EAL^2$ ，试求 AB 梁中点处的挠度 f 。（15 分）

解：（1）用图乘法： $F_N = \frac{ql}{\sqrt{3}}$ ， $\bar{F}_N = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

$$f = \frac{2F_N \cdot \bar{F}_N \cdot l}{EA} + \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI}$$

$$= \frac{ql^2}{3EA} + \frac{5ql^4}{24EI} = \frac{13ql^4}{24EI} (\downarrow)$$

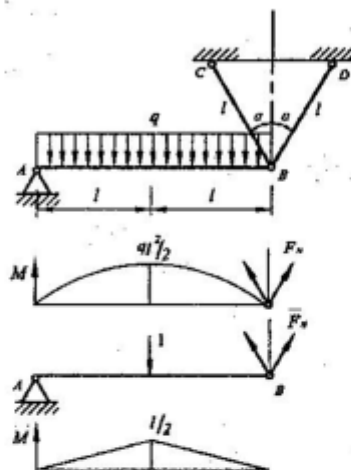
（2）或用分段刚化法：
先刚化拉杆 BC 和 BD ，则 AB 梁的变形：

$$f' = \frac{5q(2l)^4}{384EI} = \frac{5ql^4}{24EI} (\downarrow)$$

再刚化 AB 梁，则：

$$f'' = \frac{f_B}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta l}{\cos 30^\circ} = \frac{ql^2}{3EA} (\downarrow)$$

$$\text{叠加后：} f = f' + f'' = \frac{13ql^4}{24EI} (\downarrow)$$



试题1-6图

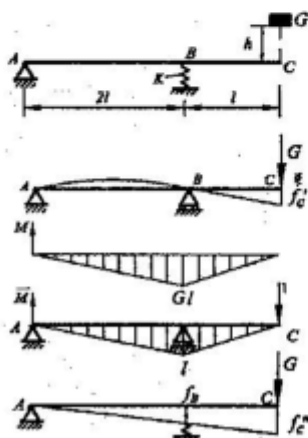
七、图示外伸梁 AC 的抗弯刚度为 EI ， B 处弹簧刚度 $K = 3EI/4l^3$ ，已知重物为 G 的物体从高度为 h 处自由落下，冲击梁的 C 点，试求该结构 B 截面的弯矩。（15 分）

解：用分段刚化法求 Δ_H

先刚化 B 处弹簧，求： $f'_c = \frac{Gl^3}{EI} (\downarrow)$

再刚化 AC 梁，求： $f''_c = \frac{3}{2} f_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{F_B}{k} = \frac{9G}{4k} (\downarrow)$

$$\text{叠加后：} \Delta_H = f_c = f'_c + f''_c = \frac{4G \cdot l^3}{EI} (\downarrow)$$



试题1-7图

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_H}} = 1 + \sqrt{\frac{2G \cdot I^3 + EI \cdot h}{2G \cdot I^3}}$$

$$(M_s)_d = k_d \cdot M_s = \left(1 + \sqrt{\frac{2G \cdot I^3 + EI \cdot h}{2G \cdot I^3}} \right) \cdot G \cdot l$$

八、已知某材料的持久极限曲线如图，(1) 已知材料的 σ_{-1} 、 σ_s 和 σ_0 ，画出该材料的持久极限曲线的简化折线（标出各点的坐标）；

(2) 若已知影响构件持久极限的因素 K_σ 、 ε_σ

和 β ，画出该构件的持久极限曲线简化折线；

(3) 已知该材料的屈服极限 σ_s ，则在图中画

出控制屈服破坏时的控制线；(4) 若某构件交变应力的循环特性 $r > 0$ ，其强度校核时需要考虑哪几方面？(15 分)

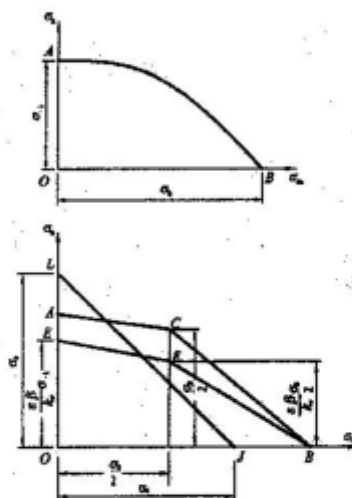
解：

1) 材料的持久极限曲线的简化折线为 ACB ，

2) 构件的持久极限曲线简化折线为 EFB ，

3) 控制屈服破坏时的控制线为 LJ ，

4) 应同时考虑疲劳强度和屈服强度。



试题1-8图

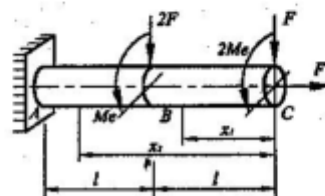
九、圆轴受力如图，已知 F 、 $M_s = FL$ 、 $L = 10d$ ， $EI = 2GI_p = EAL^2$ ，试求：(1)

当所有载荷按比例同时加载时，圆轴内的弹性变形能为多少？(2) 若改变加载次序，则圆轴内的弹性变形能是否发生变化？若发生变化，那么变化的结果为什么？(10 分)

解：1) 组合变形时的变形能

$$\begin{aligned} U &= \frac{2 \cdot F^2 l}{2EA} + \int_0^l \frac{M_s^2(x_1)}{2GI_p} \cdot dx + \int_l^{2l} \frac{M_s^2(x_2)}{2GI_p} \cdot dx \\ &+ \int_0^l \frac{M^2(x_1)}{2EI} \cdot dx + \int_l^{2l} \frac{M^2(x_2)}{2EI} \cdot dx \\ &= \frac{35F^2 l^3}{2EI} \end{aligned}$$

2) 无变化



试题1-9图

十、试推导两端固定细长压杆时的欧拉公式。(10分)

解：两端固定的压杆，由于变形对 midpoint 对称，上、下两端的反作用力偶矩同为 M_e ，且水平反力皆为零。微弯状态下平衡的挠曲线及受力情况如图所示。

挠曲线的微分方程为： $EI \cdot v'' = M(x)$

$$M(x) = -F_{cr}v + M_e$$

引用记号： $K^2 = F_{cr} / EI$ 。

$$\text{则有： } v'' + K^2 v = \frac{M_e}{EI}$$

此微分方程的通解为：

$$v = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx + \frac{M_e}{F_{cr}} \quad (1)$$

$$v' = C_1 K \cos Kx - C_2 K \sin Kx \quad (2)$$

两端固定压杆的边界条件为：

- 1) $x=0$ 时, $v=0, v'=0$
- 2) $x=l$ 时, $v=0, v'=0$

代入式 (1)、(2)，有：

$$\left. \begin{aligned} C_2 + \frac{M_e}{F_{cr}} &= 0 \\ C_1 K &= 0 \\ C_1 \sin Kl + C_2 \cos Kl + \frac{M_e}{F_{cr}} &= 0 \\ C_1 K \cos Kl - C_2 K \sin Kl &= 0 \end{aligned} \right\}$$

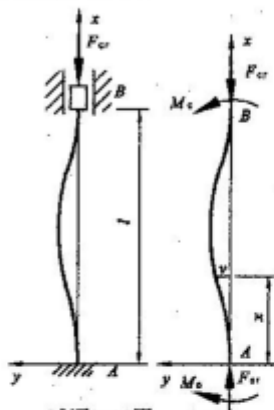
由以上四个方程式可得出： $\cos Kl - 1 = 0, \sin Kl = 0$

满足以上两式的根，除 $Kl=0$ 外，最小根为 $Kl=2\pi$ ，

$$\text{即： } K = \frac{2\pi}{l} \quad ; \text{ 由于 } F_{cr} = K^2 EI$$

$$\text{则： } F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$$

这就是两端固定细长压杆的欧拉公式。



试题1-10图

试题 2

一、画图示梁的内力图。(15分)

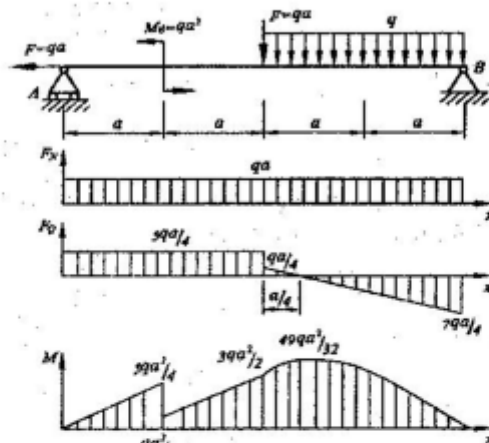
解:

$$\sum F_x = 0, F_{Bx} = qa(-\rightarrow)$$

$$\sum M_A = 0, F_{By} = \frac{7}{4}qa(\uparrow)$$

$$\sum M_B = 0, F_{Ay} = \frac{4}{5}qa(\uparrow)$$

$$\sum F_y = 0, \text{校核无误.}$$



试题2-1图

二、某构件危险点的应力状态如图。材料的 $E = 200GPa$, $\mu = 0.3$, $\sigma_s = 240MPa$,

$\sigma_b = 400MPa$, 试求: 1) 主应力; 2) 最大切应力; 3) 最大线应变;

4) 画出应力圆草图; 5) 设 $n = 1.6$, 校核其强度。(15分)

解: $\sigma_x = 60MPa$, $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = -80MPa$, $\tau_{xy} = 40MPa$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{60}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60}{2}\right)^2 + 40^2} = 80MPa$$

$$\sigma_{\min} = \frac{60}{2} - \sqrt{\left(\frac{60}{2}\right)^2 + 40^2} = -20MPa$$

$$1) \sigma_1 = 80MPa, \sigma_2 = -20MPa, \sigma_3 = -80MPa$$

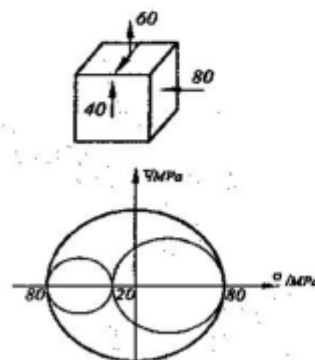
$$2) \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 80MPa$$

$$3) \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 5.5 \times 10^{-4}$$

4) 如图。

$$5) [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = 150MPa$$

$$\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_3 = 160MPa \quad \frac{160 - 150}{150} \% = 6.7\% > 5\% \quad \text{不安全}$$



试题2-2图

三、钢制平面直角曲拐 ABC 受力如图。 $q = 3\pi \text{ kN/m}$, $l = 10d$, $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。

1) 用单元体表示出危险点的应力状态; 2) 设计 AB 圆轴的直径 d 。(15 分)

解: 外力分析: 将外力平行移至 B 截面, $M_x = ql^2/2$, $M_z = ql^2$

内力分析: 确定危险截面为固定端 A,

合成弯矩: $M_A = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{2}ql^2$

危险截面上危险点的应力状态为:

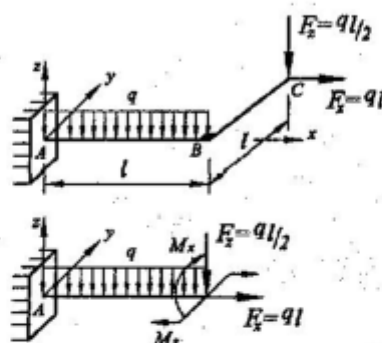
$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{4ql}{\pi d^2} + \frac{32\sqrt{2}ql^2}{\pi d^3} = \frac{14 \times 10^6}{d}$$

$$\tau = \frac{M_x}{W_\mu} = \frac{16ql^2}{\pi d^3} = \frac{2.4 \times 10^6}{d}$$

用第三强度理论设计 AB 圆轴的直径 d 。

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] = 160 \times 10^6$$

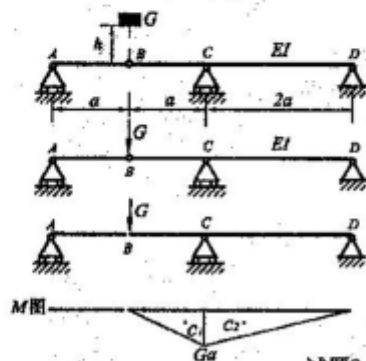
$$d \geq 90.7 \times 10^{-3} \text{ m}, \quad \text{取 } d = 92 \text{ mm}$$



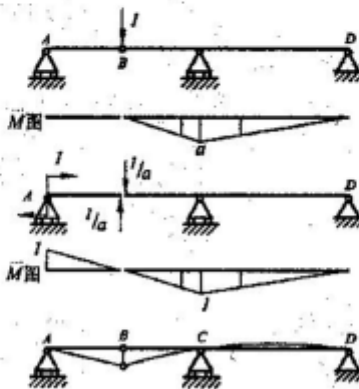
试题2-3图



四、已知具有中间铰的组合梁 EI 为常数, 重量为 G 的物体从 h 高度自由落下, 冲击到 B 截面, 1) 求 A 截面的转角; 2) 画出挠曲线的大致形状。(15 分)



试题2-4图



解: 1)

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}; \quad \Delta_{st} = \sum \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Ga^2}{2} \cdot \frac{2a}{3} + \frac{2Ga^2}{2} \cdot \frac{2}{3}a \right] = \frac{G \cdot a^3}{EI}$$

$$(\theta_n)_A = \sum \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Ga^3}{3} + \frac{2Ga^3}{3} \right] = \frac{G \cdot a^3}{EI} (\text{顺})$$

$$(\theta_d)_A = K_d \cdot (\theta_n)_A = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h \cdot EI}{G \cdot a^3}} \right) \frac{G \cdot a^3}{EI} (\text{顺}) \quad ; \quad 2) \text{ 如图。}$$

五、已知梁的 EI 为常数，今欲使梁的挠曲线在 $x = \frac{l}{3}$ 处出现一拐点，求 $\frac{M_{e1}}{M_{e2}}$ 的比值，

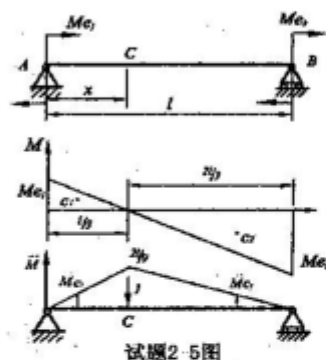
并求此时该点的挠度。(15分)

解：由 $EIv'' = M(x)$ 可知，

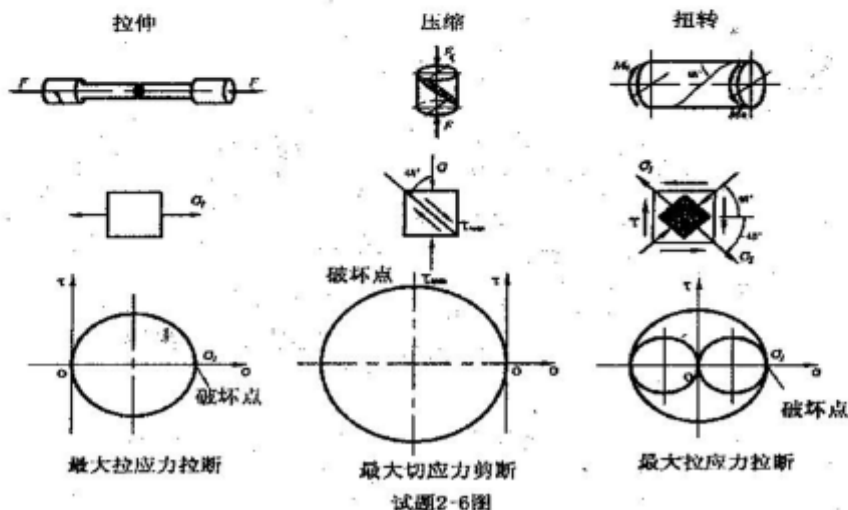
当 $M(x) = 0$ 时，挠曲线出现拐点，

作 M 图，令 $M_c = 0$ ，得： $\frac{M_{e1}}{M_{e2}} = \frac{1}{2}$

$$f_c = \sum \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI} = \frac{l^2}{EI} \left[\frac{M_{e1}}{81} - \frac{2M_{e2}}{81} \right] = \frac{-M_{e1}l^2}{27EI} (\uparrow)$$



六、分别画出铸铁试件在拉伸、压缩、扭转实验中试件的受力简图；破坏件的草图；危险点的应力状态；在单元体上标出破坏面的方位；在应力圆上标出所对应的破坏点；分析引起破坏的原因；根据破坏现象对铸铁抗拉、抗压、抗扭的能力给出结论。(15分)



2) 由于 $[F]$ 是由弯曲强度决定的, 所以可将 BH 梁横截面 W_z 提高, 如图所示:

亦可将 CK 杆横截面如图所示。

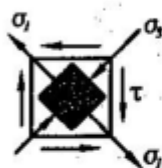
十、根据强度理论, 建立纯剪切应力状态的强度条件。对于塑性材料, 证明: 材料许用切应力 $[\tau]$ 与 $[\sigma]$ 的关系是 $[\tau] = (0.5 \sim 0.6)[\sigma]$ 。(10 分)

解: 纯剪切应力状态如图:

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\tau$$



试题2-10图

对于塑性材料, 由第三强度理论:

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

$$2\tau \leq [\sigma]$$

$$[\tau] = 0.5[\sigma]$$

若用第四强度理论:

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + (2\tau)^2]} \leq [\sigma]$$

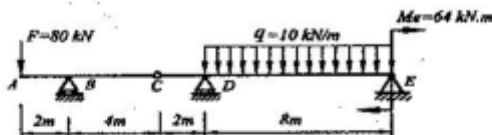
$$\sqrt{3}\tau \leq [\sigma]$$

$$[\tau] = 0.577[\sigma] \approx 0.6[\sigma]$$

$$\text{即: } [\tau] = (0.5 \sim 0.6)[\sigma] \quad \text{证毕。}$$

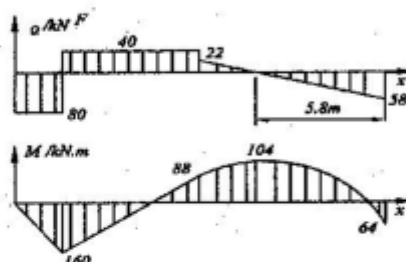
试题 3

一、画图示梁的内力图。(15 分)



二、1 什么是材料的力学性质？
2) 为什么要研究它？3) 今有一新研制的金属（塑性）材料，请写出应测定该材料的力学性质的名称和符号（10 个以上）。(15 分)

答：1) 材料的力学性质：主要是指材料在外力作用下表现出的变形和破坏方面的特性。
2) 因为构件的强度，变形，稳定性和冲击，疲劳计算；还有材料的选择，材料加工等都需要了解和掌握各种材料的力学性质，所以要研究它。



试题 3 1图

- 3) 1) 比例极限 σ_p ; 2) 弹性极限 σ_e ; 3) 屈服极限 σ_s (或 $\sigma_{0.2}$); 4) 强度极限 σ_b ;
5) 伸长率 δ ; 6) 断面收缩率 ψ ; 7) 弹性模量 E ; 8) 切变模量 G ; 9) 泊松比 μ ;
10) 扭转屈服极限 τ_s ; 11) 扭转强度极限 τ_b ; 12) 冲击初度 α_K ; 13) 材料的持久极限 σ_{-1} (τ_{-1}); 14) 敏感系数 ψ_σ (ψ_τ) 等。

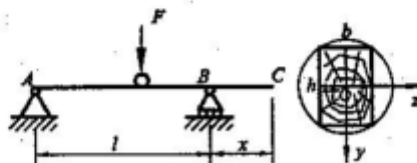
三、有一长 $l=10m$ ，直径 $d=40cm$ 的圆木， $[\sigma]=6MPa$ ，欲加工成矩形截面梁，且梁上作用有可移动的载荷 F ；试问：1) 当 h 、 b 和 x 为何值时，梁的承载能力最大？
2) 求相应的许用载荷。(15 分)

解：1) 由弯曲正应力强度条件：

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

可知：当 W_z 最大时和 M_{\max} 最小时，

梁的承载能力最大。



试题 3 3图

$$W_z = bh^2/6 = b(d^2 - b^2)/6 = (d^2 \cdot b - b^3)/6$$

$$\text{求极值: } \frac{dW_z}{db} = (d^2 - 3b^2)/6 = 0$$

$$\text{当 } b = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}} = 23.1\text{cm} ; h = \sqrt{d^2 - b^2} = 32.7\text{cm} \text{ 时, } W_z \text{ 有最大值.}$$

$$\text{当 } F \text{ 位于 } C \text{ 处时, } M'_{\max} = F \cdot x ; \text{ 当 } F \text{ 位于 } AB \text{ 中间时 } M''_{\max} = \frac{F(l-x)}{4}$$

$$\text{若 } M_{\max} \text{ 最小, 则 } M'_{\max} = M''_{\max}, \text{ 即: } F \cdot x = F(l-x)/4$$

所以, 当 $x = l/5 = 2\text{m}$ 时, M_{\max} 最小, 梁的承载能力最大

$$2) \sigma = \frac{(M_{\max})_{\min}}{(W_z)_{\max}} = \frac{6F \cdot x}{b \cdot h^2} \leq [\sigma]$$

$$[F] \leq \frac{b \cdot h^2 \cdot [\sigma]}{6x} = 12.32\text{kN}$$

四、钢制圆轴受力如图, 已知 $E = 200\text{GPa}$,

$$\mu = 0.25, F_1 = \pi\text{kN}, F_2 = 60\pi\text{kN},$$

$$M_e = 4\pi\text{kN} \cdot \text{m}, L = 0.5\text{m}, d = 10\text{cm},$$

$$\sigma_s = 360\text{MPa}, \sigma_b = 600\text{MPa}, \text{安全系数 } n = 3.$$

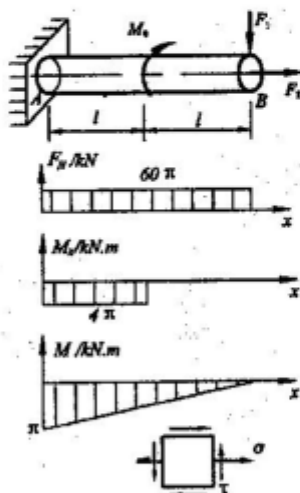
1) 用单元体表示出危险点的应力状态; 2) 求危险点的主应力和最大线应变; 3) 并对该轴进行强度校核。
(15分)

解: 1) 由内力图可确定危险截面为固定端 A;

危险点为 A 截面上边缘点, 如图。

$$\sigma = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} = 24 + 32 = 56\text{MPa}, \quad \tau = \frac{M_x}{W_p} = \frac{16M_x}{\pi d^3} = 64\text{MPa}$$

$$2) \sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 98\text{MPa}, \sigma_1 = 98\text{MPa}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -42\text{MPa}$$



试题3-4图

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 5.4 \times 10^{-4}$$

$$3) \text{ 塑性材料 } [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{360}{3} = 120 \text{ MPa}$$

用第三强度理论进行强度校核: $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 140 \text{ MPa} > [\sigma]$; 不安全

五、直径 $d = 5 \text{ cm}$ 钢制圆轴受力如图, 已知材料的 $[\sigma] = 100 \text{ MPa}$, $E = 200 \text{ GPa}$,

$\mu = 0.25$, 今测得圆轴上表面 A 点处的轴向线

应变 $\varepsilon_0 = 240 \times 10^{-6}$, -45° 方向线应变

$\varepsilon_{-45^\circ} = -160 \times 10^{-6}$ 。试求 M_1 和 M_2 , 并对该轴

进行强度校核。(15 分)

解: 上表面 A 点处的应力状态如图,

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{M_1}{W_x} = E \varepsilon_0 \\ &= 200 \times 10^9 \times 240 \times 10^{-6} = 48 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$M_1 = W_x \cdot E \cdot \varepsilon_0 = 589 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} + \tau \quad ; \quad \sigma_{-45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} - \tau$$

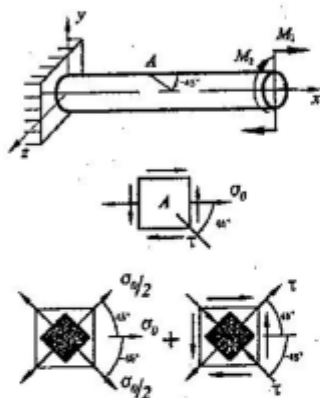
$$E \cdot \varepsilon_{-45^\circ} = [\sigma_{-45^\circ} - \mu \sigma_{45^\circ}] = \left(\frac{\sigma_0}{2} - \tau \right) - \mu \left(\frac{\sigma_0}{2} + \tau \right) = \frac{\sigma_0}{2} (1 - \mu) - \tau (1 + \mu)$$

$$\tau = \frac{\sigma_0 (1 - \mu) / 2 - E \cdot \varepsilon_{-45^\circ}}{1 + \mu} = \frac{M_2}{W_p}$$

$$M_2 = \left[\frac{\sigma_0 (1 - \mu) / 2 - E \varepsilon_{-45^\circ}}{(1 + \mu)} \right] \cdot \frac{\pi d^3}{16} = 981 \text{ N} \cdot \text{m}$$

塑性材料用第三强度理论进行强度校核:

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M^2 + M_z^2} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = 93 \text{ MPa} \leq [\sigma] \quad \text{安全。}$$



试题3 5图

六、直径为 d 的钢制平面曲拐圆轴受力如图，已知材料的 $[\sigma]=160\text{MPa}$ ，

$q=20\text{kN/m}$ ， $F_1=10\text{kN}$ ， $F_2=20\text{kN}$ ，

$L=1\text{m}$ ，试设计 AB 轴的直径 d 。(15 分)

解：将外力向 B 处平移，

$$M_e = F_2 \cdot l = 20\text{kN} \cdot \text{m}$$

确定危险截面是固定端 A ，

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = 36\text{kN} \cdot \text{m}$$

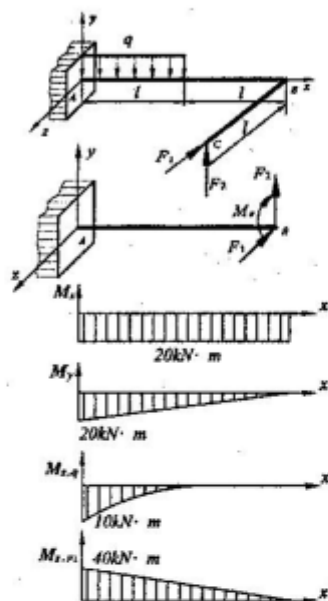
塑性材料，用第三强度理论：

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + M_x^2} \leq [\sigma]$$

$$\frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M^2 + M_x^2} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \sqrt{M^2 + M_x^2}}{\pi [\sigma]}} = 0.138\text{m}$$

AB 轴的直径： $d=138\text{mm}$



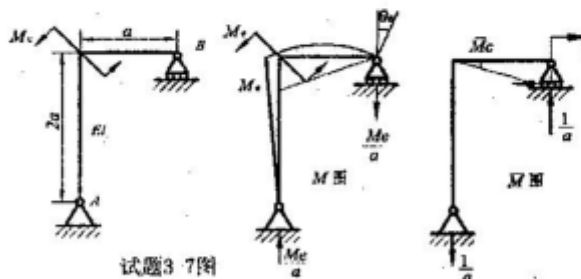
试题3-6图

七、结构受力如图，已

知 M_e 、 a ，刚架 EI 为

常数，试求 B 截面的转角，并画出挠曲线的大

致形状。(10 分)



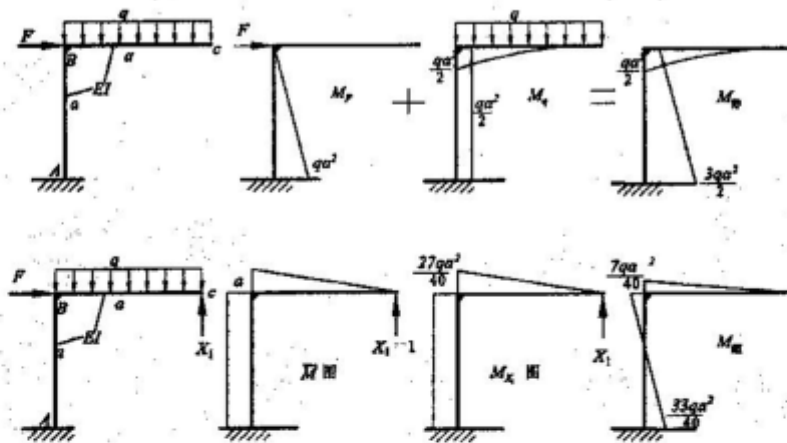
试题3-7图

解：图乘法：

$$\theta_B = \frac{\omega \bar{M}_e}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{M_e \cdot a}{2} \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{M_e \cdot a}{6EI} \text{ (顺)} \quad ; \text{ 挠曲线的大致形状如图。}$$

八、已知平面刚架 EI 为常数，试问：若在 C 处下端增加一刚度为 $K=3EI/a^3$ (N/m)

的弹性支座后，该刚架的承载能力(强度)将提高多少倍？(20 分)



试题3-8图

解：静定刚架：\$(M_{\max})_{\text{静}} = 3qa^2/2\$

若在C处增加一弹性支座后，为一次超静定刚架，解除C处多余约束，以刚架为静定基，以\$X_1\$为多余约束反力。正则方程：\$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = -\Delta_K\$

$$\text{其中：} \delta_{11} = \frac{4a^3}{3EI} ; \Delta_{1F} = -\frac{9qa^4}{8EI} ; \Delta_K = \frac{X_1}{K} = \frac{X_1 \cdot a^3}{3EI}$$

$$\text{代入有：} \frac{4X_1a^3}{3EI} - \frac{9qa^4}{8EI} = -\frac{X_1a^3}{3EI} ; \text{解得：} X_1 = \frac{27}{40}qa(\uparrow)$$

$$\text{超静定刚架} (M_{\max})_{\text{超}} = 33qa^2/40 ; \frac{(M_{\max})_{\text{超}}}{(M_{\max})_{\text{静}}} = 1.82$$

答：若在C处增加弹性支座后，该刚架的强度将提高1.82倍。

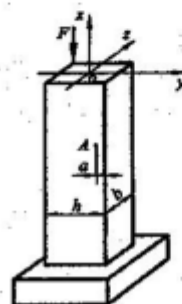
九、已知矩形截面铝合金杆A点处的纵向线应变\$\epsilon_x = 5 \times 10^{-4}\$，

\$E = 70\text{GPa}\$，\$h = 18\text{cm}\$，\$b = 12\text{cm}\$，\$a = 2\text{cm}\$，试求载荷\$F\$。

(10分)

解：1) 外力分析：

将偏心载荷\$F\$向截面形心处平移，



试题3-9图

$$M_y = 6 \times 10^{-2} F (N \cdot m) ; \quad M_z = 9 \times 10^{-2} F (N \cdot m)$$

主柱受二个平面弯曲和轴向压缩组合变形。A点处的正应力:

$$\sigma = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{F}{A} = \frac{6M_y}{hb^2} + \frac{12M_z(h/2-a)}{bh^3} - \frac{F}{bh} = 201F = E \cdot \varepsilon = 35 \text{ MPa}$$

$$F = 35 \times 10^6 / 201 = 174.5 \text{ kN}$$

十、已知槽形截面铸铁梁的 $E_1 = 100 \text{ GPa}$, $[\sigma_t] = 30 \text{ MPa}$, $[\sigma_c] = 120 \text{ MPa}$,

$I_z = 18800 \text{ cm}^4$, $y_1 = 96 \text{ mm}$, $y_2 = 164 \text{ mm}$, CD杆材料为 Q235, 直径 $d = 50 \text{ mm}$,

$L = 1 \text{ m}$, $E_2 = 200 \text{ GPa}$, $n_{st} = 3$, $\sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda) \text{ MPa}$ 。今有一重为 $G = 200 \text{ N}$

从高度为 $h = 10 \text{ cm}$ 自由落下, 试校核 AB 梁的强度和 CD 杆的稳定性。(20 分)

解: 叠加法求 Δ_n , AB 梁的 $f'_B = \sum \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{E_1 I} = 17 \times 10^{-4} \text{ m}$

CD 杆受压引起的 $f'' = 1.2 \times \Delta l_{CD} = 1.2 \times G \cdot l / EA = 72 \times 10^{-4} \text{ m}$

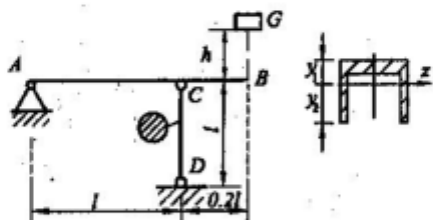
$$\Delta_n = f'_B + f'' = 89 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + 2h / \Delta_n} = 151$$

$$M_{d, \max} = K_d \cdot G \cdot l / 5 = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{t, \max} = \frac{M_{d, \max} \cdot y_1}{I_z} = 3 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c, \max} = \frac{M_{d, \max} \cdot y_2}{I_z} = 5.2 \text{ MPa} < [\sigma_c] \quad , \quad AB \text{ 梁强度安全。}$$



试题3 10图

BC 压杆: $\lambda = 4\mu \cdot l / d = 80$, $60 < \lambda < 100$, 中长杆, 用经验公式:

$$F_{cr} = (304 - 1.12\lambda) \cdot A = 429 \text{ kN}, \quad n = \frac{F_{cr}}{K_d \cdot 1.2G} = \frac{429 \times 10^3}{151 \times 1.2 \times 200} = 12 > n_{st} = 3 \quad ,$$

CD 杆压杆的稳定性安全。

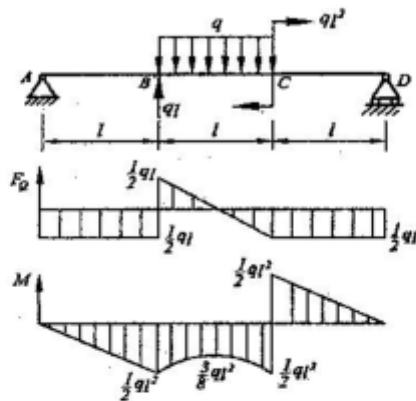
试 题 4

一、画图示梁的剪力图和弯矩图。(15分)

解：求支反力

$$F_{Ay} = \frac{ql}{2} (\downarrow)$$

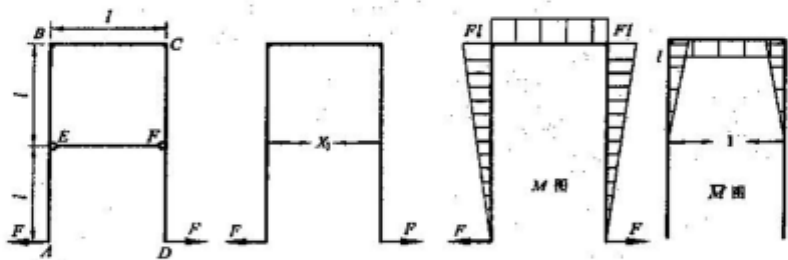
$$F_{Dy} = \frac{ql}{2} (\uparrow)$$



试题4-1图

二、结构受力如图所示，已知平面刚架 ABCD 的抗弯刚度为 EI，EF 杆的抗拉刚度为 EA，设 $3EI = EAL^2$ 。试求 EF 两点的相对位移。(20分)

解：一次超静定，去掉 E、F 处多余约束，得到静定刚架，以 X_1 为多余约束反力，



试题4-2图

$$\text{正则方程: } \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = -\Delta_{1EF}$$

$$\text{其中: } \delta_{11} = \frac{5l^3}{3EI} \quad ; \quad \Delta_{1F} = -\frac{11Fl^3}{6EI} \quad ; \quad \Delta_{1EF} = \frac{X_1 \cdot l}{EA} = \frac{X_1 l^3}{3EI}$$

$$\text{代入得: } \frac{5X_1 l^3}{3EI} - \frac{11Fl^3}{6EI} = -\frac{X_1 l^3}{3EI} \quad , \quad \text{解得: } X_1 = \frac{11F}{12} (\text{拉})$$

$$EF \text{ 两点的相对位移: } \Delta_{EF} = \Delta_{1EF} = \frac{11Fl^3}{3 \times 12EI} = \frac{11Fl^3}{36EI} (\longleftrightarrow)$$

三、直径为 d 的钢制圆轴受力如图，已知材料的 $[\sigma]$ ， F 、 l 、 $M_e = 4Fl$ ，试用第三强度理论设计该轴的直径 d 。(15分)

解：

画内力图，合成弯矩：

$$M_B = \sqrt{M_{By}^2 + M_{Bz}^2} = \sqrt{20}Fl$$

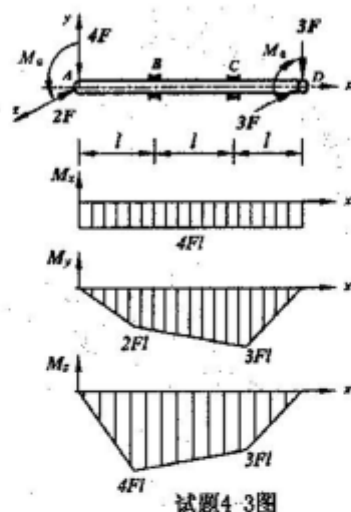
$$M_C = \sqrt{M_{Cy}^2 + M_{Cz}^2} = \sqrt{18}Fl$$

确定 B 截面为危险截面。

塑性材料，用第三强度理论

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W} \sqrt{M_B^2 + M_x^2} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{192Fl}{\pi[\sigma]}}$$



试题4-3图

四、已知某钢结构危险点处的应力状态如图， $E = 200GPa$ ， $\mu = 0.25$ 。试求：1) 图示单元体的主应力；2) 最大剪应力；3) 最大线应变；4) 画出相应的三向应力圆草图。(15分)

解：前后平面为主平面，其 $50MPa$ 为主应力。

$$\sigma_x = 60MPa, \sigma_y = -20MPa, \tau_{xy} = -30MPa$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 70MPa$$

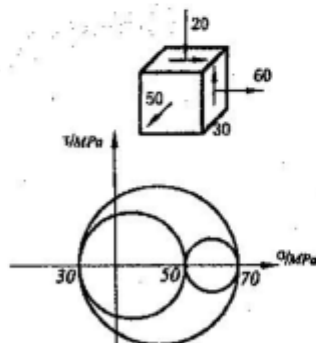
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -30MPa$$

$$1) \sigma_1 = 70MPa, \sigma_2 = 50MPa, \sigma_3 = -30MPa$$

$$2) \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{70 - (-30)}{2} = 50MPa$$

$$3) \epsilon_{\max} = \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 325 \times 10^{-6}$$

4) 三向应力圆草图如图。



试题4-4图

六、结构受力如图所示, 已知: $E=200\text{GPa}$, $\mu=0.3$, $d=8\text{cm}$, $l=1\text{m}$, 现测得

圆轴上表面 A 点 45° 方向的线应变为 $\varepsilon_{45^\circ}=4\times 10^{-4}$, 试求外载荷 F 。(15 分)

解: A 截面受弯、扭组合变形: $M_A=-Fl/2$, $M_x=-Fl$

上表面 A 点的应力状态如图: $\sigma_A=\frac{M_A}{W_z}=\frac{16Fl}{\pi d^3}$; $\tau_A=\frac{M_x}{W_p}=\frac{16Fl}{\pi d^3}=\sigma_A$

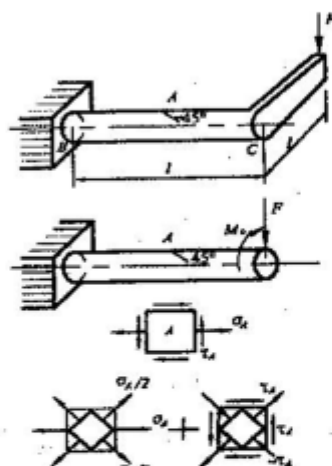
$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma_A}{2}-\tau_A=-\frac{\sigma_A}{2}$$

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma_A}{2}+\tau_A=\frac{3\sigma_A}{2}$$

$$E\cdot\varepsilon_{-45^\circ}=[\sigma_{-45^\circ}-\mu\cdot\sigma_{45^\circ}]$$

$$E\varepsilon_{-45^\circ}=\left(-\frac{\sigma_A}{2}-\frac{3\mu\sigma_A}{2}\right)=-0.95\frac{16Fl}{\pi d^3}$$

$$F=\frac{E\cdot\varepsilon_{-45^\circ}\cdot\pi d^3}{15.2\times l}=8461\text{N}$$



试题4-6图

七、梁的刚度为 EI , 试求 A 截面的挠度。(15 分)

解: 用图乘法求

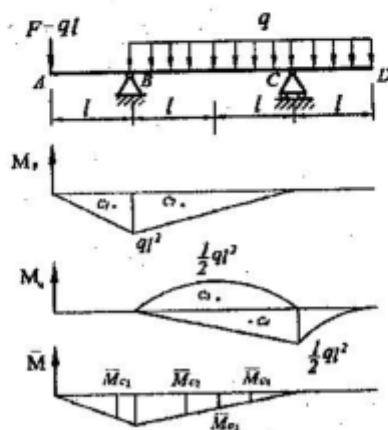
$$\omega_1=\frac{ql^3}{2}, \quad \overline{M}_{c1}=\frac{2l}{3}$$

$$\omega_2=ql^3, \quad \overline{M}_{c2}=\frac{2l}{3}$$

$$\omega_3=\frac{2ql^3}{3}, \quad \overline{M}_{c3}=\frac{l}{2}$$

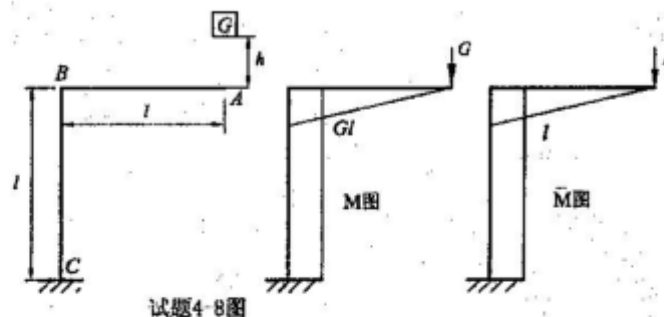
$$\omega_4=\frac{ql^3}{2}, \quad \overline{M}_{c4}=\frac{l}{3}$$

$$f_A=\sum\frac{\omega_i\cdot\overline{M}_{ci}}{EI}=\frac{5ql^4}{6EI}(\downarrow)$$



试题4-7图

八、平面直角刚架的抗弯刚度为 EI ，受一重物 G 从高度为 h 处自由冲击，。试求刚架内最大动弯矩 $M_{\max,d}$ 。(10 分)



解：用图乘法求： $\Delta_{st} = \sum \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{Gl^2}{2} \cdot \frac{2l}{3} + Gl^2 \cdot l \right] = \frac{4Gl^3}{3EI}$

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3hEI}{2Gl^3}};$$

$$M_{\max,d} = K_d \cdot Gl = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3hEI}{2Gl^3}} \right) \cdot Gl$$

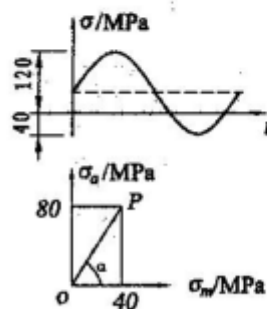
九、已知结构某点的交变应力随时间的变化曲线，试求 1) 循环特性 r ；2) 平均应力 σ_m ；3) 应力幅度 σ_a ；4) 在 $\sigma_m - \sigma_a$ 坐标系中，标出该应力循环对应点，并求出自原点出发且通过该点的射线与水平轴 σ_m 的夹角 α 。(10 分)

解：1) $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-40}{120} = -\frac{1}{3}$

2) $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{120 - 40}{2} = 40 \text{ MPa}$

3) $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{120 + 40}{2} = 80 \text{ MPa}$

4) $\alpha = \arctan 2 = 63.4^\circ$



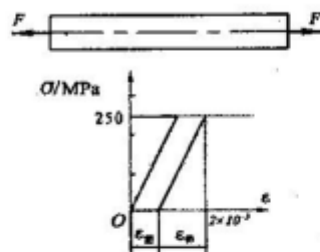
十、一等直杆受轴向拉伸，当应力达到 $\sigma = 250\text{MPa}$ 时，其应变 $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ ，已知 $E = 200\text{GPa}$ ， $L = 300\text{mm}$ ，试求拉杆的塑性应变。（7分）

解：弹性应变：

$$\varepsilon_{\text{弹}} = \frac{\sigma}{E} = \frac{250 \times 10^6}{200 \times 10^9} = 1.25 \times 10^{-3}$$

塑性应变：

$$\varepsilon_{\text{塑}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{弹}} = 2 \times 10^{-3} - 1.25 \times 10^{-3} = 0.75 \times 10^{-3}$$



试题4-10图

十一、一等直杆受偏心拉伸，试确定其任意 x 截面上

上的中性轴方程。若设 $y_p = -h/6$ ， $z_p = b/6$ ，试求中性轴在 y 轴和 z 轴上的截距

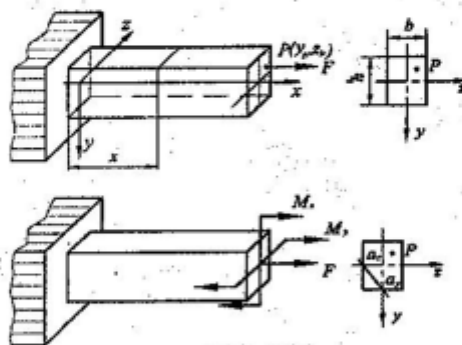
（ $a_y = ?$ ， $a_z = ?$ ）各为多少？（8分）

解：将偏心拉力向截面形心
平移后，则任意 x 截面上：

$$F_N = F$$

$$M_y = F \cdot z_p = \frac{F \cdot b}{6}$$

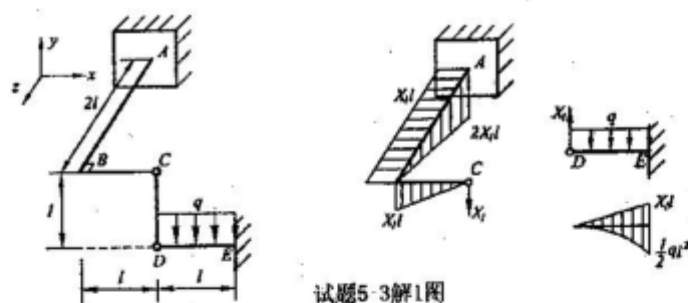
$$M_z = F \cdot y_p = \frac{-F \cdot h}{6}$$



试题4-11图

中性轴是横截面上正应力等于零的各点的连线。中性轴方程：

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} \\ &= \frac{F}{bh} + \frac{F \cdot b}{6} \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot z - \frac{F \cdot h}{6} \cdot \frac{12}{bh^3} \cdot y = \frac{F}{bh} + \frac{2F}{hb^2} \cdot z - \frac{2F}{bh^2} \cdot y = 0 \\ \text{令: } z &= 0, a_y = \frac{h}{2} \quad ; \quad y = 0, a_z = -\frac{b}{2} \end{aligned}$$



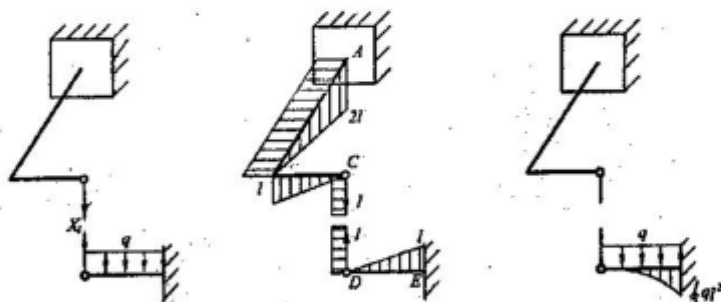
试题5-3解1图

解：一次超静定。方法 I：选取平面曲拐为 ABC 静定基，

其变形协调方程为： $f_D - f_C = \Delta l_{CD}$

$$f_D = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{X_1 l^3}{3EI} ; \quad f_C = \frac{3X_1 l^3}{E \cdot I} + \frac{2X_1 l^3}{G \cdot I_p} ; \quad \Delta l_{CD} = \frac{X_1 l}{EA}$$

代入解得： CD 杆的轴力为 $X_1 = 3ql/320$ (拉)



试题5-3解2图

方法 II：选整个系统为静定基，其正则方程为： $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EA} + \frac{1}{EI} \left[\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right] + \frac{2l^2}{GI_p} = \frac{40l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{-1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot l \right] = -\frac{ql^4}{8EI}$$

代入解得： CD 杆的轴力为 $X_1 = 3ql/320$ (拉)

四、结构受力如图所示, 载荷 F 可在 AB 梁上移动。 AB 为 T 形截面铸铁梁, 已知其许用拉应力为 $[\sigma_t] = 40 \text{ MPa}$, 许用压应力为 $[\sigma_c] = 160 \text{ MPa}$, $I_z = 800 \text{ mm}^4$, $y_1 = 5 \text{ cm}$, $y_2 = 9 \text{ cm}$, CD 圆杆用 Q235 钢制成, $d = 3 \text{ cm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\lambda_p = 100$, $\lambda_s = 60$, $\sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda) \text{ MPa}$, $n_d = 3$ 。试校核该结构是否安全。(20 分)

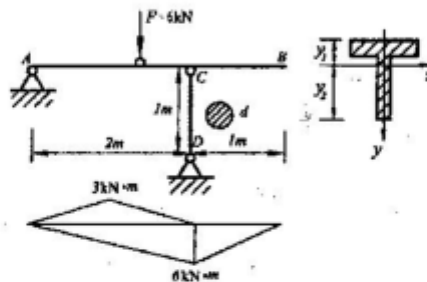
解: (1) 当移动载荷 F 移动到 B 点时, CD 杆的压力最大, 且 $N_{CD} = 9 \text{ kN}$, 校核 CD 压杆的稳定性:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = 133.3 > \lambda_p$$

为大柔度杆, 用欧拉公式:

$$\begin{aligned} F_{cr} &= \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \\ &= \frac{3.14 \times 9 \times 10^{-4} \times 200 \times 10^9}{4 \times 133.3^2} \\ &= 78.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$n = \frac{F_{cr}}{N_{CD}} = \frac{78.5 \times 10^3}{9 \times 10^3} = 8.7 > n_d \quad \text{安全。}$$



试题 5-4 图

(2) 当移动载荷 F 移动到 B 点时, AB 梁内产生最大负弯矩, 且为 $M_C = Fl = 6 \text{ kN} \cdot \text{m}$,

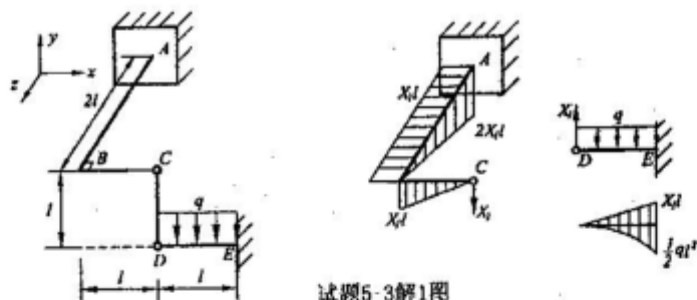
当移动到 AC 梁中点时, AB 梁内产生最大正弯矩, 且为 $M^* = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$C \text{ 截面上边缘: } \sigma_{\max,t} = \frac{M_C}{I_z} y_1 = \frac{6 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-3}}{800 \times 10^{-8}} = 38 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

$$C \text{ 截面下边缘: } \sigma_{\max,c} = \frac{M_C}{I_z} y_2 = \frac{6 \times 10^3 \times 90 \times 10^{-3}}{800 \times 10^{-8}} = 68 \text{ MPa} < [\sigma_c]$$

$$AC \text{ 梁中间截面下边缘: } \sigma_{\max,t} = \frac{M_F}{I_z} y_2 = \frac{6 \times 10^3 \times 90 \times 10^{-3}}{800 \times 10^{-8}} = 34 \text{ MPa} < [\sigma_t]$$

结构安全。



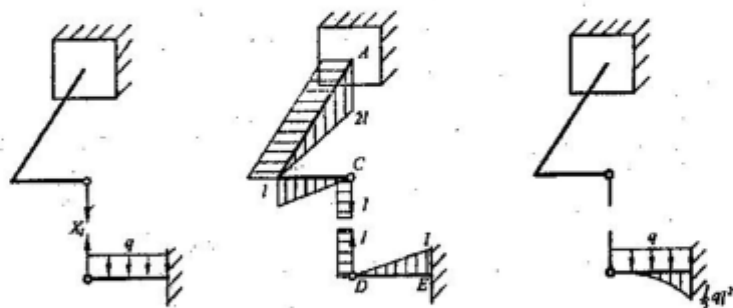
试题5-3解1图

解：一次超静定。方法 I：选取平面曲拐为 ABC 静定基，

其变形协调方程为： $f_D - f_C = \Delta l_{CD}$

$$f_D = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{X_1 l^3}{3EI} ; \quad f_C = \frac{3X_1 l^3}{E \cdot I} + \frac{2X_1 l^3}{G \cdot I_p} ; \quad \Delta l_{CD} = \frac{X_1 l}{EA}$$

代入解得： CD 杆的轴力为 $X_1 = 3ql/320$ (拉)



试题5-3解2图

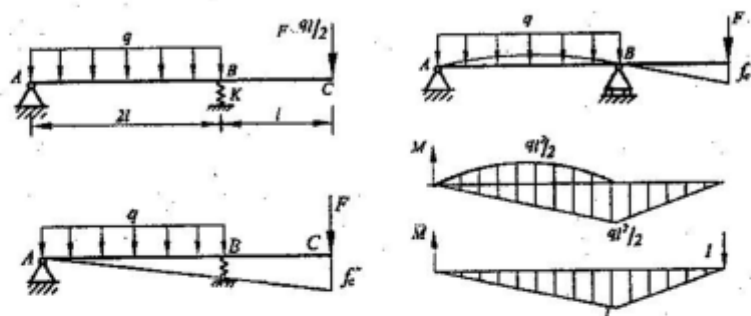
方法 II：选整个系统为静定基，其正则方程为： $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EA} + \frac{1}{EI} \left[\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2l \right] + \frac{2l^2}{GI_p} = \frac{40l^3}{3EI}$$

$$\Delta_{1F} = \frac{-1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot l \right] = -\frac{ql^4}{8EI}$$

代入解得： CD 杆的轴力为 $X_1 = 3ql/320$ (拉)

五、结构受力如图所示，设弹簧刚度为 $K = 5EI/l^3$ ，试求 C 截面。（15 分）



试题 5-5 图

解：用分段刚化叠加法求：

先刚化弹簧，求 AC 梁弯曲变形： $f'_c = ql^4 / 6EI (\downarrow)$

再刚化 AC 梁，求弹簧引起的变形： $f''_c = \frac{3}{2} \delta_B = \frac{3}{2} \frac{R_B}{k} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{4} ql \right) \cdot \frac{l^3}{5EI} = \frac{3ql^4}{8EI} (\downarrow)$

叠加法： $f_c = f'_c + f''_c = 13ql^4 / 24EI (\downarrow)$

六、某钢结构危险点处的应力状态状态 (MPa)，已知 $E = 200GPa$ ， $\mu = 0.3$ ，

$\sigma_x = 200MPa$ ， $\sigma_y = 400MPa$ ， $n = 2$ 。试求 1) 主应力；

2) 最大剪应力；3) 最大线应变；4) 画三向应力圆；

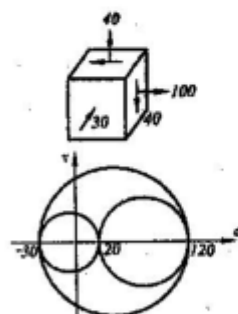
5) 并对该点进行强度校核。（15 分）

解： $\begin{cases} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{cases} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 120 \\ 20 \end{cases} MPa$

$\sigma_1 = 120MPa$ ， $\sigma_2 = 20MPa$ ， $\sigma_3 = -30MPa$

(2) $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{120 + 30}{2} = 75MPa$

(3) $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 6.15 \times 10^{-4}$



试题 5-6 图

$$(4) \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 150 \text{ MPa} > [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n} = 100 \text{ MPa}$$

该点强度不够。

七、已知某材料的持久极限曲线如图，试求 (1) A、B、C、D 各点的循环特性 r；

(2) σ_{-1} 和 σ_b ；(3) G 点的 σ_{\max} ， σ_{\min} ；(4) 画出相应的持久极限曲线的简化折线。

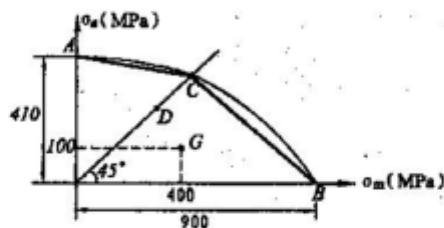
(7 分) 解：(1) $r_A = -1$ ，

$$r_B = +1, r_C = r_D = 0$$

(2) $\sigma_{-1} = 410 \text{ MPa}$ ， $\sigma_b = 900 \text{ MPa}$ 。

(3) $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = 500 \text{ MPa}$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a = 300 \text{ MPa}.$$



试题 5-7 图

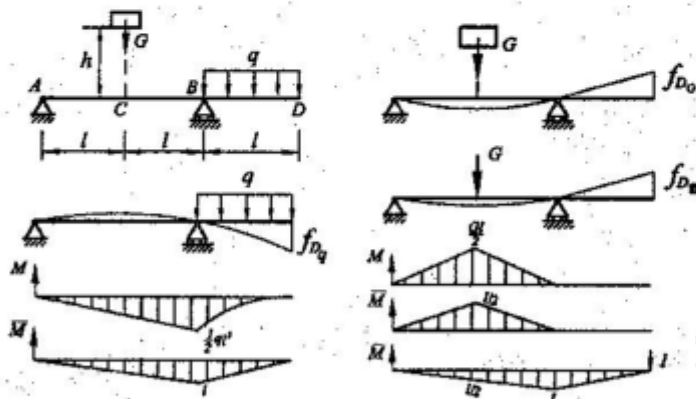
(4) ABC 折线为简化折线。

八、结构如图所示，试求结构在静载荷 q 和动载荷 $G = qL$ 冲击下 D 点的挠度。

$$qL^4 = 4hEI,$$

EI 为常数。

(15 分)



试题 5-8 图

$$\text{解：用叠加法求：} f_D = (f_D)_q + (f_D)_G = -\frac{7ql^4}{24EI} (\uparrow)$$

$$\text{其中：} (f_D)_q = \frac{11ql^4}{24EI} (\downarrow) ; \Delta_{st} = \frac{Gl^3}{6EI} ; K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 3$$

$$(f_D)_B = \frac{-Gl^3}{4EI}(\uparrow) \quad ; \quad (f_D)_G = K_d \cdot (f_D)_B = -\frac{3Gl^3}{4EI}(\uparrow)$$

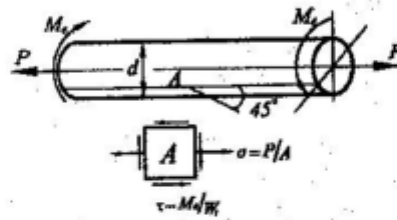
九、圆轴受力如图所示, 已知: $E = 200GPa$, $\mu = 0.3$, $d = 10cm$, 现测得圆轴表面 A 点沿轴线方向的线应变 $\varepsilon_{\sigma} = 5 \times 10^{-4}$, 沿 45° 方向的线应变为 $\varepsilon_{45} = 4 \times 10^{-4}$,

试求外载荷 P 和 M_e 。(15 分)

解: 圆轴受拉、扭组合变形,
取出 A 点处原始单元体如图:

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EA}$$

$$P = E \cdot A \cdot \varepsilon_{\sigma} = 785kN$$



试题 5-9 图

$$\text{叠加法求: } \sigma_{45} = \frac{\sigma}{2} + \tau \quad \sigma_{45} = \frac{\sigma}{2} - \tau$$

由广义胡克定律:

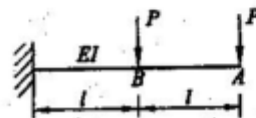
$$\begin{aligned} \varepsilon_{45} &= \frac{1}{E}(\sigma_{45} - \mu\sigma_{45}) = \frac{1}{E}\left[\frac{\sigma}{2} + \tau - \mu\left(\frac{\sigma}{2} - \tau\right)\right] = \frac{1}{E}[(1-\mu)\sigma/2 + (1+\mu)\tau] \\ &= \frac{1}{E}\left[(1-\mu)\frac{P}{2A} + (1+\mu)\frac{M_e}{W_t}\right] \end{aligned}$$

$$M_e = \frac{W_t \left[E\varepsilon_{45} - (1-\mu)\frac{P}{2A} \right]}{1+\mu} = \frac{\pi d^3 \left[E\varepsilon_{45} - (1-\mu)\frac{P}{2A} \right]}{16(1+0.3)} = 6.8kN \cdot m$$

十、结构受力如图, U 为结构的弹性变形能, 试问 $\frac{\partial U}{\partial P}$ 的力学意义是什么?(5 分)

解: $\frac{\partial U}{\partial P}$ 的力学意义是 A 点和 B 点挠度之和,

$$\text{即: } f_A + f_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$



试题5-10图

十一、一弹性体在广义力 P_1 和 P_2 共同作用下, 1、2 两点产生的广义位移分别为 Δ_1 和 Δ_2 ;

设 P_1 单独作用 1 点时, 在 1、2 两点产生的位移分别是 Δ_{11} 和 Δ_{21} ; 设 P_2 单独作用 2 点时,

在 1、2 两点产生的位移分别为 Δ_{12} 和 Δ_{22} 。试证明: $P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}$ 。(8 分)

解: 证明:

(1) 先加 P_1 , 后加 P_2 , 则变形能为:

$$U_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12}$$

(2) 先加 P_2 , 后加 P_1 , 则变形能为:

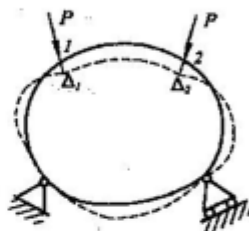
$$U_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}$$

变形能与加载次序无关, 只与载荷的最终值有关,

$$\text{故有: } U_1 = U_2,$$

$$\text{即: } \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12} = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}$$

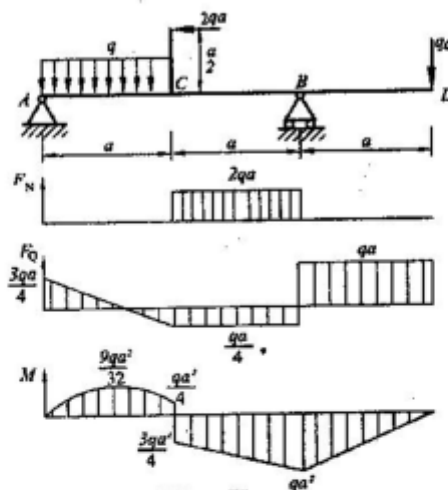
$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21} \quad \text{证毕。}$$



试题 5-11 图

试 题 6

一、作图示结构中 AD 段的内力图。
(15 分)



试题6-1图

二、圆轴受弯矩组合变形, $m_1 = m_2 = 150 \text{ N} \cdot \text{m}$, $d = 50 \text{ mm}$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$ 。

试画出危险点的应力状态, 并求其主应力、最大切应力和最大线应变。(15 分)

解: 各截面内力相等; 危险点为上边缘点如图。

$$\sigma = \frac{32m_1}{\pi d^3} = 1.15 \text{ MPa}, \quad \tau = \frac{16m_2}{\pi d^3} = 2.3 \text{ MPa}$$

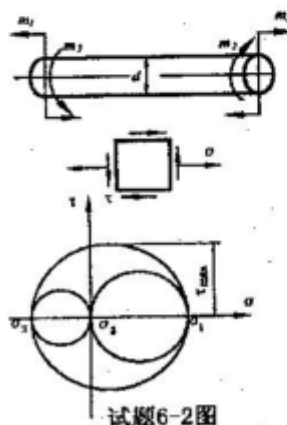
$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 14.68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -2.53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = 14.68 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -2.53 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 8.6 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = 77 \times 10^{-6}$$



试题6-2图

三、钢制实心圆轴, $[\sigma] = 140 \text{ MPa}$, $l = 1 \text{ m}$, $a = 15 \text{ cm}$, 皮带轮直径 $D = 80 \text{ cm}$, 重 $Q = 2 \text{ kN}$, 皮带水平拉力 $F_1 = 8 \text{ kN}$, $F_2 = 2 \text{ kN}$ 。试设计 AC 轴的直径 d 。(15 分)

解:

$$(F_1 - F_2) D / 2 = m = 2.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

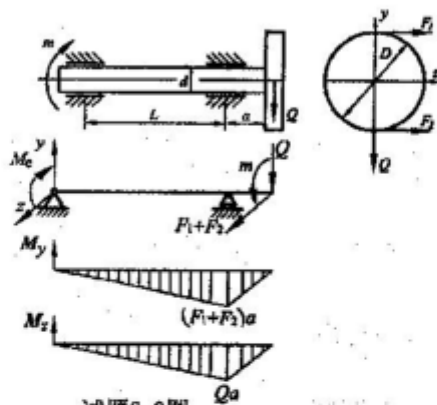
危险截面的合成弯矩:

$$M_{\text{合}} = \sqrt{M_{y\text{max}}^2 + M_{z\text{max}}^2} \\ = \sqrt{(1.5)^2 + (0.3)^2} = 1.53 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_x = m = 2.4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sigma_{\text{r3}} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_{\text{合}}^2 + M_x^2} \leq [\sigma]$$

$$\text{解得: } d = 60 \text{ mm}$$



试题6-3图

四、矩形截面组合梁, 已知材料的弹性模量 E 、 a 、 b 、 h , 在突加重物 Q 作用下, 测得中间铰 B 左、右的相对转角 $\bar{\theta}_B = 2$, 求 Q 值及梁内横截面上的最大正应力。(15 分)

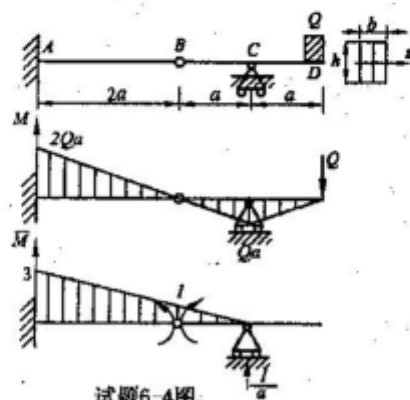
解: 突加重物: $K_d = 2$

$$\text{用图乘法求: } \bar{\theta}_B = \frac{27Q \cdot a^2}{6E \cdot bh^3} = 2$$

$$\text{解得: } Q = \frac{12E \cdot bh^3}{27a^2}$$

$$(\sigma_{\text{max}})_d = K_d \cdot \frac{M_{\text{max}}}{W_z}$$

$$= K_d \cdot \frac{12Qa}{bh^2} = \frac{288E \cdot h}{27a}$$



试题6-4图

五、圆截面平面曲拐 OAB 与直杆 CD 直径、材料均相同。已知 F 、 L , 且 $GI_p = 0.8EI$,

$EA = 0.4EI/l^2$, 求 O 端的约束反力。(20 分)

解: 选取曲拐 OAB 和 CD 杆为静定基,
截开处的相对位移为零,

正则方程为: $\bar{\Delta}_1 = \delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$

$$\delta_{11} = \frac{l}{EA} + \frac{3l^3}{EI} + \frac{2l^3}{GI_p} = \frac{8 \cdot l^3}{EI}$$

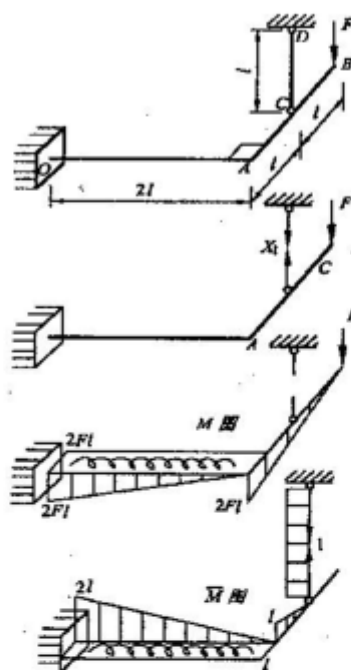
$$\Delta_{1F} = -\frac{4Fl^3}{GI_p} - \frac{7Fl^3}{2EI} = -\frac{17Fl^3}{2EI}$$

$$\text{解得: } X_1 = \frac{16F}{17}$$

O 端的约束反力: $F_y = \frac{F}{17}(\downarrow)$

$$M_{ox} = \frac{15F \cdot l}{16}$$

$$M_{oz} = \frac{F \cdot l}{8}(\downarrow)$$



试题6-5图

六、矩形截面悬臂梁, 已知材料的弹性模量 E 、 I 、 b 、 h , 在上顶面作用着均布切向载荷 q , 求轴线上 B 点的水平位移 u_B , 垂直位移 v_B

和杆件的弹性变形能 U 。(20 分)

解: 将 q 向轴线处平移,

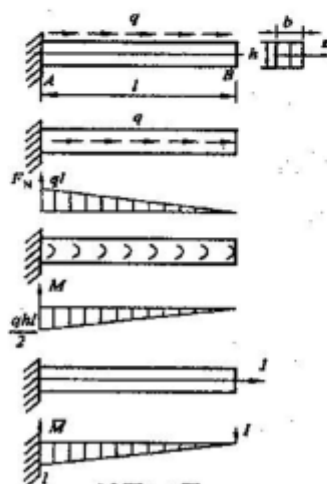
受轴向拉伸和弯曲组合变形。

用图乘法求解:

$$u_B = \frac{ql^2}{2EA} = \frac{q \cdot l^2}{E \cdot b \cdot h}(\rightarrow)$$

$$v_B = \frac{2ql^3}{E \cdot b \cdot h^2}(\downarrow)$$

$$U = \frac{2q^2l^3}{3E \cdot b \cdot h^2}$$



试题6-6图

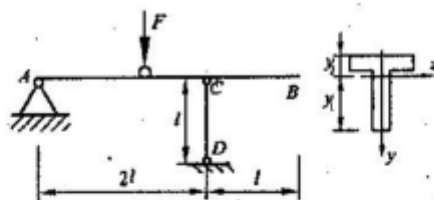
七、AB 为 T 形截面铸铁梁，已知 $I_z = 4 \times 10^7 \text{ mm}^4$ ， $y_1 = 14 \text{ cm}$ ， $y_2 = 6 \text{ cm}$ ，许用拉应力 $[\sigma_t] = 35 \text{ MPa}$ ，许用压应力 $[\sigma_c] = 140 \text{ MPa}$ 。CD 为圆截面钢杆，直径 $d = 32 \text{ mm}$ ；

$$E = 200 \text{ GPa} \quad , \quad \sigma_p = 200 \text{ MPa} \quad ,$$

$$\sigma_s = 240 \text{ MPa} \quad , \quad [\sigma] = 120 \text{ MPa} \quad , \quad n_s = 3 \quad ,$$

$$l = 1 \text{ m} \quad , \quad \sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda) \text{ MPa} \quad . \text{ 试求}$$

载荷移动时结构的许可载荷 $[F]$ 。(20 分)



试题6-7图

解：当移动载荷 F 移动到 B 点时， $M_C = -Fl$

$$C \text{ 截面上边缘: } \sigma_{\max, t} = \frac{F \cdot l \cdot y_2}{I_z} \leq [\sigma_t] \quad ; \quad F_1 \leq \frac{[\sigma_t] \cdot I_z}{l \cdot y_2} = 23.3 \text{ kN}$$

当移动到 AC 梁中点时，AB 梁内产生最大正弯矩，且为 $M^+ = F \cdot l / 2$

$$AC \text{ 梁中间截面下边缘: } \sigma_{\max, c} = \frac{F \cdot l \cdot y_1}{2 \cdot I_z} \leq [\sigma_c] \quad ; \quad F_2 \leq \frac{2 \cdot I_z \cdot [\sigma_c]}{l \cdot y_1} = 20 \text{ kN}$$

CD 压杆： $\lambda = \frac{\mu l}{i} = 125 > \lambda_p = 100$ ，为大柔度杆，用欧拉公式：

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 101 \text{ kN} \quad ; \quad F_3 = \frac{F_{cr}}{n_{st}} = \frac{101}{3} = 34 \text{ kN}$$

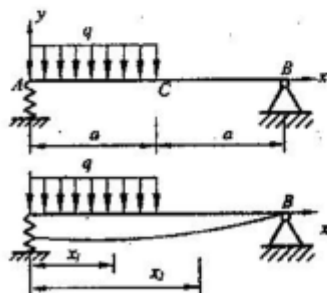
此结构的许可载荷 $[F] = F_2 = 20 \text{ kN}$

八、已知： q 、 a 、 EI ，弹簧刚度 K 。列出求解 AB

梁弯曲变形所需的挠曲线近似微分方程；写出确定积分常数所需的全部条件；画出挠曲线的大致形状。(10 分)

解：AC 段的挠曲线近似微分方程：

$$EI \cdot v_1'' = M_1(x_1) = \frac{3qa \cdot x_1}{4} - \frac{q \cdot x_1^2}{2} \quad , \quad (0 \leq x_1 \leq a)$$



试题6-8图

$$\text{BC 段: } EI v_2'' = M_2(x_2) = \frac{3qa \cdot x_2}{4} - \frac{q \cdot x_2^2}{2} + \frac{q \cdot (x_2 - a)^2}{2}, \quad (a \leq x_2 \leq 2a)$$

积分后将出现 4 个特定的积分常数, 确定积分常数所需的边界和连续性条件为:

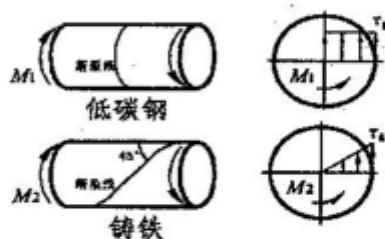
$$x_1 = 0, v_A = -\Delta_K = -\frac{3qa}{4K}; \quad x_2 = 2a, v_B = 0; \quad x_1 = x_2 = a \text{ 时}, v_1 = v_2; \quad v_1' = v_2'.$$

九、分别画出直径为 d 的低碳钢和铸铁试件在扭转实验中的受力图; 将要破坏时横截面上的应力分布图; 破坏件的断口形式, 分析破坏原因。若测得低碳钢破坏时的扭矩为 m_1 ,

铸铁破坏时的扭矩为 m_2 , 写出计算剪切强度极限的表达式。(10 分)

解: 低碳钢、铸铁试件在扭转时的受力图; 横截面上的应力分布图和断口形式如图。低碳钢试件被横截面上的最大切应力剪断,

$$\tau_b = \frac{3}{4} \cdot \frac{m_1}{W_p}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$



试题6-9图

铸铁被 45° 螺旋面上的最大正应力拉断,

$$\tau_b = \frac{m_2}{W_p}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

十、圆轴 AB 以等角速度 ω 回转。已知: F 、 l 、 d 、 ω , 求危险点的循环特征 r ; 平均应力 σ_m ; 应力幅 σ_a , 画出该点的 $\sigma-t$ 曲线。(10 分)

解: 危险点在中间截面外边缘上:

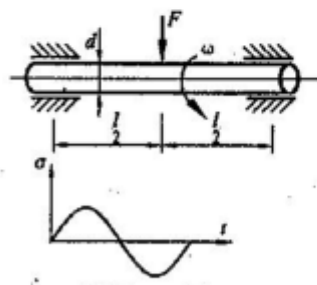
$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \frac{F \cdot l}{4} \times \frac{32}{\pi d^3} = \frac{8F \cdot l}{\pi d^3}$$

$$\text{循环特征: } r = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = -1$$

$$\text{平均应力: } \sigma_m = 0$$

$$\text{应力幅: } \sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{8F \cdot l}{\pi d^3}$$

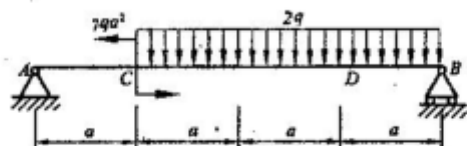
该点的 $\sigma-t$ 曲线如图所示。



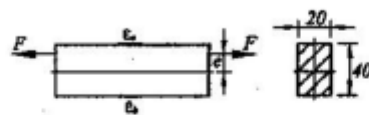
试题6-10图

试 题 7

一、已知: q 、 a 。试作梁的内力图。(10分)



试题7-1图



试题7-2图

二、矩形截面杆上、下表面的线应变分别为: $\varepsilon_a = 10^{-3}$, $\varepsilon_b = 0.4 \times 10^{-3}$, $E = 210 \text{ GPa}$ 。

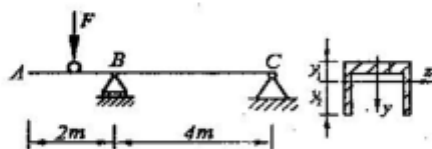
1) 试求 F 和偏心距 e ; 2) 并画出横截面上的正应力分布图。(10分)

$$(F = 117.6 \text{ kN}, e = 2.86 \text{ mm})$$

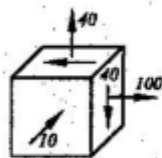
三、铸铁梁上作用有可移动的载荷 F , 已知: $y_1 = 52 \text{ mm}$, $y_2 = 88 \text{ mm}$, $I_x = 763 \text{ cm}^4$

铸铁拉伸时的 $\sigma_b = 120 \text{ MPa}$, 铸铁压缩时 $\sigma_b = 640 \text{ MPa}$, 安全因数 $n = 4$ 。

试确定铸铁梁的许可载荷 P ; 并求 τ_{\max} 。(10分) $(F = 2.2 \text{ kN}, \tau_{\max} = 2.2 \text{ MPa})$



试题7-3图



试题7-4图

四、某低碳钢构件内危险点的应力状态如图(应力单位: MPa)。

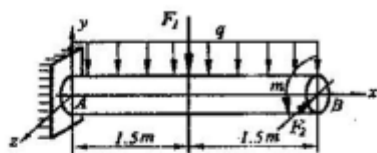
已知: $\sigma_x = 220 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 400 \text{ MPa}$, 安全因数 $n = 2$, $E = 200 \text{ GPa}$, $\mu = 0.3$

1) 试求该点的最大线应变; 2) 画出应力圆草图; 3) 并对该点进行强度校核。(10分)

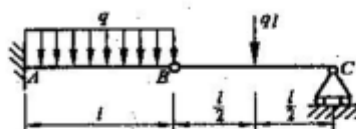
五、直径为 d 的钢制圆轴受力如图。已知: $F_1 = 20 \text{ kN}$, $F_2 = 10 \text{ kN}$, $m = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$,

$q = 5 \text{ kN/m}$, $[\sigma] = 160 \text{ MPa}$ 。试设计 AB 轴的直径 d 。(10分) $(d = 163 \text{ mm})$

六、已知: q 、 l 、 EI , 试求梁间铰 B 左右两侧截面的相对转角。(10分)

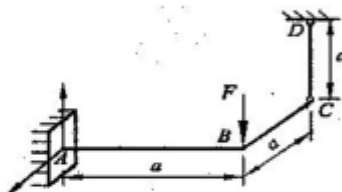


试题7-5图

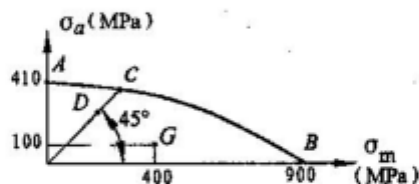


试题7-6图

七、圆截面折杆 AB 、 BC 的直径、材料均相同，已知： F 、 a 、 $E = 2.5G$ ，且 CD 杆的 $EA = 2EI/5a^2$ 。试求 CD 杆的内力。(12分) ($N_{CD} = 4F/53$ (拉))



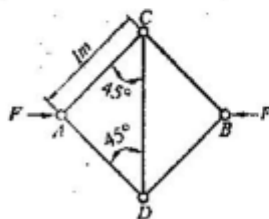
试题7-7图



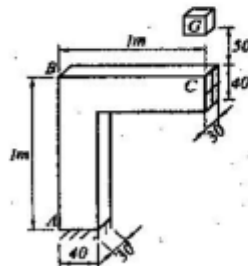
试题7-8图

八、已知某合金钢材料的持久极限曲线。试求：1) A 、 B 、 C 、 D 各点的循环特征 r ；
2) σ_{-1} 和 σ_b ；3) G 点的 σ_{\max} 和 σ_{\min} 。(8分)

九、图示等截面刚架，受到重量为 $G = 300N$ 的物体冲击，已知： $E = 200GPa$ 。试求：刚架内的最大应力。(10分) ($\sigma_{d\max} = 168MPa$)



试题7-10图

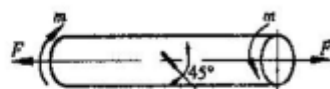


试题7-9图

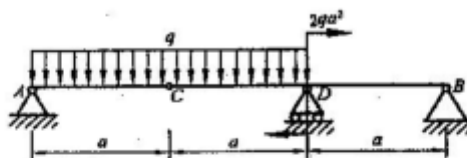
十、图示正方形桁架，五根杆均为直径 $d = 5cm$ 的圆截面杆，材料为 A_3 钢，
 $E = 200GPa$ ， $\sigma_p = 200MPa$ ， $\sigma_s = 240MPa$ ， $a = 304MPa$ ， $b = 1.12MPa$ ，若
取 $n = 2$ ，稳定安全因数 $n_{st} = 3$ ，试确定结构的许可载荷 F 。(10分)

试 题 8

一、作梁的内力图。(10分)



试题8 2图



试题8 1图

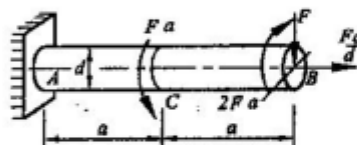
二、(10分) 直径 $d=100\text{mm}$ 的圆轴, 受 F 和 m 作用, 材料的 $E=200\text{GPa}$, $\mu=0.3$,

许用应力为 $[\sigma]$, 现测得轴向线应变 $\varepsilon_0=500\times 10^{-6}$, 45° 方向线应变 $\varepsilon_{45^\circ}=400\times 10^{-6}$,

试求: F 和 m 。($F=785\text{kN}$; $m=6.8\text{kN}\cdot\text{m}$)

三、(10分) 直径为 d 的钢制圆轴受力如图。

- 1) 试用单元体表示危险点的应力状态;
- 2) 并列此轴的强度条件。

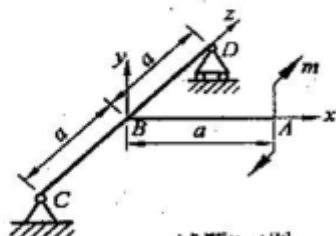


试题8 3图

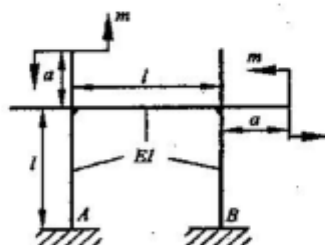
四、(10分) 已知图示结构中各杆的直径均为 d 、 E 、 G 、 m 、 a ,

试求: 1) A 端在 yz 平面内的转角 θ_A ;

2) 若在 A 端沿 z 方向再加上一集中力 P , 问 θ_A 的变化值是多少?



试题8 4图



试题8-5图

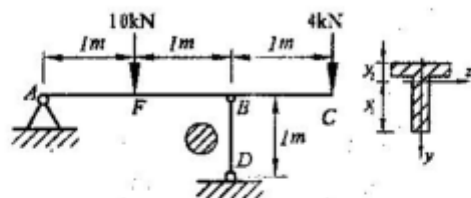
五、(12分) 已知刚架受力如图。试求: A 处的约束反力。

六、(12分) 结构如图所示。横梁 AC 为 T 形截面铸铁梁。已知其许用拉应力

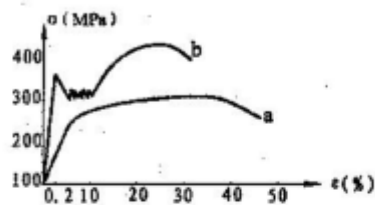
$[\sigma_t]=40\text{MPa}$, 许用压应力 $[\sigma_c]=160\text{MPa}$, $I_x=800\text{cm}^4$, $y_1=5\text{cm}$, $y_2=9\text{cm}$,

BD 杆用 Q235 钢制成, 直径 $d = 24\text{mm}$, $E = 200\text{GPa}$, $\lambda_p = 100$, $\lambda_s = 60$, 经验

公式为 $\sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda)\text{MPa}$, 稳定安全因数 $n_{st} = 2.5$ 。试校核该结构是否安全?



试题8-6图



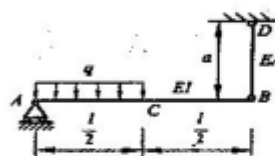
试题8-7图

七、已知: a 、 b 两种材料的 σ - ε 曲线, 若 $n = 2$,

分别求其许用应力 $[\sigma]$; 并说明何谓冷作硬化现象?

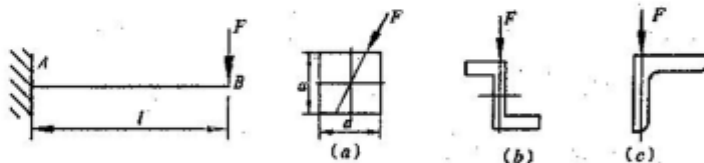
(6分)

八、(6分) 试列出求解 AB 梁弯曲变形所需的挠曲线近似微分方程; 并列确定积分常数所需的全部条件。



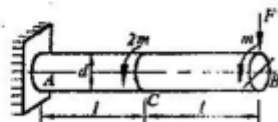
试题8-8图

九、(6分) 试指出下面各梁在 F 作用下, 将产生什么变形?

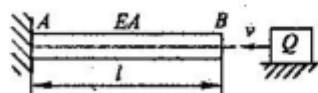


试题8-9图

十、(6分) 求下列结构的弹性变形能, (E 、 G 均为已知)



试题8-10图



试题8-12图

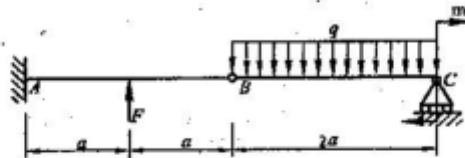
十一、(6分) 已知某材料的 $\sigma_{-1} = 300\text{MPa}$, $\sigma_0 = 700\text{MPa}$, $\sigma_0 = 450\text{MPa}$, 用此

材料制成的构件的 $K_\sigma = 2.0$, $\varepsilon_\sigma = 0.8$, $\beta = 0.9$ 。试作此构件的持久极限简化折线。

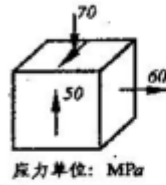
十二、(6分) 冲击物 Q 以水平速度 v 冲击杆 AB , 试推导水平冲击时的动荷系数。

试 题 9

一、作图示结构的内力图，其重 $F = 2qa$ ， $m = qa^2/2$ 。



试题9-1图



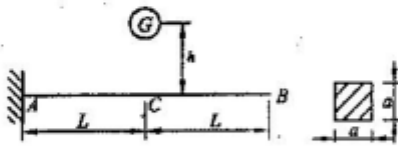
应力单位: MPa

试题9-2图

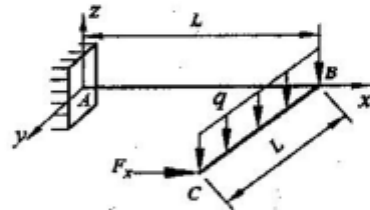
二、已知某构件的应力状态如图，材料的弹性模量 $E = 200GPa$ ，泊松比 $\mu = 0.25$ 。

试求：主应力、最大切应力、最大线应变、画出应力圆草图；

三、重为 G 的重物自高为 h 处自由落下，冲击到 AB 梁的中点 C ，材料的弹性模量为 E ，试求梁内最大动挠度。

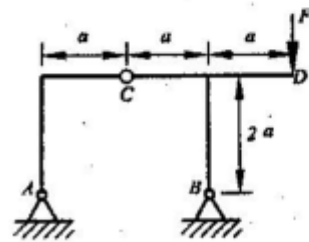


试题9-3图



试题9-4图

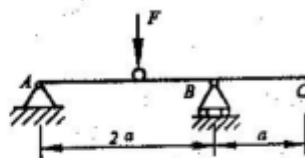
四、钢制平面曲拐受力如图。 $q = 2.5\pi kN/m$ ， AB 段为圆截面， $[\sigma] = 160MPa$ ，设 $L = 10d$ ， $F_x = qL$ ，试设计 AB 段的直径 d 。（ $d = 76mm$ ）



试题9-5图

五、图示刚架， $EI = \text{常数}$ ，试求铰链 C 的相对转角。

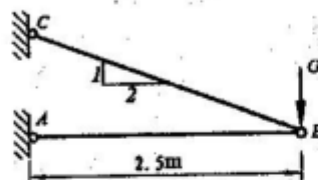
六、图示梁由三块等厚木板胶合而成，载荷 F 可以在 ABC 梁上移动，已知板的许用弯曲正应力为 $[\sigma] = 10 \text{ MPa}$ ，许用剪应力 $[\tau] = 1 \text{ MPa}$ ，胶合面上的许用剪应力 $[\tau]_{\text{胶}} = 0.34 \text{ MPa}$ ， $a = 1 \text{ m}$ ， $b = 10 \text{ cm}$ ， $h = 5 \text{ cm}$ ，试求许可载荷 $[P]$ 。



试题9-6图



七、
起重机
AB



试题9-7图

为空心圆截面杆 $D = 76 \text{ mm}$ ， $d = 68 \text{ mm}$ ，BC

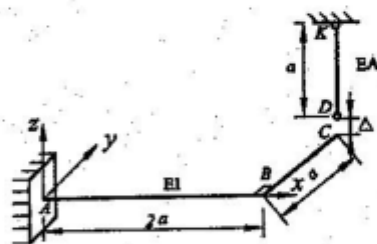
为实心圆截面杆 $D_1 = 20 \text{ mm}$ ，两杆材料相同， $\sigma_p = 200 \text{ MPa}$ ， $\sigma_s = 235 \text{ MPa}$ ，

$E = 206 \text{ MPa}$ ， $n = 1.5$ ， $n_s = 4$ 。起重量 $G = 20 \text{ kN}$ ， $\sigma_{cr} = 304 - 1.12\lambda \text{ (MPa)}$ 。试校核此结构。

八、水平曲拐 ABC 为圆截面折杆，在制造时 DK 杆短了 Δ 。曲拐的抗扭刚度和抗弯刚度皆为 GI_p 和 EI 。且 $GI_p = 4EI/5$ 。杆 DK

抗拉刚度为 EA ，且 $EA = 2EI/5a^2$ 。试求：

- 1) 在 B 端加多大扭矩，才可使 C 点刚好与 D 点相接触？
- 2) 若 C、D 两点相接触后，用铰链连在一起，再撤除所加扭矩，求 DK 杆内的轴力和固定端处 A 截面上的内力。

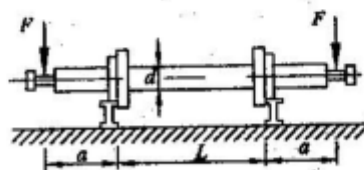


试题9-8图

$$1) M_e = \frac{2EI}{5a^2} \cdot \Delta; \quad 2) F_{DK} = \frac{EI\Delta}{8a^3} \text{ (拉)}$$

$$M_{Ax} = \frac{EI\Delta}{8a^2} \text{ (顺)}; \quad M_{Ay} = \frac{EI\Delta}{4a^2} \text{ ()}$$

九、火车车轴受力如图，已知 a 、 L 、 d 、 P 。求轴中段截面边缘上任意一点的循环特征 r ，平均应力 σ_m 和应力幅 σ_a 。



试题9-9图

结论：铸铁抗拉 \leq 抗剪 \leq 抗压

七、设 $EA = EI/a^2$ ，求 BC 杆的内力。(20 分)

解：一次超静定，拆开 B 点，加一对 X_1 ，

BH 梁上 B 点变形协调条件为：

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = -\Delta_{1BC}$$

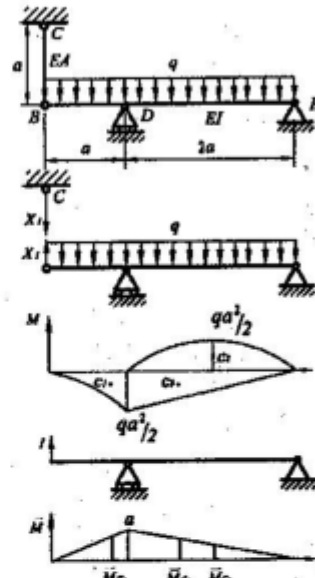
$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = \frac{a^3}{EI}$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{EI} = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\Delta_{1CD} = \frac{X_1 \cdot a}{EA} = \frac{X_1 a^3}{EI}$$

代入变形协调条件：

$$\frac{a^3 X_1}{EI} - \frac{qa^4}{8EI} = -\frac{X_1 a^3}{EI}$$



试题2-7图

解得： $X_1 = qa/16$ ； BC 杆的内力： $(F_N)_{BC} = X_1 = qa/16$ (拉)

八、1) 何谓材料的持久极限？影响构件持久极限的主要因素有哪些？写出脉动循环下，构件持久极限与材料持久极限的关系式。2) 图示 EDB 为构件的持久极限简化折线，

P 为工作应力点。试求：① P 点的 $\sigma_{m,p}$ ；

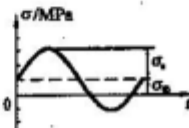
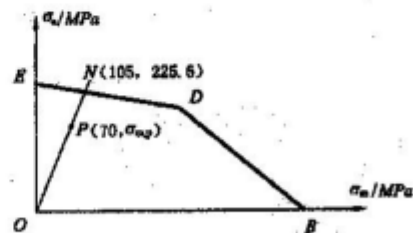
② 该构件的安全系数；③ 循环特征。(10 分)

解：1) 材料经无限次应力循环而不发生疲劳破坏的最大应力称为材料的持久极限。

影响构件持久极限的主要因素有：构件外形，构件尺寸和构件表面质量等。

$$\text{关系式： } \sigma_o^0 = \frac{\sigma_o}{2} + \frac{\varepsilon_\sigma \cdot \beta}{K_\sigma} \cdot \frac{\sigma_o}{2}$$

$$2) \text{ ① } \sigma_{m,p} = \frac{225.6}{105} \times 70 = 150.4 \text{ MPa}$$



试题2 8图

$$\textcircled{2} \text{安全系数: } n = \frac{105 + 225.6}{70 + 150.4} = 1.5 ;$$

$$\textcircled{3} \text{循环特征: } \gamma = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{-120.6}{330.6} = -0.365$$

九、BH 梁和 CK 杆横截面均为矩形 $h = 6\text{cm}$, $b = 4\text{cm}$, $L = 2.4\text{m}$, 材料均为 Q235, $E = 200\text{GPa}$, $\sigma_p = 200\text{MPa}$, $\sigma_s = 240\text{MPa}$, $[\sigma] = 120\text{MPa}$, $n_s = 3$, 经验公

式 $\sigma_{cr} = (304 - 1.12\lambda)\text{MPa}$ 。1) 当载荷在 BH 梁上无冲击移动时, 求许可载荷 $[F]$;

2) 为提高结构的承载能力, 可采取哪些改进措施。(可定性讨论或图示)(20 分)

解: 1) ①当 F 力位于 B 时,

CK 杆受最大压力 $F_{\max} = 5F/4$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{6} = 104 > \lambda_p = 100$$

用欧拉公式:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \cdot A$$

$$n = \frac{F_{cr}}{F_{\max}} \geq n_s$$

$$[F_1] \leq \frac{4}{5} \frac{F_{cr}}{n_s} = 117\text{kN}$$

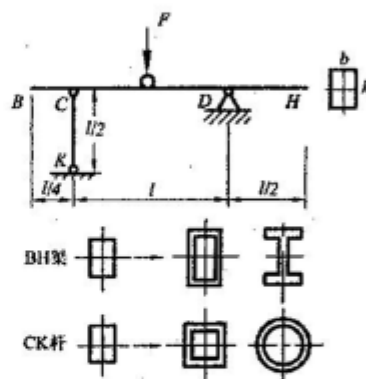
②当 F 位于 H 时, CK 杆受最大拉力 $F_{\max} = F/2$

$$\sigma_{\max} = F_{\max} / A \leq [\sigma] ; [F_2] \leq 2bh[\sigma] = 576\text{kN}$$

③当 F 位于 H 时, BH 梁 D 处有 $|M_{\max}| = Fl/2$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma] ; [F_3] \leq \frac{2}{l} \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot [\sigma] = 2.4\text{kN}$$

$$[F] = [F_3] = 2.4\text{kN}$$



试题2-9图

结论: 铸铁抗拉 \leq 抗剪 \leq 抗压

七、设 $EA = EI/a^2$, 求 BC 杆的内力。(20 分)

解: 一次超静定, 拆开 B 点, 加一对 X_1 ,

BH 梁上 B 点变形协调条件为:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = -\Delta l_{BC}$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = \frac{a^3}{EI}$$

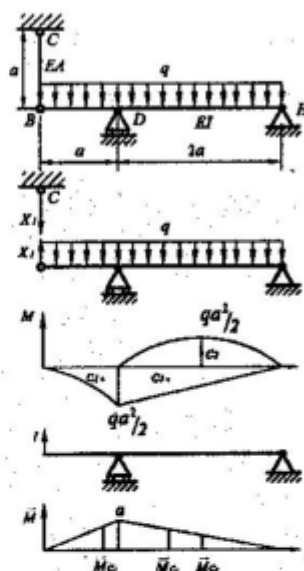
$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\omega \bar{M}_c}{EI} = -\frac{qa^4}{8EI}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{X_1 \cdot a}{EA} = \frac{X_1 a^3}{EI}$$

代入变形协调条件:

$$\frac{a^3 X_1}{EI} - \frac{qa^4}{8EI} = -\frac{X_1 a^3}{EI}$$

解得: $X_1 = qa/16$; BC 杆的内力: $(F_N)_{BC} = X_1 = qa/16$ (拉)



试题2-7图

八、1) 何谓材料的持久极限? 影响构件持久极限的主要因素有哪些? 写出脉动循环下, 构件持久极限与材料持久极限的关系式。2) 图示 EDB 为构件的持久极限简化折线,

P 为工作应力点。试求: ① P 点的 $\sigma_{m,p}$;

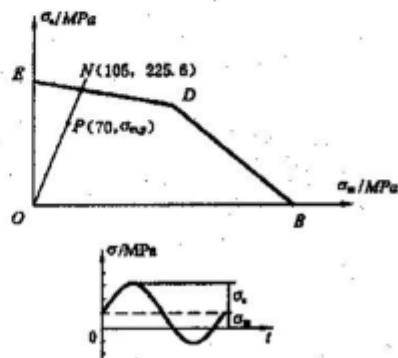
② 该构件的安全系数; ③ 循环特征。(10 分)

解: 1) 材料经无限次应力循环而不发生疲劳破坏的最大应力称为材料的持久极限。

影响构件持久极限的主要因素有: 构件外形, 构件尺寸和构件表面质量等。

$$\text{关系式: } \sigma_o^0 = \frac{\sigma_o}{2} + \frac{\epsilon_\sigma \cdot \beta}{K_\sigma} \cdot \frac{\sigma_o}{2}$$

$$2) \text{ ① } \sigma_{m,p} = \frac{225.6}{105} \times 70 = 150.4 \text{ MPa}$$



试题2-8图