吉林大学《865材料力学》考点精讲课程

主讲老师：赵鹏鹏

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第1讲 专业课考情分析及复习指导

（一）吉林大学《865材料力学》课程辅导体系介绍

（1）适用范围及针对对象

（2）课程简介

（二）参考资料

（1）参考书目

（2）参考大纲

（3）历年真题

（三）考试分析

（1）卷面分析

（2）教材基本内容与权重分析

（3）考试大纲解析

（4）试题构成与特点

（四）命题规律总结及命题趋势分析

（五）备考与应试策略

（一）吉林大学《865材料力学》课程辅导体系

（1）适用专业及针对对象：适用于报考吉林大学机械制造、机械设计、机械电子、车辆工程等相关专业考材料力学的同学。

（2）课程简介

①命题规律分析及常考知识点精讲

分析总结该门课程考试的题型、考题分布情况及在复习参考书各章中所占的权重；系统的讲解本课程考研最重要的考点、重点、难点，让考生能够快速掌握本门课程考研的复习要点，帮助考生归纳总结重要的解题思路和答题方法。

②冲刺串讲及模拟四套卷精讲

重点内容归纳串讲，按照考研题型和分值编写四套仿真模拟试卷，通过精讲四套模拟试卷来帮助考生掌握解题思路和答题技巧；讲解考前最后阶段专业课的复习备考策略，告诉考生专业课获取高分的最佳办法。

2、参考书目

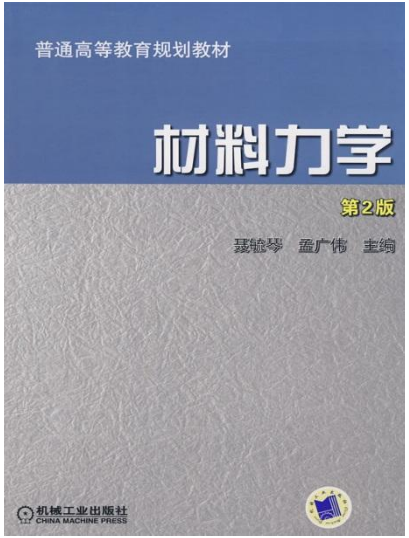
（1）参考书目

吉林大学考研《材料力学》

指定教材：聂毓琴 孟广伟 主编，

《材料力学》第2版，机械工业出版社。

（2）历年真题



2、参考书目

（1）参考书目

吉林大学考研《材料力学》

指定教材：聂毓琴 孟广伟 主编，

《材料力学》第2版，机械工业出版社。

（2）历年真题

（三）考试分析

1、卷面分析

题型	题量	权重（%）	重要度
画图题	1	10	★★★★★
计算题	7-9	70	★★★★★
简答题	1	10	★★★★
证明题	1	10	★★★★

➢ 考情分析及命题规律总结

2、考试基本内容及权重

大纲	所在章节	年份	题量	权重（%）	难易度
画梁的内力图	2、3、4	每年必考	1	10	易
应力的计算	7	11、12年	1	10	易
强度校核及梁的设计	5、8	11、12年	3	30	两易一难
静不定问题	11	11、12、13年	1	10	难
动载荷	12	12年	1	5	中
能量法	10	11、12、13年	1	10	中
交变应力	13	12年	1	10	易
压杆稳定	14	12年	1	10	中
平面图形的几何性质	附录A	11、12、13年	1	5	易

3、命题规律总结及命题趋势分析

就历年考研真题的命题规律来看，本门专业课基本都是围绕大纲要求出题，考试的重点也较为突出和固定，题目难度适中，题量偏大，偏题怪题较少，一般会有2~3道题目偏难，但也一定会在我们学习的内容之中，只不过这些题目涉及到的知识点相对较多，需要考生运用所学知识综合分析作答。

（四）命题规律总结及命题趋势分析

只要紧密围绕大纲认真复习，问题就会迎刃而解。预测今后几年的出题趋势，考试的基本题型不会有太大变化，一些材料力学的常考问题仍然会是考查的重点，在此基础上可能会新增一些考点，对于新增考点在以后的要点精讲中会一一点出。总体而言，试卷命题应当会比较稳定，与前几年相比，变化不会太大。

（五）备考与应试策略

关于备战复习，要做到“三要三忌”：要抓基础、要注重理解基本原理和方法、要勤于练习、思考与总结；忌死记硬背、忌眼高手低、忌主次不分明。在复习中要学会梳理课程脉络，抓住学习重点，注意对基本概念和公式的理解和把握，提高复习效率。

➢ 考情分析及命题规律总结

在具体复习过程中

（1）复习全面，解题认真；

（2）循环复习;

（3）分析题目，定位考点，注意易错点；

（4）步骤清晰，全面，注意题后总结。

复习时间安排：一般从十月初到考试。

（六）本讲小结

这一讲主要给同学们分析了材料力学在考试中的重点，难点，复习时应该注意的事项，介绍了复习用的课本及其他资料、我们课程的安排及课程的主要内容。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第2讲 绪论及 轴向拉伸和压缩

第一章　绪论

1、本章知识框架

- 材料力学的任务：强度、刚度、稳定性的概念
- 基本假设：连续性、均匀性、各向同性、小变形条件
- 内力、截面法、应力的概念
- 变形与应变
- 构件分类 杆件变形的基本形式：
  - 轴向拉伸和压缩
  - 剪切
  - 扭转
  - 弯曲

2、考点概述

（1）强度、刚度、稳定性的概念。

（2） 基本假设：连续性、均匀性、各向同性、小变形条件。

（3）内力、截面法、应力的概念。

（4）变形与应变。

（5）构件分类 杆件变形的基本形式。

3、复习思路及目的

掌握重要概念，理解四种假设及其应用，了解构件的基本变形种类。会用截面法求解各种内力。

【考点一】截面法求内力

1、内力的概念：物体内部各部分之间因外力而引起的附加相互作用力，即“附加内力”。

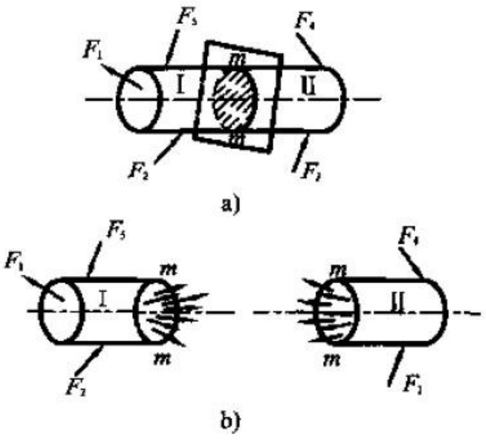


图 1-2

2、截面法求内力的步骤：截 取 代 平

1）截:欲求构件截面上的内力，就沿该截面假象地把构件截成两部分。

2）取:任取其中一部分为研究对象，并弃去另一部分。

3）代:以作用于该截面的未知内力代替弃去部分对保留部分的作用。

4）平:列平衡方程

【经典例题】

钻床如图1-3a所示，试确定在F力作用下的 m m 截面上的内力。(例1-1（P4））

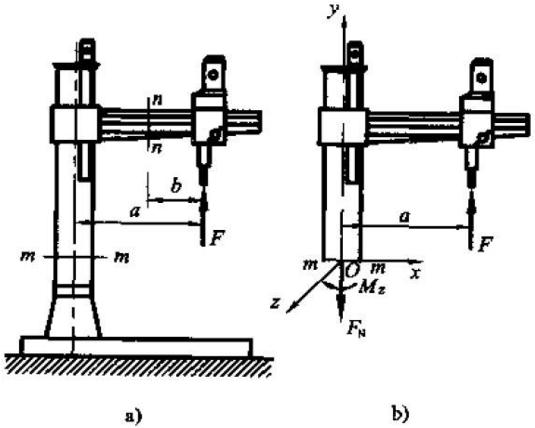


图 1-3

【解题思路】

经过分析题干我们可以知道，此题目考察的是内力的求法，所以我们可以运用截面法求内力，解题过程如下。

代：由于外力将使上半部分沿 y 轴方向移动并绕 O 点转动，为使其保持平衡，在截面 m-m 上代之以过 O 点的内力 F_N 和对 z 轴的力偶矩 M_z

平：由平衡方程

$$\sum F_y = 0,\ F - F_N = 0$$

$$\sum M_z = 0,\ Fa - M_z = 0$$

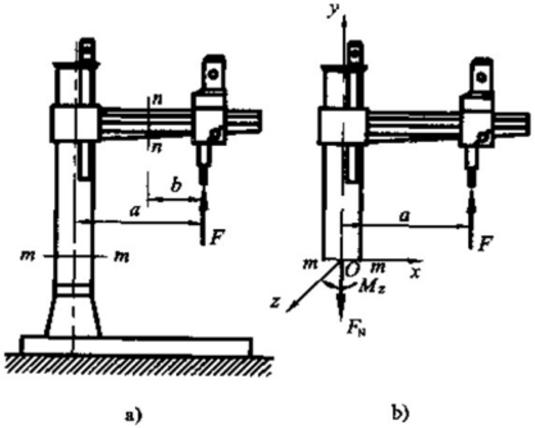


图 1-3

求得内力 F_N 和 Mz 分别为

$$F_N = F$$

$$M_z = Fa$$

所得 F_N、M_z 均为正值，说明假设的内力方向正确。

完全同理，可求得 n-n 截面上的内力为

$$F_{Qy} = F \quad （向下）$$

$$M_z = Fb \quad （顺时针）$$

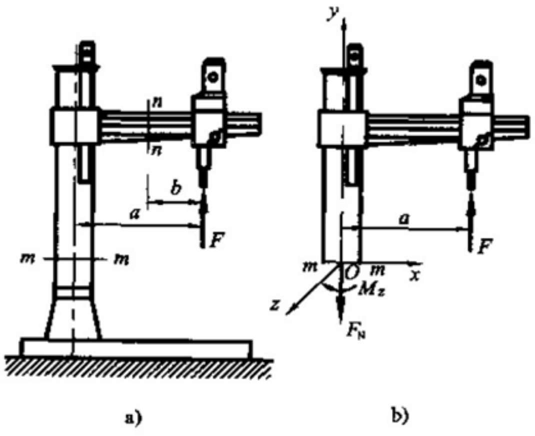


图 1-3

【考点二】变形与应变

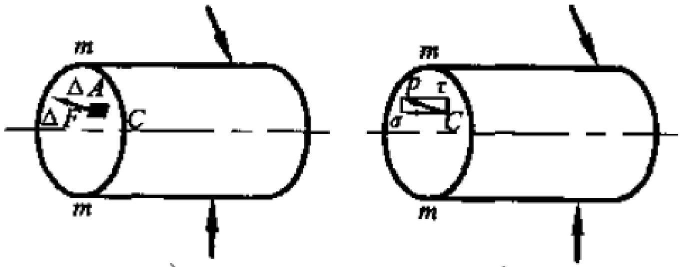
1、应力的概念：它是分布内力系在某一点的内力集度。

平均应力：

$$p_m = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

某一点的应力

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} p_m = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$



a) b)

正应力和切应力:

P是一个矢量，一般说既不与截面垂直，也不与截面相切。通常把应力P分解成垂直于截面的分量 σ 和相切于截面的分量 τ，并把 σ 称为正应力，τ 称为切应力。

应力的单位：牛/米^2（N/m^2）称为帕斯卡（简称帕）

2、变形与应变

变形：构件在外力作用下尺寸和形状都将发生改变。

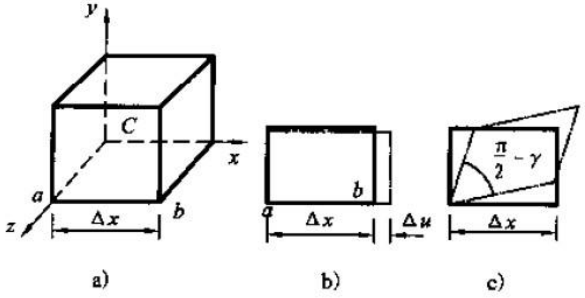


图 1-5

线应变

线应变的符号规定：伸长的线应变为正，反之为负。

切应变

切应变的符号规定：原来是直角的角度增大时的切应变为正，反之为负。

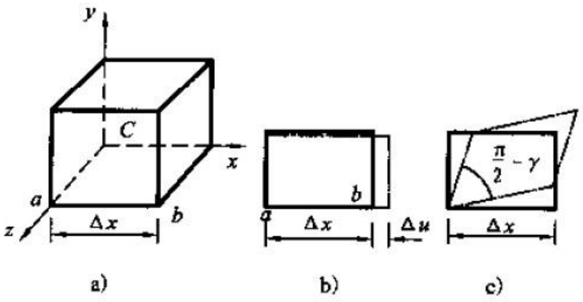
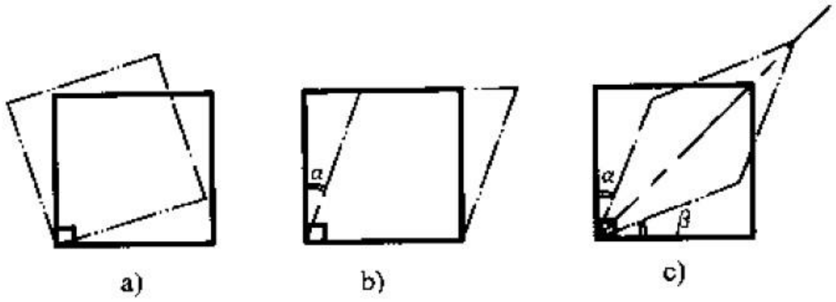


图 1-5

【经典例题】

指出图a、b、c几种情况下的切应变γ。（习题1-1）



题 1-1 图

【解题思路】

此题目考察的是切应力的概念及符号规定。

【答案要点】

1) $\Gamma = 0$　　2) $\Gamma = -a$　　3) $\Gamma = -(a+\beta)$

第二章 轴向拉伸和压缩

1、本章知识框架

- 轴向拉伸和压缩时的
  - 变形及弹性变形能（理解）
  - 内力和应力（理解）
  - 力学性能（重要）
- 许用应力 安全因数 强度条件（了解）
- 轴向拉伸和压缩时的超静定问题（理解）
- 应力集中的概念（了解）

2、考点概述

1、轴向拉伸和压缩时的力学性能。

2、许用应力 安全因数 强度条件。

3、轴向拉伸和压缩时的超静定问题。

4、应力集中的概念。

3、复习思路及目的。

掌握拉伸和压缩变形下材料的力学性能，会描述整个实验过程，会画应力——应变图。知道什么是超静定问题，了解集中应力的概念。

【考点一】轴向拉伸时横截面（斜截面）上的内力和应力

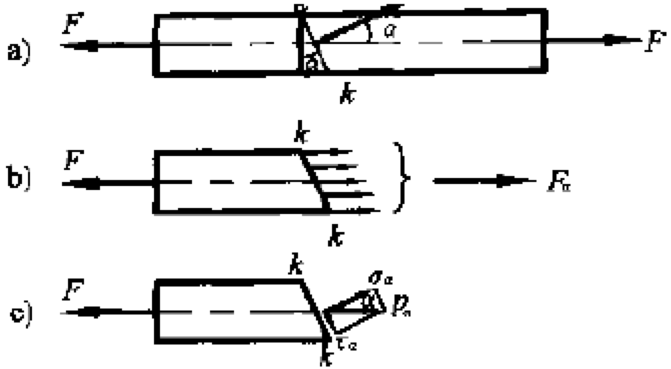


图 2-10

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A_\alpha}$$

$$p_\alpha = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha$$

$$\boxed{\sigma_\alpha = p_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha}$$

$$\boxed{\tau_\alpha = p_\alpha\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin2\alpha}$$

【考点二】材料在轴向拉伸和压缩时的力学性能

1、低碳钢的力学性能

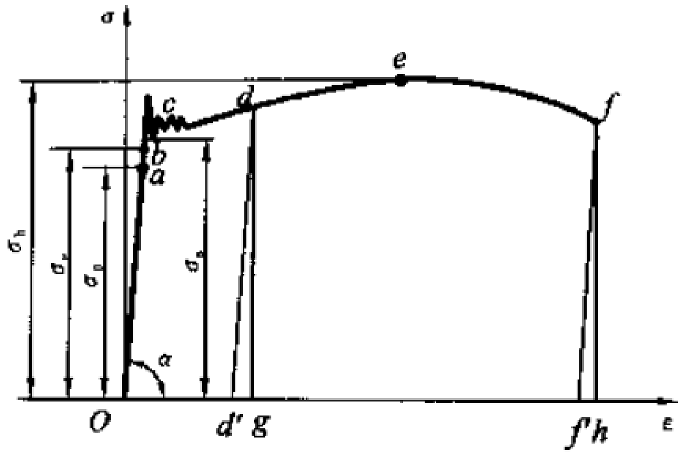
弹性阶段：$\sigma = E\varepsilon$

屈服阶段：屈服极限σ_s

强化阶段：强度极限σ_b

局部变形阶段：断口为“杯状”

衡量材料的塑性指标：伸长率、断面收缩率



2、铸铁在拉伸（压缩）时的力学性能

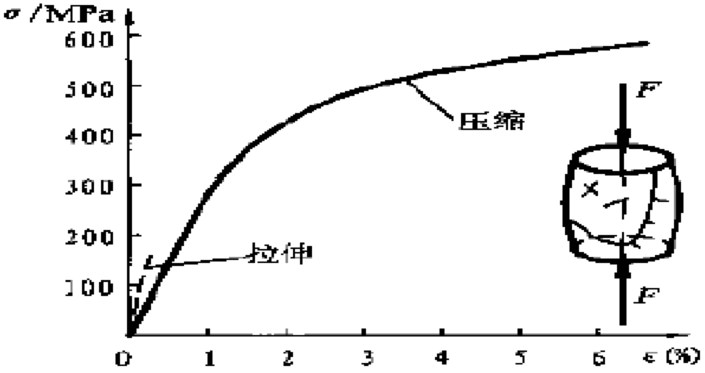


图 2-20

注意：拉断时断口平齐；压缩时破坏断面与轴线大致成45-55倾角。

【经典例题】

画出低碳钢拉伸实验时σ-ε曲线，写出各阶段名称，写出强度指标，塑性指标的名称和计算式（真题再现）

【解题思路】

题目考察低碳钢拉伸时的力学性能

【答案要点】

四个阶段:弹性阶段 屈服阶段 强化阶段 局部变形阶段

强度指标：屈服极限σ_s 强度极限σ_b

塑性指标：生产率 $\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$

断面收缩率 $\Psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$

【考点三】强度条件：$\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$

1、许用应力 [σ] = 极限应力除以一个大于1的因数

$$[\sigma] = \frac{\sigma_u}{n}$$

塑性材料 $$[\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

脆性材料 $$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

2、强度条件及应用

1） $\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$

2）应用：强度校核

设计截面　　$\sigma_{max} \leq [\sigma]$

确定许可载荷

【经典例题】

某冷镦机的曲柄滑块机构如图2-22a所示，镦压时连杆AB接近水平位置，镦压力F=3.78MN。连杆横截面为矩形，高与宽之比h/b=1.4（图2-22b），材料的许用应力[τ]=90MPa,试设计截面尺寸h和b。

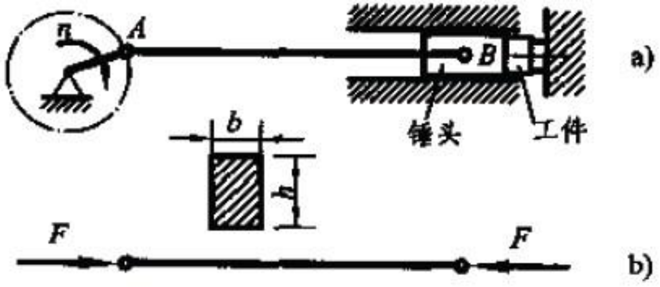


图 2-22

【解题思路】

分析题目可知，我们需要给出的条件设计出合理的界面，这正是【考点三】中强度条件应用的一个方面：设计截面，于是我们运用相关公式 分析解题。

【答题要点】

(1)轴力$F_N=F=3.78$

(2) $A \geqslant F_N/[\sigma]=420cm^2$

$b=17.32cm$

$h=24.3cm$

【考点四】胡克定律的应用

1)泊松比 μ

2)胡克定律：当应力不超过材料的比例极限时，应力与应变成正比。即：σ=Eε

胡克定律的另一表达式 $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$

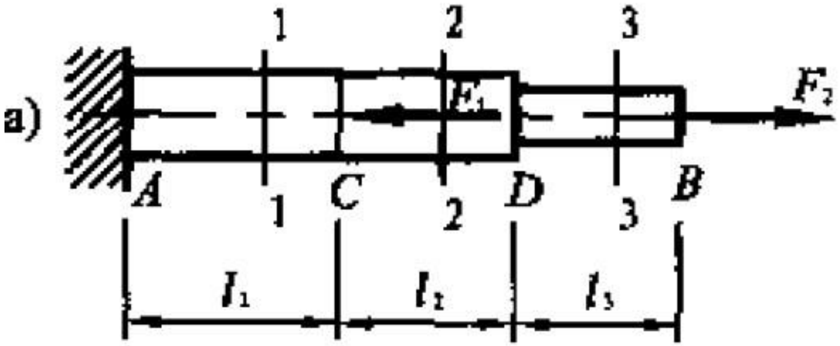
几点说明：

当F_N分段变化时 $$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Ni}l_i}{EA_i}$$

当F_N连续变化时 $$\Delta l\int_{l}\frac{F_N(x)dx}{EA_{(x)}}$$

【经典例题】

图2-25a所示钢杆，已知F_1=20KN，F_2=20KN，l_1=120mm，l_2=l_3=100mm,横截面面积A_{1-1}=A_{2-2}=500mm²，A_{3-3}=250mm²，材料的弹性模量E=200GPa。求B截面的水平位移和杆内最大纵向线应变。



【解题思路】

分析题目要求可知:此题目要求B点的位移也就是求杆的伸长△L 和最大纵向应变ε。我们可以分别用相关公式求△L和 ε。

【答案要点】

(1)计算各段轴力，画轴力图.

F_{NI} = -30KN

F_{N2} = 20KN

F_{N3} = 20KN

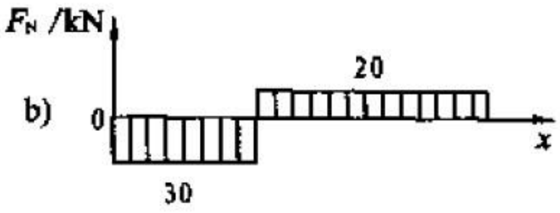


图 2-25

【答案要点】

（2）计算B截面的水平位移 B截面水平位移即B点的水平位移。由图2-25可知，杆件各段的轴力及截面分段为常数，故可由公式 $\Delta L=\Delta L_1+\Delta L_2+\Delta L_3$ 得 $\Delta L=0.024mm$

即：B点位移为0.024mm。

【答案要点】

(3) 计算杆内最大线应变

$$\varepsilon_1 = -3.0 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_2 = 2.0 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_3 = 4.0 \times 10^{-4}$$

因此，杆内最大纵向线应变：$\varepsilon_{max} = \varepsilon_3 = 4.0 \times 10^{-4}$

【考点五】变形能

1、变形能的概念：在外力作用下，因弹性变形而储存在弹性体内的能量称为弹性变形能。

2、重要公式

$$U=W=\Delta L\, F_N/2=F^2_N L/2EA$$

注意：变形能是载荷的二次函数，在计算时不满足叠加原理。

【考点六】超静定问题

1、超静定的概念：单凭力平衡方程不能确定出全部未知力的问题称为超静定问题或静不定问题。

2、超静定问题的解法

1）列出独立平衡方程

2) 列变形几何方程

3）建立物理方程

4）补充方程

3、应力集中的概念：因杆件外形突然变化而引起的局部应力急剧增大的现像。

注意：

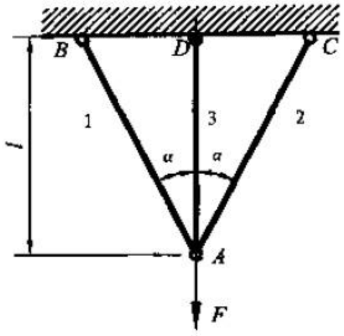
1）截面尺寸改变的越急剧，角越尖，孔越小，应力集中的程度越严重。

2)在动载荷下，不论是塑性材料还是脆性材料，都应该考虑应力集中对构件的影响。

【经典例题】

例2-10　由三根杆组成的结构如图所示，设1、2两杆的长度、横截面面积及材料均相同，即：$l_1=l_2 A_1=A_2, E_1=E_2$,3杆的长度为L，横截面面积为A3，弹性模量为E_3，1、2两杆与3杆的夹角均为a。

试求在F力作用下三杆的轴力。

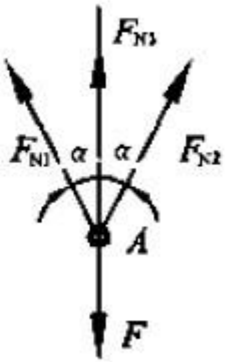


a)

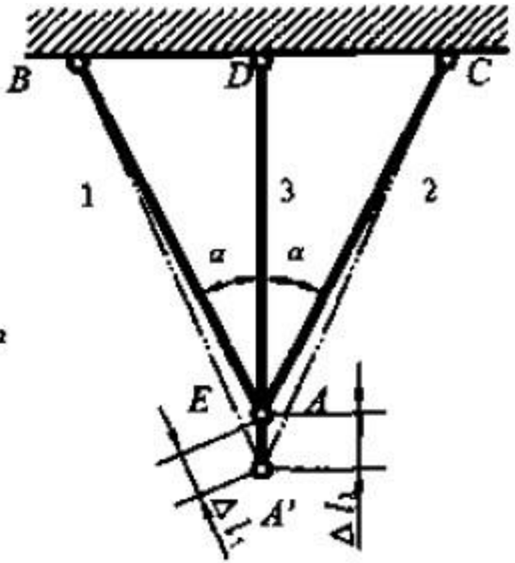
【解题思路】本题考查静不定的问题。

【答案要点】

（1）受力分析



b)



c)

（2）平衡方程　$\sum F_X=0$; $\sum F_Y=0$

（3）变形几何方程　$\triangle L+\triangle=\delta$

（4）物理方程 $\Delta l_1=\frac{F_{N1}l_1}{E_1A_1}$，$\Delta l_2=\frac{F_{N2}l_2}{E_2A_2}$，$\Delta l_3=\frac{F_{N3}l_3}{E_3A_3}$

（5）补充方程

联立以上方程可得：

$$\frac{F_{N3}l}{E_3A_3}\cos\alpha=\frac{F_{N1}\frac{l}{\cos\alpha}}{E_1A_1}$$

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{F}{2\cos\alpha+\frac{E_3A_3}{E_1A_1\cos^2\alpha}}$$

$$F_{N3}=\frac{F}{1+2\frac{E_1A_1}{E_3A_3}\cos^3\alpha}$$

➢ 归纳总结

本讲共包括6个考点，其中第二章中考点二、考点三、考点四、考点六为重要考点。每个考点会结合后面讲的内容综合出题。在本讲中我们复习了超静定问题的解法，在后面第十一章中将会对此类题目进一步讲解。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第3讲 扭转与剪切（一）

第三章 扭转和剪切

1、 本章知识点框架

- 扭矩和扭矩图
- 薄壁圆筒的扭转、纯剪切
- 圆轴扭转时的应力与强度条件
- 圆轴扭转时的变形与刚度条件
- 剪切和挤压的实用计算

2、考点概述

（1）扭矩和扭矩图

（2）薄壁圆筒的扭转、纯剪切

（3）圆轴扭转时的应力与强度条件

（4）圆轴扭转时的变形与刚度条件

（5）剪切和挤压的实用计算

3、 复习思路及目的

（1） 会计算扭矩和会画扭矩图

（2） 理解薄壁圆筒的扭转、纯剪切的概念

（3） 知道圆轴扭转时的应力与强度条件

（4） 知道圆轴扭转时的变形与刚度条件

（5） 理解 剪切和挤压的实用计算

【考点一】扭矩和扭矩图

1、外力偶矩的计算 $\{Me\}_{N.m}=9549\frac{\{p\}_{kw}}{\{n\}_{r/\min}}$

2、横截面上的内力。

【考点一】扭矩和扭矩图 ★★★★

扭矩M_x的符号规定如下：按右手螺旋法则把M_x表示为矢量（图3-5 a、b），当矢量方向与截面外法线方向一致时，M_x为正；反之为负。

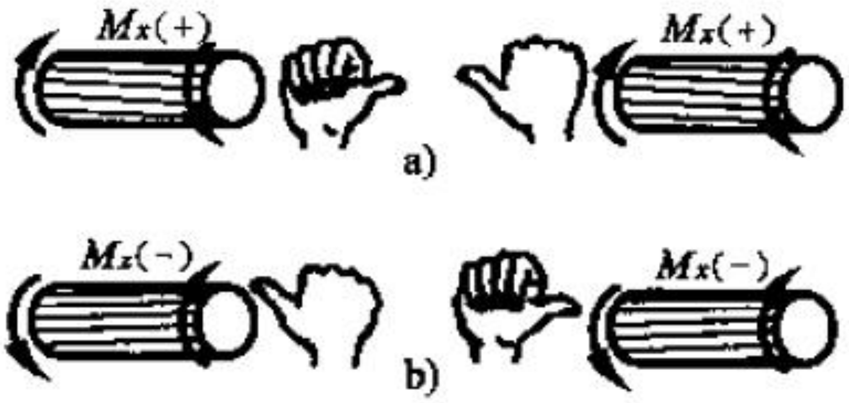


图 3-5

【经典例题】

例3-1 传动轴如图3-6a所示，主动轮A输入功率P_A = 50KW,从动轮B、C、D输出功率分别为P_B = P_C = 15 KW，P_D = 20 KW，轴的转速为n=300r/min。试画出轴的扭矩图。

【解题思路】分析受力，画扭矩图。根据相关公式解题。

【答题要点】

（1）计算作用于各轮上的外力偶矩

$M_A=1591.5N.m$

$M_B=477.5N.m$

$M_D=636.5N.m$

【答题要点】

(2) 分别计算出BC、CA、AD三段轴的扭矩。

$M_{I} = -477.5N.m$

$M_{II} = -955N.m$

$M_{III} = 636.5N.m$

可得结论：传动轴上主动轮和从动轮安装的位置不同，轴所承受的最大扭矩也就不同，因此我们要合理安排轮的位置。

【考点二】切应力互等定理 ★★★

1、概念：在两个相互垂直的平面上，切应力必然成对存在，且数值相等；两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。这就是切应力互等定理。

2、两个结论

1）横截面上边缘各点的切应力方向都与截面周边相切。

2）横截面突角处的切应力一定为零。

3、剪切胡克定律

1）纯剪切：只有切应力而无正应力。

2）剪切胡克定律：当切应力低于材料的剪切比例极限时，切应力τ应与切应变γ成正比。τ = Gγ

3）三个弹性常数关系：$G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$ （曾考过推倒过程）

【考点三】扭转时的应力与强度条件 ★★ ★★

1、扭转角φ：圆轴两端截面的相对转角。

2、切应力公式：

$$\tau_{\rho}=\frac{M_x\rho}{I_P} \qquad \tau_{max}=\frac{M_xR}{I_P}$$

$$W_P=\frac{I_P}{R} \qquad \tau_{max}=\frac{M_x}{W_p}$$

注：扭转时圆截面的边缘上切应力最大。

3、常用公式

圆截面

$$I_p=\int_A \rho^2 dA=\int_0^R \rho^2\cdot 2\pi\rho d\rho \qquad W_p=\frac{I_p}{R}=\frac{\pi R^3}{2}=\frac{\pi D^3}{16}$$

$$=\frac{\pi R^4}{2}=\frac{\pi D^4}{32}$$

空心圆轴

$$I_p=\int_A \rho^2 dA=\int_{d/2}^{D/2} \rho^2\cdot 2\pi\rho d\rho$$

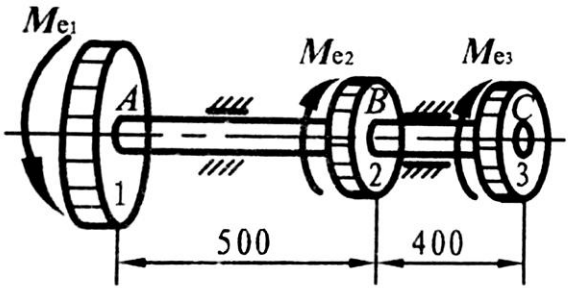
$$=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=\frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$$

$$W_p=\frac{I_p}{D/2}=\frac{\pi}{16D}(D^4-d^4)$$

$$=\frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$$

【经典例题】

图示传动轴的转速为 n=500r/min，主动轮 1 输入功率 p_1=367.75kw，从动轮2、3分别输出功率 p_2=147.1kw，p_3=220.65kw。已知 [τ]=70MPa，[θ]=1(°)/m。G=80GPa。



题 3-12 图

【经典例题】

求：（1）试确定AB段的直径d_1和BC段的直径d_2;

（2）若AB和BC两段选同一直径，试确定直径d；

（3）主动轮和从动轮应如何安排才比较合理?

【解题思路】

分析题目要求，定位所考知识点，运用相关公式解题。

【答案要点】

首先 M_{e1}=7024N.m M_{e2}= 2810N.m

M_{e3}=4210N.m

(1)确定AB段直径：由强度条件得d1=80mm

由刚度条件得d1=84.6mm

确定BC段直径： 由强度条件得d2=67.4mm

由刚度条件得d2=74.4mm

（2）若AB和BC两段选用同一直径，应取两段中直径大者，即:d=84.6mm

（3）主动轮应安置在中间

注意：

1、剪切和挤压的实用计算

1）计算公式

2）双剪切

3）接触面的计算

2、密圈圆柱螺旋弹簧的应力和变形（了解）

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第4讲　扭转与剪切（二）

【考点四】圆轴扭转时斜截面上的应力 ★★★★

1、推倒过程

设de面的面积为dA,则dc面和ce面的面积分别是$dA \cdot \cos\alpha$ 和 $dA = \sin\alpha$

则由$\sum F_N$=0, 得 $(\tau dA\cos\alpha)\sin\alpha + (\tau dA\sin\alpha)\cos\alpha + \sigma_\alpha dA = 0$

化简得 $\sigma_\alpha = -\tau\sin 2\alpha$

同理，由∑F_t=0 得$\tau_\alpha = \tau \cos.2\alpha$

2、几点注意

1）圆轴扭转时的，横截面和纵向截面上的作用着最大切应力。

即： a =0 ° 和 a =90 ° 时。

2）在 a =45 ° 的斜截面上，切应力 为零，

正应力σ达到极值。τ_α

3、扭转破坏

1） 低碳钢试件扭转时沿横截面 破坏 ，是横截面上最大切应力作用的结果。

2)铸铁试件扭转时大约成45°螺旋线断裂，这是最大拉应力作用的结果。

3、圆轴扭转时的强度条件

$$T_{max} \leqslant [T]$$

对于等直圆轴最大扭转切应力一定发生在M最大截面上的最外边缘各点。

【考点五】扭转变形与刚度条件 ★★★★

1、相对扭转角φ

当圆轴为等值轴时：$\varphi = \frac{Mxl}{GIp}$

当轴在各段的扭矩和极惯性矩 I_P 分段为常数的时：

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{xi} l_i}{G I p_i}$$

当扭矩或横截面沿轴线连续变化时:

$$\varphi=\int_0^l \frac{M_x(x)\mathrm{d}x}{GI_P(x)}$$

2、刚度条件

$$\theta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{M_x}{GI_P}$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{GI_P} \times \frac{180}{\pi} \leq [\theta]$$

【考点一】平面弯曲时梁横截面上的内力——剪力和弯矩 ★★★★

1、静定梁的基本形式：简支梁、外伸梁、悬臂梁

2、两个规律

1）横截面上的剪力，在数值上等于作用在此截面任一侧梁上所有外力在y轴上的投影的代数和。

2）横截面上的弯矩，在数值上等于作用在此截面任一侧梁上所有外力对该截面形心力矩的代数和。

【考点一】平面弯曲时梁横截面上的内力——剪力和弯矩 ★★★★

1、静定梁的基本形式：简支梁、外伸梁、悬臂梁

2、两个规律

1）横截面上的剪力，在数值上等于作用在此截面任一侧梁上所有外力在y轴上的投影的代数和。

2）横截面上的弯矩，在数值上等于作用在此截面任一侧梁上所有外力对该截面形心力矩的代数和。

2）组合梁的特点

（1）组合梁的梁间铰只传力而不传递力偶；

(2）母梁上的载荷不传递到子梁上，而子梁上的载荷必须传递到母梁上。

（3）若集中力作用在梁间铰上，或左侧，或右侧，此时放在哪一侧研究，结果一样。

(4）集中力偶不能作用在铰上。

【考点一】纯弯曲（横力弯曲）时梁横截面上的正应力

1、纯弯曲时横截面上正应力

1）变形几何关系 $\varepsilon = \dfrac{y}{\rho}$

2）物理关系 $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{y}{\rho}$

3）静力关系$\frac{1}{\rho}=\frac{Mz}{EIz}$　其中EIz　称为截面的抗弯刚度

4）纯弯曲时横截面上正应力的计算式：$\sigma=\frac{Mzy}{Iz}$

2、应该注意的几个概念

1）横力弯曲与纯弯曲

2）平面假设

3）中性层和中性轴

3、横力弯曲时横截面上的正应力

1）几个公式

塑性材料

$$\left|\sigma\right|_{\max} = \frac{\left|M_Z\right|_{\max} \cdot \left|y\right|_{\max}}{I_Z}$$

$$\frac{I_Z}{\left|y\right|_{\max}} = W_Z \qquad W_Z \quad \text{为抗弯截面系数}$$

$$\left|\sigma\right|_{\max} = \frac{\left|M_Z\right|_{\max}}{W_Z} \leq [\sigma]$$

3、横力弯曲时横截面上的正应力

1） 几个公式

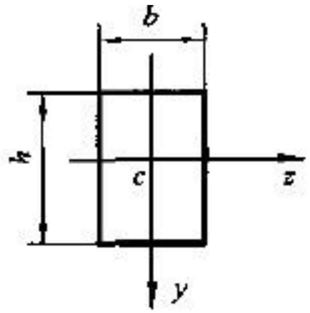
脆性材料

$$\sigma_{t,\max} = \frac{|M_Z|_{\max} y_1}{I_Z} \le [\sigma_t]$$

$$|\sigma_c|_{\max} = \frac{|M_Z|_{\max} \cdot y_2}{I_Z} \le [\sigma_c]$$

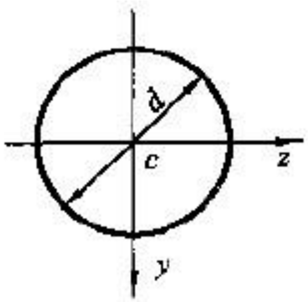
几种

W_Z



$$W_Z = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$



$$W_Z = W_Y = \frac{\pi d^3}{32}$$

2、应该注意的几个概念

1）横力弯曲与纯弯曲

2）平面假设

3）中性层和中性轴

3、横力弯曲时横截面上的正应力

1）几个公式

塑性材料

$$|\sigma|_{max}=\frac{|M_Z|_{max}\cdot|y|_{max}}{I_Z}$$

$$\frac{I_Z}{|y|_{max}}=W_Z$$

W_Z 为抗弯截面系数

$$|\sigma|_{max}=\frac{|M_Z|_{max}}{W_Z}\leq[\sigma]$$

3、横力弯曲时横截面上的正应力

1） 几个公式

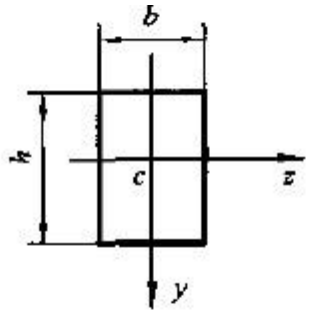
脆性材料

$$\sigma_{t,\max} = \frac{|M_Z|_{\max} y_1}{I_Z} \le [\sigma_t]$$

$$|\sigma_c|_{\max} = \frac{|M_Z|_{\max} \cdot y_2}{I_Z} \le [\sigma_c]$$

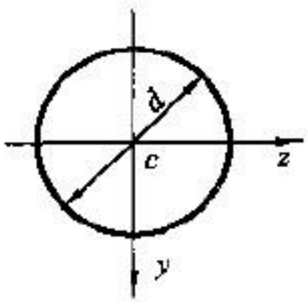
几种

Wz



$$Wz = \frac{bh^2}{6}$$

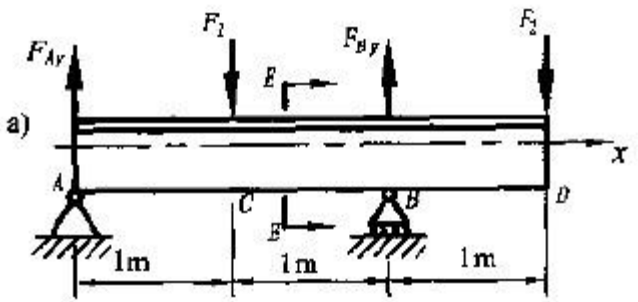
$$Wy = \frac{hb^2}{6}$$

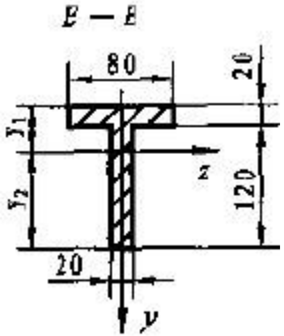


$$Wz = W_Y = \frac{\pi d^3}{32}$$

【经典例题】

T型截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图所示,F_1=9KN,F_2=4KN,铸铁的许用拉应力为[σ_t]=30MPa许用压应力为[σ_c]=160MPa.已知截面对形心轴z的惯性矩为 I_z =763cm^4,且 $|y_1| = 52mm$。试校核梁的强度。



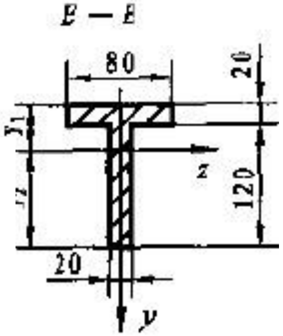


【解题思路】

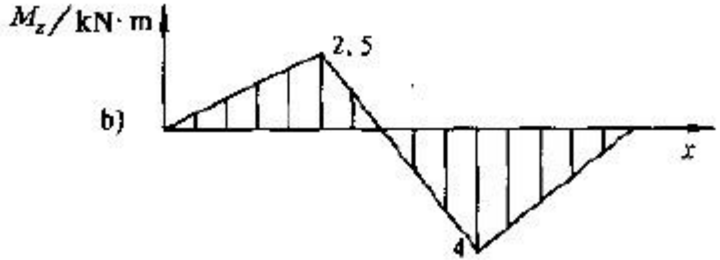
分析题干可知：题目是对铸铁梁的校核。

【答案要点】

1、求支反力 $F_{Ay}=2.5kN$ $F_{By}=10.5kN$



2、画弯矩图



最大正弯矩在C截面

最大负弯矩在B截面

【答案要点】

3、（1）对B截面，因为是负弯矩，中性轴上部受拉、下部受压：$\sigma_{t,\max}=27.2MPa$

$$|\sigma_c|_{\max}=46.2MPa$$

（2）对C截面：

结论：满足强度条件 $\sigma_{t,\max}=28.8MPa$

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第5讲 弯曲内力

第四章 弯曲内力

1、本章知识框架

（一）梁的支座及载荷的简化
- 支座的几种基本形式
- 载荷的简化
- 静定梁的基本形式

（二）平面弯曲时梁横截面上的内
- 剪力
- 弯矩
- 符号规定：左上右下，剪力为正，左顺右逆，弯矩为正

3、剪力（弯矩）方程、剪力图（弯矩图）

- Fq图，M图的特征
- 分布载荷集度、剪力和弯矩之间的关系

2、考点概述

1、梁的支座及载荷的简化

2、平面弯曲时梁横截面上的内

3、剪力（弯矩）方程、剪力图（弯矩图）

3、复习思路及目的

1、会画弯矩图。

2、会对各种支座简化。

3、 会求横力弯曲和纯弯曲时横截面上的内力。

【考点一】平面弯曲时梁横截面上的内力——剪力和弯矩 ★★★★

1、静定梁的基本形式：简支梁、外伸梁、悬臂梁

2、两个规律

1）横截面上的剪力，在数值上等于作用在此截面任一侧梁上所有外力在y轴上的投影的代数和。

2）横截面上的弯矩，在数值上等于作用在此截面任一侧梁上所有外力对该截面形心力矩的代数和。

3、1）剪力方程和弯矩方程

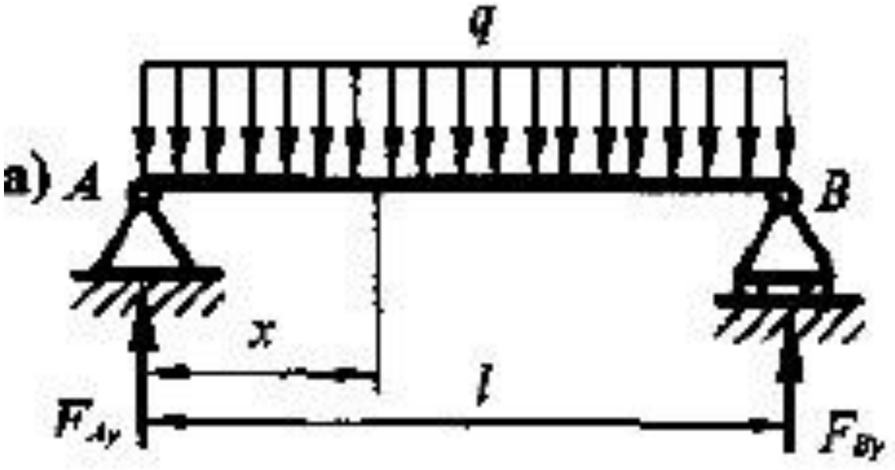
2）剪力图和弯矩图

3）载荷集度、剪力、弯矩的关系

$$\frac{dF_{Q(x)}}{dx} = q(x) \qquad \frac{dM_{(x)}}{dx} = F_{Q(x)} \qquad \frac{d^2M_{(x)}}{dx^2} = q(x)$$

【经典例题】

一简支梁AB受均布载荷q作用，如图所示。列出梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图。



【解题思路】

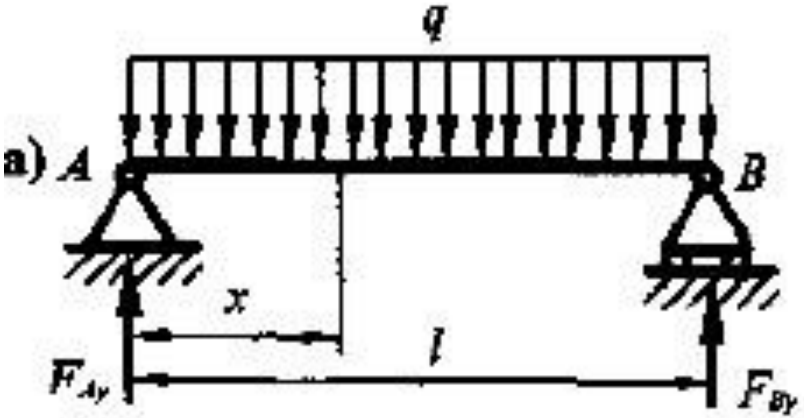
分析题目可知，考查的是列写梁的剪力方程和弯矩方程，并画出剪力图和弯矩图。

【答案要点】

（1）求支反力

对于简支梁，无论利用哪端求内力，都要先求支反力。

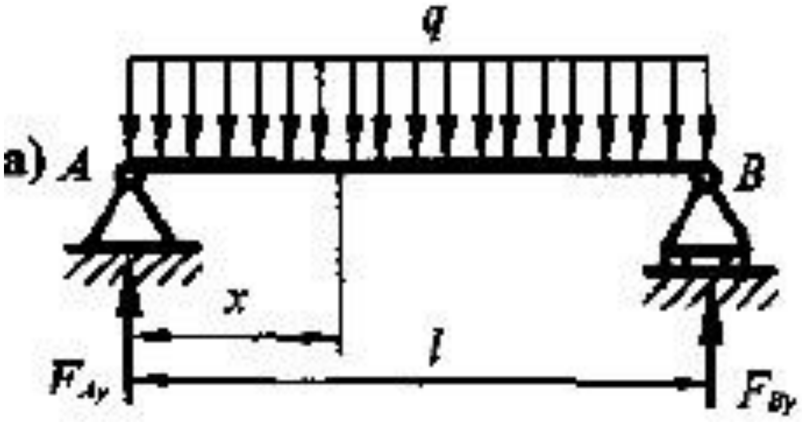
由结构的对称性：$F_{Ay}=F_{By}=\dfrac{ql}{2}(\uparrow)$

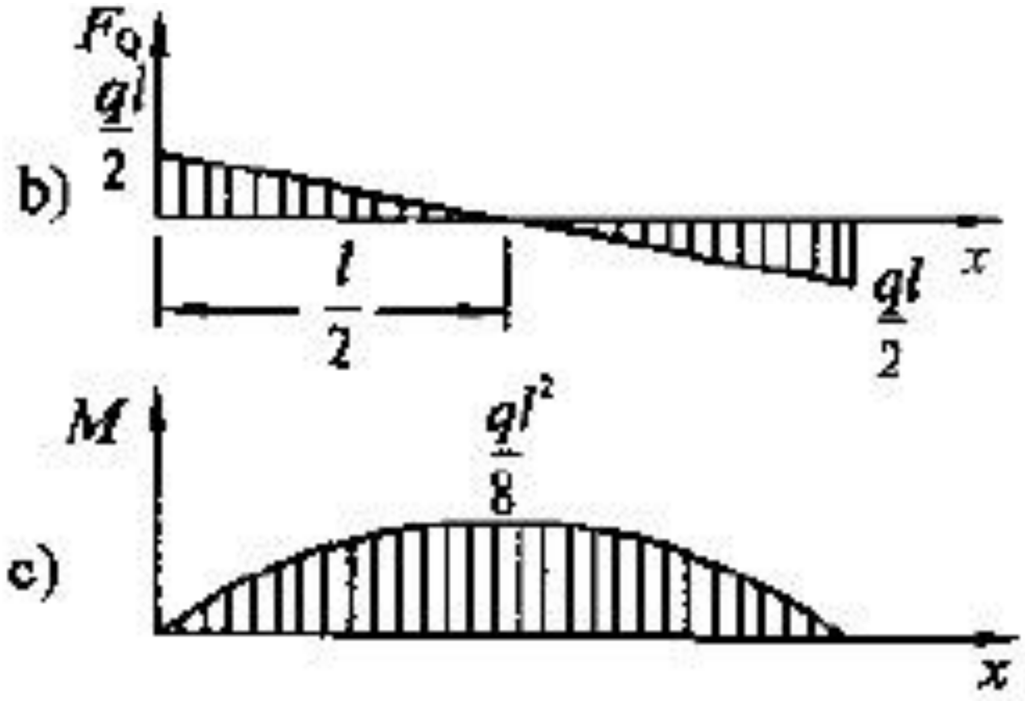


（2）列剪力方程和弯矩方程

在距A端x处截取左段梁列方程。

（3）做剪力图和弯矩图




F_Q
$\frac{ql}{2}$
b)
$\frac{l}{2}$
$\frac{ql}{2}$
x
M
$\frac{ql^2}{8}$
c)
x

【题后总结】

1）在集中力作用截面两侧，剪力有一突然变化，变化的数值就等于集中力。在力偶作用截面两侧，弯矩有一突然变化，变化的数值就等于集中力偶

2）若 $q(x)=0, F_Q(x)=$ 常数，即剪力图是平行于x轴的直线，弯矩图是斜直线。

【题后总结】

3）若q=常数，则剪力图是斜直线，弯矩图是抛物线；若是向下作用的，则弯矩图为向上凸的抛物线，反之，若是向上下作用的，则弯矩图为向下凸的抛物线。

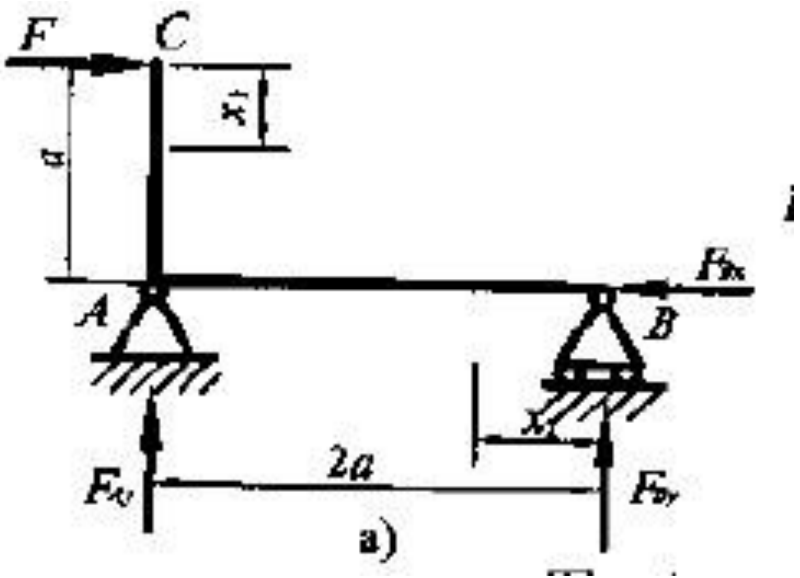
4）弯矩的极值发生在剪力为零的截面上。

5）任意两截面上的剪力之差，等于该两截面间载荷图的面积。

6）内力的突变。

4、静定钢架弯矩图的绘制

【经典例题】作如图所示钢架的弯矩图。



a)

【答案要点】

1）求支反力

2）列弯矩方程

【答案要点】

3）作弯矩图

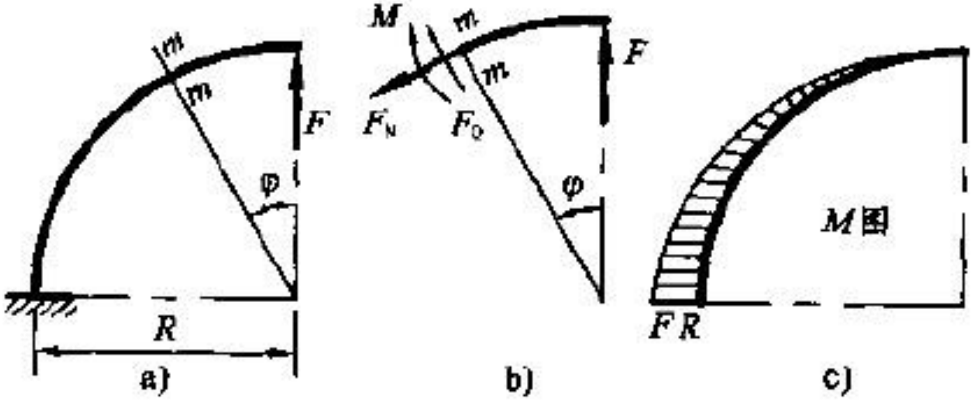
结论：

（1）在平面钢架的钢节点处，两侧的弯矩M是相等的。

（2）平面钢架任意截面上的内力，一般有剪力、弯矩、轴力。

【考点二】几种特殊情况下的弯曲内力 ★★★

1、平面曲杆的弯曲内力



内力符号规定：引起拉伸变形的轴力F为正，使轴线曲率增加的弯矩为正，以剪力F_Q对所考虑的一段曲杆内任一点取矩，若力矩为顺时针方向，则剪力为正。

作图时：将M画在轴线的法线方向，并画在杆件受压的一侧。

2、分布载荷为线性函数

3、梁上受无冲击的移动载荷

4、带有梁间铰的组合静定梁

1）求解方法——拆！

2）组合梁的特点

2）组合梁的特点

（1）组合梁的梁间铰只传力而不传递力偶；

(2）母梁上的载荷不传递到子梁上，而子梁上的载荷必须传递到母梁上。

（3）若集中力作用在梁间铰上，或左侧，或右侧，此时放在哪一侧研究，结果一样。

(4）集中力偶不能作用在铰上。

二、归纳小结

本章包括两个考点，其中【考点一】为重要考点，要重点掌握，【考点二】为次重要考点，要注意里面的细节，小细节往往是解题的关键突破口。

吉林大学《865材料力学》

主讲老师：楚鹏鹏

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第6讲 1-4章真题讲解

一、（2010年考研真题）

1、画出低碳钢拉伸实验时δ-ε曲线，写出各阶段的名称，写出强度指标、塑性指标的名称和计算式。

2、分别画出低碳钢、铸铁试件在扭转实验中试件的受力简图，破坏件的草图；危险点的应力状态；在单元体上标出破坏的方位，在应力圆上标出所对应的破坏点，分析引起破坏的原因。

【解题思路】本题考查材料的力学性能

【答案要点】

1、四个阶段：弹性阶段、屈服阶段、强化阶段、局部变形阶段；

2、伸长率 $\delta=\frac{l_1-l}{l}\times 100\%$

断面收缩率 $\psi=\frac{A-A_1}{A}\times 100\%$

【透过真题看重点】

在一、二、三章中，低碳钢、铸铁拉伸（压缩）实验和低碳钢、铸铁的扭转实验是重点，常常会让考生画出低碳钢拉伸实验时的δ-ε曲线，并写出各阶段名称。考生必须熟悉掌握这部分内容。记忆性的东西一定要记准、记熟，在考试时可以节省做题时间。

二、（期末考试题）作图示梁的内力图

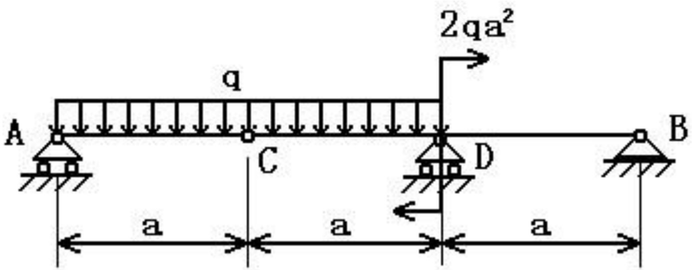
【解题思路】本题考查做轴的内力图

【答案要点】

1、求支反力

2、画内力图

三、（2001年考研题）作内力图



【解题思路】本题考查画内力图

【答案要点】

1、求支反力

2、画内力图 $F_A=\frac{1}{2}ql;F_D=\frac{1}{2}ql;F_B=ql$

四、几种简单直梁的M图

画内力图时应注意：

1、方向

2、标注正负号

3、利用力的关系画图

4、画内力图要全面，切勿遗漏某一种内力（比如轴力）

5、分析内力时，一定要从所受外力出发

【透过真题看重点】

画内力图是材料力学考研中必考的一类题目，一般都是画静定梁的内力图，三种基本静定梁和中间带铰支的静定梁是考察的主要对象，只要计算准确，注意画内力图时容易出现的问题，本道题拿满分，问题不大。

➢ 归纳总结

本讲共讲了四道真题，综合了一到四章我们复习一部分考点，在考试的时候，这些知识点也常常是以这样的形式进行考核，同学们应好好体会出题者的意图，注意易错点。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第7讲　弯曲强度

第五章 弯曲强度

- 纯弯曲及其变形
- 纯弯曲时梁横截面上的正应力
- 横力弯曲时梁横截面上的
  - 正应力弯曲正应力强度条件
  - 切应力弯曲切应力强度条件
- 弯曲中心
- 提高梁弯曲强度的主要措施

2、考点概述

1、纯弯曲及其变形

2、纯弯曲时梁横截面上的正应力

3、 横力弯曲时梁横截面上的

4、弯曲中心

3、复习思路及目的

1、理解 纯弯曲及其变形

2、理解横力弯曲时梁横截面上的正应力

3、理解弯曲中心

4、了解 提高梁弯曲强度的主要措施

【考点一】纯弯曲（横力弯曲）时梁横截面上的正应力

1、纯弯曲时横截面上正应力

1）变形几何关系 $\varepsilon=\dfrac{y}{\rho}$

2）物理关系 $\sigma=E\varepsilon=E\dfrac{y}{\rho}$

3）静力关系 $\frac{1}{\rho}=\frac{Mz}{EIz}$ 其中 EIz 称为截面的抗弯刚度

4）纯弯曲时横截面上正应力的计算式：$\sigma=\frac{Mzy}{Iz}$

2、应该注意的几个概念

1）横力弯曲与纯弯曲

2）平面假设

3）中性层和中性轴

3、横力弯曲时横截面上的正应力

1）几个公式

塑性材料

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_Z|_{max} \cdot |y|_{max}}{I_Z}$$

$$\frac{I_Z}{|y|_{max}} = W_Z \qquad W_Z \quad \text{为抗弯截面系数}$$

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_Z|_{max}}{W_Z} \leq [\sigma]$$

3、横力弯曲时横截面上的正应力

1） 几个公式

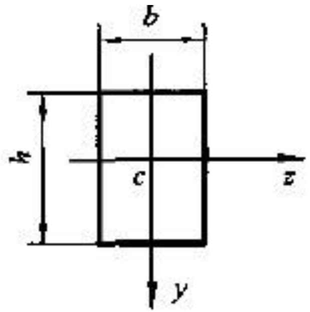
脆性材料

$$\sigma_{t,\max} = \frac{|M_Z|_{\max} y_1}{I_Z} \le [\sigma_t]$$

$$|\sigma_c|_{\max} = \frac{|M_Z|_{\max} \cdot y_2}{I_Z} \le [\sigma_c]$$

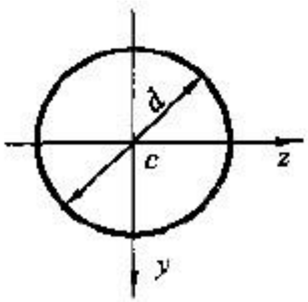
几种

Wz



$$Wz = \frac{bh^2}{6}$$

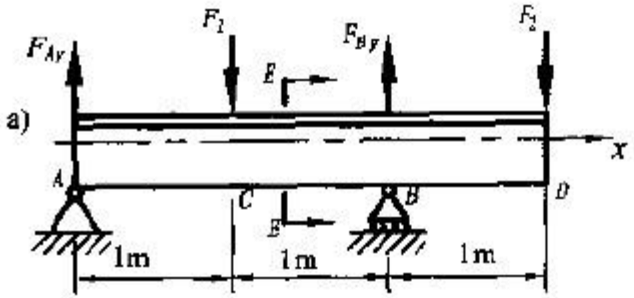
$$Wy = \frac{hb^2}{6}$$

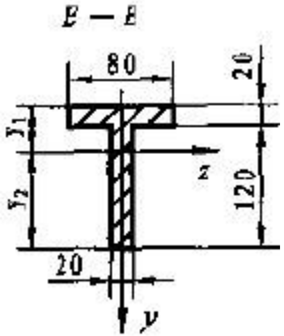


$$Wz = W_Y = \frac{\pi d^3}{32}$$

【经典例题】

T型截面铸铁梁的载荷和截面尺寸如图所示,F_1=9KN,F_2=4KN,铸铁的许用拉应力为$[\sigma_t]$=30MPa许用压应力为$[\sigma_c]$=160MPa.已知截面对形心轴z的惯性矩为 I_z =763cm^4,且 $|y_1| = 52mm$。试校核梁的强度。





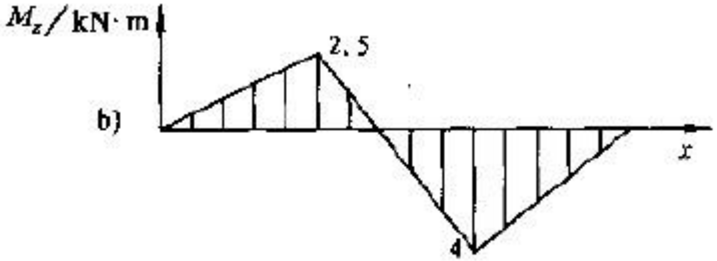
【解题思路】

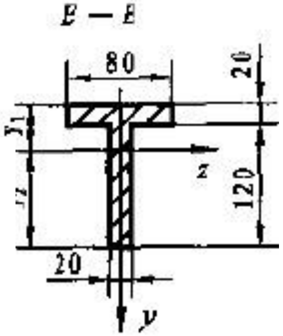
分析题干可知：题目是对铸铁梁的校核。

【答案要点】

1、求支反力 $F_{Ay}=2.5kN$ $F_{By}=10.5kN$

2、画弯矩图





最大正弯矩在C截面

最大负弯矩在B截面

【答案要点】

3、（1）对B截面，因为是负弯矩，中性轴上部受拉、下部受压：$\sigma_{t,\max} = 27.2MPa$

$$\left|\sigma_c\right|_{\max} = 46.2MPa$$

（2）对C截面：

结论：满足强度条件 $\sigma_{t,\max} = 28.8MPa$

【答题总结】

对于铸铁的强度校核，一般是两面三点。分别校核，在都满足强度要求的时候，才能得出结论梁是满足强度要求的。

【考点二】弯曲切应力强度校核

1、横力弯曲时梁横截面上的切应力

1）矩形截面梁横截面上距中性轴为y的各点处切应力计算公式为 $\tau=\frac{F_Q S_z^*}{I_z b}$

2）在中性轴上，切应力有最大值：$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{F_Q}{A}$

此式说明，横力弯曲时矩形截面梁横截面上的最大切应力值为平均应力的1.5倍。

【题后总结】

3）工字型截面梁（了解）

4）圆形截面梁 $\tau_{\max}=\frac{4}{3}\frac{F_Q}{A}$

5）闭口的矩形和圆环型薄壁截面梁（了解）

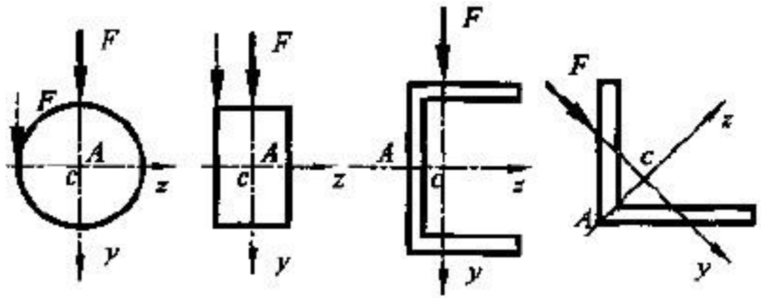
任一厚度 处t的τ计算公式 $\tau=\frac{F_Q S_z^*}{I_Z 2t}$

【考点三】弯曲中心和提高梁的弯曲强度

1、弯曲中心

1）横力弯曲时，只产生平面弯曲的条件是：横向力通过弯心，且载荷作用平面应与主形心惯性矩平面相平行。

2）几种形状下的弯曲中心



a) b) c) d)

2、提高梁弯曲强度的主要措施

1）合理安排梁的受力情况

2）合理的截面设计

3）等强度梁

二、归纳小结

本章共讲了三个考点，其中考点一和考点二为重要考点，考点三作为理解内容。要多做题，在做题的过程中找到更多的解题技巧。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第8讲　弯曲变形

第六章 弯曲变形

1、本章知识框架

- 表示弯曲变形的物理量：挠度、转角
- 绕曲线的微分方程、刚度条件
- 用积分法求弯曲变形
- 提供梁弯曲变形刚度的主要措施

2、考点概述

1、表示弯曲变形的物理量：挠度、转角

2、绕曲线的微分方程、刚度条件

3、用积分法求弯曲变形

4、 提供梁弯曲变形刚度的主要措施

3、复习思路及目的

1、 理解表示弯曲变形的物理量：挠度、转角。

2、 绕曲线的微分方程、刚度条件。

3、会用积分法求弯曲变形。

4、了解提供梁弯曲变形刚度的主要措施。

【考点一】挠曲线的近似微分方程★★★

1、挠曲线的近似微分方程

$$\frac{d^2\upsilon}{d^2x}=\frac{M(x)}{EI}$$

2、梁弯曲的刚度的条件

$$|f|_{\max}\le[f]$$

$$|\theta|_{\max}\le[\theta]$$

3、推倒过程

从力学方面

纯弯曲时中性层的曲率为 $\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}$

横力弯曲时 $\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}$

从数学方面 $$\frac{1}{\rho}=\pm\frac{\dfrac{d^2x}{d^2\upsilon}}{\left[1+(\dfrac{d\upsilon}{dx})^2\right]^{3/2}}$$

综合两方面 $$\pm\frac{d^2x}{d^2\upsilon}=\frac{M(x)}{EI}$$

根据弯矩的符号规定，当挠曲线小凸时，M为正。

另一方面，在在我们所选定的坐标里向下凸的曲线的二阶导数也为正。

所以 $\pm \frac{d^2 x}{d^2 \upsilon} = \frac{M(x)}{EI}$ 两端符号是一致的

所以可以写成 $\frac{d^2 x}{d^2 \upsilon} = \frac{M(x)}{EI}$

这就是挠曲线的近似微分方程

4、用积分法求弯曲变形

1）公式 $$EI\theta(x)=EI\upsilon'(x)=\int M(x)dx+C$$

$$EI\upsilon(x)=\int\left[\int M(x)dx\right]dx+Cx+D$$

2）确定积分常数的条件

支撑条件：强性支撑、刚性支撑

连续条件：挠度连续、转角连续

注意：

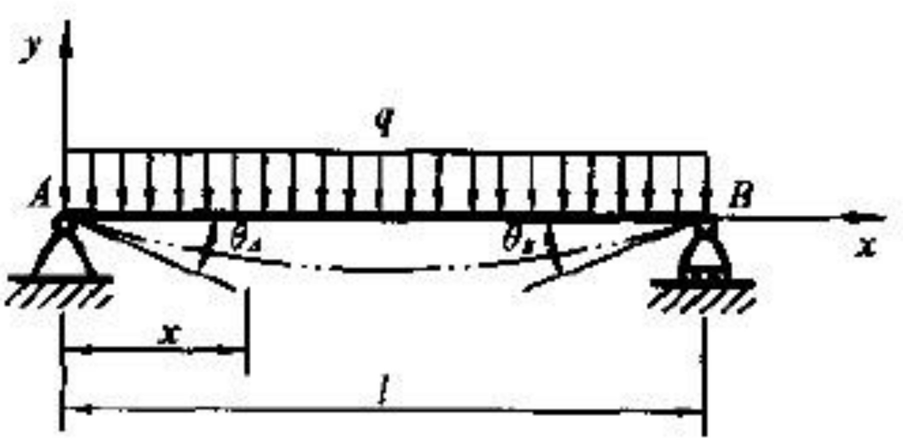
1）对于具有中间铰的组合梁，在中间铰左右两截面的挠度依然相等，但转角可不等。

2） 挠曲线应该是一条连续光滑的曲线，即其挠度是连续的。

3）同一截面的转角应该是相等的。

4）挠度和转角是弯曲变形的两个基本量。挠度向上为正，转角逆时针为正。

【经典例题】 试讨论在均布载荷作用下，简支梁的弯曲变形。



【解题思路】本题考查运用积分法求某点的挠度。

【答案要点】

解：由对称性可知，梁的支反力相等，且为

$$F_{Ay}=F_{By}=\frac{1}{2}ql$$

则任意截面上的弯矩为 $M(x)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qlx^2$

故挠曲线的微分方程为 $EI\upsilon''=M(x)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qlx^2$

将挠曲线近似微分方程积分，得

$$EI\upsilon' = \frac{1}{4}qlx^2 - \frac{1}{6}qlx^3 + C$$

$$EI\upsilon = \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qlx^4 + Cx + D$$

C、D由以下边界条件来确定。

当x=0时，Va=0

当x=1/2时，$\upsilon'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

根据以上各式可求 $C=-\frac{ql^3}{24}, D=0$

于是得转角及挠度方程为

$$EI\upsilon' = \frac{1}{4}qlx^2 - \frac{1}{6}qlx^3 - \frac{ql^3}{24}$$

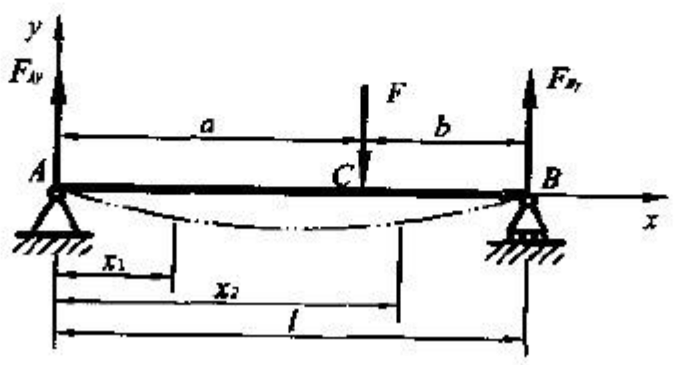
$$EI\upsilon = \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qlx^4 + -\frac{ql^3}{24}x$$

由于梁中点转角为零，故最大挠度在梁中点，即

$$f_{\max} = \upsilon\big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{5ql^4}{384EI}$$

最大转角发生在B、A两截面，它们的数值相等，符号相反，且为 $\theta\max = \theta_B = -\theta_A = \dfrac{ql^3}{24EI}$ 。

【经典例题】内燃机中的凸轮轴或某些齿轮轴，可以简化成在集中力F作用下的简支梁，如图所示，试讨论这一简支梁的弯曲变形。



【解题思路】利用积分法分段讨论挠度和转角

【答案要点】

1、求支反力 $F_{Ay}=\dfrac{Fb}{l};F_{By}=\dfrac{Fa}{l}$

2、根据载荷情况，应分两段列方程

$$AC段：\mathrm{M}_1=\frac{\mathrm{F}b}{l}x_1;\left(0\le x_1\le a\right)$$

$$CB段：\mathrm{M}_2=\frac{\mathrm{F}b}{l}x_2-\mathrm{F}\left(\mathrm{x}_2-\mathrm{a}\right);\left(a\le x_2\le l\right)$$

【考点二】提高梁弯曲刚度的主要措施★★

1、合理设计和布置支座

2、将集中载荷适当分散

3、尽量缩小跨度

4、选择合理的截面形状

5、合理选材

二、归纳小结

本章共讲了两个考点，其中考点一为重要考点，考点一作为理解内容。这一章主要介绍如何用积分法求挠度，但在实际做题的过程中会发现我们很少用这种方法求挠度。但是这个方法大家一定要理解，会用。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第9讲 应力及应变分析 强度理论（一）

第七章 应力及应变分析 强度理论

1、本章知识框架

- 应力状态分析
- 二向应力状态分析的解析法、图解法
- 三向应力状态分析、广义胡克定律
- 四种常用强度理论、复杂应力状态的变形比能
- 平面应力状态下的应变分析

2、考点概述

1、应力状态分析

2、二向应力状态分析的解析法、图解法

3、三向应力状态分析、广义胡克定律

4、四种常用强度理论、复杂应力状态的变形比能

5、 平面应力状态下的应变分析

3、复习思路及目的

1、理解 应力状态分析

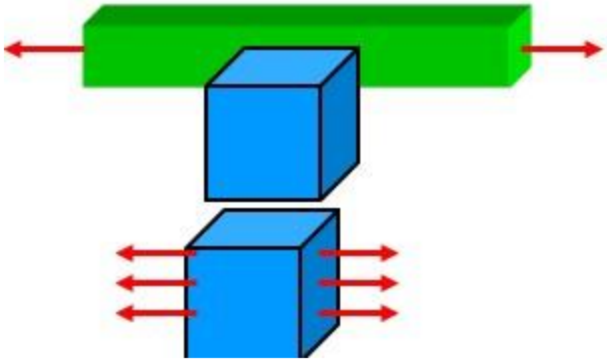
2、二向应力状态分析的解析法、图解法

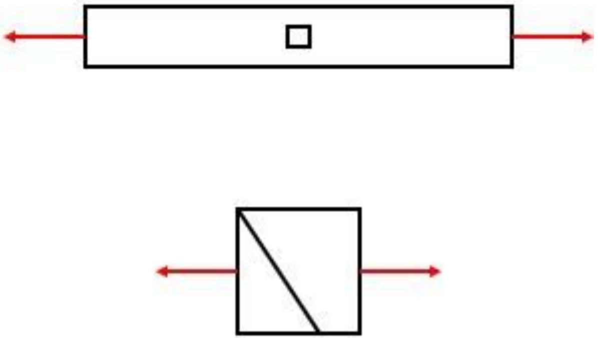
3、理解三向应力状态分析、广义胡克定律

4、 理解四种常用强度理论、复杂应力状态的变形比能

5、会对 平面应力状态下的应变进行分析

【考点一】一点处的应力状态 ★★★★





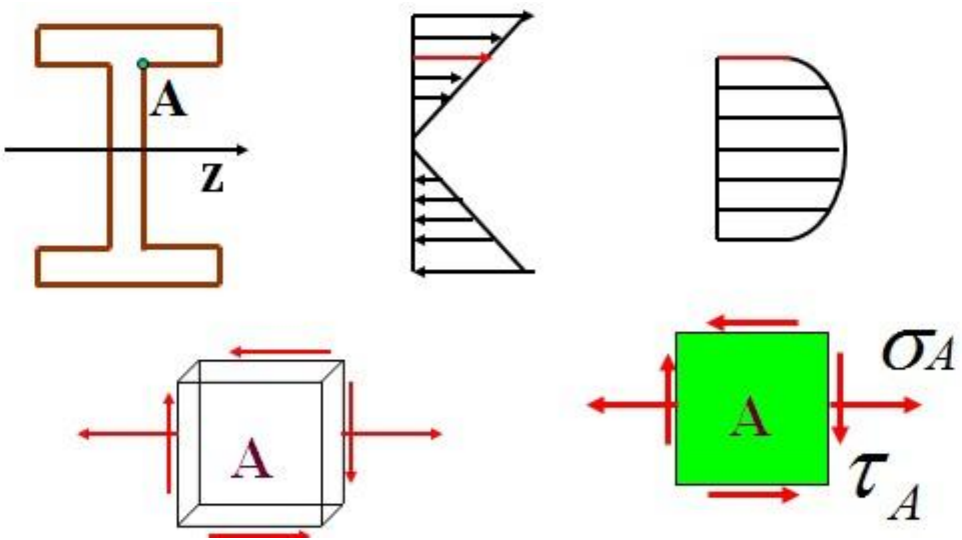
$$\sigma_{\alpha} = -\tau \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \tau \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{\max} = \tau$$

$$\sigma_{\min} = -\tau$$

$$\tau_{\max} = \tau$$



A点的强度条件是怎么建立的呢?

1、 过一点处所有截面上应力的全部情况称为一点处的应力状态。

2、解决复杂受力点的强度计算问题，分析引起构件破坏的原因 。通过应力，应变分析，建立了强度理论，从而解决组合变形下构件的强度计算问题。

3、难点：取单元题　　　　原始单元体

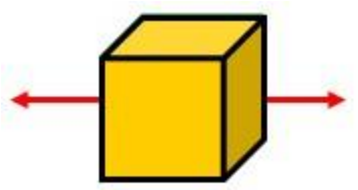
危险点和指定点

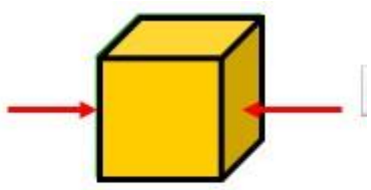
解题技巧：紧紧抓住横截面，及其上 的应力分布规律，应用切应力互等定理。

4、应力状态的分类

1）定义：$\tau=0$ 的面为主平面；主平面上的应力为主应力；三个主平面构成的单元体称为主单元体。

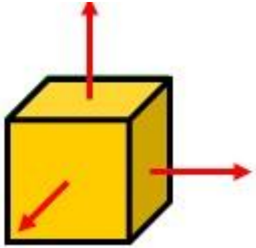
2）只有一个主应力不为零称为单向应力状态；





两个主应力不为零称为二向应力状态；

三个应力状态不为零称为三向应力状态。



5、应力分析的关键

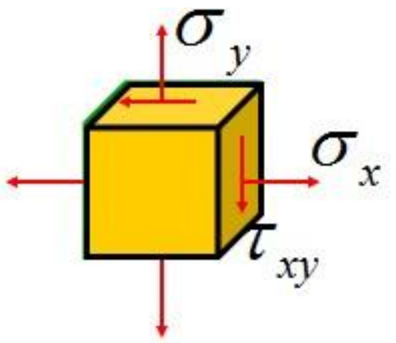
1）实质：由原始单元体，求各截面上的应力

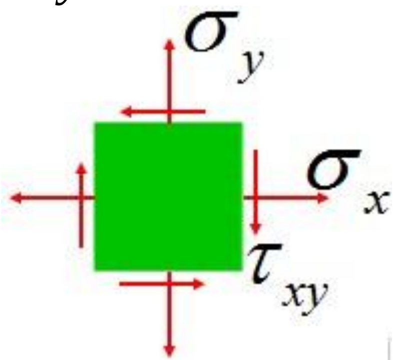
2）前提：从受力构件中正确取出原始单元体

【考点二】二向应力状态分析 ★★★★

一、 解析法

1、设在受力构件中取出二向应力状态的最一般情况的原始单元体，既已知面上的应力 σ_x σ_y τ_{xy}



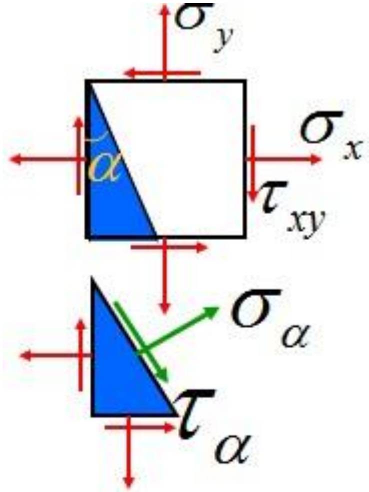


2、确定平行于Z轴的任意斜截面上的应力

依据截面法可以求出某一点的应力

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$



3、确定主应力及主平面位置

σ_α τ_α均为 a 的函数，必存在极值

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}=-2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha\right)$$

令 $\dfrac{d\sigma_\alpha}{d\alpha}=0$ 则必有 $\tau_{\alpha_0}=0$

结论：正应力的极值为主应力

方位角：$\tan 2\alpha_0=\dfrac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$

正应力极值

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

至于为第几主应力，应该求出具体值与零比较后而定。

4、确定极值切应力及其所在平面

令 $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0 \quad \tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

极值应力为

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max} \\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

5、1）单元体任意两个互相垂直面上正应力之和为常数

$$\sigma_{\alpha}+\sigma_{\alpha+\frac{\pi}{2}}=\sigma_{x}+\sigma_{y}$$

2）$\tau_{\alpha+\frac{\pi}{2}}=-\tau_{\alpha}$ 证明了切应力互等定理

二、图解法

1、原理 $$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

两式平方相加 $$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

圆心坐标为 $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$

半径为 $R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$

此圆称为应力圆

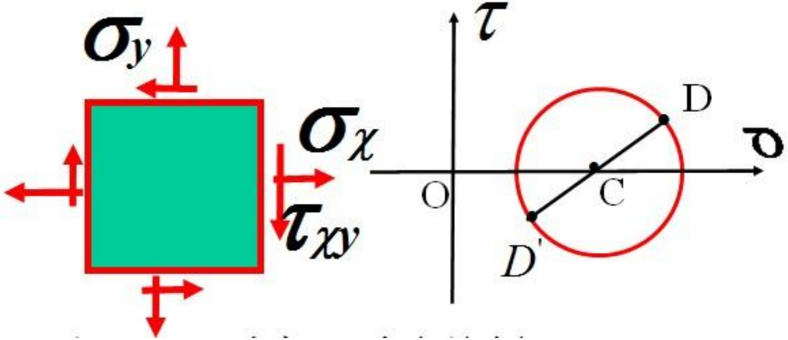
2、应力圆的做法

1）取 $\sigma-\tau$ 坐标，选定比例尺

2）以(σ_x, τ_{xy})定D点，($\sigma_y,-\tau_{xy}$)定D`点；

3）连结D D`点定圆心C；

4）以CD为半径作圆。



3、单元体与应力圆的一一对应关系

面——点

σ——横坐标

τ——纵坐标

相互垂直的面对应同一直径的两个端点

$$\alpha = 2\beta$$

主应力——横坐标交点

4、应力圆的应用

1）确定二向应力状态下单元体斜截面上应力；

2）确定二向应力状态下的主应力和主平面位置;

3）确定二向应力状态下极值切应力及其方位。

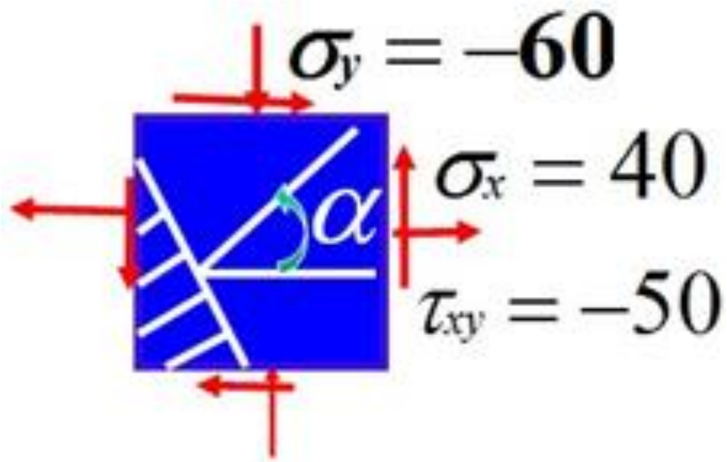
【经典例题】已知单元体 $\sigma_x = 40$ $\tau_{xy} = -50$ 。

求：1）$\sigma_{30^0}, \tau_{30^0}$

2）主应力

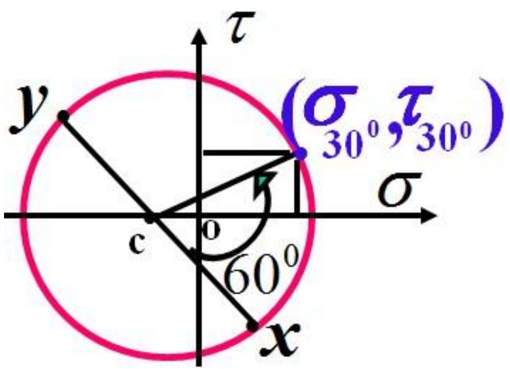
3）画出主单元体

【解题思路】考查的是应力分析



【答案要点】

（1）求应力



$$\sigma_{30^\circ} = 58.3MPa$$

$$\tau_{30^\circ} = 18.3MPa$$

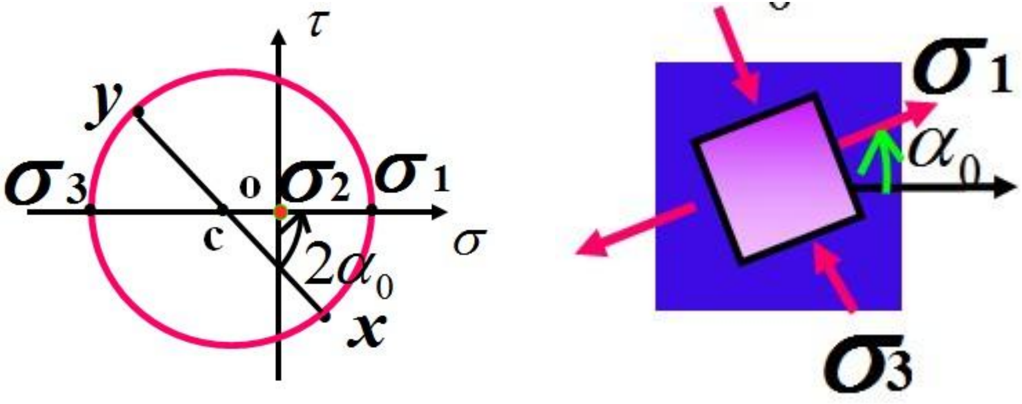
$$\sigma_1 = 60.7MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -80.7$$

$$2\alpha_0 = 45^\circ$$

（2）主单元体



二、归纳总结

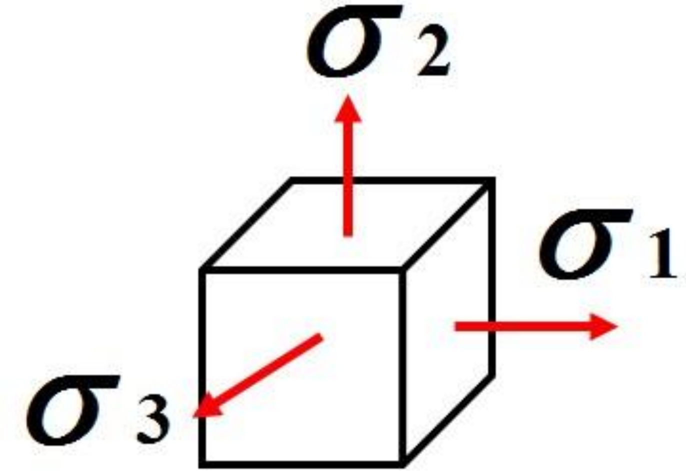
本讲共讲了两个考点，都是考试的重点内容，这里的题目相对简单，同学们做题一定要认真，加深对概念的理解，争取考试时候这道题拿满分。

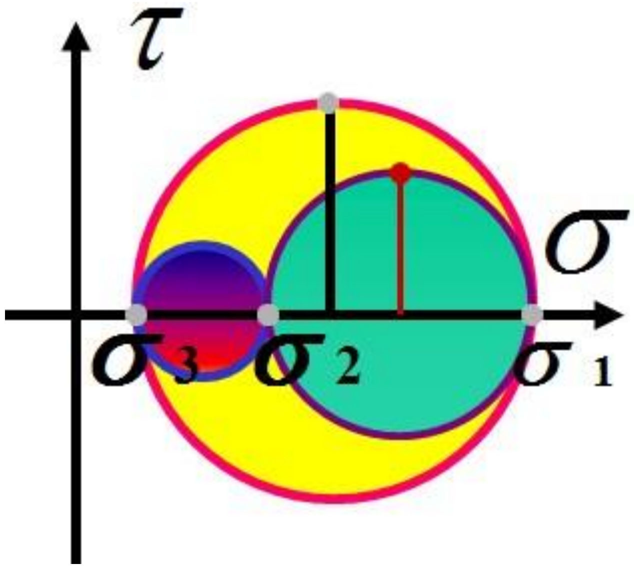
专业课命题规律分析及考点精讲课程

第10讲 应力及应力分析 强度理论（二）

【考点三】三向应力状态分析（已知 一个主应力的三向应力状态）★ ★ ★

1、已知主应力 σ_1 σ_2 σ_3 ,作应力圆





任意面应力在三个圆组成的黄色区域内

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

2、三向应力状态下，正应力的最大值和最小值

$$\sigma_{max} = \sigma_1$$

$$\sigma_{min} = \sigma_3$$

3、已知一个主应力

1）平面问题，求出 $\sigma_{\substack{max\\min}}$ 与零比较，定 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

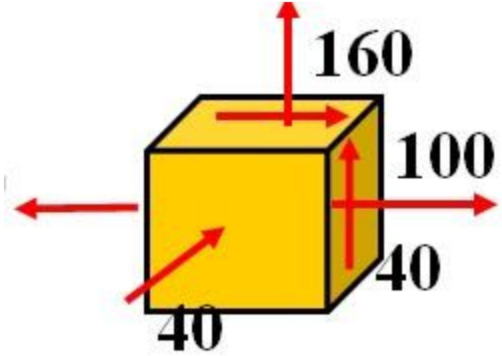
2）空间问题：不看已知主应力,先解决平面问题

求出 $\sigma_{max},\sigma_{min}$ 与-40排序

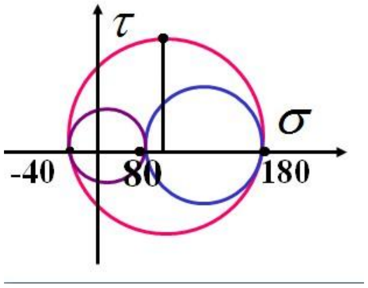
$$\sigma_1 = 180$$

$$\sigma_2 = 80$$

$$\sigma_3 = -40$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 110$$



【考点四】广义的胡克定律 ★★★

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\mu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\mu\left(\sigma_x+\sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\mu\left(\sigma_y+\sigma_x\right)\right]$$

对于主单元体有：主应力~主应变

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left[\sigma_1-\mu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left[\sigma_2-\mu\left(\sigma_1+\sigma_3\right)\right]$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left[\sigma_3-\mu\left(\sigma_2+\sigma_1\right)\right]$$

2、单元体的变形

1）体积应变 $$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

2）平均应力 $$\sigma_m=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$

$$=\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}$$

3、复杂状态的应变比能

$$u=\frac{1}{2E}[\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1$$

【考点五】强度理论 ★★★★

1、第一类强度理论--- 断裂破坏理论（最大拉应力理论）

1）理论依据 $\sigma_{t\max} \rightarrow \sigma_u = \sigma_b$

2）破坏条件 $\sigma_1 = \sigma_b$

3）强度条件 $\sigma_1 \leq [\sigma] = \dfrac{\sigma_b}{n}$

4）相当应力 $\sigma_{r1} = \sigma_1$

2、 第二强度理论--- 断裂破坏理论（最大伸长线应变理论）

1）理论依据 $\varepsilon_{t\max} \rightarrow \varepsilon_u = \dfrac{\sigma_b}{E}$

2）破坏条件 $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \dfrac{\sigma_b}{E}$

3）强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$

4）相当应力 $\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$

3、第三强度理论 （最大切应力理论）

1）理论依据 $\tau_{\max} \to \tau_u = \frac{\sigma_s}{2}$

2）破坏条件

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_s}{2}$$

3）强度条件 $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$

4）相当应力

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$$

4、 第四强度理论----屈服破坏理论（形状改变比能理论）

1）理论依据

$$u_{d\max}=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

2）强度条件

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\le[\sigma]$$

3）相当应力

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}$$

5、适用范围

1）断裂破坏理论（第一、二强度理论）

脆性材料----有拉应力

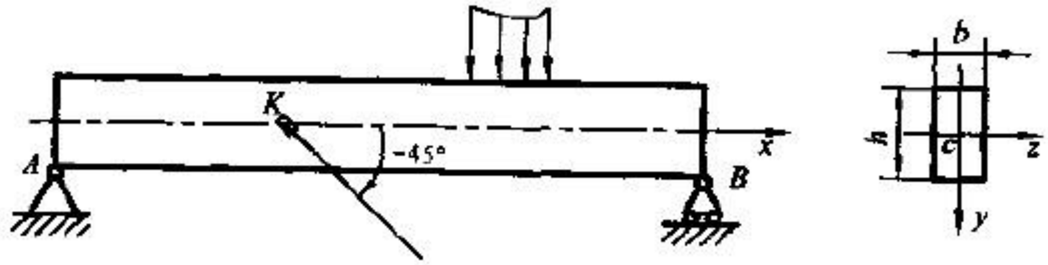
塑性材料----三向接近等拉

2）屈服破坏理论（第三、四强度理论）

塑性材料----除三向拉力

脆性材料----无拉应力

【经典例题】矩形截面梁受力如图所示，现测得K点沿与轴线成 -45° 方向的线应变 ε_{-45° 。若E、μ 及b、h均为已知，求A端的支反力 F_{Ay} 。



题7-23图

【解题思路】本题考查应力及应变的分析

【答案要点】

（1）取出k处的单元体

（2）因为K点位于中性层上，所以横截面上弯曲正应力为零，只有切应力：$\tau=\dfrac{3F_Q}{2A}=\dfrac{3F_{Ay}}{2bh}$

（3）又已知：K点沿轴线 -45° 方向的线应变$\varepsilon_{-45^{\circ}}$，根据广义胡克定律：

$$\varepsilon_{-45^\circ} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^\circ} - \mu\sigma_{-45^\circ}\right)$$

$$\frac{\tau}{E}(1+\mu) = \frac{3F_{Ay}}{2bh} \cdot \frac{(1+\mu)}{E}$$

$$F_{Ay} = \frac{2bhE \cdot \varepsilon_{-45^\circ}}{3(1+\mu)}$$

若结果为 F_{Ay} 正，则向上。

二、归纳总结

本章共讲了五个考点，其中考点一、二、五为重要考点，考点三、四也是要掌握的内容，总之，这五个考点一般会综合起来出一道大题占15分，或者作为强度校核里的一部分来考核。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第11讲 组合变形（一）

第八章 组合变形

1、本章框架结构

- 斜弯曲（两向弯曲）
- 拉伸（压缩）与弯曲的组合
- 偏心拉伸(压缩)
- 扭转与其他变形的组合

2、考点概述

1、斜弯曲（两向弯曲）

2、拉伸（压缩）与弯曲的组合

3、偏心拉伸(压缩)

4、扭转与其他变形的组合

3、复习思路及目的

1、理解斜弯曲（两向弯曲的含义。

2、理解拉伸（压缩）与弯曲的组合。

3、了解偏心拉伸(压缩)。

4、会计算扭转与其他变形的组合 有关计算。

【考点一】斜弯曲 ★★★★

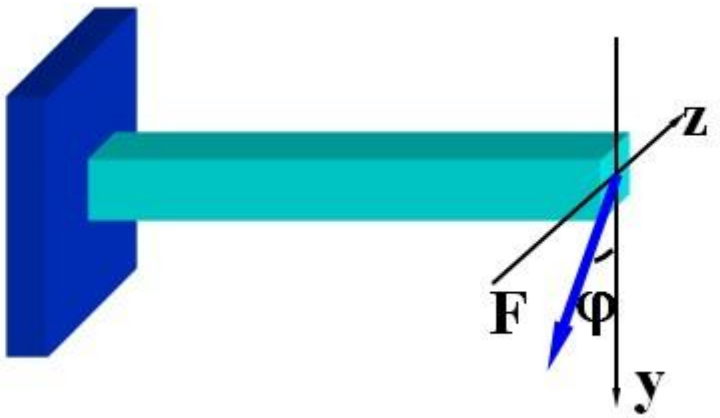
1、组合变形：构件发生拉伸（压缩）,剪切,扭转和弯曲等基本变形的组合。

2、研究方法：在满足胡克定律和小变形条件的情况下，可以相互叠加。

3、斜弯曲的分析

1）外力F过弯心（无扭）但不平行形心主轴（斜弯）；

可分解成两个平面内的平面弯曲的组合。



2）外力分解

$$F_y = F\cos\varphi$$

$$F_z = F\sin\varphi$$

3）内力计算

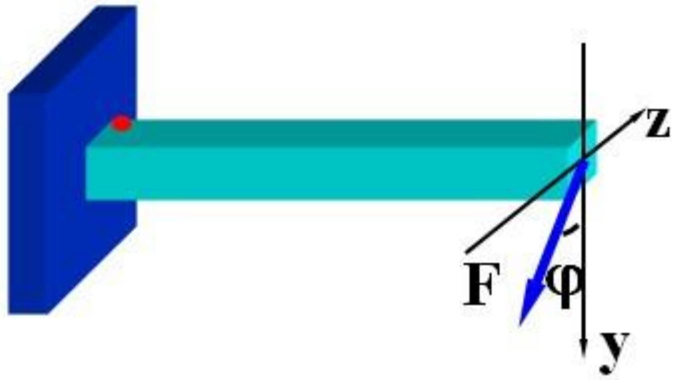
$$M_z = F_y x = Fx\cos\varphi = M\cos\varphi$$

$$M_y = F_z x = Fx\sin\varphi = M\sin\varphi$$

危险截面

$$M_{z\max} = Fl\cos\varphi$$

$$M_{y\max} = Fl\sin\varphi$$



4）应力计算

$$|\sigma'| = \frac{M_z y}{I_z} \qquad |\sigma''| = \frac{M_y z}{I_z}$$

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

$$\sigma = -M\left(\frac{y\cos\varphi}{I_z} + \frac{z\sin\varphi}{I_y}\right)$$

5）强度计算

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{z\max}\,y_{\max}}{I_z}+\frac{M_{y\max}\,z_{\max}}{I_y}$$

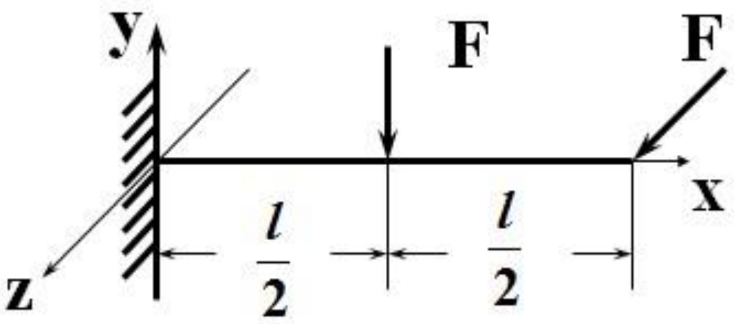
$$=\frac{M_{z\max}}{W_z}+\frac{M_{y\max}}{W_y}$$

因危险点处于单向应力状态，又矩形截面对称

$$\therefore \sigma_{t\max}\le[\sigma_t]\qquad \sigma_{c\max}\le[\sigma_c]$$

注：对有棱角的截面，危险点一定发生在外棱角上

【经典例题】求 σ_{max}



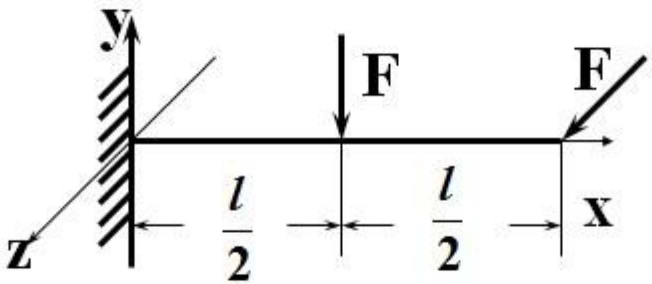
(a)

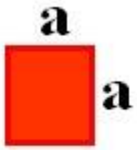
【解题思路】本题考查组合变形

【答案要点】

$$\sigma_{\max}=\frac{M_y}{W_y}+\frac{M_z}{W_z}=\frac{Fl}{\frac{hb^2}{6}}+\frac{\frac{Fl}{2}}{\frac{bh^2}{6}}$$

$$=\frac{6Fl}{bh}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{2h}\right)$$

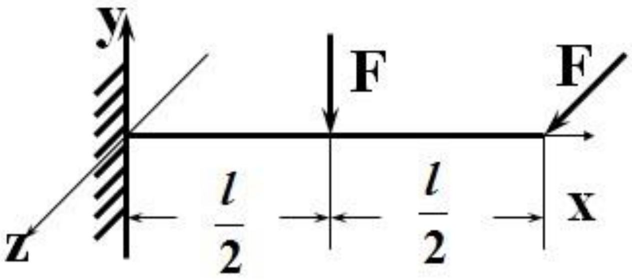


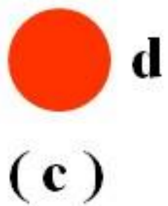


(b)

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{Fl}{\frac{a^3}{6}} + \frac{\frac{Fl}{2}}{\frac{a^3}{6}}$$

$$= \frac{6Fl}{a^3} \times \frac{3}{2} = \frac{9Fl}{a^3}$$





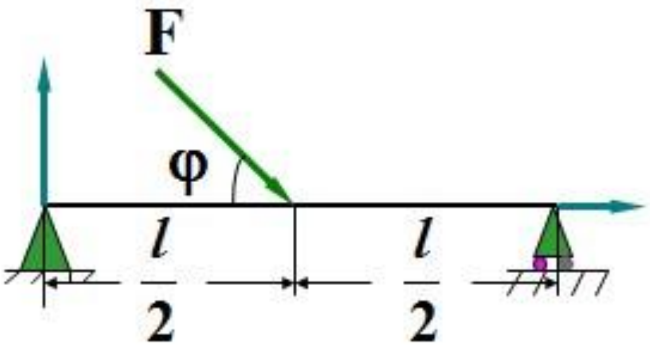
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W}$$

$$= \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{(Fl)^2 + \left(\frac{Fl}{2}\right)^2} = \frac{16\sqrt{5}}{\pi d^3} Fl$$

【考点二】拉伸（压缩）与弯曲的组合偏心拉伸（压缩）★★★★

一、拉伸（压缩）与弯曲的组合

1、F作用在xy平面内但与轴线有一夹角 φ



2、外力分解

$$F \Rightarrow \begin{matrix} F_y \rightarrow \\ F_x \rightarrow \end{matrix}$$

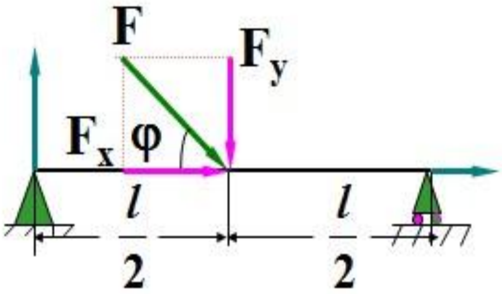
弯曲

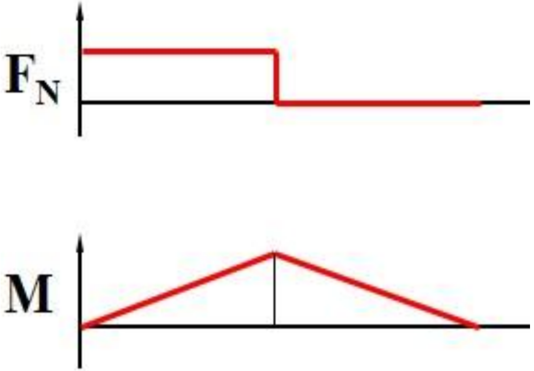
拉伸

3、内力分析

$$F_N = F_x$$

$$M_{\max} = \frac{F_y l}{4}$$





4、应力分析

$$\sigma_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W}$$

5、强度计算

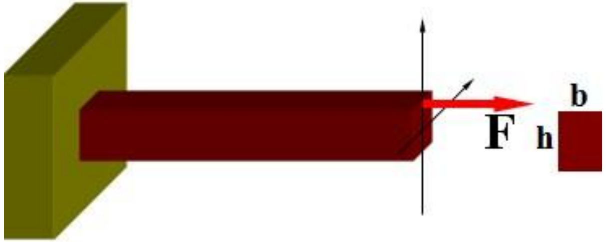
$$\sigma_{t\max} \le [\sigma_t]$$

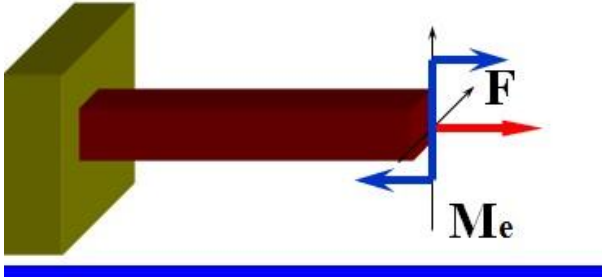
$$\sigma_{c\max} \le [\sigma_c]$$

二、偏心拉伸和压缩

1、平移定理

$$F \Rightarrow \begin{cases} F \\ M_e = F \times \dfrac{h}{2} \end{cases}$$





2、内力分析

$$F \Rightarrow F_N = F$$

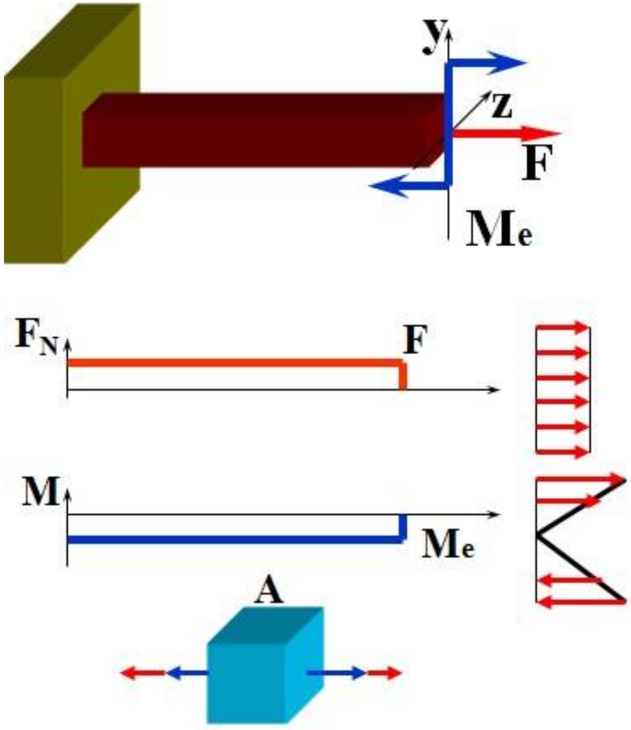
$$M_e \Rightarrow M = M_e$$

3、应力分析

$$F_N \Rightarrow \sigma = \frac{F_N}{A}$$

$$M \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M}{W}$$

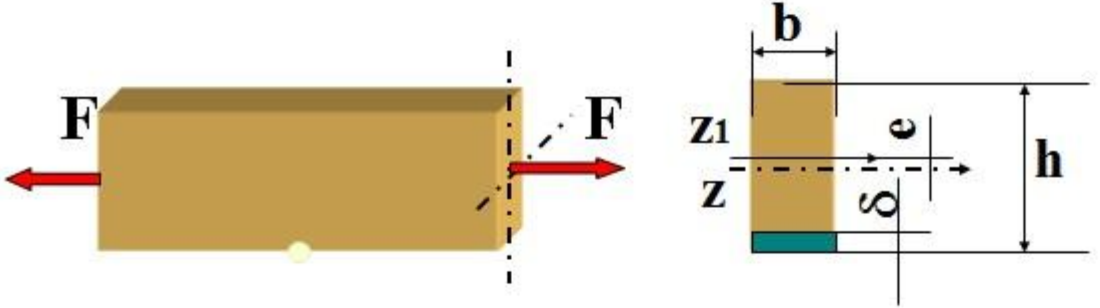


4、强度计算 $\sigma_{\max} = \dfrac{F_N}{A} + \dfrac{M}{W}$

$$\sigma_{t_{\max}} \le [\sigma_t]$$

$$\sigma_{c_{\max}} \le [\sigma_c]$$

【经典例题】已知h=8cm，b=4cm，δ=1 cm，F=320N，[σ]=150MPa，不考虑应力集中的影响，试校核其强度。

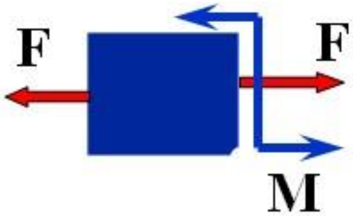


【解题思路】本题考查组合变形梁的强度校核

【答案要点】

1、外力分析：平行移F至轴线，附加弯矩M_{z1}=Fe

$$e=\frac{h}{2}-\frac{h-\delta}{2}=\frac{\delta}{2}$$



2、内力分析 $F_N = F$

$$M_{z1} = Fe$$

3、应力分析 $\sigma = \dfrac{F_N}{A}$

$$M \Rightarrow \sigma = \frac{My}{I_z}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

4、强度计算

$$\sigma_{t\,\max} = \frac{F_N}{A_1} + \frac{M_{z1}}{W_{z1}} = 163 > 150$$

所以强度不够。

5、讨论

不开口 $\sigma = \frac{F_N}{A} = 100 < [\sigma]$

对称开口 $\sigma = \frac{F_N}{A_{\min}} = 133 < [\sigma]$

单位MPa

结论

尽可能不要造成偏心载荷,若要开槽尽量对称开。

二、归纳总结

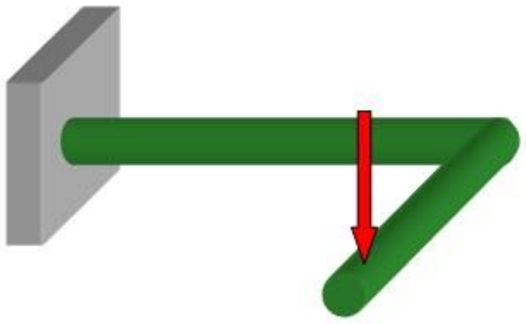
本讲共讲了两个考点，但涉及的内容较多，是常考内容，同学们要加深对每个细节的把握，以便在以后考试中得心应手。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第12讲　组合变形（二）

【考点三】 扭转与其他变形的组合 ★★★

一、1、圆截面（有扭转）有弯曲，不考虑剪切 $F_Q \Rightarrow \tau$。



2、外力分析

分组产生一种基本变形

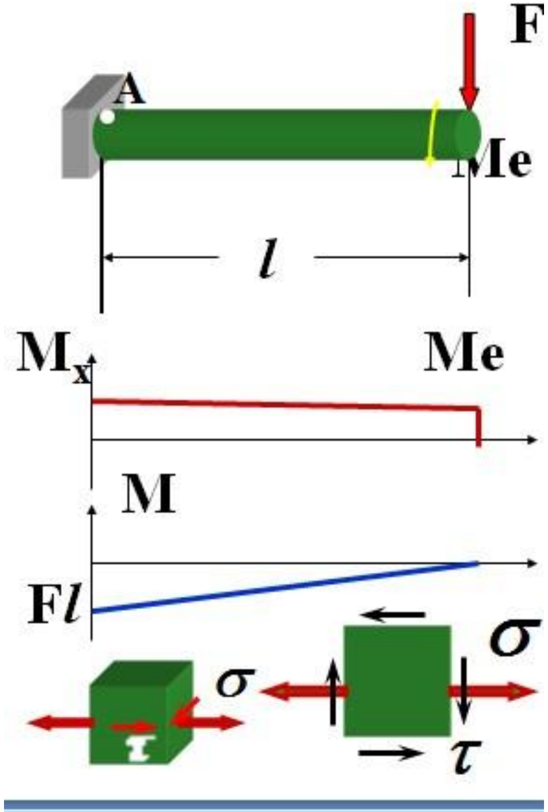
3、内力分析（危险截面）

$$F \Rightarrow M, M_e \Rightarrow M_x$$

4、应力分析（危险点）

$$M \Rightarrow \sigma = \frac{M_{\max}}{W}$$

$$M_x \Rightarrow \tau = \frac{M_x}{W_p}$$



5、强度计算

危险点为二向应力状态

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

对于塑性材料 $\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}$$

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^{2} + M_{x}^{2}}$$

$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W}\sqrt{M_{\max}^{2} + 0.75M_{x}^{2}}$$

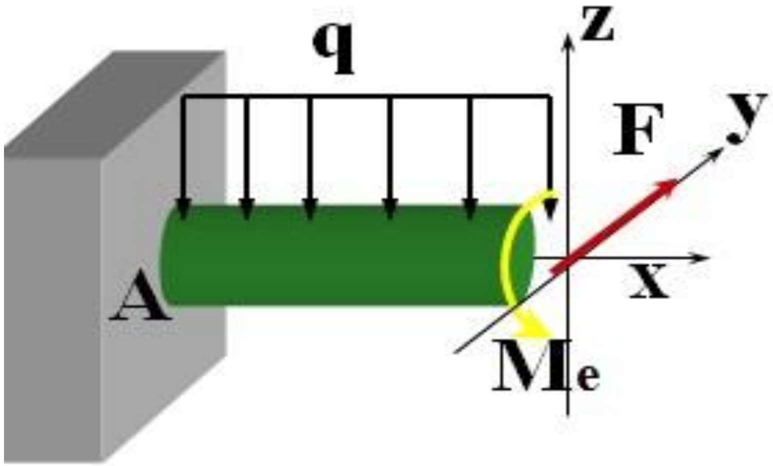
二、圆轴扭转与两个平面弯曲的组合

1、外力分析

F---水平面内 $\Rightarrow M_z$

q---垂直面内 $\Rightarrow M_y$

Me---扭矩 $\Rightarrow M_x$



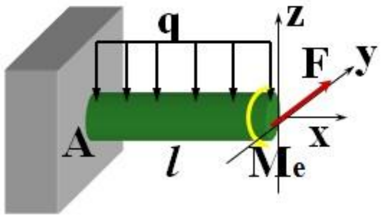
2、内内力分析确定危险截面

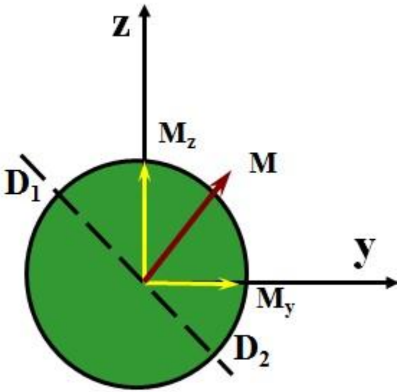
$$M_x = M_e$$

$$M_{y\,\max} = \frac{ql^2}{2}$$

$$M_{z\,\max} = Fl$$

$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

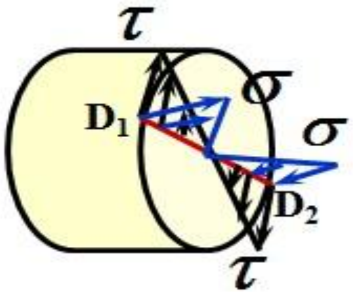


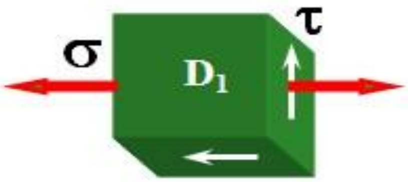


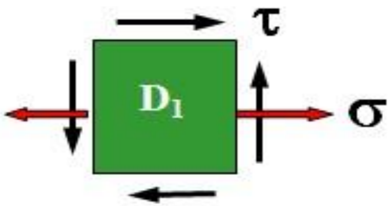
3、应力分析-----确定危险点

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{\sqrt{M_y^2+M_z^2}}{W}$$

$$\tau=\frac{M_x}{W_p}$$







4、强度校核

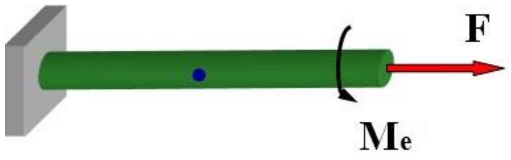
$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

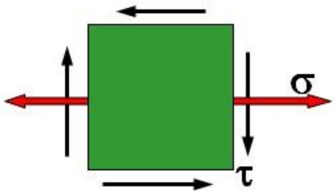
$$= \frac{1}{W}\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + M_x^2}$$

注意： M_y, M_z, M_x 为同一截面的内力。

三、扭转与拉（压）

危险点仍取二向应力状态的特殊情况，与弯,扭相同。





对塑性材料

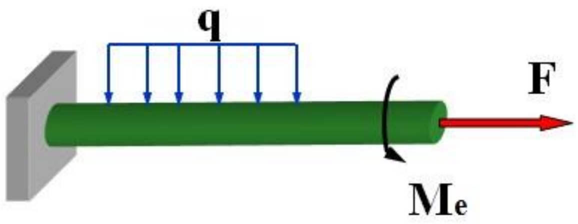
$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$= \sqrt{(\frac{F_N}{A})^2 + 4(\frac{M_x}{W_p})^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

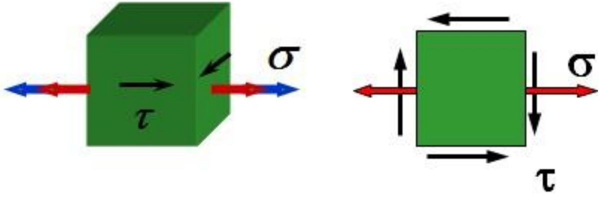
$$= \sqrt{(\frac{F_N}{A})^2 + 3(\frac{M_x}{W_p})^2}$$

四、圆轴扭转与弯曲及拉伸（压缩）



$$\sigma_{r_3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

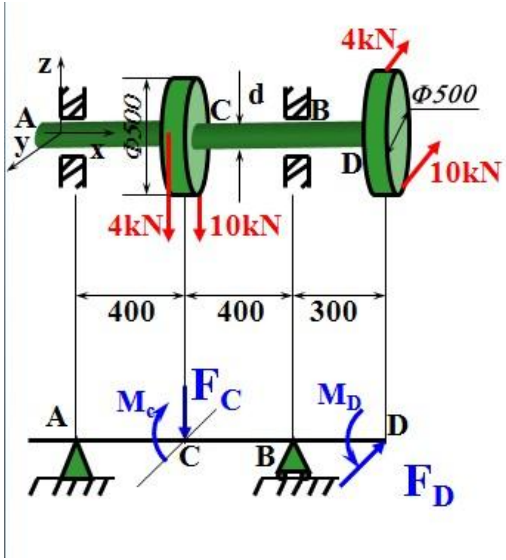
$$=\sqrt{(\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W})^2+4(\frac{M_x}{W_p})^2}$$



$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W})^2+3(\frac{M_x}{W_p})^2}$$

【经典例题】已知[σ]=120MPa，设计轴径d。



【解题思路】本题考查组合梁的强度校核。

【解题思路】

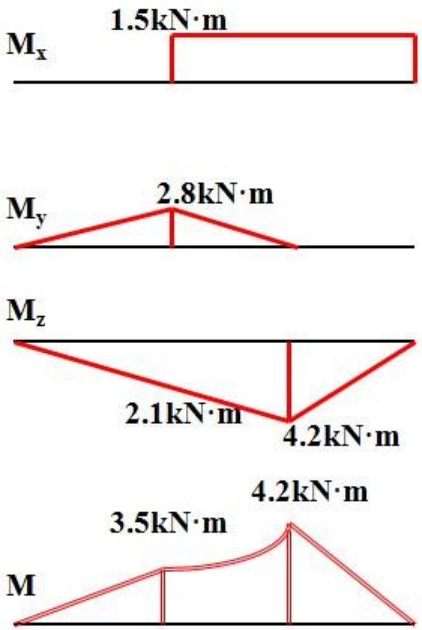
1、外力分析

$$F_C = F_D$$
$$= 14kN$$
$$M_c = M_D$$
$$= 1.5kN \cdot m$$

2、内力分析------确定危险截面作内力图计算弯矩。

$$M = 4.2kN \cdot m$$

$$M_x = 1.5kN \cdot m$$



3、强度计算-------设计D

$$\sigma_{r3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+M_x^2}\le[\sigma]$$

$$W\ge\frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M^2+M_x^2}$$

$$\frac{\pi d^3}{32}\ge\frac{1}{[\sigma]}\sqrt{M^2+M_x^2}$$

$$d\ge\sqrt[3]{\frac{32}{\pi[\sigma]}\sqrt{M^2+M_x^2}}=72.3\times10^{-3}m$$

二、归纳总结

本章共有三个考点。其中考点二、考点三为重要考点，组合变形部分在考试中会单独出一道15分的大题。在其他题目中，也会穿插考核这部分内容，为每年必考部分，考生应该高度重视。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第13讲 能量法（一）

第十章 能量法

1、本章框架结构

- 杆件变形能的计算
- 变形能的普遍表达式
- 互等定理、卡氏定理、虚功原理
- 单位载荷法
- 计算莫尔积分的图乘法

2、考点概述

1、杆件变形能的计算

2、 变形能的普遍表达式

3、互等定理、卡氏定理、虚功原理

4、 单位载荷法

5、 计算莫尔积分的图乘法

➢ 常考知识点精讲

3、复习思路及目的

1、会及时杆件变形能

2、理解 变形能的普遍表达式

3、 理解互等定理、卡氏定理、虚功原理

4、会用 单位载荷法

5、 会用计算莫尔积分的图乘法

【考点一】杆件应变能的计算★★★★

1、能量法

1）能量方法：利用这种功能关系分析计算可变形固体的位移变形和内力的方法称为能量方法。

2）基本条件：1、外力缓慢地由零增加到最终值。

2、在弹性范围内，变形能可逆

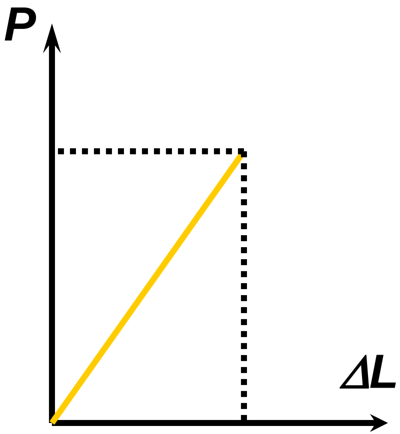
注：超过弹性范围，塑性变形会耗散部分能量，此方法不适用。

2、线弹性条件下，通过外力功求应变能

1）常力作功：$W = P \cdot \Delta L$

2）变力作功：$W = \dfrac{P \cdot \Delta L}{2}$

3、轴向拉伸或压缩



1）杆的应变能

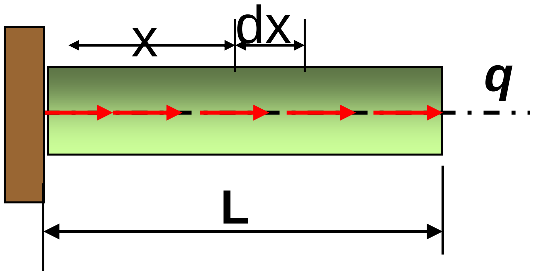
$$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

$$V = W = \frac{P \cdot \Delta L}{2}$$

$$V = \frac{F_N{}^2 L}{2EA}$$

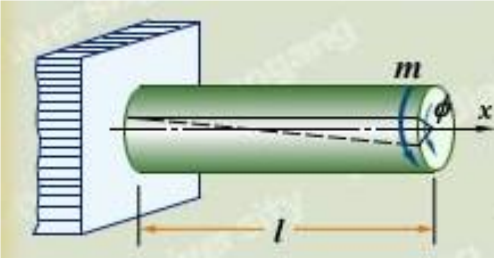
2）由拉压杆件组成的杆系的应变能：$V=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Ni}^{2}L_i}{2E_iA_i}$

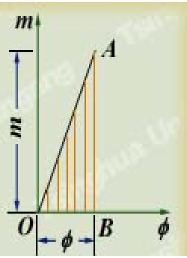
3）受力复杂杆(轴力沿杆的轴线变化)的应变能



$$V=\int_L dV=\int_L\frac{F_N^{2}(x)dx}{2EA}$$

4、圆截面杆的扭转应变能

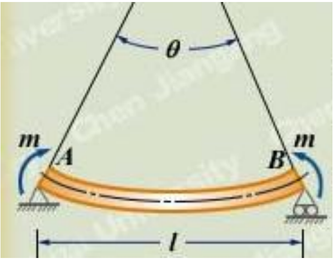


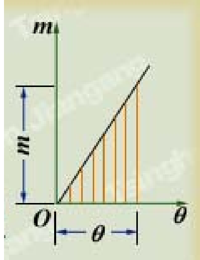


1）圆截面杆的应变能 $\mathrm{V}=W=\frac{1}{2}m\varphi=\frac{T^2L}{2GI_p}$

2）扭矩沿杆的轴线为变量时：$V=\int_L dV=\int_L \frac{T^2(x)dx}{2GI_p}$

5、平面弯曲的应变能





1）纯弯曲梁的应变能：

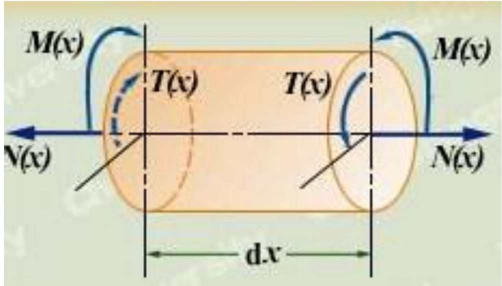
$$V=W=\frac{1}{2}m\theta=\frac{M^2L}{2EI}$$

2）横力弯曲梁(弯矩沿梁的轴线为变量)的应变能：

$$V=\int_L dV=\int_L \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

注意：对于细长梁，剪切变形能远小于其弯曲变形能，通常忽略不计。

6、组合变形时的变形能



$$V=\int_L \frac{F_N^2(x)dx}{2EA}+\int_L \frac{T^2(x)dx}{2GI_p}+\int_L \frac{M^2(x)dx}{2EI}$$

7、应该注意的几点

1）以上计算公式仅适用于线弹性材料在小变形下的变形能的计算。

2）变形能为内力（或外力）的二次函数，故叠加原理在变形能计算中不能使用。

3）变形能是恒为正的标量。

4）变形能与加载次序无关。

【经典例题】直径为d的圆轴受力如图所示，已知F、$Me=Fl$ E、G、

试求：当所有载荷按比例同时加载时，圆轴内的弹性变形能为多少?

【解题思路】

本题考查的是变形能的计算，是扭转与弯曲变形能的组合计算。

【答案要点】

解：$M(x) = -Fx$

$M_{X1} = M_e$

$M_{X2} = 3M_e$

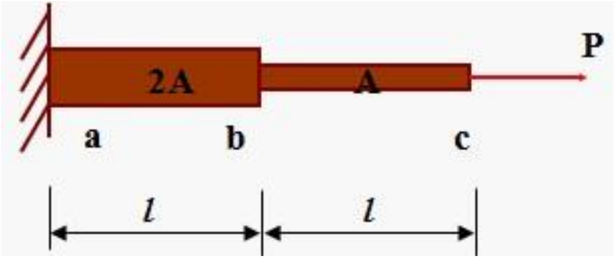
$$U = U_{扭} + U_{弯} = \frac{M_{x1}^2 l}{2GI_P} + \frac{M_{x2}^2 l}{2GI_P} + \int_0^{2l} \frac{M_{(x)}^2}{2EI} dx$$

$$= \frac{5F^2 l^3}{GI_P} + \frac{4Fl^3}{3EI} = \frac{160F^2 l^3}{G\pi d^4} + \frac{256Fl^3}{3E\pi d^4}$$

【考点二】利用功能原理求位移 $U=W=\frac{1}{2}P\Delta l$ ★ ★ ★

【经典例题】图示变截面受拉杆，E、A 为已知

求加力点C的水平位移 Δl_C 。

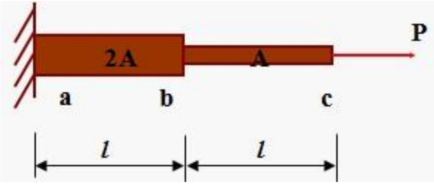


【解题思路】

本题考查利用功能原理求某一点的位移。

【答案要点】

解： （1）变形能计算



$$U_{ab}=\int_0^l \frac{P^2dx}{2E(2A)}=\frac{P^2l}{4EA}$$

$$U_{bc}=\int_l^{2l} \frac{P^2dx}{2EA}=\frac{P^2l}{2EA}$$

$$U_{ab}+U_{bc}=\frac{3P^2l}{4EA}$$

(2）位移计算

$$U = W = \frac{1}{2}P\Delta l$$

$$\frac{1}{2}P\Delta lc = \frac{3P^2 l}{4EA}$$

$$\Delta l_c = \frac{3P\ l}{2EA}$$

【考点三】卡氏定理 ★★★

1、定理的证明（自己看课本）

2、应该注意的几点

① U——整体结构在外载作用下的线弹性变形能。

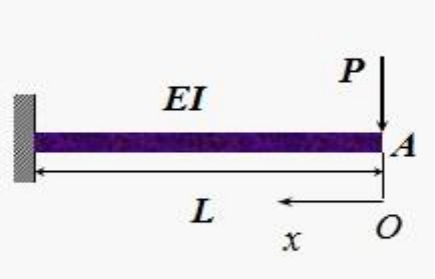
② P_n视为变量，结构反力和变形能 等都必须表示为 P_n的函数。

③ δ_n为 P_n 作用点的沿 P_n 方向的变形。

④ 当无与 δ_n 对应的 P_n 时，先加一沿 δ_n 方向的 P_n，求偏导后， 再令其为零。

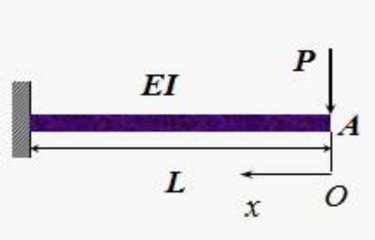
【经典例题】

结构如图，用卡氏定理求A面的挠度。



【解题思路】本题考查利用卡氏定理求挠度。

【答案要点】



解：求挠度，建坐标系

求内力：$M(x) = -xP_A = -xP$

将内力对P_A求偏导：$\dfrac{\partial M(x)}{\partial P_A} = -x$

变形：$$\frac{\partial M(x)}{\partial P_A} = -x$$

$$f_A = \frac{\partial U}{\partial P_A} = \int_L \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial P_A}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^L \frac{Px^2}{EI}\mathrm{d}x = \frac{PL^3}{3EI}$$

二、归纳总结

本讲共讲了三个考点，这三个考点都要做到理解，会用里面的公式，会证明我们学习的卡氏定理，讲课时提到的做题时要注意的点一定要记牢。

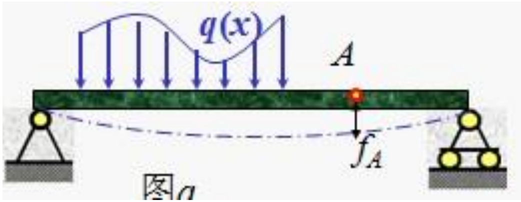
专业课命题规律分析及考点精讲课程

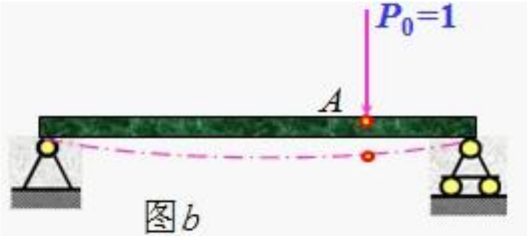
第14讲 能量法（二）

【考点四】莫尔积分（单位力法）★★★★★

1、定理的证明

求任意点A的位移f_A。





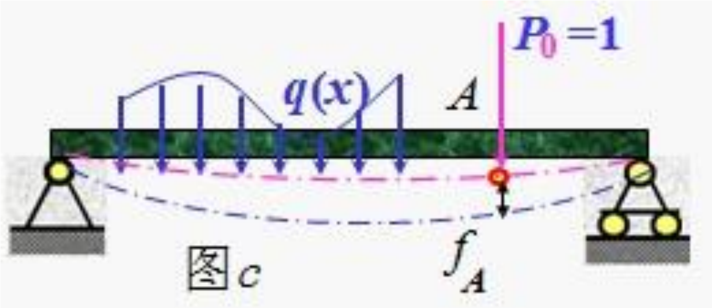
$$U=\int_L \frac{M^2(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$U_0=\int_L \frac{M_0^{\,2}(x)}{2EI}\mathrm{d}x$$

又 $$U_C=\int_L \frac{[M(x)+M_0(x)]^2}{2EI}\mathrm{d}x$$

$$U_C=U+U_0+1\times f_A$$

所以 $$f_A=\int_L \frac{M(x)M_0(x)}{EI}\mathrm{d}x$$



图c

2、普遍形式的莫尔积分

$$\delta=\int_l\frac{F_N(x)F_{N0}(x)dx}{EA}+\int_l\frac{T(x)T_0(x)dx}{GI_p}+\int_l\frac{M(x)M_0(x)dx}{EI}$$

3、应该注意的几点

1）施加单位力时所有的外载卸掉，支座保持不动。

2）外载作用下的内力方程与单位力作用下的内力方程要求正方向与积分区间的严格一致。

3）求位移施加力，求转角施加单位力偶。

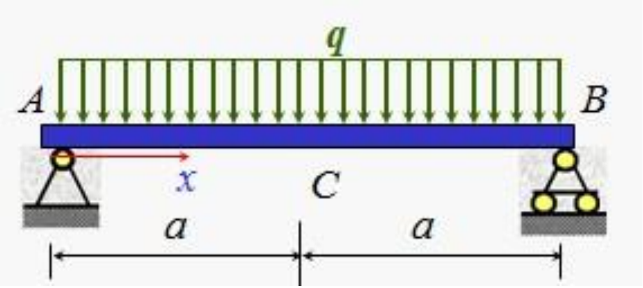
4）结果为正，说明广义位移与单位力同向。

5）外载作用下分段，单位载荷作用下也必须分成相应的段数。

6）若δ为两点间的相对线位移，则单位力是施加在两点上的 方向相反的一对单位力方向与积分区间的严格一致。

7）若δ为两截面间的相对转角，则单位力是施加在两截面上的 方向相反的一对单位力偶。

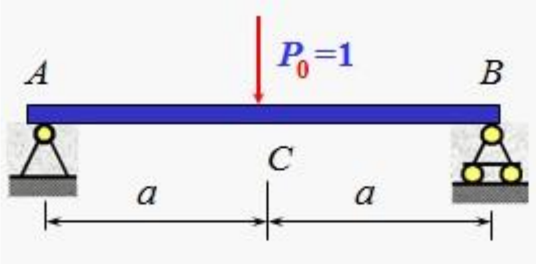
【经典例题】用能量法求C点的挠度和转角。梁为等截面直梁。



【解题思路】本题考查利用莫尔积分求某点的挠度和转角。

【答案要点】

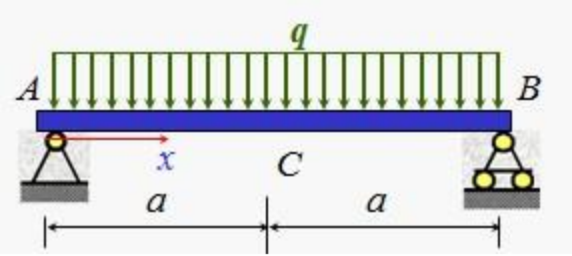
1、画单位载荷图

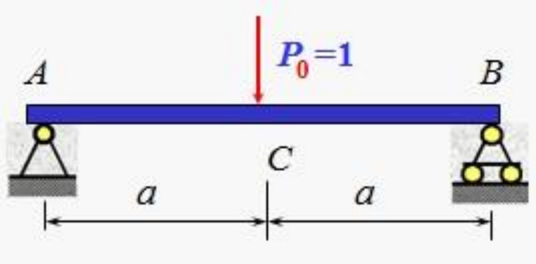


2、求内力

$$M_0(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & ;(0\le x\le a)\\ \dfrac{x}{2}(2a-x) & ;(a\le x\le 2a)\end{cases}$$

3、变形





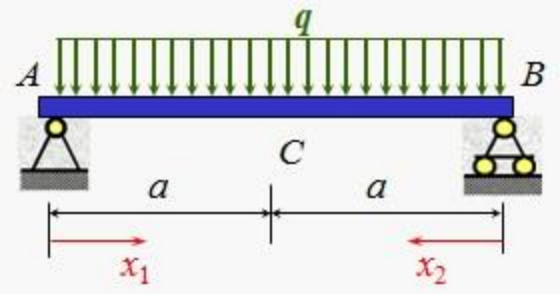
$$f_C=\int_0^a \frac{M(x)M_0(x)}{EI}\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\frac{M(x)M_0(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

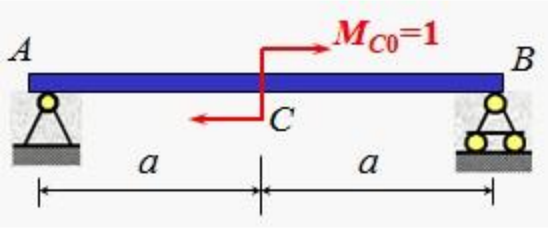
对称性

$$2\int_0^a \frac{M(x)M_0(x)}{EI}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{EI}\int_0^a\left(qax-\frac{qx^2}{2}\right)\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{5qa^4}{24EI}$$

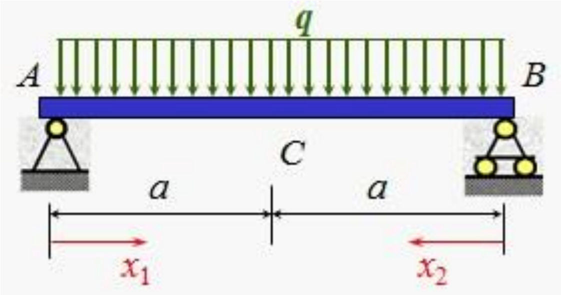
4、求转角重建坐标系如图所示

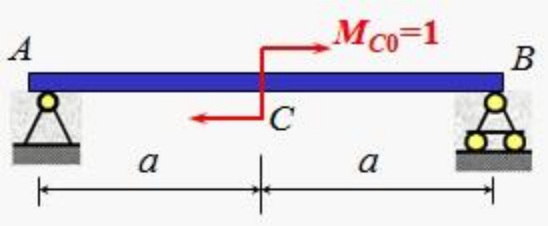




$$AC: \quad M(x) = qax_1 - \frac{qx_1^2}{2}$$

$$M_0(x) = -\frac{x_1}{2a}$$





$$AC: \quad M(x) = qax_1 - \frac{qx_1^2}{2} \qquad M_0(x) = \frac{x_2}{2a}$$

$$BC: \quad M(x) = qax_2 - \frac{qx_2^2}{2} \qquad M_0(x) = -\frac{x_1}{2a}$$

$$\theta_C = \int_{0(AB)}^{a} \frac{M(x)M_{0(x)}}{EI}dx + \int_{0(BC)}^{a} \frac{M(x)M_{0(x)}}{EI}dx$$

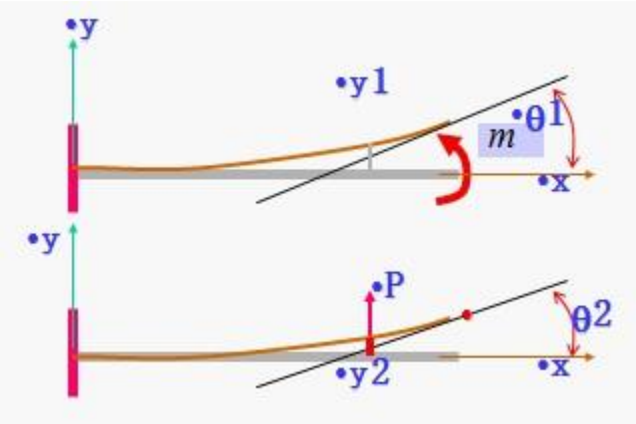
$$= -\frac{1}{EI}\int_0^a (qax_1 - \frac{qx_1^2}{2})\frac{x_1}{2a}dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a (qax_2 - \frac{qx_2^2}{2})\frac{x_2}{2a}dx_2$$

$$= 0$$

【考点五】互等定理 ★★★★

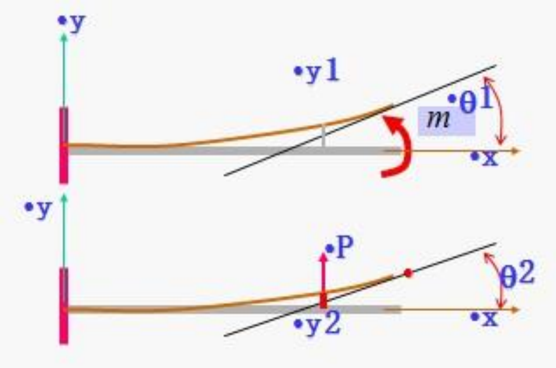
1、功的互等定理

第一组力在第二组力引起的位移上做的功，等于第二组力在第一组力引起的位移上所做的功。$m\theta_2 = Py_1$



2、位移互等定理

P_1作用点沿P_1方向因作用P_3而引起的位移等于P_3作用点沿P_3方向因作用P_1而引起的位移。



$$m\theta_2 = Py_1$$

当$m = P = 1$时

形式上不要把量纲混淆

$$\theta_2 = y_1$$

【考点六】计算莫尔积分的图乘法 ★★★★★

1、对于圆截面杆的组合变形，图乘法的一般表达式为

$$\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i\overline{F}_{Nci}}{EA_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i\overline{M}_{ci}}{EI_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i\overline{M}_{xci}}{GI_{Pi}}$$

2、必须指出：只有相同种类的内力图在相应段内才能互乘，对于两向弯曲梁来说，只有同一平面内的 $M(x)$ 图和 $\overline{M}(x)$ 图才能互乘。

3、几点说明

二、归纳总结

本章共讲了六个考点，这六个考点都在考试中不止一次的出现，其中考点四和考点六最为重要，这一章的内容在考试中占有很大比重，图乘法一定要学会，这个方法可以简化计算，希望同学们多多练习，掌握做题技巧。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第15讲　超静定结构（一）

第十一章 超静定结构

1、本章知识点框架

- 力法解超静定的步骤
- 变形比较法
- 力法正则方程
- 对称性在分析超静定问题中的应用

2、考点概述

1、理解 力法解超静定的步骤。

2、会用变形比较法。

3、理解力法正则方程。

4、了解 对称性在分析超静定问题中的应用。

3、复习思路及目的

1、理解 力法解超静定的步骤。

2、会用变形比较法。

3、理解力法正则方程。

4、了解 对称性在分析超静定问题中的应用。

【考点一】力法解超静定 ★★★★

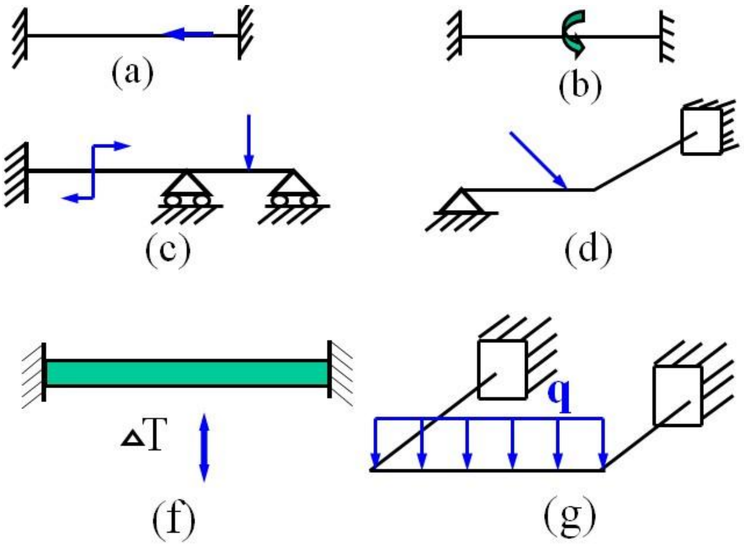
1、静不定结构的类型

1）杆构件的变形形式分可分为：拉压、扭转、弯曲及三者的组合。

2）按未知力的性质分可分为：内力、外力、混合力。

➢ 常考知识点精讲

3）各种形式的静不定结构



4）求解方法:力法、几何法、混合法。

2、力法解静不定的步骤

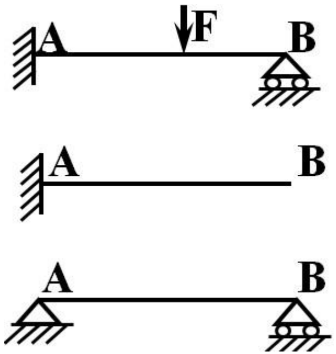
1）判断静不定次数

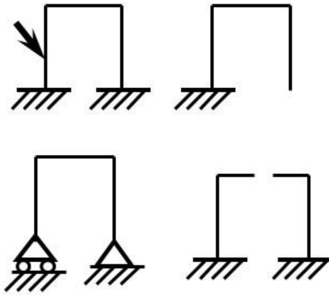
静不定次数 $\begin{cases} \text{全部未知力个数} \\ \text{“多余”约束的个数} \\ \text{有效静力平衡方程个数} \end{cases}$

判断方法　方法一：数未知力、方程个数

方法二：去“多余”约束到静定

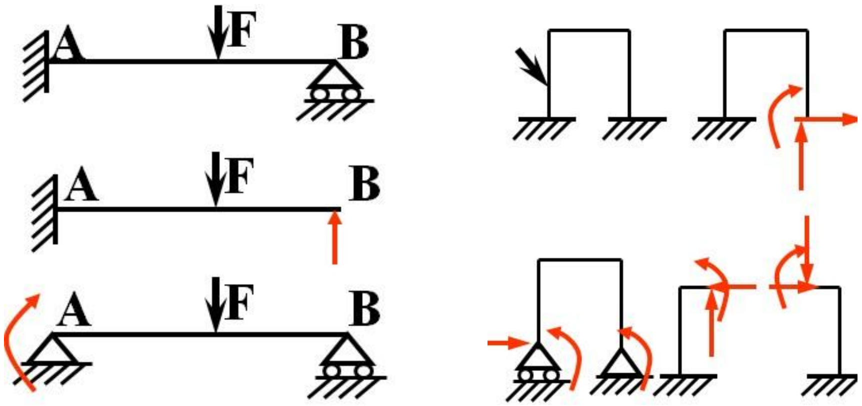
2）去掉“多余”约束，选择合适的静定基。





结论：静定基是不唯一的，选择的时候，一定要怎么容易计算未知力怎么选择。

3）以”多余约束力”代替“多余”约束.



4） 建立多余约束处的变形协调条件

建立几何方程(变形~位移)

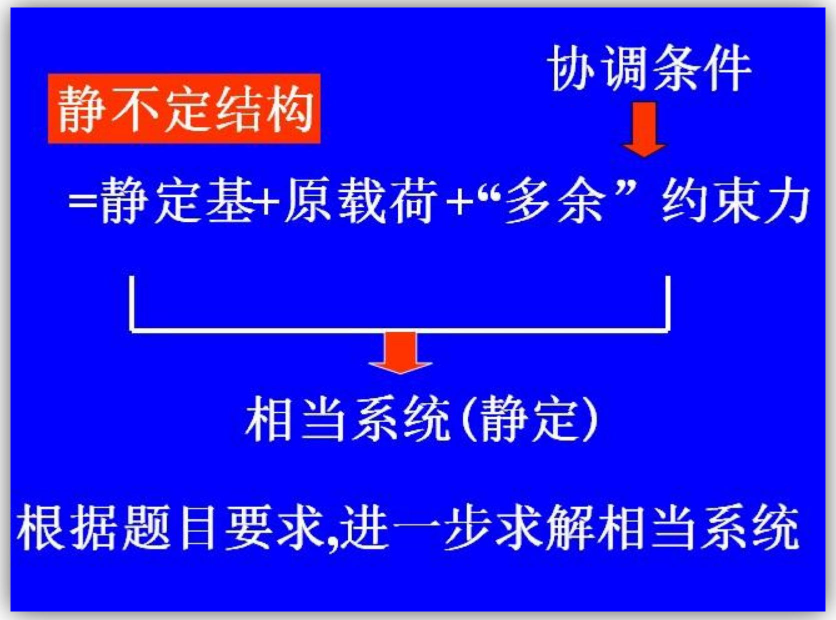
5）考虑物理关系建立补充方程

（利用能量法计算各系数——位移）

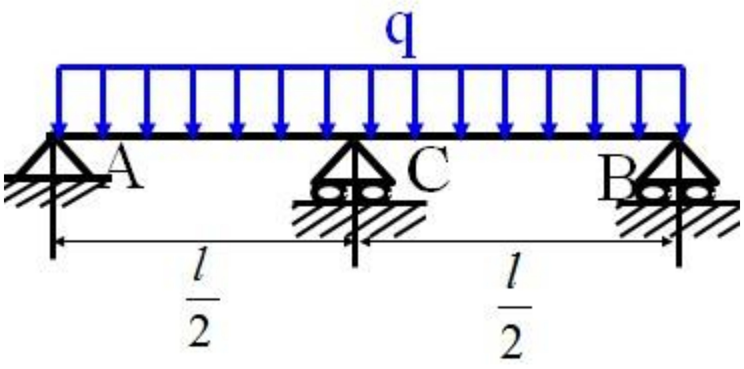
联立求解多余约束力

6）进一步求解相当系统

常考知识点精讲



【经典例题】某建筑物中的双跨梁。已知q、l、EI为常数，求支反力。

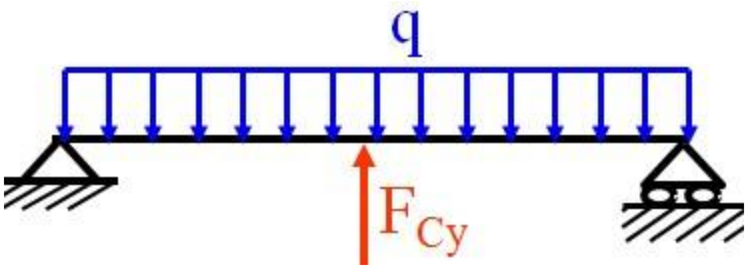


【解题思路】考查静不定结构

【答案要点】

1、显然结构为一次静不定

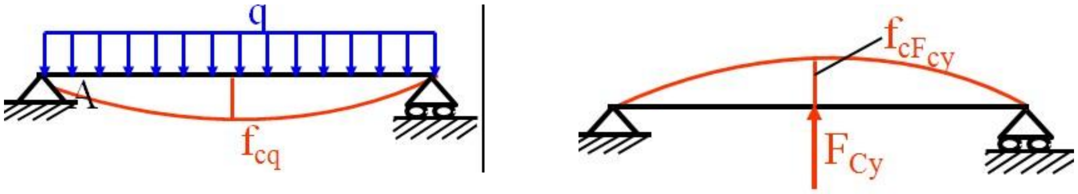
2、加多余约束力 F_{Cy}



3、建立变形协调方程 $fc = 0$

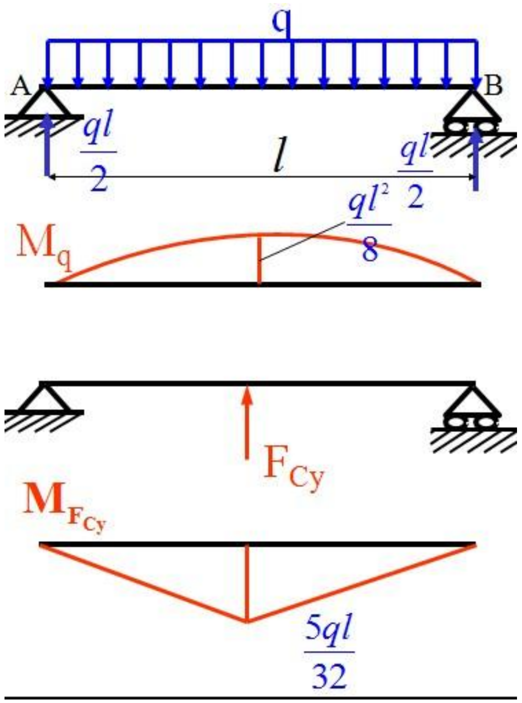
4、变形比较法 $f_{cq} + f_{cF_{cy}} = 0$

$$\left| f_{cq} \right| = \left| f_{cF_{cy}} \right|$$



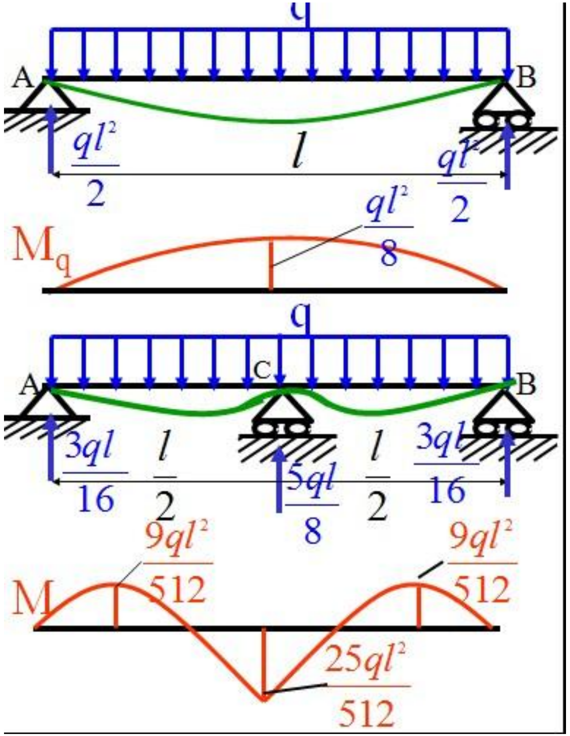
$$\frac{5ql^4}{384EI}=\frac{F_{cy}l^3}{48EI}$$

$$F_{Cy}=\frac{5ql}{8}\quad(\uparrow)$$



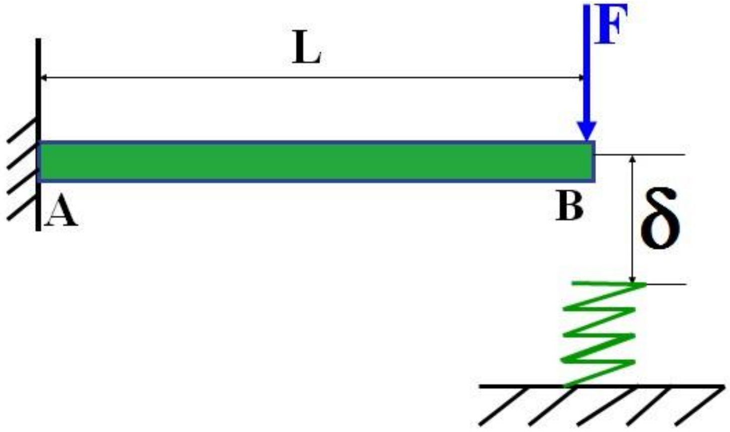
5、讨论

刚度和强度都有所增加



【经典例题】已知 L、EI、K（弹簧刚度）、F。 $\delta=1.25mm$

求弹簧受力。



【解题思路】 本题考查超静定问题

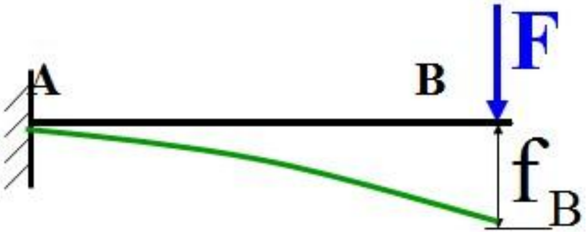
【答案要点】

1、有弹簧，结构为一次静不定。

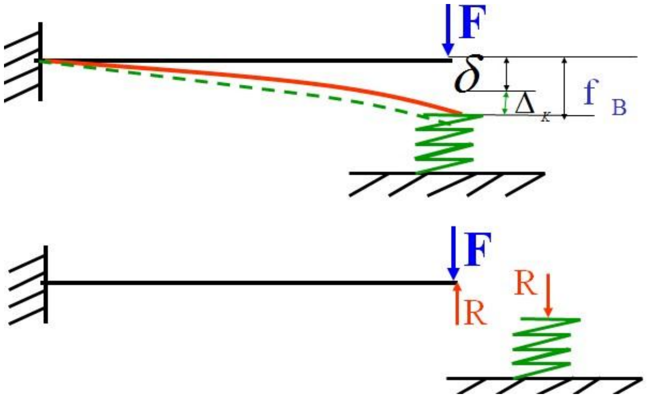
2、在没有弹簧的时

$$f_B = \frac{Fl^3}{3EI} = \frac{450 \times 0.75^3}{3 \times 30 \times 10^3}$$

$$= 2mm > \delta$$



3、当作用弹簧时分析B处的变形

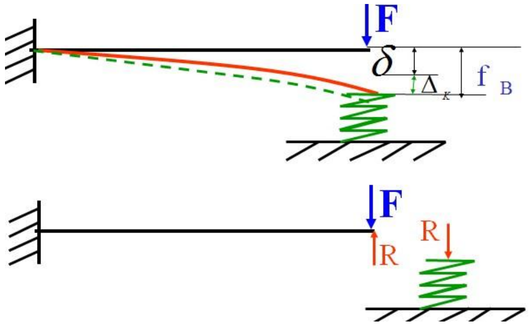


变形协调条件： $f_B = \delta + \Delta_K$

4、补充方程

$$f_B = \frac{(F-R)l^3}{3EI} \qquad \Delta_K = \frac{R}{K}$$

$$\therefore R = \frac{Fl^3 - 3EI\delta}{\frac{3EI}{K} + l^3} = 82.6N$$



二、归纳总结

本讲共讲了一个大的考点，讲解了做静不定问题的具体步骤，这讲内容非常重要，是考试的必考内容，希望同学们多做练习，提高做题速度和准确性。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第16讲 超静定结构（二）

【考点二】力法正则方程 ★★★

1、方法步骤

1）建立规范化的补充方程

—— 变形几何方程

2）设“多余”未知力为 Xi 。

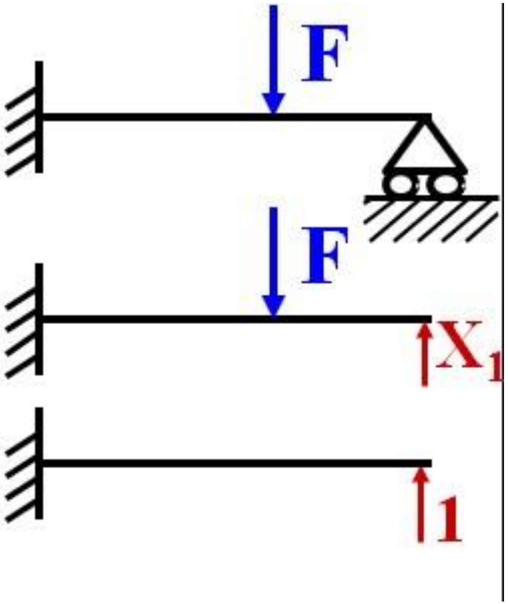
3）n次静不定建立n个补充方程

2、一次超静定

$$\Delta_1 = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1F} = 0$$

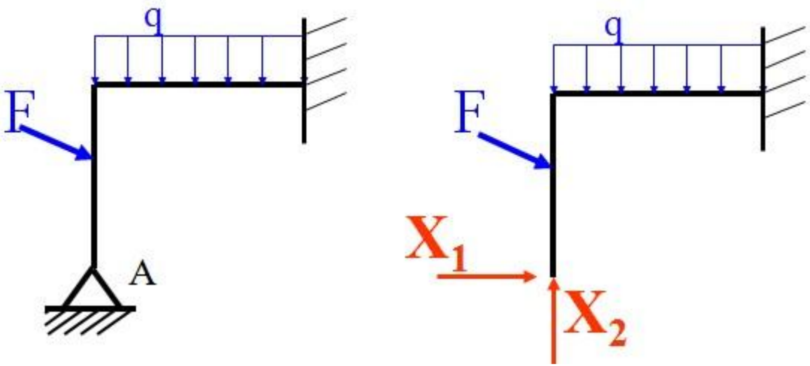
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}}$$



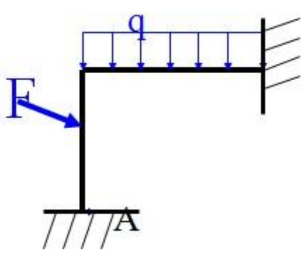
3、二次静不定方程

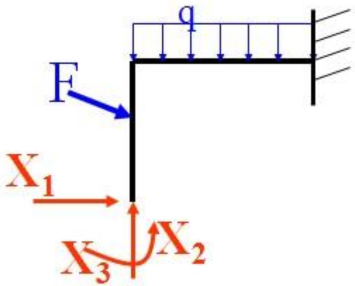
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{1F}=0 \\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{2F}=0 \end{cases}$$



4、三次超静定

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \Delta_{3F} \end{Bmatrix} = 0$$





【经典例题】EI=c 作M图

【解题思路】用力法正则方程解题

【答案要点】

1、为一次超静定

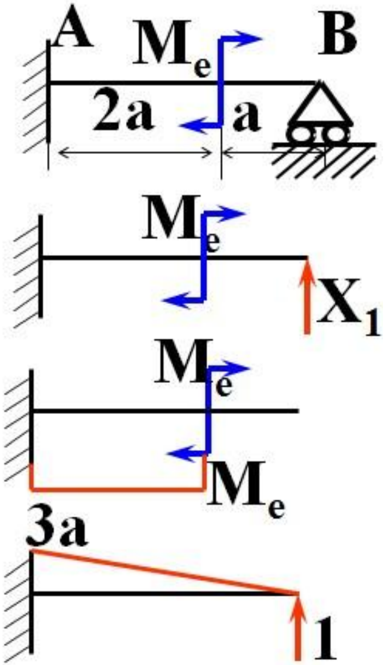
2、去掉B支座，以x_1代之

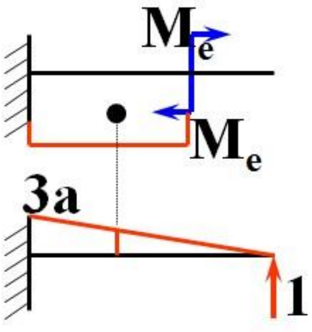
3、列正则方程

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$$

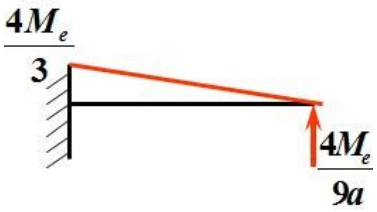
$$\delta_{11}=\frac{\omega\overline{M_c}}{EI}=\frac{1}{EI}\frac{1}{2}3a3a\frac{2}{3}3a$$

$$=\frac{9a^3}{EI}$$



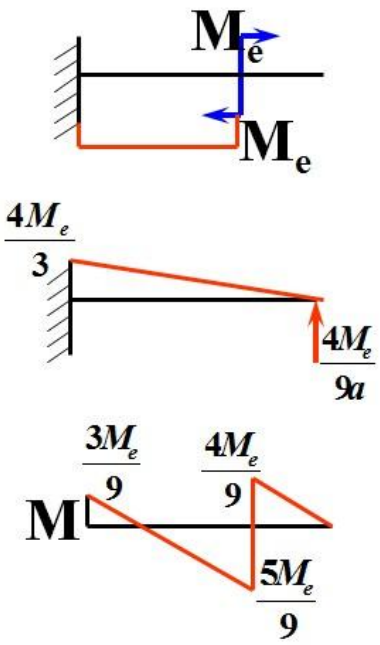


$$\Delta_{1F}=\frac{\omega \overline{Mc}}{EI}=\frac{-1}{EI}2aM_e\cdot 2a=\frac{-4M_e a^2}{EI}$$

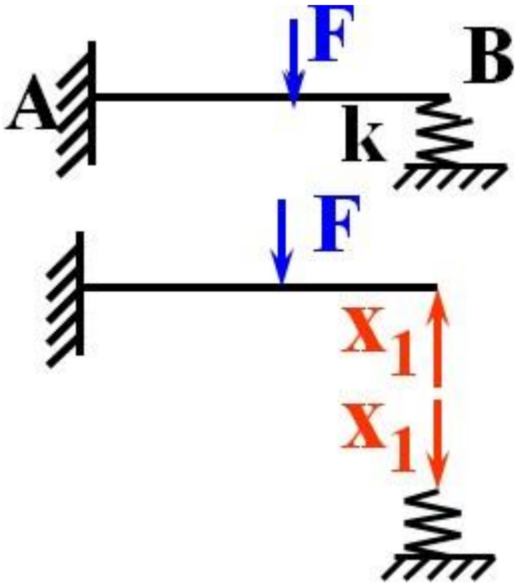


所以解得 $X_1=\frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}}=\frac{4M_e}{9a}$

4、做弯矩图



【经典例题】求B处的力

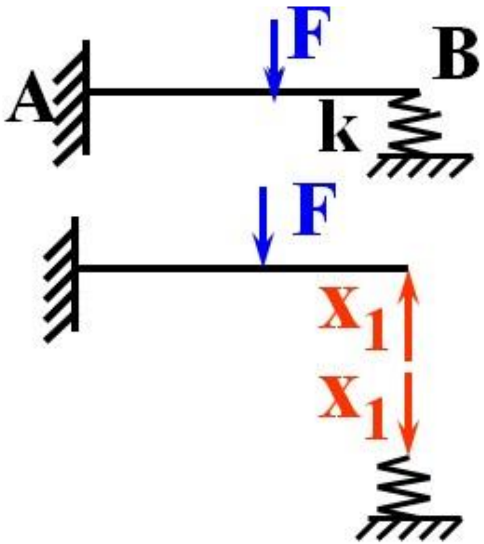


【解题思路】考查带有弹簧支座的静不定结构的解法

【答案要点】

方法一：拆开弹性支撑,将梁和弹性支撑作为一个系统，拆开处的相对位移为0.即

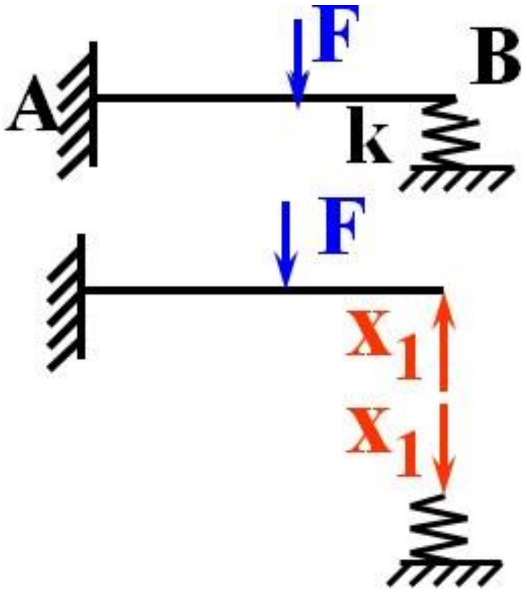
$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=0$$



方法二：拆去弹性支撑，以梁为静定基， 列写梁上拆去弹性支撑处的绝对位移。

即

$$\delta_{11}X_1+\Delta_{1F}=-\Delta_K$$



【题后总结】

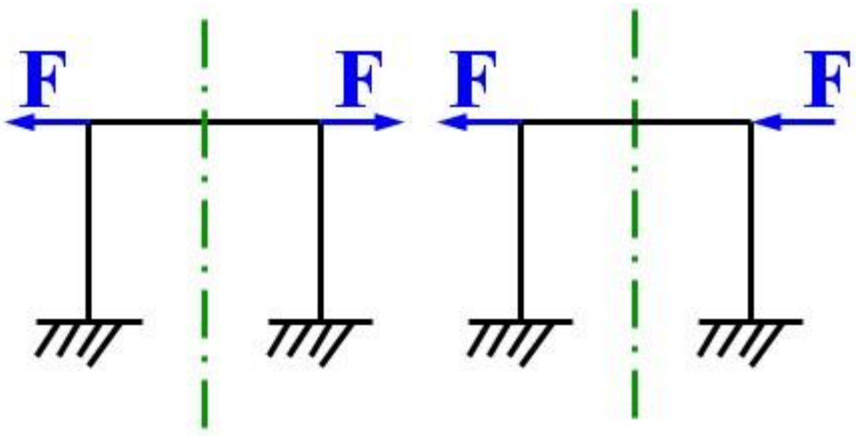
1、以相对位移计算时，加单位力，要加一对单位力；

2、以绝对位移计算时,弹簧的变形为负值,因其变形方向与梁 上x_1方向相反；

3、两种方法中δ_{11}的含义不同。

【考点三】对称性在分析静不定问题中的应用 ★★★

1、对称结构：受对称载荷或者受反对称载荷。



2、对称内力素即反对称内力素

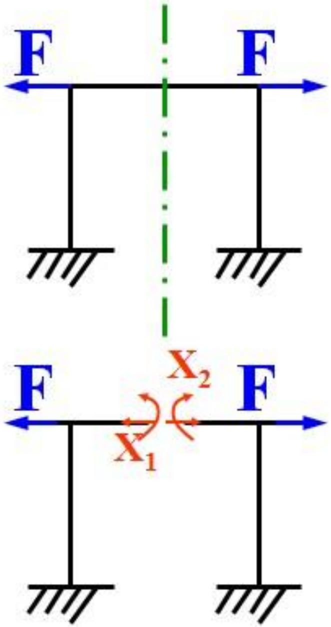
对称内力素 $F_N, M_y, M_z.$

反对称内力素 F_{Qy}, F_{Qz}, M_x

3、对称结构变形的对称性及反对称性

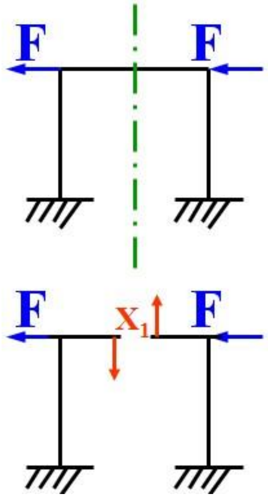
1）对称结构，对称内力素（变形对称内力素）

对称面上反对称内力素为零



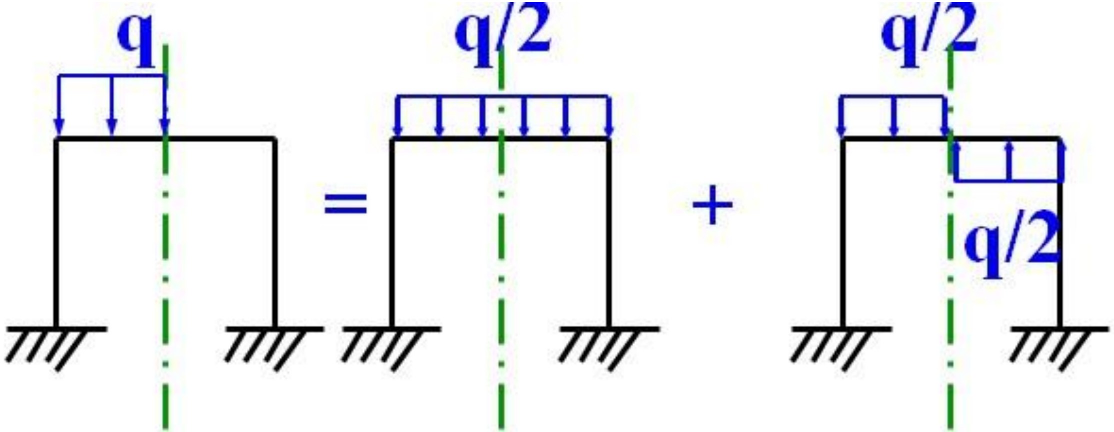
2）对称结构，反对称内力素（变形反对称内力素）

对称面上对称内力素为零



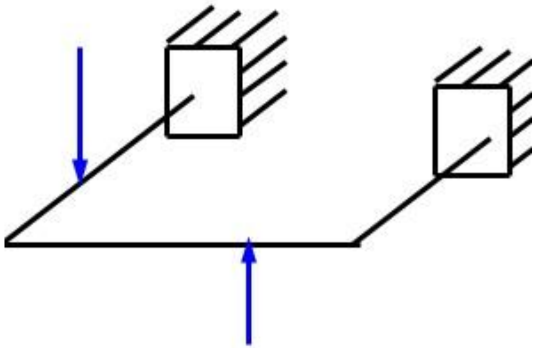
3、说明

1）对称结构,无论何种载荷,取对称的静定基，能简化运算。



2）结构位于同一平面内；载荷与结构垂直；线弹性、小变形

——结构平面内的内力素为零。



二、归纳总结

本章共讲了三个考点，其中考点一为重要考点，讲解了解静不定问题的具体步骤，考点二在有些情况下用起来比较方便，考点三在解对称问题时，常常可以简化计算。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第17讲　动载荷

第十二章 动载荷

1、本章知识点框架

- 构件有加速度时的动应力计算
- 构件受冲击时的动应力计算
- 冲击韧度

2、考点概述

1、构件有加速度时的动应力计算。

2、构件受冲击时的动应力计算。

3、冲击韧度。

3、复习思路及目的

1、会计算构件有加速度时的动应力

2、会对构件受冲击时的动应力计算

3、了解冲击韧度

【考点一】构件受冲击时的动应力计算 ★★★★

1、动载荷的概念：指随时间而作急剧变化的载荷，或者加载时由加速度所产生很大的 惯性力，或者其他明显地随时间变化的载荷。

2、动应力 σ_d ，动位移 Δ_d

3、构件受冲击时的动应力计算

1）用能量法求解冲击问题的基本方程。

在冲击过程中，冲击系数在冲击前和冲击后的能量应相等。

在冲击过程中，冲击物所减少的动能T和势能V应等于被冲击物所增加的弹性变形能 U_d,即：$T+V=U_d$

材料仍服从胡克定律则 $U_d=W=\frac{1}{2}F_d\Delta_d$

$$\frac{F_d}{G}=\frac{\sigma_d}{\sigma_{st}}=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=K_d$$

Kd称为动载系数

2）冲击问题就是求解各种形式的动载荷系数K_d。

4、几种典型冲击时的动荷系数。

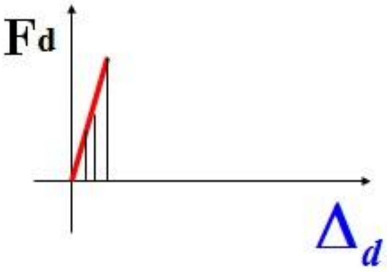
1）自由落体冲击

T=0，　$\Delta V=(h+\Delta_d)G$

$$\Delta U_d=\frac{1}{2}F_d\Delta_d$$

$$T+V=U_d$$

$$(h+\Delta_d)G=\frac{1}{2}F_d\Delta_d$$



$$G(h+\Delta d)=\frac{1}{2}F_d\Delta d \qquad F_d=\frac{\Delta d}{\Delta st}G$$

$$G(h+\Delta d)=\frac{1}{2}\frac{\Delta^2 d}{\Delta st}G$$

$$\Delta d^2+2\Delta_{st}\Delta_d-2\Delta_{st}h=0$$

$$\Delta_d=\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta st}}\right)\Delta st$$

$$Kd=\frac{\Delta_d}{\Delta_{st}}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta st}}$$

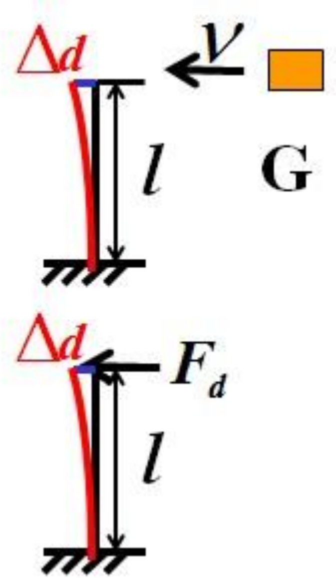
2）水平冲击

能量守恒： $\frac{G}{2g}\upsilon^2 = \frac{1}{2}F_d\Delta_d$

又 $Fd = \frac{\Delta d}{\Delta st}G$

则解得 $\frac{\upsilon^2}{g} = \frac{\Delta_d^2}{\Delta st}$

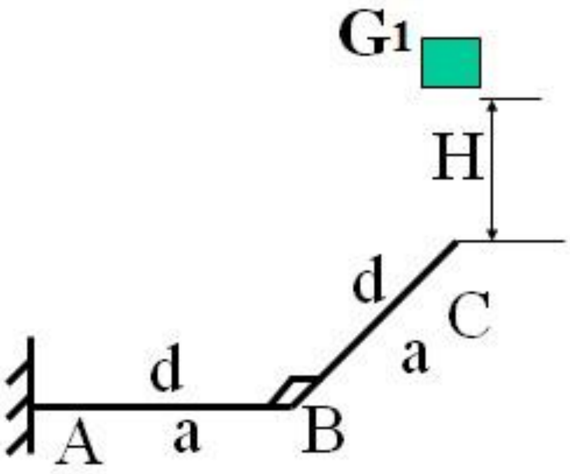
$$\Delta d = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{g\Delta st}}\cdot\Delta st, Kd = \frac{\Delta d}{\Delta st} = \sqrt{\frac{\upsilon^2}{g\Delta st}}$$



3）具有水平初速度的约束落体的冲击。

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 + 2gh}{g\Delta_{st}}}$$

【经典例题】已知 G_1, H, d, E, G, a. 求Kd.

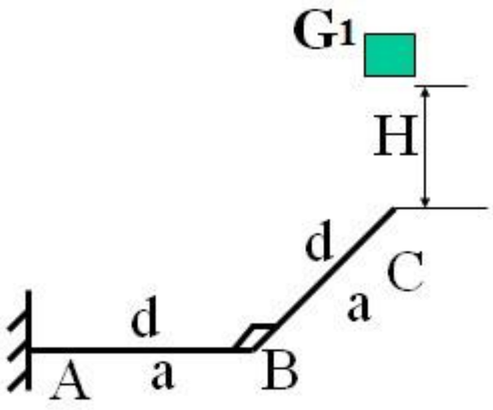


【解题思路】本题考查冲击问题，自由落体，求动载荷系数。

【答案要点】

1、动荷系数表达式

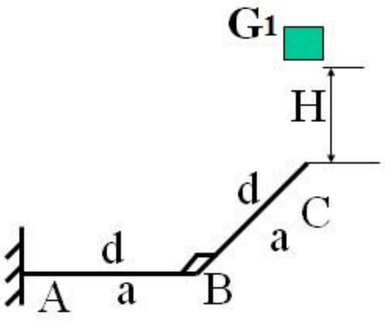
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

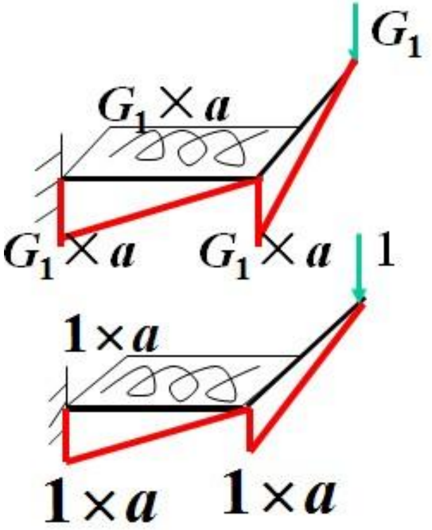


2、静位移

$$\Delta_{st}=\frac{\omega\overline{M}_c}{EI}+\frac{\omega\overline{M}_{xc}}{GI_p}$$

$$=\frac{2}{EI}\frac{1}{2}aG_1a\frac{2}{3}a+\frac{1}{GI_P}G_1a^3$$





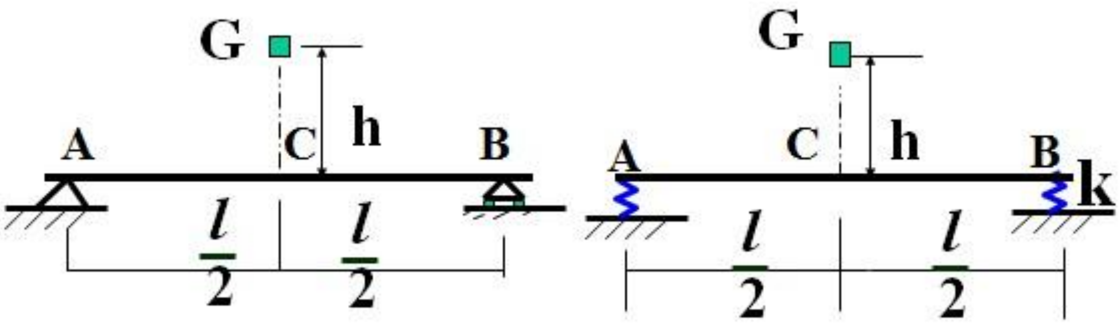
$$\Delta_{st}=\frac{2G_1a^3}{3EI}+\frac{G_1a^3}{GI_P}$$

$$=G_1a^3\left(\frac{2\times 64}{3E\pi d^4}+\frac{32}{G\pi d^4}\right)$$

$$=\frac{32G_1a^3}{\pi d^4}\left(\frac{4}{3E}+\frac{1}{G}\right)$$

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2H\pi d^4}{32G_1a^3\left(\frac{4}{3E}+\frac{1}{G}\right)}}$$

【经典例题】已知 $l,h,G,I,W.E,K.$ 讨论两种支座下二梁横截面下的最大正应力。



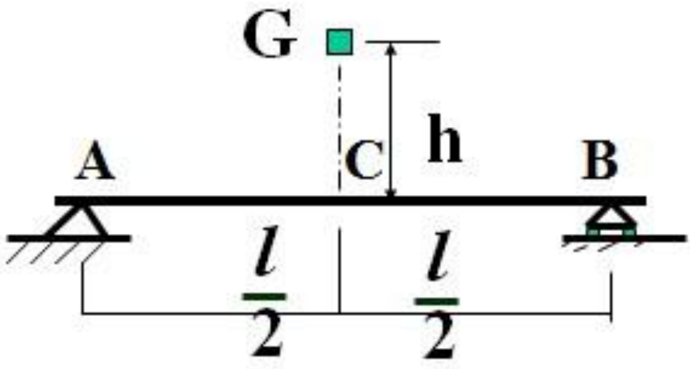
【解题思路】考查动载荷下，梁横截面上的最大正应力。

【答案要点】

1、 $\sigma_{d,\max} = Kd \cdot \Delta st$

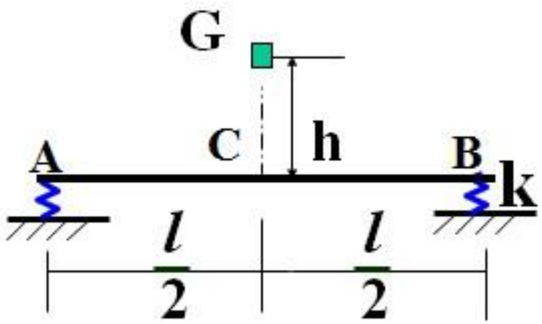
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$$

2、第一种情况 $\Delta_{st} = \dfrac{Gl^3}{48EI}$



第二种情况的静变形

$$\Delta_{st} = \frac{Gl^3}{48EI} + \frac{G}{2K}$$



对弹簧支座

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 0.05}{5082 \times 10^{-6}}} = 5.55$$

$$\sigma_d = K_d \frac{Gl}{4W} = 5.55 \times 2.43 = 13.5MPa$$

对刚性支座 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}} = 38.4$

$$\sigma_d = K_d \frac{Gl}{4W} = 34.8 \times \frac{1000 \times 3}{4 \times 309 \times 10^{6}} = 84.5Mpa$$

结论：弹性支座可改善冲击情况，减小 σ_d 。

【考点二】提高构件抗冲击能力的措施及冲击韧度 ★★★

一、提高构件抗冲击能力的措施

1、尽可能增加构件的静变形

2、增加被冲击件的体积

3、尽量避免采用变截面杆

二、冲击韧度

用来衡量材料抗冲击能力的指标，称为冲击韧度。

➢ 归纳总结

本章共讲了两个考点，其中考点一为重点考点。考点二为了解考点。这部分的内容相对较简单，是容易得分的知识点。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第18讲 交变应力

第十三章 交变应力

1、本章结构框架

- 材料（构件）的持久极限
- 对称循环下构件的疲劳强度计算
- 持久极限曲线及其简化
- 非对称循环下构件的疲劳强度计算
- 提高构件疲劳强度的主要措施

2、考点概述

1、材料（构件）的持久极限

2、对称循环下构件的疲劳强度计算

3、持久极限曲线及其简化

4、非对称循环下构件的疲劳强度计算

5、提高构件疲劳强度的主要措施

3、复习思路及目的

1、理解材料（构件）的持久极限的含义。

2、掌握对称循环下构件的疲劳强度计算。

3、会画持久极限曲线及其简化。

4、非对称循环下构件的疲劳强度计算。

5、了解提高构件疲劳强度的主要措施。

【考点一】交变应力的概念及其参数 ★★★★

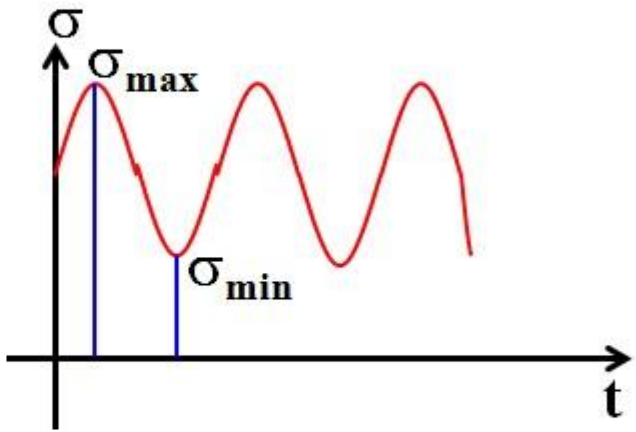
1、概念：这种随时间做周期性交替变化的应力，称为交变应力。

2、疲劳破坏及其特点：在交变应力作用下，工作应力远低于材料的强度极限时发生突然断裂，在断裂前和脆性材料一样，无明显的塑性变形，这种破坏现象称为疲劳破坏。

3、交变应力的有关参数

1）循环特征r

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$



当r = -1时——对称循环

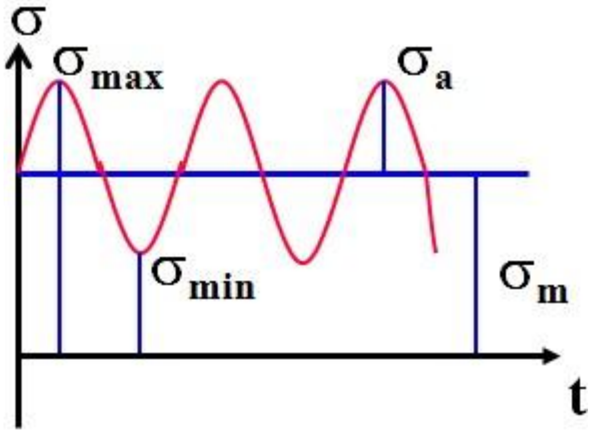
其他情况为非对称循环。

2）平均应力

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min})$$

3）应力副 $= \frac{1}{2}(1+r)\sigma_{\max}$

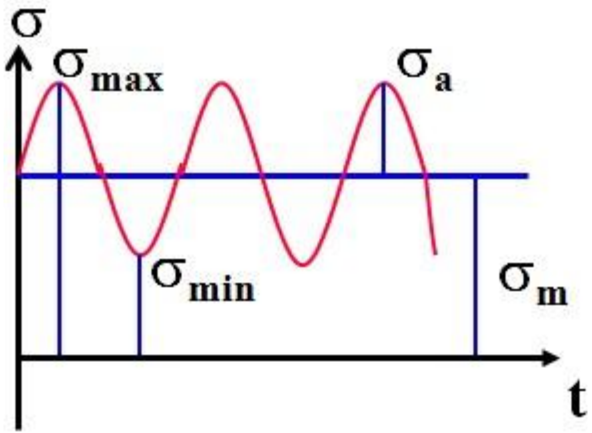
$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \frac{1}{2}(1-r)\sigma_{\max}$$



4)

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$$



4、几种典型的交变应力

对称循环 $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ $\sigma_m = 0$ $r = \dfrac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1$ $\sigma_a = \sigma_{\max}$

脉动循环 $r = \dfrac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = 0$ $\sigma_a = \sigma_m = \dfrac{\sigma_{\max}}{2}$

$\sigma_a = -\sigma_m$

$r = -\infty$

$= -\dfrac{\sigma_{\min}}{2}$

静应力 $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ $r = +1$

【考点二】材料（构件的）持久极限 ★★★★

1、材料的持久极限

对于同一种材料 $\sigma_r(\tau_r)$随r变。

2、构件的持久极限

1）构件外形的影响：有效应力集中系数K_σ

2）构件尺寸的影响：尺寸系数 ε

3）构件的表面质量的影响：表面质量系数 β

3、构件持久极限的表达式

在对称循环下，构件的持久极限应为 $\sigma_0^{-1} = \dfrac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma} \sigma_{-1}$

σ_{-1} 表示受弯曲或拉压的对称循环交变应力材料的持久 极限。

4、对称循环下构件的疲劳强度的计算

1）材料的持久极限 σ_{-1}

构件的持久极限 σ_0^{-1}

构件工作时的最大应力 $\sigma_{\max}$

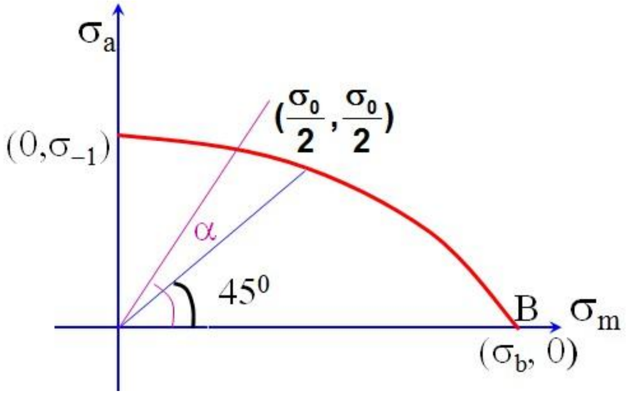
2）采用安全系数法

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_{\max}} \geq n \qquad n_\tau = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta}\tau_{\max}} \geq n$$

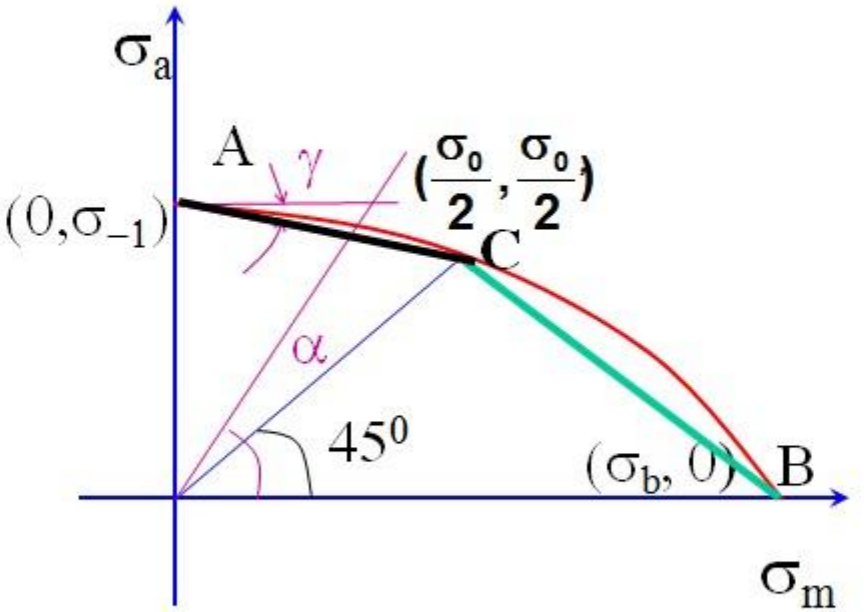
【考点三】持久极限曲线及其简化 ★★★

$$\tan\alpha=\frac{\sigma_a}{\sigma_m}=\frac{1-r}{1+r}$$

1、循环特征相同的所有应力循环都在同一射线上。



2、持久极限曲线的简化（折线三点式）



3、非对称循环下构件的疲劳强度计算

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \geq n$$

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta}\tau_a + \psi_\tau \tau_m} \geq n$$

敏感系数 ψ_m

4、屈服强度条件

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_s$$

按静强度建立屈服强度条件

$$n_\sigma^{'} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} \geq n_s$$

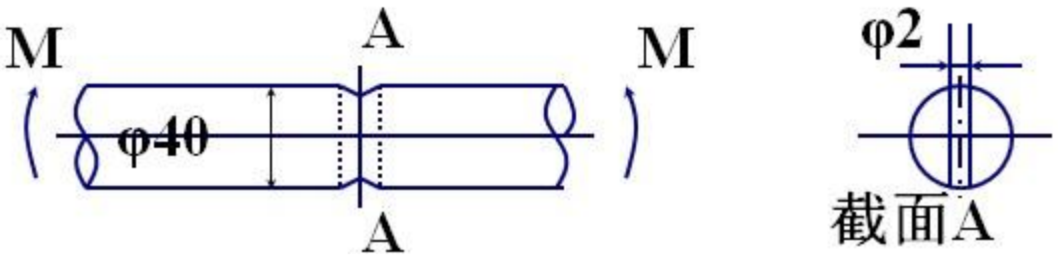
当r>0时，需要两方面都要校核

5、提高构件疲劳强度的主要措施

1）减缓应力集中

2）提高构件表层强度

【经典例题】 已知 $M_{max}=5M_{min}=502N\cdot m$， $\sigma_b=950MPa$， $\sigma_s=540MPa$， $\sigma_{-1}=430MPa$, $\psi_\sigma=0.2$, $n=2$, $n_s=1.5$，校核该杆的强度。



【解题思路】本题考查交变应力

【答案要点】

1)计算圆杆的工作应力

$$W=\frac{\pi}{32}d^{3}=\frac{\pi}{32}\times 4^{3}=6.28cm^{3}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{502}{6.28\times 10^{-6}}=80MPa$$

$$\sigma_{\min}=\frac{\sigma_{\max}}{5}=16MPa$$

2）求循环特征r及σ_{m},σ_{a}

$$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=\frac{1}{5}=0.2$$

$$\sigma_{m}=\frac{1}{2}(\sigma_{\max}+\sigma_{\min})=\frac{80+16}{2}=48.0MPa$$

$$\sigma_{a}=\frac{1}{2}(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})=\frac{80-16}{2}=32.0MPa$$

3)确定系数K_σ，ε_σ，β

查得K_σ=2.18。β=1.0　ε_σ=0.77

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}$$

$$= \frac{430}{\dfrac{2.18}{0.77\times 1}\times 32 + 0.2\times 48} = 4.29 > n = 2$$

4）静强度校核

因为r=0.2>0,所以需要校核静强度

$$n_{\sigma}^{'} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{540}{80} = 6.75 > n_s$$

$$\mathbf{n_s = 1.5}$$

满足强度要求。

➢ 归纳总结

本章共讲了三个考点，交变应力部分一般考简答题和做图题，计算量相对较少，题目难度不大，考生应该认真复习这一部分内容，争取考试的时候，能够把涉及本章内容的考题做对。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第19讲 压杆稳定

第十四章 压杆稳定

1、本章结构框架

- 细长压杆的临界力
- 临界应力总图
- 压杆的稳定校核
- 提高压杆稳定性的措施

2、考点概述

1、细长压杆的临界力

2、 临界应力总图

3、 压杆的稳定校核

4、提高压杆稳定性的措施

3、复习思路及目的

1、会计算细长压杆的临界力

2、会画临界应力总图

3、会对压杆稳定性进行校核

4、了解提高压杆稳定性的措施

【考点一】细长压杆的临界力 ★★★★

1、两端铰支压杆的临界力

设距坐标原点为x处的挠度为v，

则有图可知，该界面的弯矩为：

$$M(x) = -F_{cr}\upsilon$$

当应力不超过比例极限时，在小变形情况下，挠曲线的近似方程为

$$EI\upsilon'' = M(x) \text{即} EI\upsilon'' = \text{-}F_{cr}\upsilon$$

$$\text{令}K^2 = \frac{F_{cr}}{EI} \text{则上式可写成} \upsilon'' + K^2\upsilon = 0$$

这是一个二阶齐次常微分方程，通解为：

$$\upsilon = C_1 \sin Kx + C_2 \cos Kx$$

可得两端铰支细长压杆的临界力计算公式：

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (n=1)$$

由此可知，临界力与压杆的抗弯刚度成正比，与杆长的平方成反比。

2、注意：压杆总是在抗弯能力最弱的纵向平面内首先失稳，因此当杆端各个约束相同时，欧拉公式中的I值应取压杆截面的最小惯性矩 I_{min} 。

3、两端固定细长杆压杆的欧拉公式 $Fcr=\dfrac{4\pi^2 EI}{l^2}$

4、欧拉公式的普遍形式 $Fcr=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$

5、临界应力总图

1）临界应力公式及使用范围

临界应力：临界力除以压杆横截面面积得到的压应力，用 σ_{cr}

表示； $\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu L)^2 A}=\frac{\pi^2 E}{(\mu L/i)^2}$

① $i=\sqrt{\frac{I}{A}}$ —横截面对微弯中性轴的惯性半径

②柔度(细长比): $\lambda=\frac{\mu L}{i}$

③欧拉临界应力公式 $\sigma_{cr}=\dfrac{\pi^2E}{\lambda^2}$

2）欧拉公式应用范围：

①线弹性状态：$\sigma_{cr}\le\sigma_p$，即 $\dfrac{\pi^2E}{\lambda^2}\leqslant\sigma_p$

$$\lambda\ge\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}},\ 则\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}$$

②$l\geqslant l_p$—细长杆(大柔度杆)，欧拉公式的适用范围

④用柔度表示的临界压力 $P_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot A$

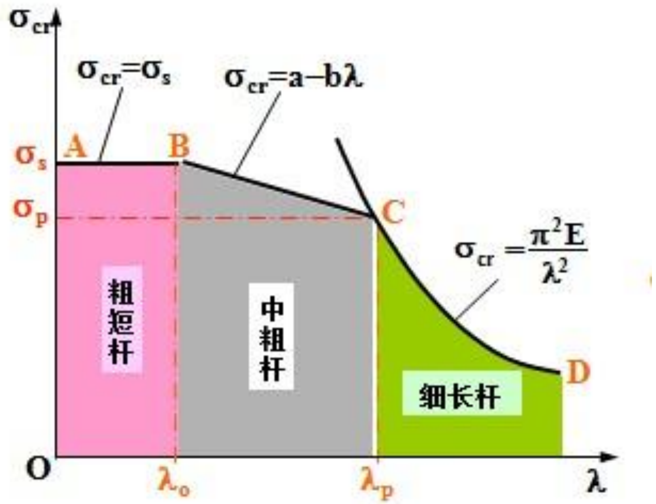
3）中柔度杆临界应力的经验公式

1、 $\sigma_p < \sigma_{cr} < \sigma_s$ 时采用经验公式：

直线公式：$\sigma_{cr} = a - b\lambda$

2、抛物线公式：$\sigma_{cr} = a_1 - b_1\lambda^2$

4）临界应力总图


σ_{cr}
$\sigma_{cr}=\sigma_s$
$\sigma_{cr}=a-b\lambda$
σ_s
A
B
σ_p
C
$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$
粗短杆
中粗杆
细长杆
D
O
λ_o
λ_p
λ

【考点二】稳定校核 ★★★★★

1、压杆稳定条件：

2、提高梁稳定性的措施 $\sigma=\frac{N}{A}\leq\frac{\sigma_{cr}}{n_{st}}=[\sigma]_{st}$

1） 从材料方面考虑

1.细长压杆：提高弹性模量E

2.中粗压杆和粗短压杆：提高屈服强度 σ_s

2）从柔度方面考虑

1.采用合理的截面形状：

①各方向约束相同时：

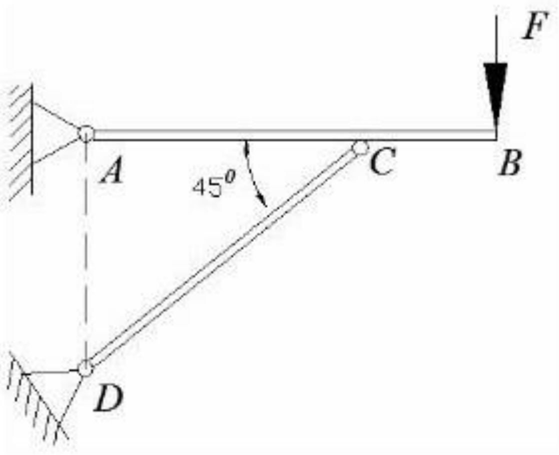
1)各方向惯性矩I相等—采用正方形、圆形截面；

2)增大惯性矩I—采用空心截面；

②压杆两方向约束不同时：使两方向柔度接近相等，可采用两个主惯性矩不同的截面，如矩形、工字形等。

【经典例题】结构如图所示

AC＝2m,CB＝1m,均为实心圆截面杆，AB直径d_1＝12cm,CD直径d_2＝8cm,材料为碳钢，E＝200GPa,σ_P＝200Mpa, σ_s＝240Mpa,[σ]＝160Mpa, n_{st}＝3,F＝20KN,试校核此结构。



经验公式：σ_{st}＝304-1.12λ（MPa）

常考知识点精讲

为提高结构的承载能力，在不改变截面面积的前提下，各杆制成何种截面形状更合理请图示。（15分）

【解题思路】本题考查校核梁的强度和稳定性的问题

【答案要点】

解（1）CD杆受压

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{\mu l}{d/4}=\frac{1\times 2\sqrt{2}}{0.08/4}=141.4$$

$$\lambda p=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}99.3$$

$\lambda>\lambda p$,为大柔度杆

$$F_{cr}=\sigma_{cr}A=495.5KN$$

$$\frac{F_{cr}}{F_{CD}}=\frac{495.5}{30\sqrt{2}}=11.6\geq n_{st}$$

CD杆安全

【答案要点】

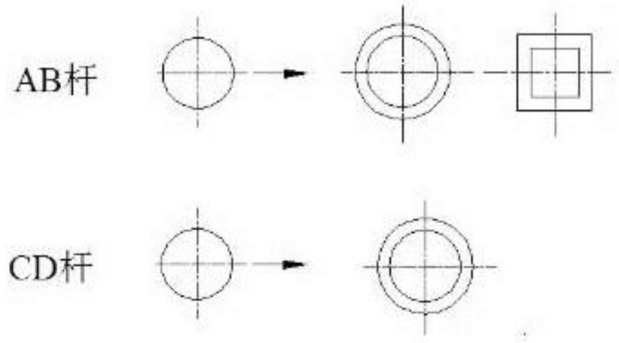
（2）AB梁为拉弯组合

$$\sigma_{max}=\frac{F_N}{A}+\frac{M_{max}}{W_z}=120.6MPa\leq[\sigma]$$

AB梁安全

不改变截面面积的情况下，

各杆做成如图所示：



➢ 归纳总结

本章共讲了两个考点，在考试的时候会综合出题，这一部分内容几乎每年必考，即使不单独出题，也会做为一道大题部分考核内容，而最为常见的就是强度和稳定性结合出题。类似于【经典例题】的形式。

专业课命题规律分析及考点精讲课程

第20讲　附录A　平面图形的几何性质

附录A 平面图形的几何性质

1、本章知识点框架

- 静矩和形心
- 惯性矩、惯性半径、惯性积
- 平行移轴公式
- 转轴公式、主惯性矩

2、考点概述

1、静矩和形心

2、惯性矩、惯性半径、惯性积

3、平行移轴公式

4、 转轴公式、主惯性矩

3、复习思路及目的

1、会求图形的静矩和形心

2、理解惯性矩、惯性半径、惯性积的概念。

3、理解平行移轴公式。

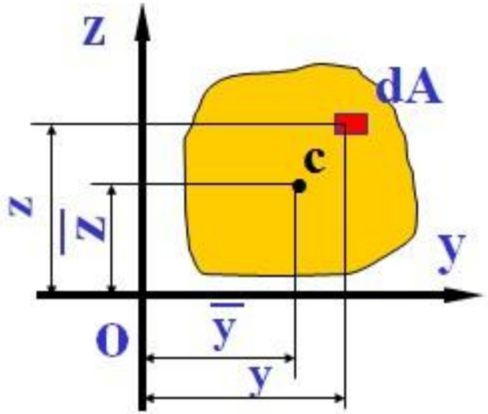
4、了解 转轴公式、主惯性矩。

【考点一】静距和形心 ★★★★

一、静矩——面积对轴之矩

$$S_y = \int_A z dA = \bar{z} A$$

$$S_z = \int_A y dA = \bar{y} A$$



二、静距

1、可根据静矩确立形心坐标:

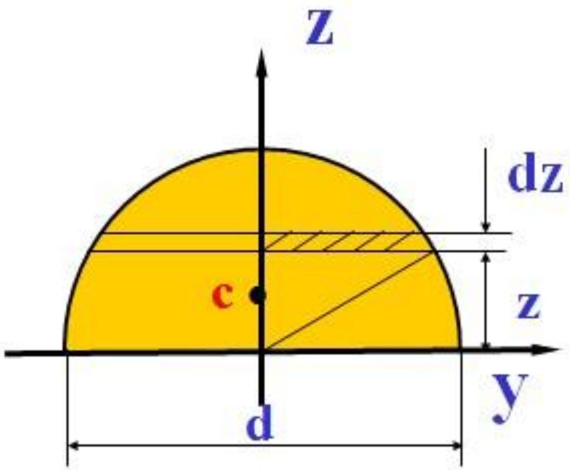
$$\bar{y}=\frac{S_z}{A},\bar{z}=\frac{S_y}{A}$$

2、量纲：长度^3

3、S与面积的大小、分布均有关；与参考轴的位置有关；

4、S可以为正，可以为负，可以等于零，等于零时轴过形心。

【经典例题】求直径为d的半圆形的形心。



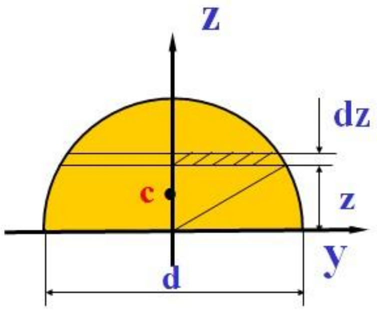
【解题思路】本题考查求形心的问题。

【答案要点】

$$\bar{y} = 0 \qquad S_y = \int_A z\,dA$$

$$\bar{z} = \frac{S_y}{A} \qquad = 2\int_0^{\frac{d}{2}} z\sqrt{\left(d/2\right)^2 - z^2}\,dz$$

$$= \frac{d^3}{12}$$



$$\bar{z} = \frac{2d}{3\pi}$$

【考点二】组合图形的静矩和形心 ★★★

一、静距

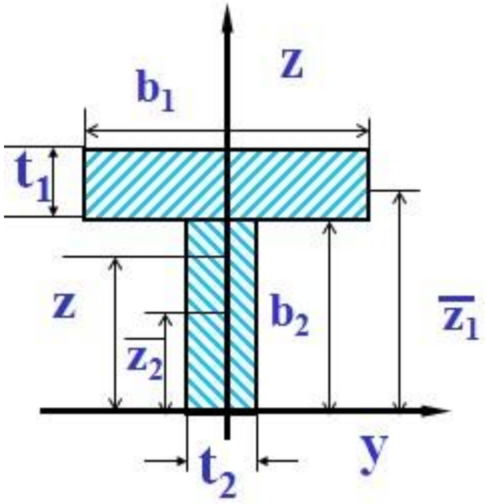
$$S_z=\sum_{i=1}^{n}A_iy_i;S_y=\sum_{i=1}^{n}A_iz_i$$

二、形心

$$y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i};z_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i}$$

组合截面对某一轴的静距等于该截面各组成部分对同一轴静距的代数和。

【经典例题】求形心坐标

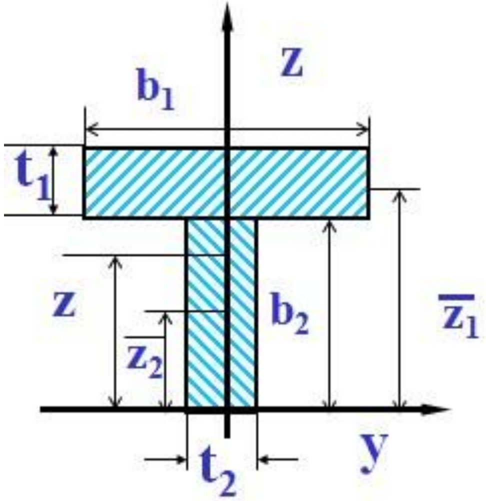


【解题思路】求图形的形心坐标

【答案要点】

$$\bar{y}=0$$

$$\bar{z}=\frac{\sum A_i\bar{z}_i}{\sum A_i}=\frac{b_1t_1\left(b_2+\frac{t_1}{2}\right)+b_2t_2\frac{b_2}{2}}{b_1t_1+b_2t_2}$$

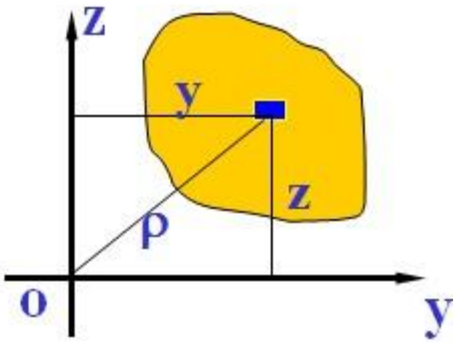


【考点三】惯性矩、惯性半径、惯性积 ★★★★

一、惯性矩

定义 $$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$



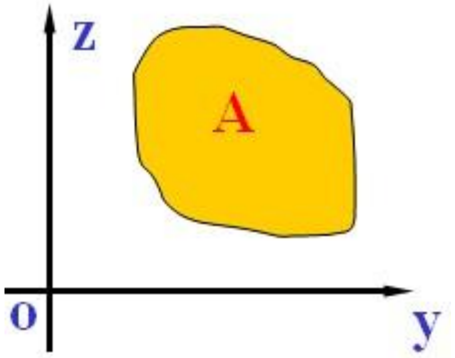
特点 1、I恒大于0

2、量纲：长度^4

二、惯性半径

定义

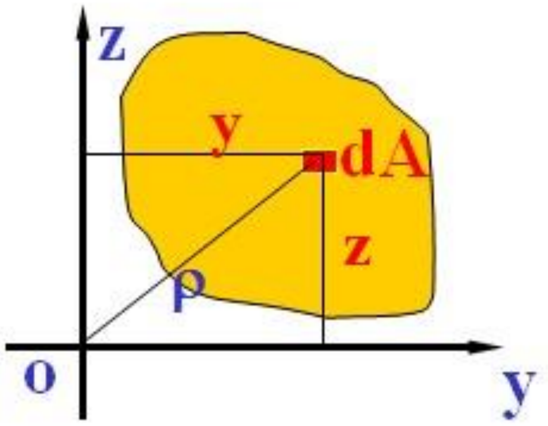
$$\left.\begin{array}{l} I_y = A i_y^2 \\ I_z = A i_z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{A}} \\ i_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{A}} \end{array}\right.$$



三、极惯性矩

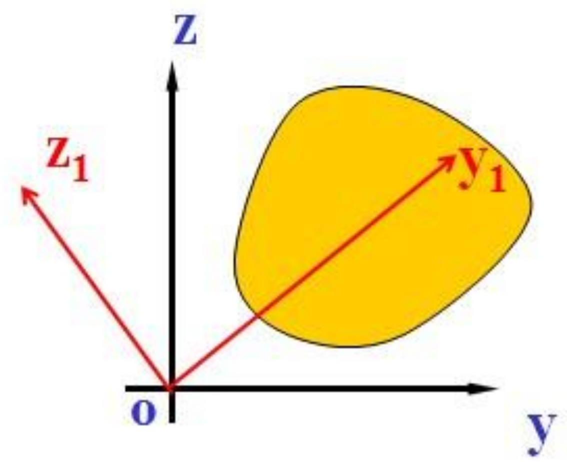
定义

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y$$

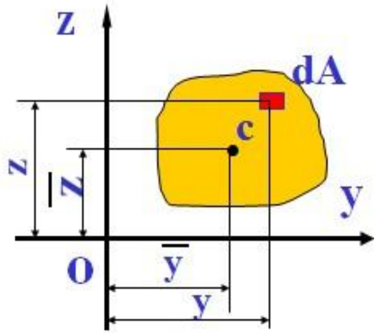


$$I_p = I_y + I_z = I_{y_1} + I_{z_1}$$

图形对任意一对互相垂直的惯性矩之和等于它对该两轴交点的极惯性矩。



四、惯性积 $I_{yz}=\int_A yzdA$



1、 量纲：长度^4

2、 I_{yz}可以大于零，可以小于零，也可以等于零。

3、特点：两个坐标轴中只要一个为图形的对称轴，则必有

$$I_{yz}=0$$

4、惯性积一定是对一对互相垂直坐标轴而言。

【考点三】平行移轴公式 ★★★★

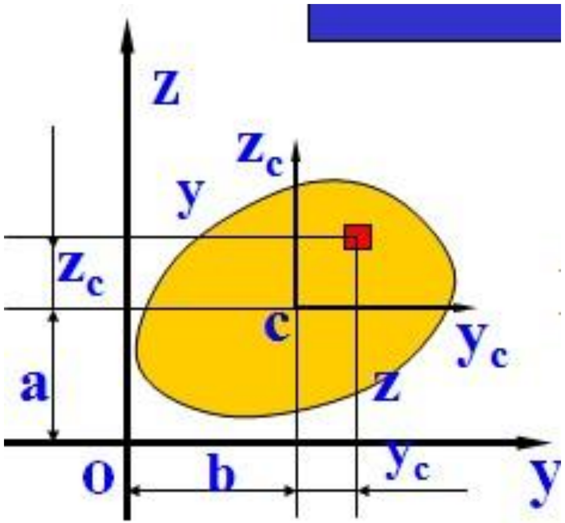
一、定义

$$\begin{cases} I_y = I_{y_c} + a^2 A \\ I_z = I_{z_c} + b^2 A \\ I_{yz} = I_{y_c z_c} + abA \end{cases}$$

注意：1、两轴一定为平行的轴；

2、必有一对是形心轴；

3、 a、b有正、负；



结论：对所有平行轴而言，对形心轴的惯性矩取最小值。

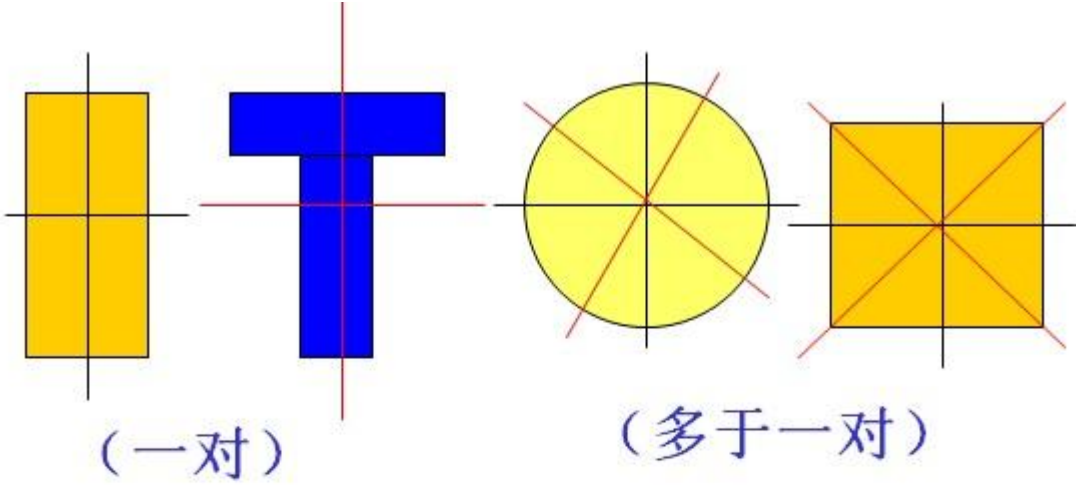
应用：1、可计算平行轴的惯性矩、 惯性积；

2、 可计算组合图形的惯性矩、惯性积。

注意：转轴公式 主惯性矩 这一部分自己看。

二、总结

1、形心主轴---一般情况下一个截面只有一对，特殊情况下一个截面有无穷对。



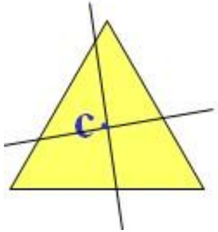
2、轴面关系

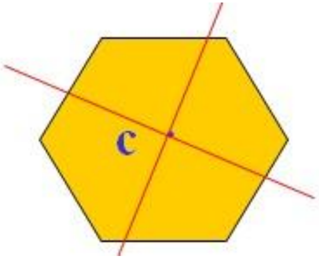
1）形心只有一个

2）形心轴---无穷个

3）主轴---一般情况过一点只有一对，整个截面上有无穷对。

3、结论：具有三个以上对称轴的截面，任何一个形心轴都是形心主惯性轴，而且对这些轴的惯矩均相等。





➢ 归纳总结

这一讲我们共同学习了平面图形的几何性质，这部分近年来频繁出现在考研真题中，大家应该重视这部分的学习，考核形式一般是在最后一题，让求某一特殊平面图形的几何性质。题目相对较简单。