

结构力学

冲刺讲义

哈尔滨考研网哈尔滨工业大学

土木工程学院教研组

2008年12月

总编：慕亚平

序

欢迎您参加我们领先教育&哈尔滨考研网的专业课冲刺班。为了您能在考研学习的最后阶段能有一个科学合理的复习计划以及积极良好的临考心态，我们为您制作了此讲义，安排了冲刺辅导课程。

本讲义包含以下内容：

第一为全书知识框架的整理，及近三年真题考试题型汇总；

第二为 09 年考点预测，紧密结合最新考研动态与命题脉络，由命题组资深教师与历届专业课状元联手打造；

第三为三套全真模拟试题，根据近三年考题与专业课教师多年授课经验为 09 考研学子量身定制；

最后为临考前 30 天的专业课复习方法及答题技巧，为历年专业课状元考研成功经验总结得出。

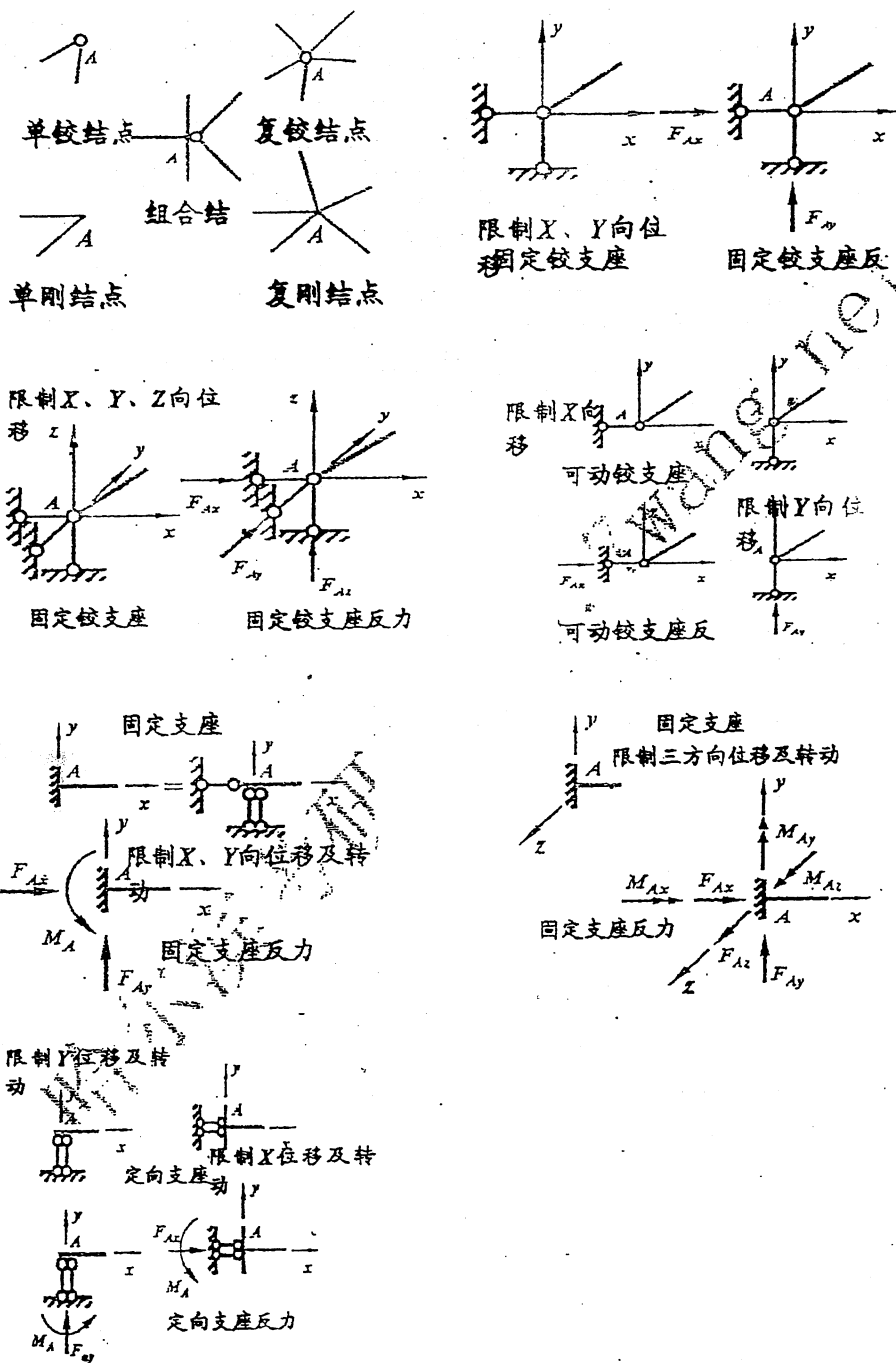
希望我们的辅导能够在您的考研最后阶段，助您一臂之力，成功跨越专业课 135 分，实现您的考研梦想。

目录

序	I
第1章 基础知识及复习要求	4
1.1 节点形式及作用	4
1.2 常见的结构形式	5
1.3 结构力学的复习要求	6
1.4 知识架构	7
第2章 结构的组成分析	8
2.1 组成分析应掌握的知识点	8
2.2 结构的组成分析	8
2.2.1 基本概念	8
2.2.2 静定结构组成规则★★	11
第3章 静定结构受力分析	15
3.1 静定结构受力分析应掌握的知识点	15
3.2 静定结构内力分析方法	15
3.2.1 截面法	15
3.2.2 区段叠加法	16
3.3 多跨静定梁受力分析★★★	17
3.4 平面刚架受力分析★★★	19
3.4.1 静定平面刚架的分类	19
3.4.2 静定刚架内力图的绘制方法	19
3.5 桁架结构内力分析★★★	22
3.5.1 桁架的分类	22
3.5.2 桁架的计算方法	23
3.6 三角拱受力分析★★★	27
3.6.1 拱的概念	27
3.6.2 拱的解法	27
3.6.3 三角拱的合理拱轴线	28
3.7 组合结构的内力分析★★★	29
3.8 受弯结构做内力图的顺序	29
3.9 静定结构的性质★★★	30
3.9.1 静定结构基本性质	30
3.9.2 静定结构派生性质	30
第4章 静定结构的位移计算	31
4.1 静定结构位移计算应掌握的知识点	31
4.2 位移计算的基本理论	31
4.2.1 概述	31
4.2.2 变形体虚功原理★★	32
4.3 单位荷载法★★	35
4.3.1 位移计算的一般公式	35
4.3.2 荷载作用下位移计算的一般公式	36
4.3.3 几点讨论(只有荷载作用)	38
4.4 图乘法★★	40
4.4.1 图乘法	40
4.4.2 几种常见图形的面积和形心位置的确定方法	40
4.4.3 注意事项	41
4.4.4 应用举例	42
4.5 其他外因引起的位移计算★	44
4.5.1 静定结构温度变化时的位移计算★	44

4.5.2 静定结构支座移动时的位移计算★	46
4.6 线性弹性体结构的互等定律★	48
4.6.1 线性杆系结构的变形能	48
4.6.2 线性弹性结构的互等定理	50
4.7 结论与讨论	51
第5章 超静定结构的解法	51
5.1 力法★★★	51
5.1.1 力法的基本原理	52
5.1.2 力法基本原理举例	53
5.1.3 力法计算的简化	65
5.2 位移法★★★	65
5.2.1 位移法的基本原理	66
5.2.2 位移法基本思路	73
5.3 力法与位移法的比较	74
5.4 混合法	74
5.5 弯矩分配法★★★	74
5.5.1 弯矩分配法的基本思想	76
5.5.2 基本名词定义	76
5.5.3 弯矩分配法的物理概念	77
5.5.4 弯矩分配法举例	78
第6章 移动荷载下的结构分析	78
6.1 移动荷载及影响线的概念	78
6.2 静力法做影响线★★	80
6.3 虚功法做影响线★★	82
6.4 影响线的应用	85
附录	85
一、考试要求	85
二、考试内容	86
三、试卷结构	86
四、参考书目	86

1.1 节点形式及作用



- 确定超静定次数;
- 选取正确的基本结构;
- 作单位弯矩 (或内力) 图。荷载时作荷载弯矩 (或内力) 图, 支座移动时求已知位移对应的、单位广义力引起的反力, 温度改变时确定各杆 i_0 , Δt 和变形形式;
- 求 δ_{ij} , Δ 外因;
- 列力法方程并求解;
- 作 M 或内力图;
- 通过校核已知位移检查计算的正确性。

当题目是求超静定结构位移时, 依据使计算方便为原则, 恰当选取一静定结构并确定单位广义力。将超静定的求解结果视作该静定结构在外因和多余未知力共同作用下的结果, 因此可按静定结构位移计算来求超静定结构的位移。

基于上述思想, 超静定结构已知 M 和荷载求 F_Q 、 F_N 与静定结构完全相同。

4. 位移法

要牢记由力法求得的形常数和载常数。要能准确地确定位移法最少未知数个数 (弹性支座处位移要当作独立位移未知数, 带刚域时要在不记轴向变形的前提下考虑)。要能熟练准确地作出 M_i 、 M_P 图。要能熟练、正确地计算 r_{ij} 和 R_{iP} 系数。要深刻理解位移法方程的物理意义。要能自行校核。应能熟练地运用对称性和无弯矩判断简化计算。

本章主要应熟练掌握荷载下的超静定结构计算。但对温度改变、支座移动也要会求解。

5. 力矩分配法

要牢记单独使用时的条件。应深刻理解转动刚度、分配系数、传递系数、分配弯矩、传递弯矩和不平衡力矩等名词的含义。应深刻理解单结点分配的实质。应熟练掌握多结点的计算方法。

解题步骤:

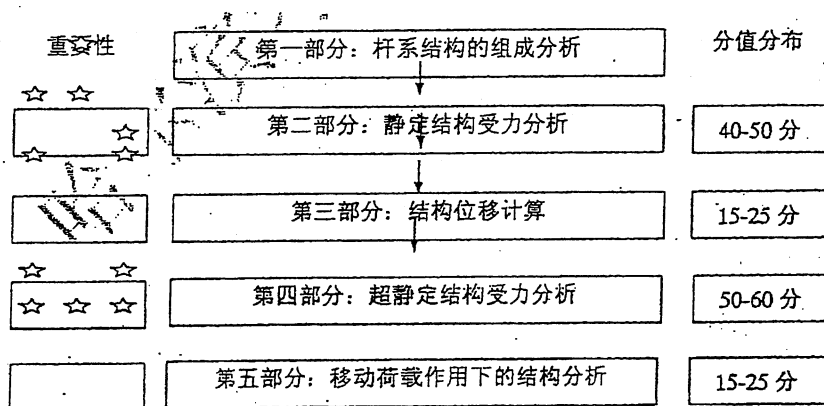
- 确定线刚度、杆端转动刚度、结点的各杆分配系数和传递系数;
- 由载常数确定“固端弯矩”;
- 按选定的顺序 (不平衡力矩大的先分) 进行两轮 (仅对考试) 分配、传递;
- 计算杆端弯矩、作弯矩图并进行自我校核。

6. 影响线及其应用

应理解移动荷载及其特点, 应深刻理解影响线的定义。应能熟练绘制单跨梁、简单桁架、结点传荷载、多跨静定梁和连续梁的影响线, 切记“三要素”。

应能熟练地确定移动荷载最不利位置及最大影响量。应能熟练地计算简支梁在给定荷载下的绝对最大弯矩。

1.4 知识架构



第2章 结构的组成分析

2.1 组成分析应掌握的知识点

1. 何谓自由度？何谓约束？常见约束有哪些？★★
2. n 根杆用一个复铰连接后有多少自由度？一个复铰相当于几个单铰？
3. n 根杆用一个复刚结点连接后有多少自由度？一个复刚结点相当于几个单刚结点？
4. n 个铰用一根复链杆连接后有多少自由度？一根复链杆相当于几根单链杆？
5. 何谓虚铰？虚、实铰有何异同？
6. 何谓几何可变体系？何谓必要约束、多于约束？有多余约束的体系中什么是多余约束是否唯一？
7. 何谓计算自由度？求体系计算自由度的解法、结果是否唯一？★★
8. 一个体系从几何组成上说有哪些可能的情况？
9. 体系的几何特性和静力特性间有何关系？
10. 组成无多余几何不变体系的最基本的规则是什么？无多余约束几何不变体系简单组成规则间有何关系？★★
11. 作平面体系组成分析的基本思路、步骤如何？

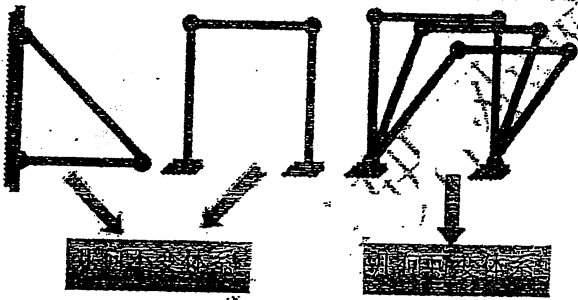
2.2 结构的组成分析

基本假定：不考虑材料的变形。

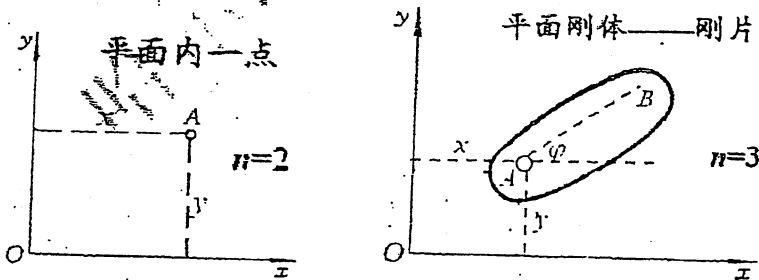
结构组成分析——判定体系是否几何可变，对于结构，区分静定和超静定及超静定次数。

2.2.1 基本概念

1. 几何不变体系：在任意荷载作用下，几何形状及位置均保持不变的体系。（不考虑材料的变形）
2. 几何可变体系：在一般荷载作用下，几何形状及位置将发生改变的体系。（不考虑材料的变形）

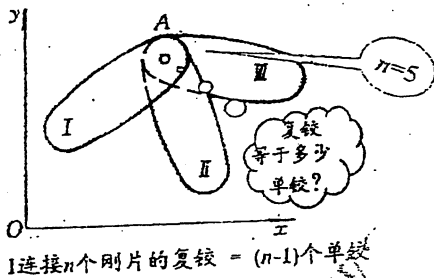
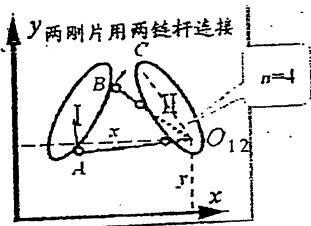
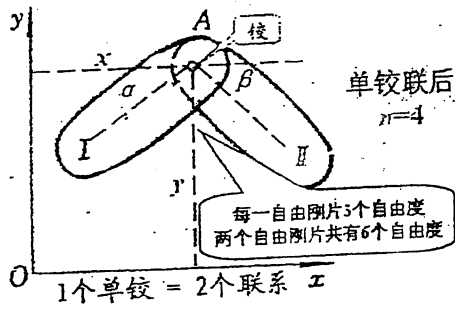
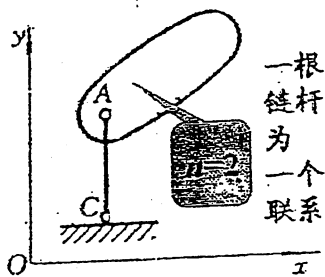


3. 自由度：确定物体位置所需要的独立坐标数目或体系运动时可独立改变的几何参数数目★★



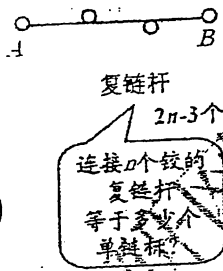
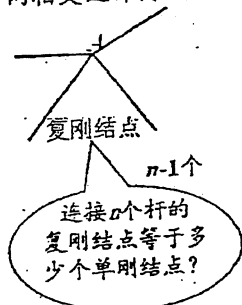
4. 联系与约束：减少自由度的装置。

7



两相交链杆构成一虚铰

1连接n个刚片的复铰 = (n-1)个单铰



- 每个自由刚片有 3 个自由度
- 每个单铰能使体系减少 2 个自由度
- 每个单链杆能使体系减少 1 个自由度
- 每个单刚结点能使体系减少 3 个自由度

5. 体系的计算自由度: 计算自由度等于刚片总自由度数减总约束数★★

$$W = 3m - (3g + 2h + b)$$

m —刚片数 (不包括地基)

g —单刚结点数

h —单铰数

b —单链杆数 (含支杆)

铰结链杆体系—完全由两端铰结的杆件所组成的体系

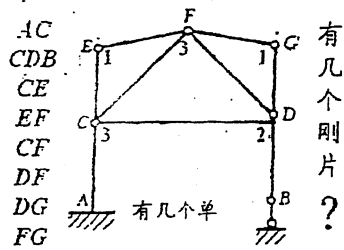
铰结链杆体系的计算自由度:

$$W = 2j - b$$

j —结点数

b —链杆数, 含支座链杆

例1: 计算图示体系的自由度



$$W = 3 \times 8 - (2 \times 10 + 4) = 0$$

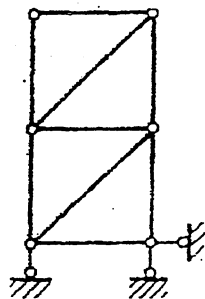
另一种解法

按铰结计算

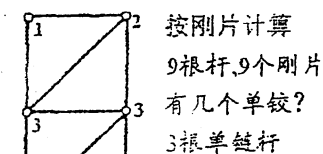
6个铰结点

12根单链杆

$$W = 2 \times 6 - 12 = 0$$



例2: 计算图示体系的自由



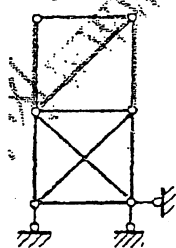
$$W = 3 \times 9 - (2 \times 12 + 3) = 0$$

讨论

有几个单铰?

$$W = 3 \times 9 - (2 \times 12 + 3) = 0$$

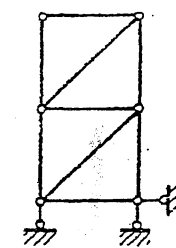
除去约束后, 体系的自由度并不改变, 这类约束称为多余约束。



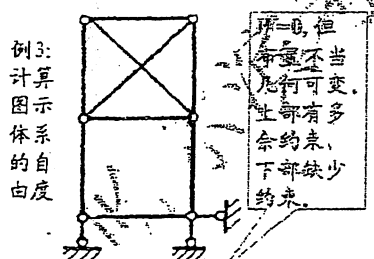
图中上部四根杆和三根支座杆都是必要的约束。

下部正方形中任意一根杆, 除去都不增加自由度, 都可看作多余的约束。

除去约束后, 体系的自由度将增加, 这类约束称为必要约束。



因为除去图中任意一根杆, 体系都将有一个自由度, 所以图中所有的杆都是必要的约束。



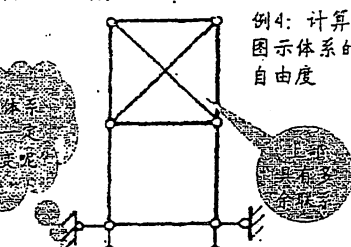
例3: 计算图示体系的自由度

$$W = 3 \times 9 - (2 \times 12 + 3) = 0$$

$$W = 2 \times 6 - 12 = 0$$

W=0, 但体系不当几何可变, 上部有多余约束, 下部缺少约束。

例4: 计算图示体系的自由度



$$W = 3 \times 14 - (2 \times 14 + 3) = -1 < 0$$

$$W = 2 \times 6 - 13 = -1 < 0$$

计算自由度
= 体系真实的
自由度

$$W = 2 \times 6 - 12 = 0$$

$$W = 3 \times 9 - (2 \times 12 + 3) = 0$$

$$W = 2 \times 6 - 11 = 1$$

$$W = 3 \times 8 - (2 \times 10 + 3) = 1$$

6. 小结:

$W > 0$, 缺少足够联系, 体系几何可变。

$W = 0$, 具备成为几何不变体系所要求的最少联系数目。

$W < 0$, 体系具有多余联系。

$W > 0$ \Rightarrow 体系几何可变

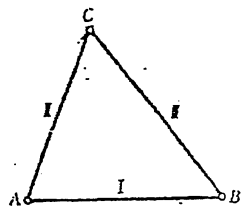
$W \leq 0$ \Leftarrow 体系几何不变

2.2.2 静定结构组成规则★★

1. 基本出发点: 三边在两边之和大于第三边时, 能唯一地组成一个三角形。

2. 三刚片规则: 三个刚片用不在同一直线上的三个单铰两两相连, 组成无多余联系的几何不变体系。

例如三铰拱

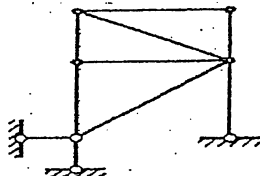
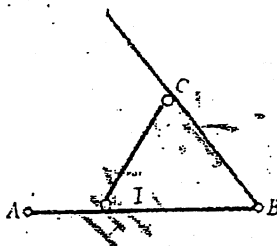


大地, AC, BC 为刚片, A, B, C 为单铰
无多余几何不变

3. 二元体: 不在一直线上的两根链杆连接一个新结点的装置。

4. 二元体规则: 在一个体系上增加或拆除二元体, 不改变原体系的几何构造性质。

加二元体组成结构



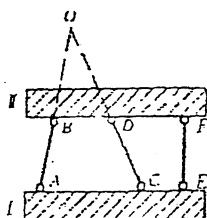
5. 二刚片规则:

a) 两个刚片用一个铰和一根不通过此铰的链杆相联, 组成无多余联系的几何不变体系。

b) 两个刚片用三根不全平行也不交于同一点的链杆相联, 组成无多余联系的几何不变体系。

虚铰—联结两个刚片的两根相交链杆的作用, 相当于在其交点处的一个单铰, 这种铰称为虚铰 (瞬铰)。

12



无多余几何不变体系

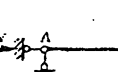
瞬变体系 不能平衡

Figure 1.1 consists of two diagrams, (a) and (b), illustrating different types of structural members. Diagram (a) shows a truss structure with a central node O, a horizontal top chord, and a stepped bottom chord. Diagram (b) shows a frame structure with a horizontal top beam and a stepped bottom column.

如何求支座反力?

无多余联系几何不变。

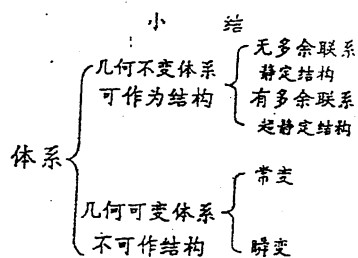
静定结构


 A horizontal beam is shown with points A, C, and B marked. At point A, there is a horizontal force F_A acting to the left and a vertical force F_A acting upwards. At point C, there is a vertical force F_C acting downwards. At point B, there is a vertical force F_B acting downwards. A diagonal force F is applied to the beam between points C and B.

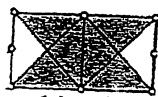
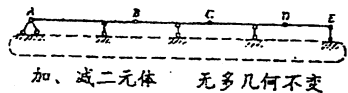
能否求全部反力？
 超静定结构

有多余联系几何不变

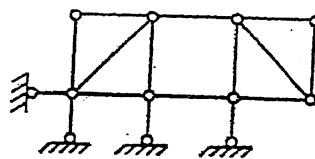
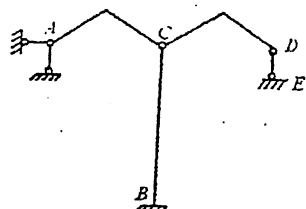
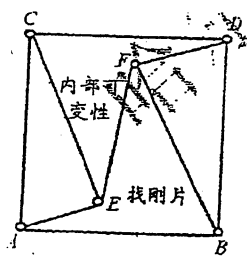
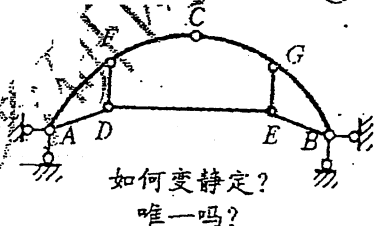
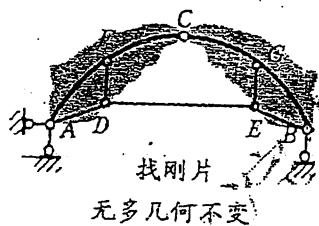
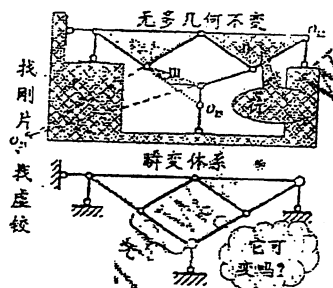
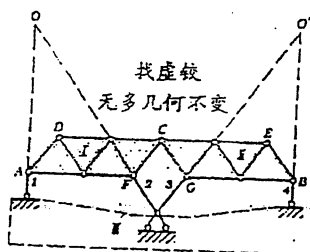
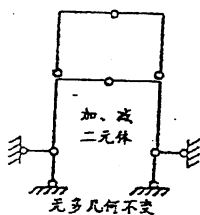
13



8. 分析示例



去支座后再分析



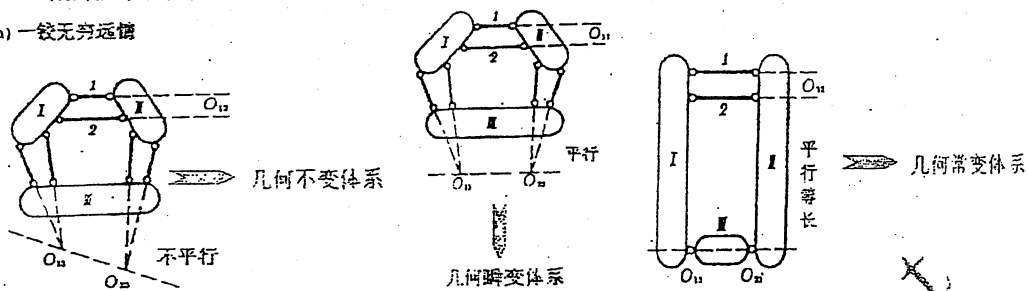
加减二元体

9. 结论与讨论

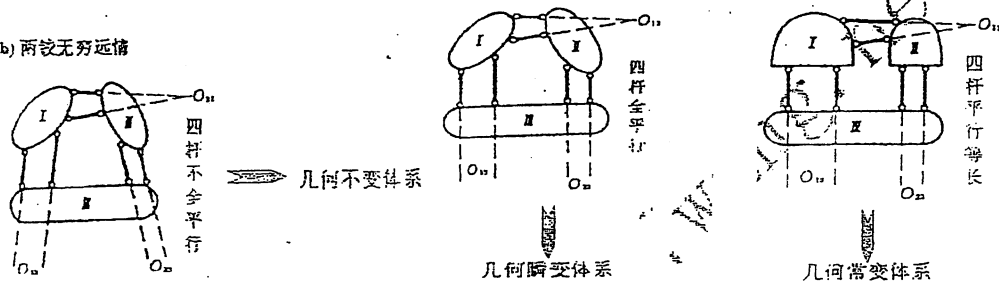
- 结构的组装顺序和受力分析次序密切相关;
- 正确区分静定、超静定, 正确判定超静定结构的多余约束数十分重要;
- 超静定结构可通过合理地减少多余约束使其变成静定结构;

- d) 分析一个体系可变性时，应注意刚体形状可任意改换。按照找大刚体（或刚片）、减二元体、去支座分析内部可变性等，使体系得到最大限度简化后，再应用三角形规则分析；
- e) 当计算自由度 $W > 0$ 时，体系一定是可变的，但 $W \leq 0$ 仅是体系几何不变的必要条件。
10. 三刚片虚铰在无穷远处的讨论

(a) 一铰无穷远情



(b) 两铰无穷远情



第3章 静定结构受力分析

3.1 静定结构受力分析应掌握的知识点

1. 梁式杆件内力有几个?
2. 杆端内力如何标记? 习惯上杆端轴力、剪力正、负号如何规定? 杆端弯矩正、负如何规定? 作弯矩图有何规定?
3. 如何求指定截面的内力? 轴力图和轴向荷载, 弯矩图、剪力图和横向荷载间有何关系?
4. 何谓区段叠加法? 进行区段叠加时应注意什么?
5. 静定结构内力分析应该遵循什么基本原则?
6. 静定结构内力分析的基本方法是什么? 试说明受弯结构内力分析的一般步骤。
7. 从组成方式来分类, 平面桁架有哪些类型?
8. 从竖向荷载下反力的性质来分类, 平面桁架有哪些类型?
9. 何谓结点法? 何谓截面法? 结点法、截面法求桁架杆内力时应注意什么?
10. 何谓“单杆”? 那些情况下单杆是零杆? 除单杆外还有哪些情况杆件内力为零 (零杆)?
11. 三铰拱有何特点? 一般来说应如何求反力和指定截面内力?
12. 何谓合理拱轴? 竖向荷载下合理拱轴与什么有关?
13. 何谓基本部分、附属部分? 如何将多跨静定梁变成带外伸的单跨梁并作出层关系图? ★★★
14. 如何根据弯矩图勾画挠曲线大致形状?
15. 根据几何组成情况刚架可分成哪些类型?
16. 试说明单体刚架求解的一般步骤? ★★★
17. 试说明三铰刚架求解的一般步骤? ★★★
18. 试说明有基本-附属部分刚架的求解步骤? ★★★
19. 何谓静定组合结构? 他的求解应注意什么?
20. 各类静定结构受力各有什么特点? 结构方案设计时应该如何考虑?
21. 静定结构的基本性质是什么? 由他派生出那些性质? ★★★

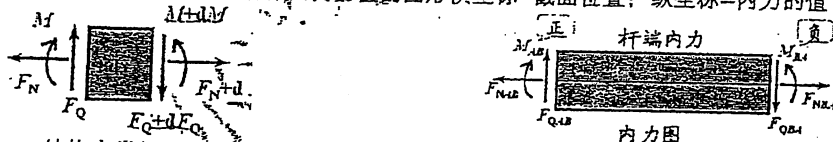
3.2 静定结构内力分析方法

3.2.1 截面法

1. 符号规定

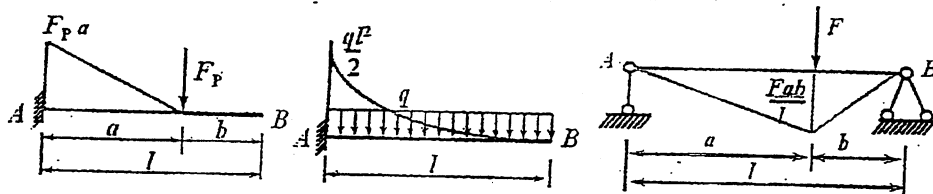
材料力学规定: 轴力 F_N —拉力为正, 剪力 F_Q —绕隔离体顺时针方向转动者为正弯矩 M —使梁的下侧纤维受拉者为正。

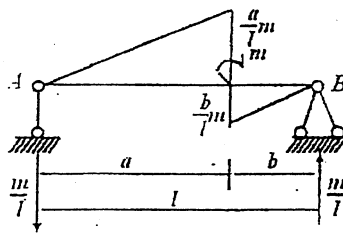
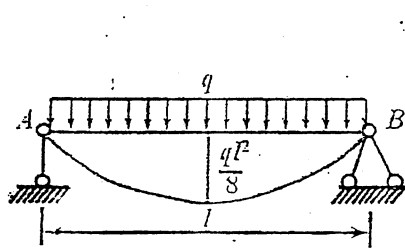
内力图—表示结构上各截面内力值的图形横坐标—截面位置; 纵坐标—内力的值



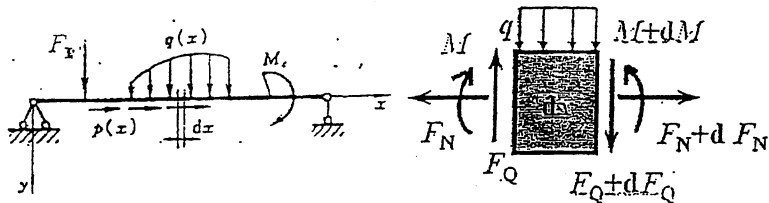
结构力学规定: 弯矩图—习惯绘在杆件受拉的一侧, 不需标正负号。轴力和剪力图—可绘在杆件的任一侧, 但需标明正负号。

2. 常用单跨梁弯矩图





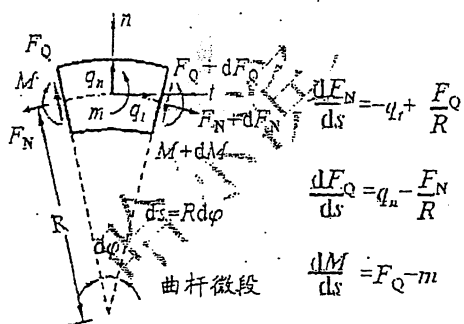
3. 直杆微分关系



$$\frac{dM}{dx} = F_Q, \quad \frac{dF_Q}{dx} = -q(x), \quad \frac{dF_N}{dx} = -p(x)$$

梁上情况	无外力	均布力作用 (q向下)	集中力作用 处 (F _p 向下)	集中力 偶M作 用处	设处
剪力图	水平线	斜 直 线 (下 凸)	为 零 处	有突 变(突 变值= F _p)	如变 号
弯矩图	一般 为斜 直线	抛 物 线 (下 凸)	有 极 值	有尖 角(向 下)	有突 变 (突 变值= M)

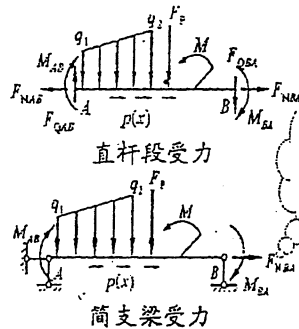
4. 曲杆微分关系



$$\frac{dF_N}{ds} = -q_r + \frac{F_Q}{R}$$

$$\frac{dF_Q}{ds} = q_n - \frac{F_N}{R}$$

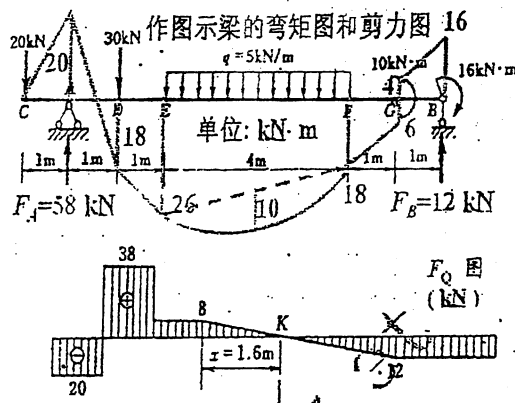
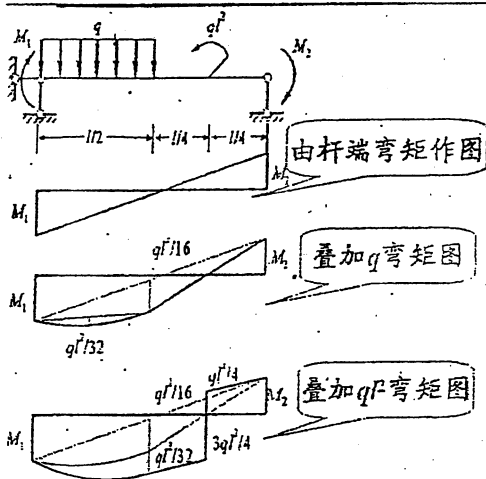
$$\frac{dM}{ds} = F_Q - m$$



3.2.2 区段叠加法

注意：叠加是弯矩的代数值相加，也即图形纵坐标相加。

15



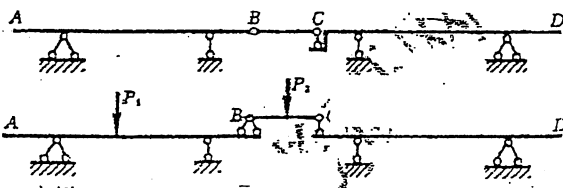
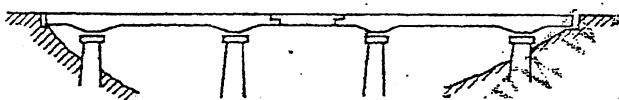
3.3 多跨静定梁受力分析★★★

关键在正确区分基本部分和附属部分；熟练掌握截面法求控制截面弯矩，熟练掌握区段叠加法作单跨梁内力图。

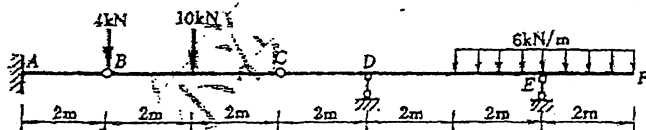
附属部分--依赖基本部分的存在才维持几何不变的部分。

基本部分--不依赖其它部分而能独立地维持其几何不变性的部分。

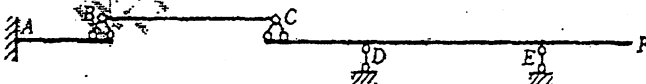
实例 1:



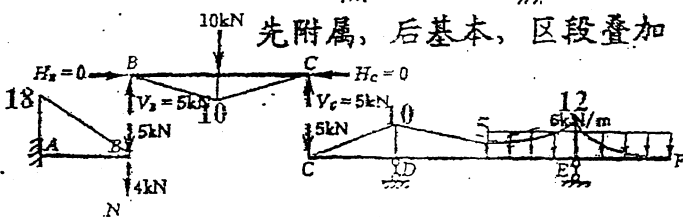
实例 2:



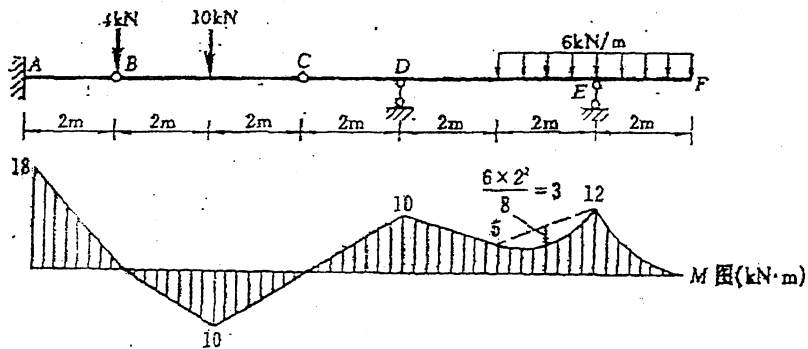
叠层关系图



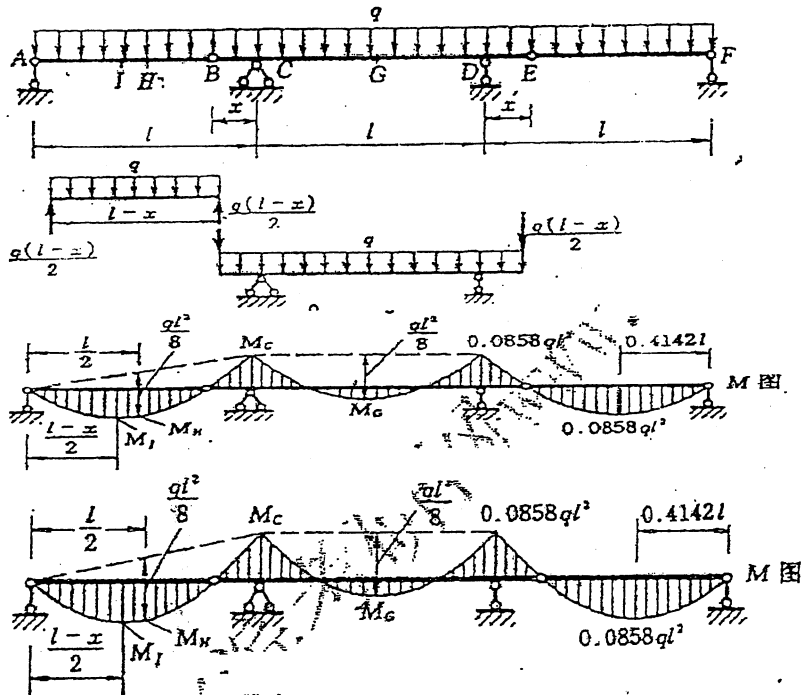
先附属，后基本，区段叠加



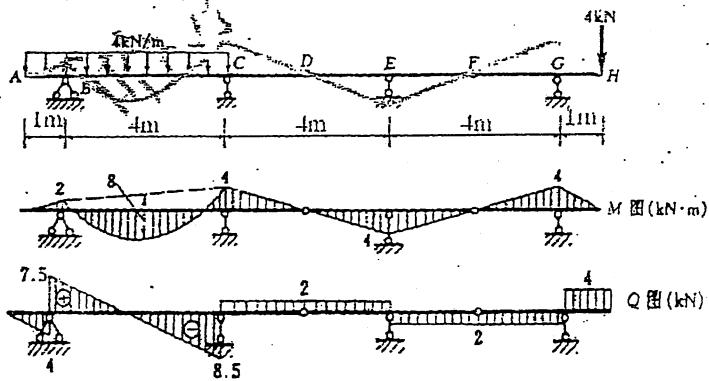
例 3:



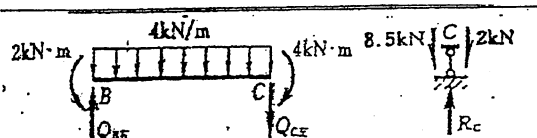
例 4: 图示多跨静定梁全长受均布荷载 q , 各跨长度均为 l . 欲使梁上最大正、负弯矩的绝对值相等, 试确定铰 B 、 E 的位置。



例 5: 作图示多跨静定梁的内力图, 并求出各支座的反力。



178

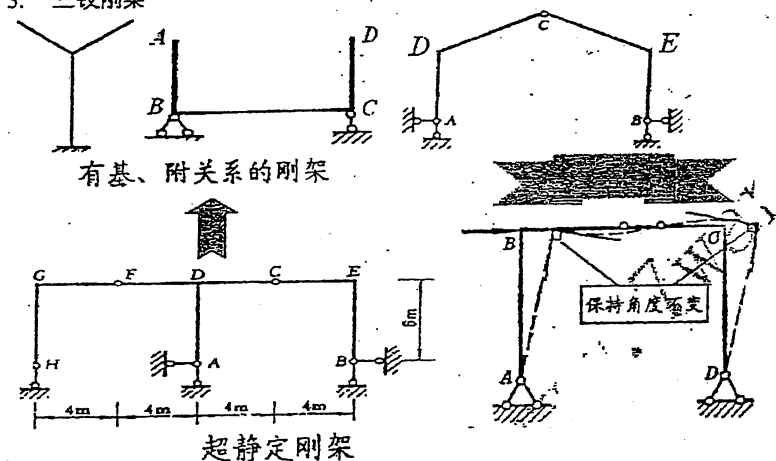


3.4 平面刚架受力分析★★★

刚架—具有刚结点的由直杆组成的结构。

3.4.1 静定平面刚架的分类

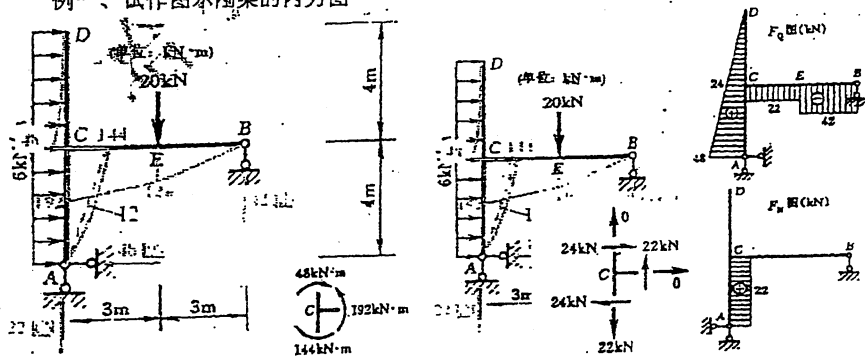
1. 悬臂刚架
2. 简支刚架
3. 三铰刚架



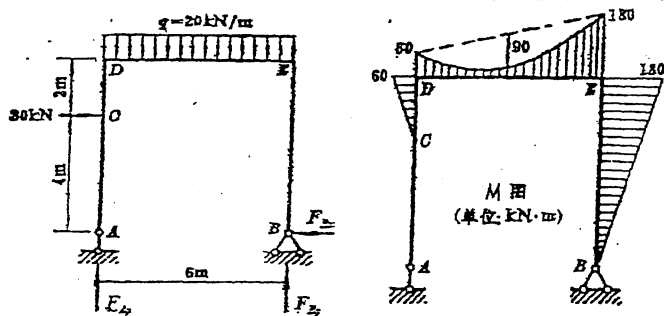
3.4.2 静定刚架内力图的绘制方法

一般先求反力，然后求控制弯矩，用区段叠加法逐杆绘制，原则上与静定梁相同。

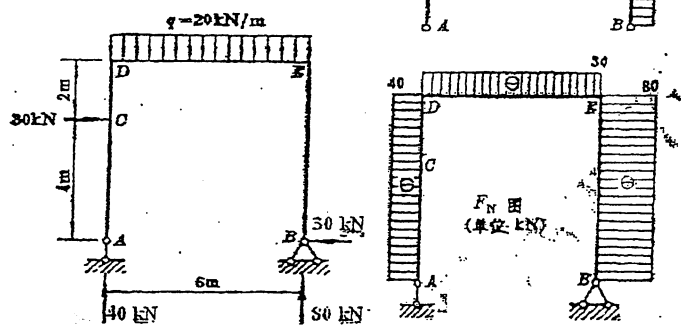
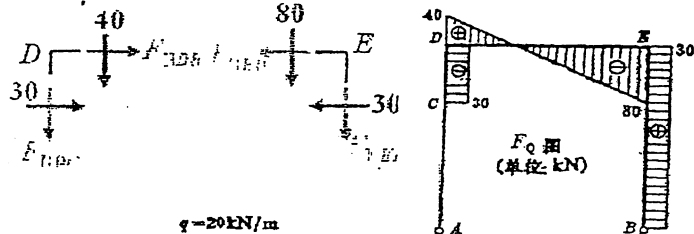
例一、试作图示刚架的内力图



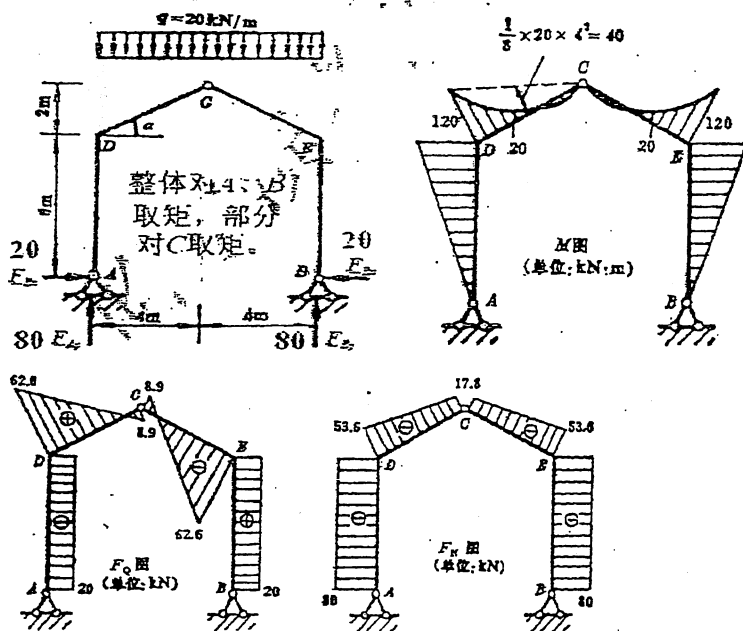
例二、试作图示刚架的内力图



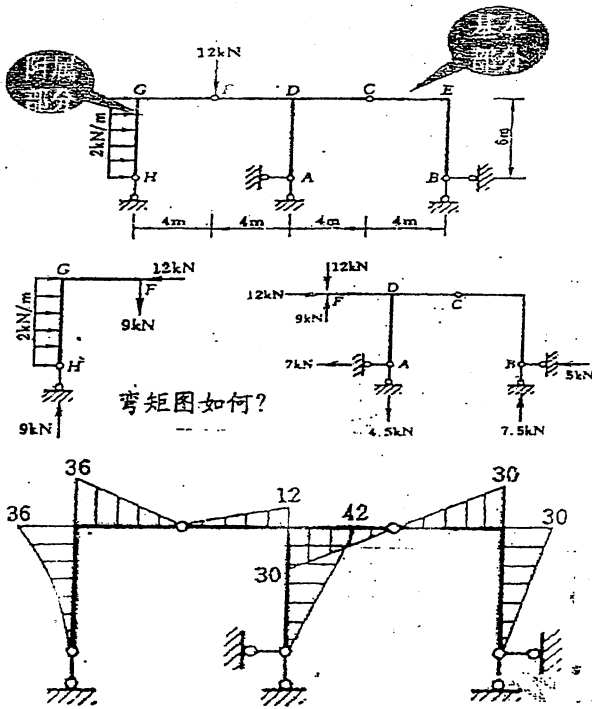
只有两杆汇交的刚结点，若结点上无外力偶作用，则两杆端弯矩必大小相等，且同侧受拉。



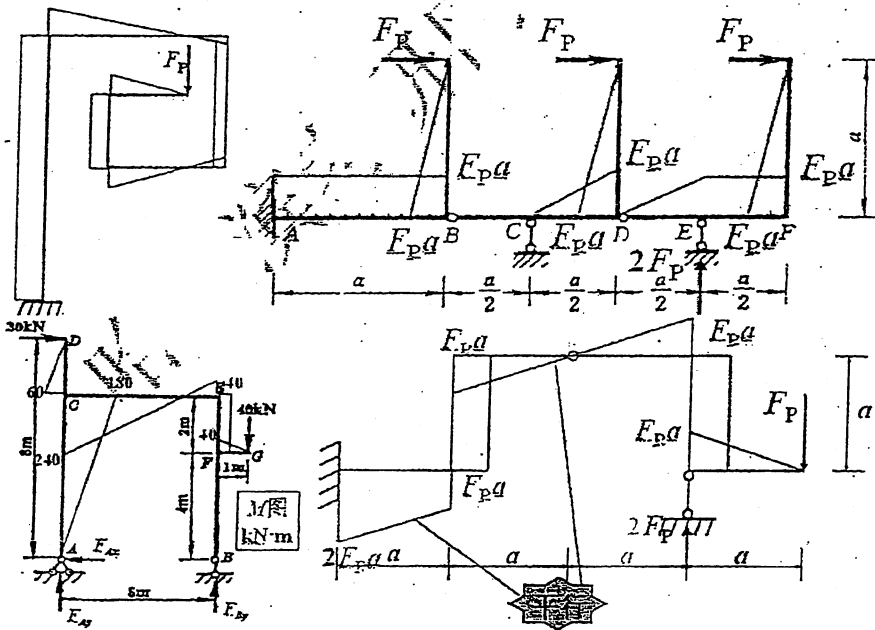
例三、试作图示三铰刚架的内力图

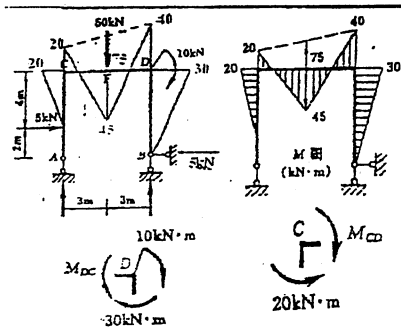


关键是注意：斜杆对杆端取矩求剪力这样可不解联立方程
例四、试作图示刚架的弯矩图



例五、不经计算画图示结构弯矩图



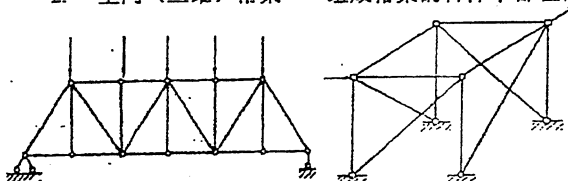


3.5 桁架结构内力分析★★★

3.5.1 桁架的分类

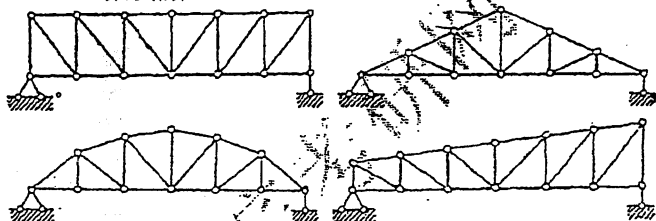
3.5.1.1 根据维数分类

1. 平面（二维）桁架——所有组成桁架的杆件以及荷载的作用线都在同一平面内。
2. 空间（三维）桁架——组成桁架的杆件不都在同一平面内。



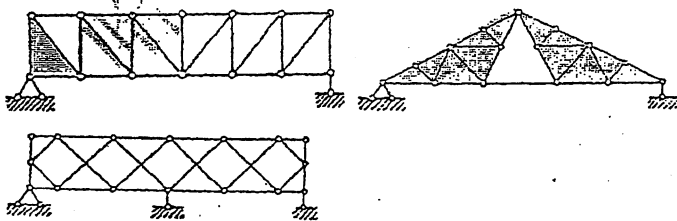
3.5.1.2 按外型分类

1. 平行弦桁架
2. 三角形桁架
3. 抛物线桁架
4. 梯形桁架



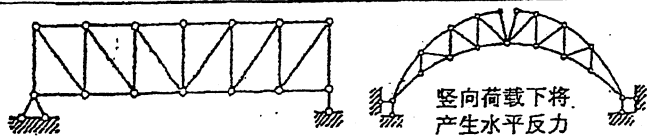
3.5.1.3 按几何组成分类

1. 简单桁架
2. 联合桁架
3. 复杂桁架



3.5.1.4 按受力特点分类

1. 梁式桁架
2. 拱式桁架

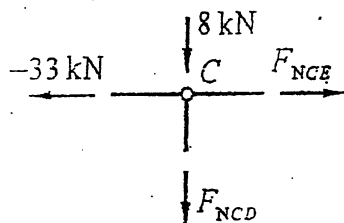
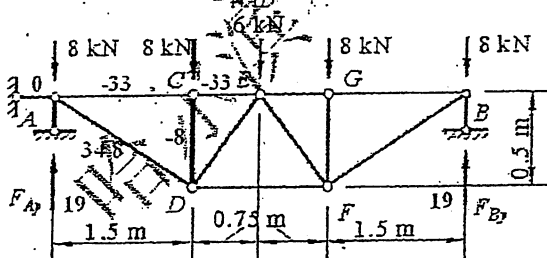
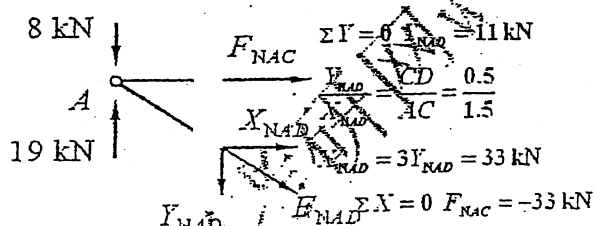
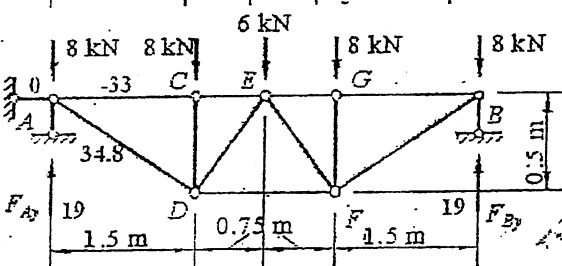
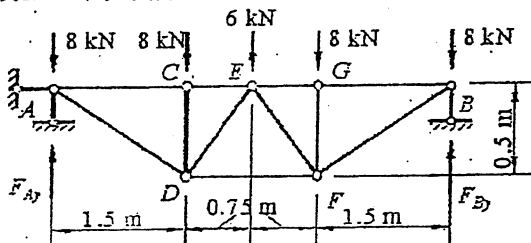


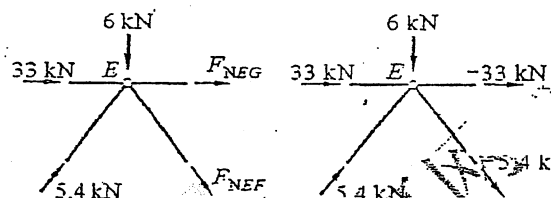
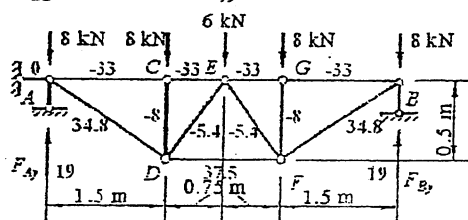
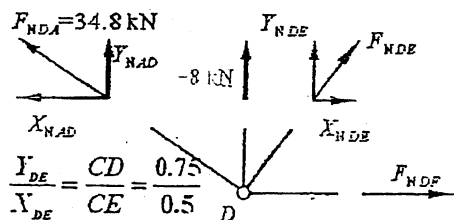
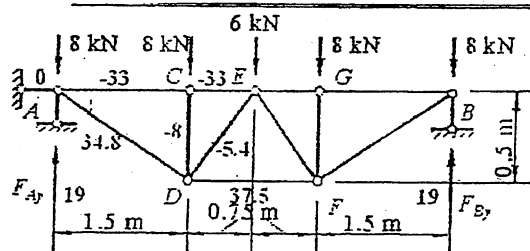
3.5.2 桁架的计算方法

3.5.2.1 结点法:

以只有一个结点的隔离体为研究对象, 用汇交力系的平衡方程求解各杆内力的方法。

例1. 求以下桁架各杆的内力。





1. 小结:

- 1) 以结点作为平衡对象, 结点承受汇交力系作用。
- 2) 按“组成顺序相反”的原则, 逐次建立各结点的平衡方程, 则桁架各结点未知内力数目一定不超过独立平衡方程数。
- 3) 由结点平衡方程可求得桁架各杆内力。

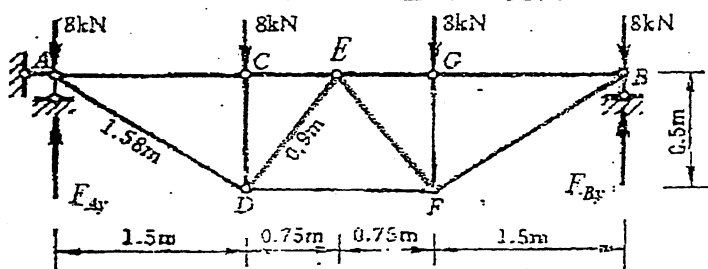
2. 简化计算方法:

- 1) 对称性的利用: 如果结构的杆件轴线对某轴(空间桁架为某面)对称, 结构的支座也对同一条轴对称的静定结构, 则该结构称为对称结构。

对称结构在对称或反对称的荷载作用下, 结构的内力和变形(也称为反应)必然对称或反对称, 这称为对称性。

对称结构受对称荷载作用, 内力和反力均为对称:

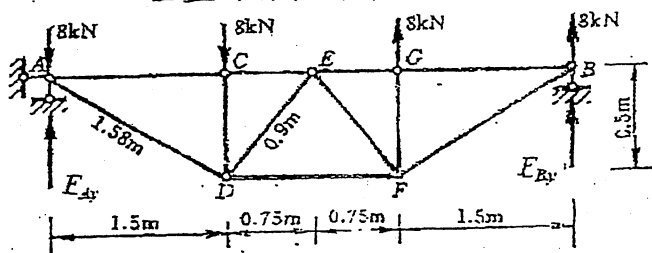
E点无荷载, 红色杆不受力



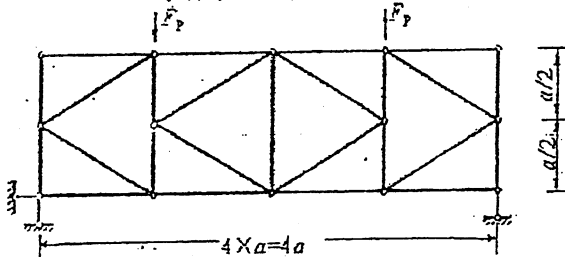
23

对称结构受反对称荷载作用, 内力 and 反力均为反对称:

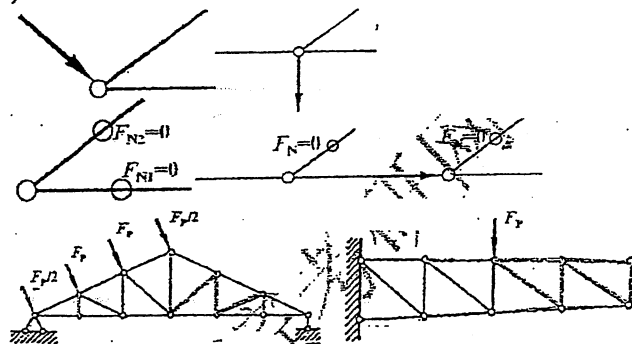
垂直对称轴的杆不受力



对称轴处的杆不受力



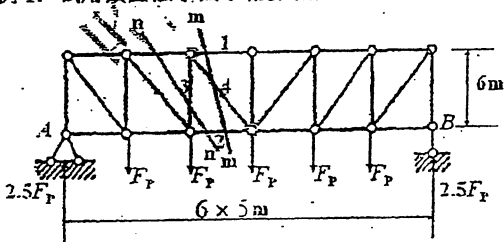
- 2) 结点单杆: 以结点为平衡对象能仅用一个方程求出内力的杆件, 称为结点单杆。利用这个概念, 根据荷载状况可判断此杆内力是否为零。
- 3) 零杆: 零内力杆简称零杆。



3.5.2.2 截面法:

截取桁架的某一部作为隔离体, 由平面任意力系的平衡方程即可求得未知的轴力。对于平面桁架, 由于平面任意力系的独立平衡方程数为 3, 因此所截断的杆件数一般不宜超过 3。

例 1: 试用截面法求图示桁架指定杆件的内力。



$$F_{N1} = -3.75F_P$$

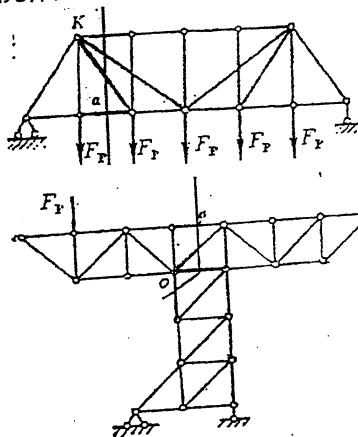
$$F_{N2} = 3.33F_P$$

$$F_{N4} = 0.65F_P$$

$$F_{N3} = -0.50F_P$$

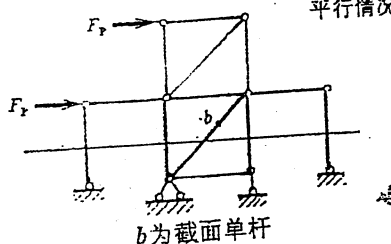
截面单杆:截面法取出的隔离体, 不管其上有几个轴力, 如果某杆的轴力可以通过列一个平衡方程求得, 则此杆称为截面单杆。可能的截面单杆通常有相交型和平行型两种形式。

相交情况



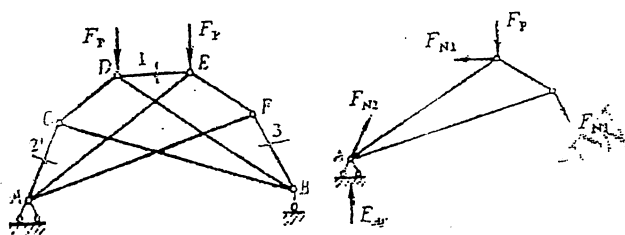
为截面单杆

平行情况



b为截面单杆

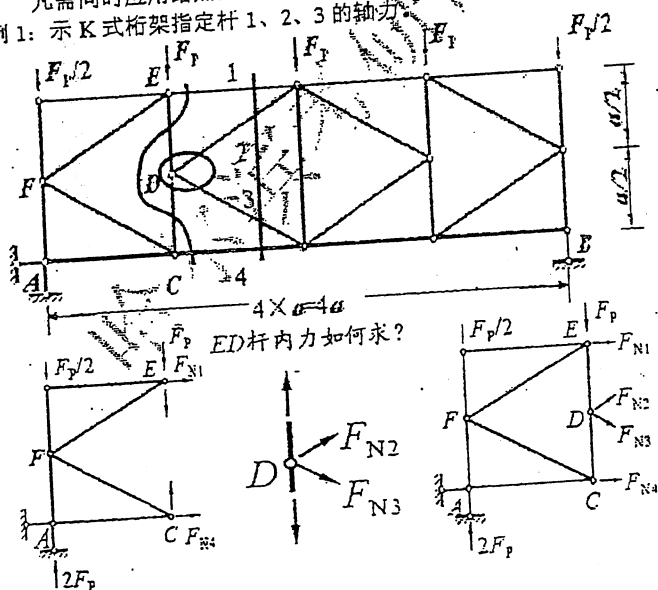
用截面法灵活截取隔离体



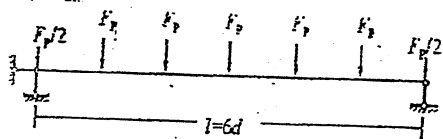
3.5.2.3 联合法:

凡需同时应用结点法和截面法才能确定杆件内力时, 统称为联合法。

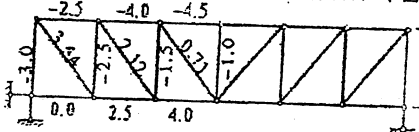
例1: 示K式桁架指定杆1、2、3的轴力



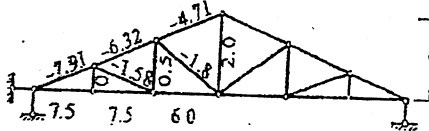
28



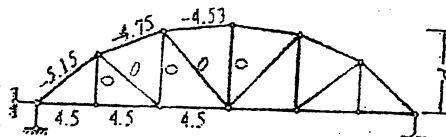
(a) 简支梁，以下各结构荷载、跨度都如图



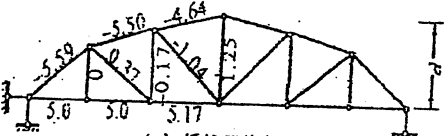
(b) 平行弦桁架



(c) 三角形桁架



(d) 抛物线桁架

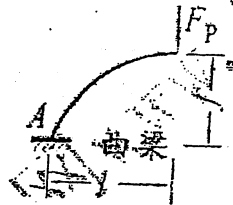
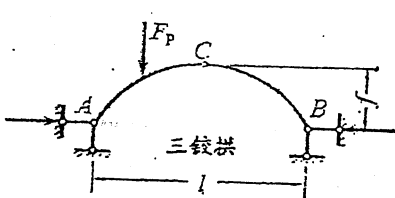


(e) 折线形桁架

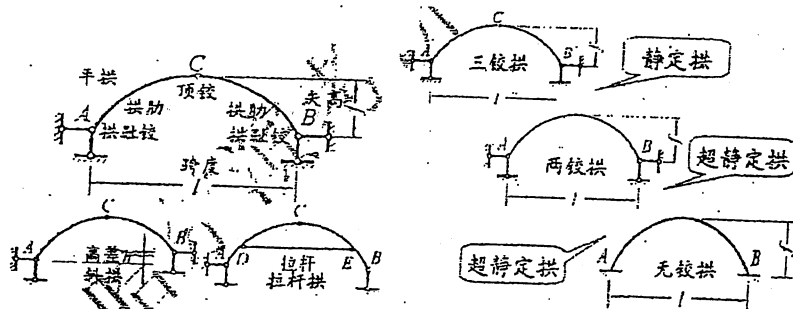
3.6 三角拱受力分析★★★

3.6.1 拱的概念

1. 拱—杆轴线为曲线，在竖向荷载作用下会产生水平推力的结构。区别于曲梁（轴线为曲线在竖向荷载作用下不产生水平反力）



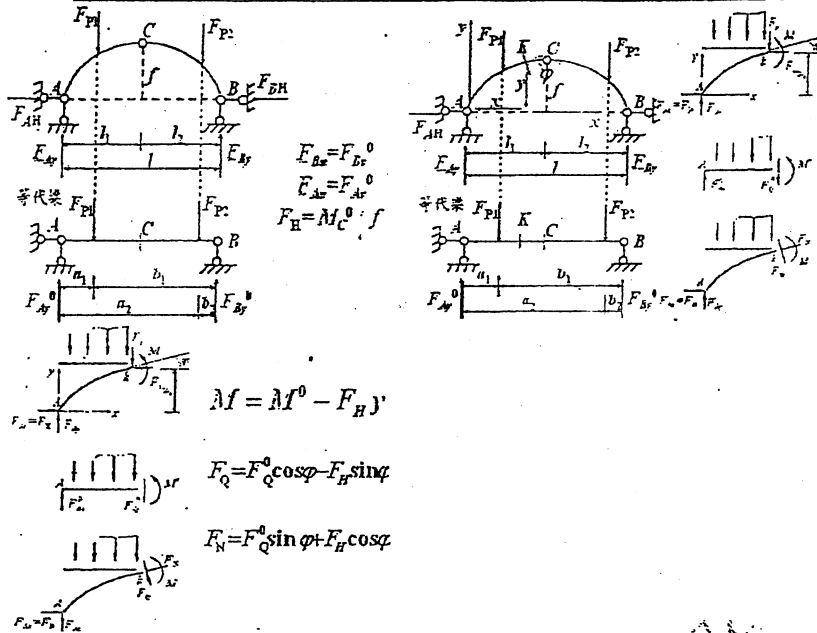
2. 拱的有关名称



3.6.2 拱的解法

三铰拱的反力只与荷载及三个铰的位置有关，与拱轴线形状无关。荷载与跨度一定时，水平推力与矢高成反比。

27



1. 三铰拱的内力不但与荷载及三个铰的位置有关，而且与拱轴线的形状有关。
2. 由于推力的存在，拱的弯矩比相应简支梁的弯矩要小。
3. 三铰拱在竖向荷载作用下轴向受压。

3.6.3 三角拱的合理拱轴线

使拱在给定荷载下只产生轴力的拱轴线，被称为与该荷载对应的合理拱轴。

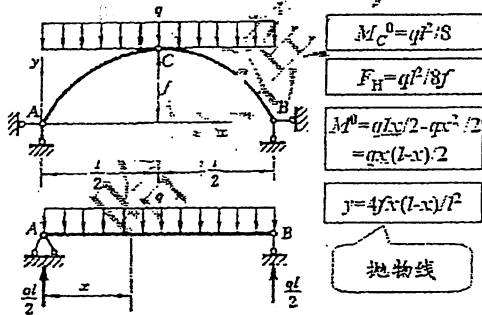
在竖向荷载作用下，三铰拱的合理拱轴线的纵坐标与相应简支梁弯矩图的竖标成正比。

对于三铰平拱受竖向荷载作用：

$$M = M^0 - F_H y = 0$$

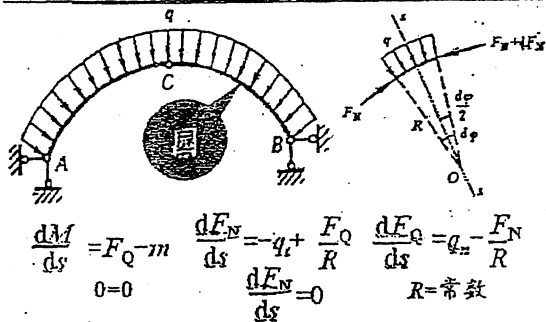
$$y = \frac{M^0}{F_H}$$

例一、示对称三铰拱在均布荷载作用下的合理拱轴线



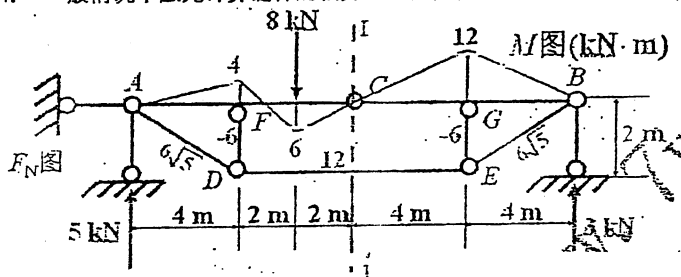
例二、铰拱在垂直于拱轴线的均布荷载作用下的合理拱轴线。

28



3.7 组合结构的内力分析★★★

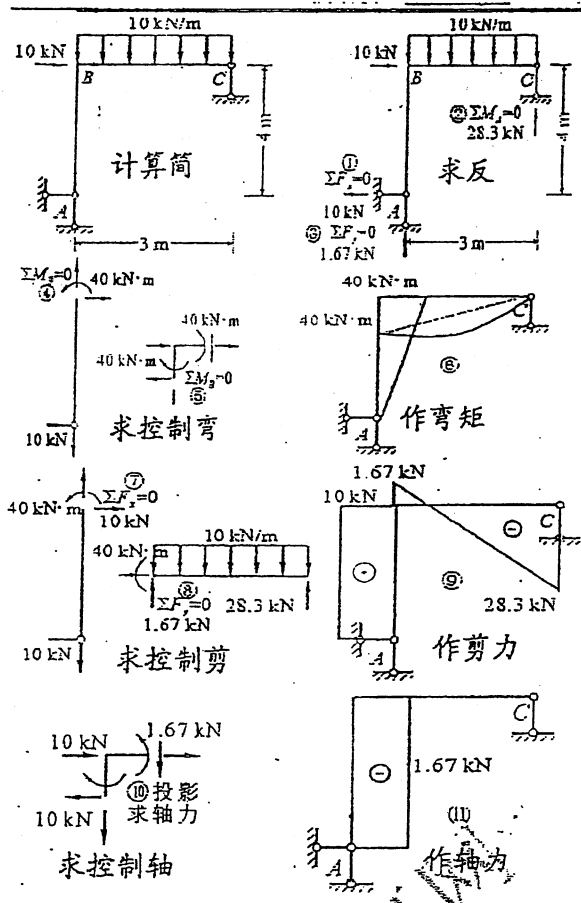
1. 组合结构——由链杆和受弯杆件混合组成的结构。
2. 特点：有桁架杆，又有弯曲杆，般有一些关键的联系杆。
3. 求解的关键点：择恰当方法解决关键杆内力计算，择截面时，必须注意区分两类杆。
4. 一般情况下应先计算链杆的轴力，取隔离体时宜尽量避免截断受弯杆件。



3.8 受弯结构做内力图的顺序

材料力学中，一般是先作剪力图，再作弯矩图。而在结构力学中，对梁和刚架等受弯结构作内力图的顺序为：

1. 一般先求反力（不一定是全部反力）。
2. 利用截面法求控制截面弯矩，以便将结构用控制截面拆成为杆段（单元）。
3. 在结构图上利用区段叠加法作每一单元的弯矩图，从而得到结构的弯矩图。
4. 以单元为对象，对杆端取矩可以求得杆端剪力，在结构图上利用微分关系作每单元的剪力图，从而得到结构剪力图。需要指出的是，剪力图可画在杆轴的任意一侧，但必须标注正负号。以未知数个数不超过两个为原则。取结点由平衡求单元杆端轴力，在结构图上利用微分关系作每单元的轴力图，作法和剪力图一样，从而得到结构轴力图。
5. 综上所述，结构力学作内力图顺序为“先区段叠加作 M 图，再由 M 图作 FQ 图，最后 FQ 作 FN 图”。需要指出的是，这种作内力图的顺序对于超静定结构也是适用的。



3.9 静定结构的性质★★★

3.9.1 静定结构基本性质

满足全部平衡条件的解答是静定结构的唯一解答。
证明略。

3.9.2 静定结构派生性质

1. 支座微小位移、温度改变不产生反力和内力
2. 若取出的结构部分（不管其可变性）能够平衡外荷载，则其他部分将不受力
3. 在结构某几何不变部分上荷载做等效变换时，荷载变化部分之外的反力、内力不变
4. 结构某几何不变部分，在保持与结构其他部分连接方式不变的前提下，用另一方式组成的不变体代替，其他部分的受力情况不变
5. 仅基本部分受荷时，只此受荷部分有反力和内力

注意：上述性质均根源于基本性质，各自结论都有一定前提，必须注意！

第4章 静定结构的位移计算

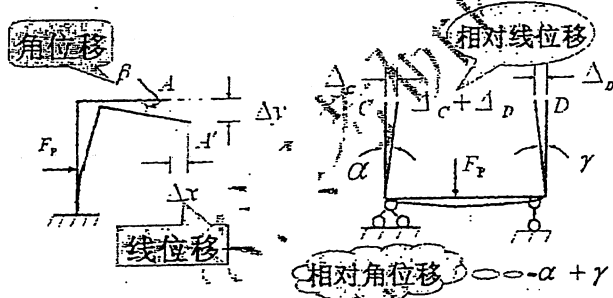
4.1 静定结构位移计算应掌握的知识点

1. 变形体虚位移原理证明的基本思路是什么？
2. 变形体虚功原理与刚体虚功原理有何区别和联系？★★
3. 变形体虚功原理证明中何时用到平衡条件？何时用到变形协调条件？
4. 结构可能产生哪些类型的广义位移？与其相对应可能有哪些类型的广义力？
5. 为什么线弹性实共有 $1/2$ ，而虚功没有 $1/2$ ？
6. 试写出平面应力状态的虚位移原理虚功方程。
7. 单位荷载法求位移时，平衡的力状态是什么？协调的位移状态是什么？★★
8. 为什么说单位广义力是一个单位 1 的量？
9. 建立位移计算公式的关键是什么？如果已知非线性的力-位移（弯矩-曲率，剪力-剪应变角，轴力-伸缩）关系，如何剪力荷载作用下的位移计算一般公式？
10. 试说明位移计算一般公式的适用条件、各项的物理意义。
11. 试说明荷载下位移计算一般公式的适用条件、各项的物理意义。
12. 图乘法的适用条件是什么？对变截面梁或拱能否用图乘法？图乘法公式中正负号如何确定？★★★
13. 图乘法求位移时应注意避免哪些易犯的错误？
14. 增加各杆刚度是否一定能减小荷载作用引起的结构位移？
15. 如何证明功的互等定理？
16. 何谓位移互等定理？有人说 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 仅是数值相等，量纲和单位是不等的，对吗？为什么？★
17. 反力互等定理是否适用于静定结构？这时会得到什么结果？
18. 位移-反力互等定理是否适用于静定结构？
19. 反力和位移-反力互等定理是否仅仅是数值相等，量纲和单位并不相等？

4.2 位移计算的基本理论

4.2.1 概述

1. 结构的位移



线位移、角位移、相对线位移、角位移等统称广义位移

引起结构位移的原因：荷载、温度改变 ΔT 、支座移动 Δc 、制造误差 δ 等。

2. 计算位移的目的

- 1) 刚度要求；
- 2) 超静定、动力和稳定计算；
- 3) 施工要求。

3. 本章位移计算的假定

- 1) 线弹性
 - 2) 小变形
 - 3) 理想联结
- 叠加原理适用

4.2.2 变形体虚功原理★★

4.2.2.1 功、实功和虚功

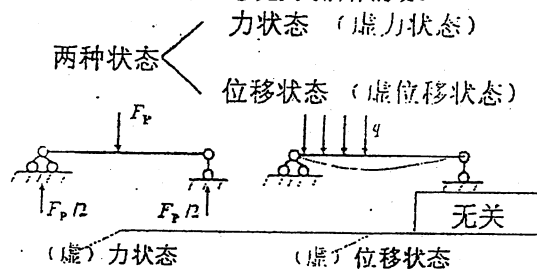
功：力×力方向位移之总和。

广义力：功的表达式中，与广义位移对应的项。

功：广义力×广义位移之总和。

实功：广义力在自身所产生的位移上所作的功。

虚功：广义力与广义位移无关时所作的功。



注意：

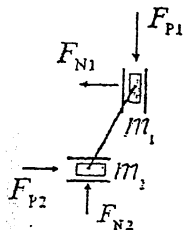
1. 属同一体系；
2. 均为可能状态。即位移应满足变形协调条件；力状态应满足平衡条件。
3. 位移状态与力状态完全无关；

4.2.2.2 变形杆件的虚功原理

1. 质点系的虚位移原理

具有理想约束的质点系，在某一位置处于平衡的必要和充分条件是：对于任何可能的虚位移，作用于质点系的主动力所做虚功之和为零。也即：

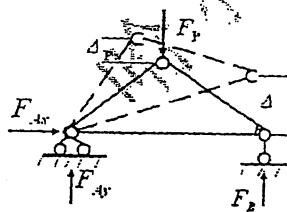
$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$



2. 刚体系的虚功原理

去掉约束而代以相应的反力，该反力便可看成外力。则有：刚体系处于平衡的必要和充分条件是：对于任何可能的虚位移，作用于刚体系的所有外力所做虚功之和为零。

$$-F_P \Delta_P + F_{B1} \Delta_{B1} + F_{B2} \Delta_{B2} = 0$$



3. 变形体的虚功原理

原理的表述：任何一个处于平衡状态的变形体，当发生任意一个虚位移时，变形体所受外力在虚位移时所做的总虚功 δW_e ，恒等于变形体所接受的总虚变形功 δW_i 。也即恒有如下虚功方程成立：

$$\delta W_e = \delta W_i$$

证明略。

32

4.2.2.3 需要强调的几个问题

虚功原理里存在两个状态：力状态必须满足平衡条件；位移状态必须满足协调条件。因此原理仅是必要性命题。

原理的证明表明，原理适用于任何力学行为(线性和非线性)的变形体，适用于任何结构。

由于外力在变形虚位移上所作的功相对分割面内力的虚变形功为高阶小量，因此许多文献上称 δW_i 为内力总虚功。

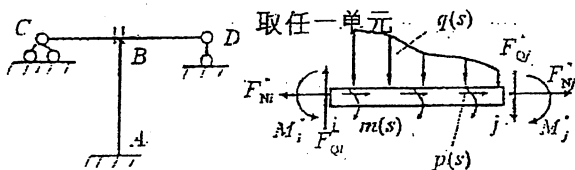
原理可有两种应用：实际待分析的平衡力状态，虚设的协调位移状态，将平衡问题化为几何问题来求解。

实际待分析的协调位移状态，虚设的平衡力状态，将位移分析化为平衡问题来求解。

第一种应用一些文献称为“虚位移原理”，而将第二种应用称为“虚力原理”。更确切的说法为，两种应用的依据是上述两原理的必要性命题。上述两原理都是充分、必要性命题，它们和虚功原理是有区别的。

质点系是一个离散化体系，变形体是一个连续体。我们认为，所谓将质点系虚位移原理“应用于变形体”是不妥当的。

当变形体为杆件体系时，如：



δW_e 的计算：

当无结点荷载时， $\delta W_e = \sum \int [p \delta u + q \delta v + m \delta \theta] ds$

当有结点荷载时

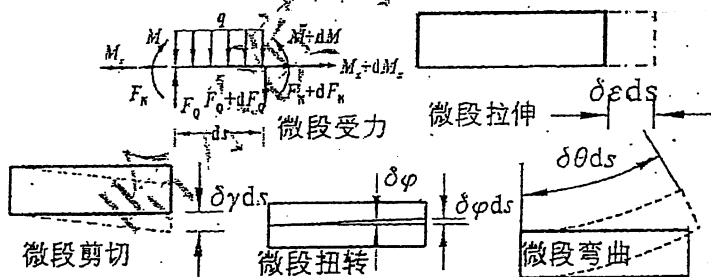
$$\delta W_e = \sum \int [p \delta u + q \delta v + m \delta \theta] ds$$

$$+ \sum [F_N \delta u + F_Q \delta v + M \delta \theta]$$

结点荷载

δW_i 的计算：

取微段，其受力如下，变形可看成有如下几部分



对于直杆体系，由于变形互不耦连，所以

$$\delta W_i = \sum \int [F_N \delta \epsilon + F_Q \delta \gamma + M \delta \phi + M \delta \theta] ds$$

4.2.2.4 杆系结构虚功方程

根据上述推证，可得杆系结构虚功方程如下

32

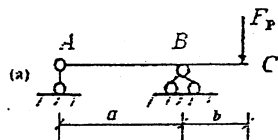
$$\begin{aligned}\delta W_e &= \sum \int [p \delta u + q \delta v + m \delta \theta] ds \\ &+ \sum [F_{Px} \delta u + F_{Py} \delta v + M \delta \theta]_i \\ &= \sum \int [F_N \delta \epsilon + F_Q \delta \gamma + M_x \delta \phi \\ &+ M \delta \theta] ds = \delta W_i\end{aligned}$$

以上结论与材料物理性质及具体结构无关，因此，虚功原理虚功方程既适用于一切线性结构，也适用于一切非线性结构。

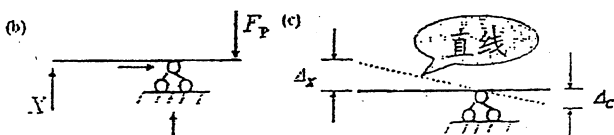
4.2.2.5 虚功原理的两种应用

1. 虚功原理用于虚设的协调位移状态与实际的平衡力状态之间。

例. 求 A 端的支座反力



解：去掉 A 端约束并代以反力 X，构造相应的虚位移状态如图(b)、(c)



待分析平衡的力状态 虚设协调的位移状态
由外力虚功总和为零，即：

$$X \cdot \Delta_x + P \cdot \Delta_c = 0$$

$$X \cdot \Delta_x + P \cdot \frac{b}{a} \Delta_x = 0$$

$$\Rightarrow X = -\frac{b}{a} P$$

通常取 $\Delta_x = 1 = \delta$, 单位位移法

几点说明：

1) 对静定结构，这里实际用的是刚体虚位移原理，实质上是实际受力状态的平衡方程，即 $\sum M_A = 0$

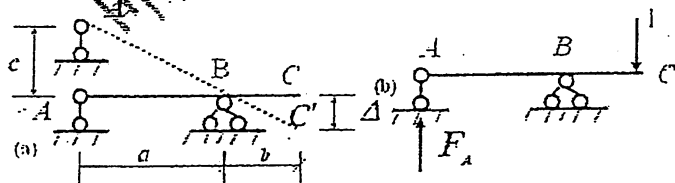
2) 虚位移与实际力状态无关，故可设 $\delta_c = 1$

3) 求解时关键一步是找出虚位移状态的位移关系。

特点：用几何法来解静力平衡问题。

2. 虚功原理用于虚设的平衡力状态与实际的协调位移状态之间。

例. 求 A 端支座发生竖向位移 c 时引起 C 点的竖向位移 Δ。



解：首先构造出相应的虚设力状态，即，在拟求位移之点 (C 点) 沿拟求位移方向 (竖向) 设置单位荷载。

33

由 $\sum M_A = 0$ 求得: $F_A = -\frac{b}{a}$

虚功方程为: $1 \cdot \Delta + F_A \cdot c = 0$

$$\Delta = -\frac{b}{a}c$$

——单位荷载法

几点说明:

- 1) 所建立的虚功方程, 实质上是几何方程。
- 2) 虚设的力状态与实际位移状态无关, 故可设单位广义力 $P=1$ 。
- 3) 求解时关键一步是找出虚力状态的静力平衡关系。

单位位移法的虚功方程 \longleftrightarrow 平衡方程

单位荷载法的虚功方程 \longleftrightarrow 几何方程

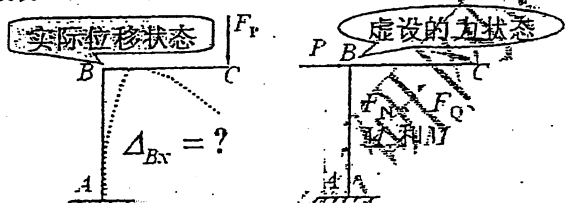
4.3 单位荷载法★★

4.3.1 位移计算的一般公式

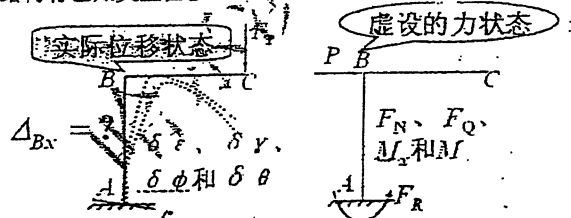
将虚功原理用于实际协调位移和虚设平衡力状态间已介绍过——单位荷载法。
下面从虚功方程入手, 讨论杆系结构位移计算的一般公式。杆系结构虚功方程为

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \sum \int [p \delta u + q \delta v + m \delta \theta] ds \\ &+ \sum [F_{P_i} \delta u_i + F_{Q_i} \delta v_i + M_i \delta \theta_i] \\ &= \sum \int [F_N \delta \epsilon + F_Q \delta \gamma + M_x \delta \phi \\ &+ M_y \delta \theta] ds = \delta W_i \end{aligned}$$

设待求的实际广义位移为 Δ , 与 Δ 对应的广义力为 P 。设仅在广义力 P 作用下, 与之平衡的轴力、剪力、扭矩和弯矩分别为 F_N 、 F_Q 、 M_x 和 M_y 。



又设与内力 F_N 、 F_Q 、 M_x 和 M_y 对应的微段实际变形分别为 δ 、 ϵ 、 δ 、 γ 、 δ 、 ϕ 和 δ 、 θ 。若结构有已知支座位移 C_i , 与其对应的由广义力 P 引起的支座反力为 F_{Ri}



则杆系结构虚功方程为

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \sum F_{P_i} c_i + P \Delta \\ &= \sum \int [F_N \delta \epsilon + F_Q \delta \gamma + M_x \delta \phi \\ &+ M_y \delta \theta] ds = \delta W_i \end{aligned}$$

虚功方程等式两边同除广义力 P , 并记单位广义力 ($P/P=1$) 作用下, 与之平衡的轴力、剪力、扭矩和弯矩分别为 F_N 、 F_Q 、 M_x 和 M_y 。单位广义力引起的, 与已知位移对应的反力为 F_{Ri} 。

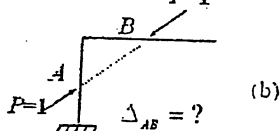
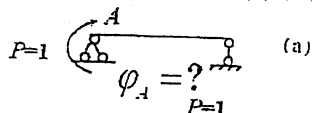
则杆系结构虚功方程改写为 (位移计算的一般公式):

$$\Delta = \sum \bar{F}_{Ri} c_i + \sum \int [\bar{F}_N \delta \epsilon + \bar{F}_Q \delta \gamma + \bar{M} \delta \phi + \bar{M} \delta \theta] ds$$

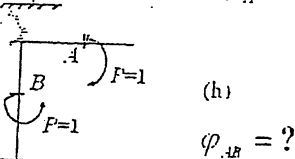
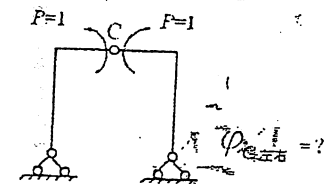
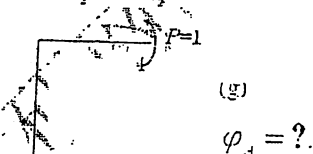
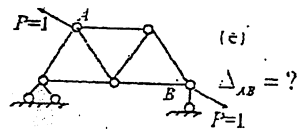
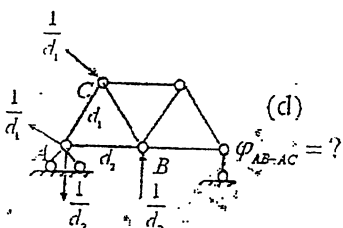
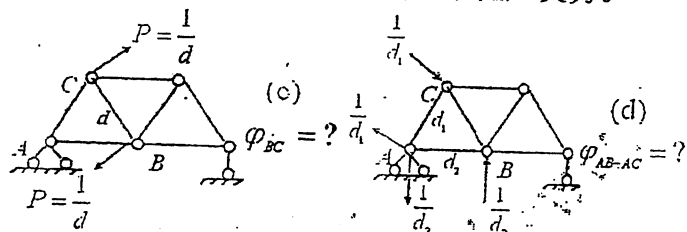
一般公式的普遍性表现在:

1. 位移原因: 荷载、温度改变、支座移动等;
2. 结构类型: 梁、刚架、桁架、拱、组合结构; 静定和超静定结构;
3. 材料性质: 线性、非线性;
4. 变形类型: 弯曲变形、拉(压)变形、剪切变形;
5. 位移种类: 线位移、角位移; 相对线位移和相对角位移。

试确定指定广义位移对应的单位广义力。



试确定指定广义位移对应的单位广义力。



4.3.2 荷载作用下位移计算的一般公式

在仅荷载作用时的位移计算一般公式:

在仅荷载作用时的位移计算一般公式

$$\Delta = \sum \int (F_N \delta \epsilon + F_Q \delta \gamma + M \delta \theta) ds$$

$$\Delta = \sum \int (F_N \delta \epsilon_p + F_Q \delta \gamma_p + M \delta \theta_p) ds$$

扭转项

$$+ \int M_t \delta \phi_p ds$$

对于由线弹性直杆组成的结构, 有:

$$\delta \epsilon_p = \frac{F_{NP}}{EA}, \delta \gamma_p = \frac{k F_{QP}}{GA}, \delta \theta_p = \frac{M_P}{EI}, \delta \phi_p = \frac{M_{tP}}{EI_t}$$

36

$$\Delta_P = \sum \int \left(\frac{F_N F_{NP}}{EA} + \frac{k F_Q F_{QP}}{GA} + \frac{MM_P}{EI} \right) ds + \int \frac{M_x M_{xP}}{GI_P} ds$$

轴向
剪切
弯曲
扭转

式中:

E ——弹性模量; G ——剪切模量;

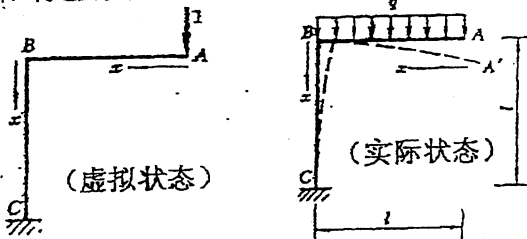
A ——横截面积; I ——截面惯性矩;

K ——截面形状系数。如: 对矩形截面 $k=6/5$; 圆形截面 $k=10/9$ 。

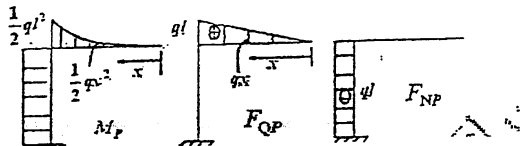
I_P ——截面极惯性矩;

例 1: 求刚架 A 点的竖向位移。

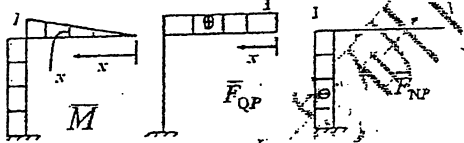
解: 构造虚设状态



分别列出实际状态和虚拟状态中各杆的内力方程 (或画出内力图), 如:



荷载内力图



单位内力图

内力的正负号规定如下:

轴力 F_{NP} , F_N 以拉力为正;

剪力 F_{QP} , F_Q 使微段顺时针转动者为正;

弯矩 M_P , M 只规定乘积的正负号。使杆件同侧纤维受拉时, 其乘积取为正。

将内力方程代入公式，有：

$$\Delta_{Ay} = \sum \int \frac{\bar{M}M_P ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} + \sum \int \frac{k \bar{F}_Q F_{QP} ds}{GA}$$

$$= \frac{5ql^4}{8EI} \left(1 + \frac{8I}{5AI^2} + \frac{4kEI}{5GA I^2} \right)$$

讨论：引入符号

$$(\Delta_{Ay})_M \sim 1, \quad (\Delta_{Ay})_N \sim \frac{8I}{5AI^2}, \quad (\Delta_{Ay})_Q \sim \frac{4kEI}{5GA I^2}$$

弯曲
轴向
剪切

设杆件截面为 $b \times h$ 的矩形截面杆，有：

$$A = bh, \quad I = \frac{bh^3}{12}, \quad k = \frac{6}{5}$$

$$(\Delta_{Ay})_N \sim \frac{2}{15} \left(\frac{h}{l} \right)^2, \quad (\Delta_{Ay})_Q \sim \frac{2}{25} \frac{E}{G} \left(\frac{h}{l} \right)^2$$

问题：% 的取值范围是什么？

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad 0 < \mu \leq 0.5$$

$$\Rightarrow 2 < E/G \leq 3$$

取： $h/l = 1/10$, $E/G = 2.5$,

有：

$$(\Delta_{Ay})_N \sim \frac{1}{750}, \quad (\Delta_{Ay})_Q \sim \frac{1}{500}$$

即： $\Delta_{Ay} = \frac{5ql^4}{8EI} \left(1 + \frac{1}{750} + \frac{1}{500} \right)$

$$\frac{(\Delta_{Ay})_Q}{(\Delta_{Ay})_M} = 0.2\%, \quad \frac{(\Delta_{Ay})_N}{(\Delta_{Ay})_M} = 0.13\%$$

因此对受弯细长杆件，通常略去 F_N, F_Q 的影响。

4.3.3 几点讨论（只有荷载作用）：

$$\Delta_P = \sum \int \frac{\bar{M}M_P ds}{EI} + \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} + \sum \int \frac{k \bar{F}_Q F_{QP} ds}{GA}$$

一般来说，剪切变形影响很小，通常忽略不计。

38

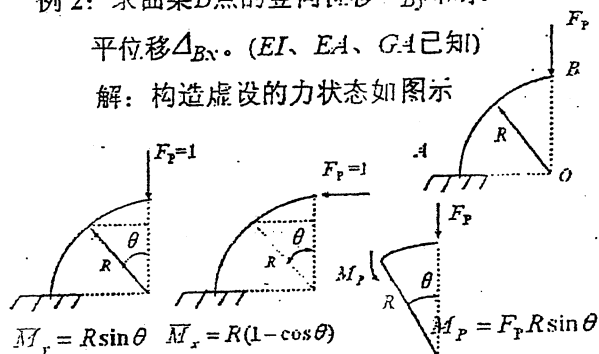
1. 对梁和刚架: $\Delta_P = \sum \int \frac{\bar{M} M_P ds}{EI}$

2. 对桁架: $\Delta_P = \sum \int \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA} = \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA}$

3. 对组合结构: $\Delta_P = \sum \int \frac{\bar{M} M_P ds}{EI} + \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} l}{EA}$

例 2: 求曲梁 B 点的竖向位移 Δ_{By} 和水平位移 Δ_{Bx} . (EI 、 EA 、 GJ 已知)

解: 构造虚设的力状态如图示



将内力方程代入位移计算公式, 可得

$$\Delta_{By} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_P \bar{M}_y}{EI} ds = \int_0^{\pi/2} \frac{M_P \bar{M}_y}{EI} R d\theta = \frac{\pi P R^3}{4EI} (\downarrow)$$

同理有:

$$\Delta_{Bx} = -\frac{P R^3}{2EI} (\rightarrow)$$

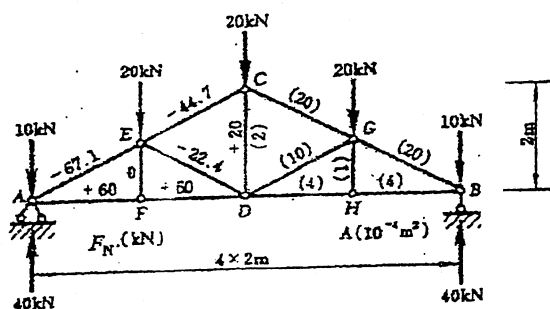
三铰拱的分析同此类似, 但一般要考虑轴力对位移的贡献, 即

$$\Delta_P = \sum \int \frac{\bar{M} M_P ds}{EI} + \sum \frac{\bar{F}_N F_{NP} ds}{EA}$$

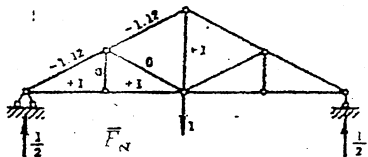
例 3: 求对称桁架 D 点的竖向位移 Δ_{Dy} . 图中

右半部各括号内数值为杆件的截面积 A

(10^{-4} m^2), 设 $E=210 \text{ GPa}$.



解：构造虚拟状态并求出实际和虚拟状态中各杆的内力



代入公式得： $\Delta_{D_1} = -\frac{F_N F_{N'} l}{EA} = 8 \text{ mm} (\downarrow)$

4.4 图乘法★★

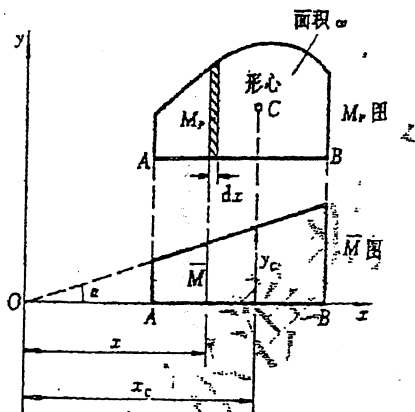
这部分主要内容：

1. 图乘法： $\int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds, \int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds = \frac{\omega y_c}{EI}$
2. 几种常见图形的面积和形心位置的确定方法；
3. 注意事项；
4. 应用举例。

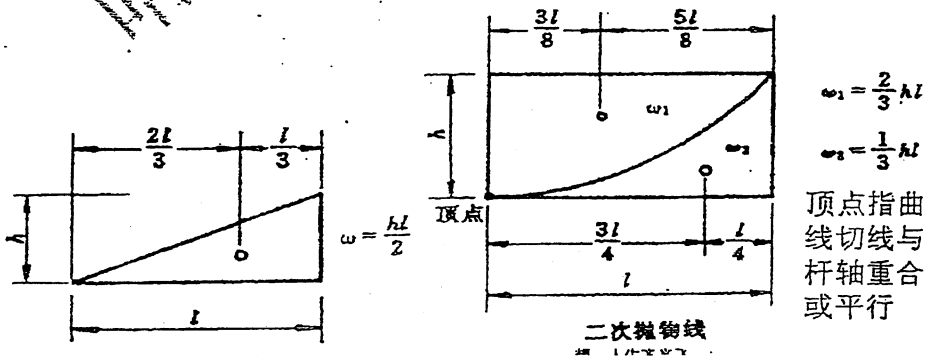
4.4.1 图乘法

$$\int \frac{\overline{M} M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} \int \overline{M} M_P ds = \frac{1}{EI} \int x \tan \alpha \cdot M_P dx = \frac{\tan \alpha}{EI} \int x M_P dx$$

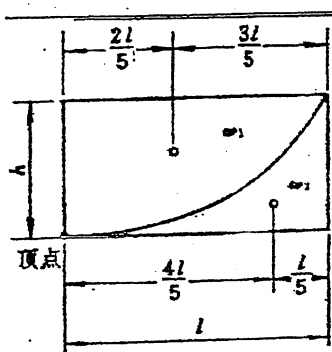
$$= \frac{\tan \alpha}{EI} \cdot \omega \cdot x_c = \frac{1}{EI} \omega y_c$$



4.4.2 几种常见图形的面积和形心位置的确定方法



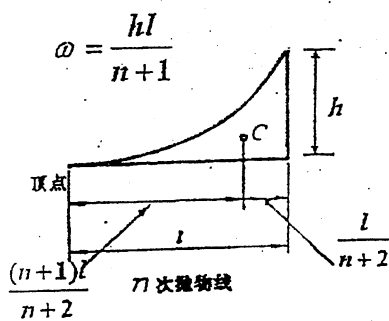
40



三次抛物线

$$\omega_1 = \frac{3}{4}hl$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4}hl$$



$$\omega = \frac{hl}{n+1}$$

4.4.3 注意事项:

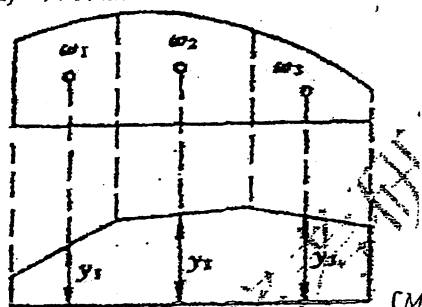
1. 图乘法的应用条件:

- 1) 等截面直杆, EI 为常数;
- 2) 两个 M 图中应有一个是直线;
- 3) y_c 应取自直线图中。

2. 若 ω 与 y_c 在杆件的同侧, ωy_c 取正值; 反之, 取负值。

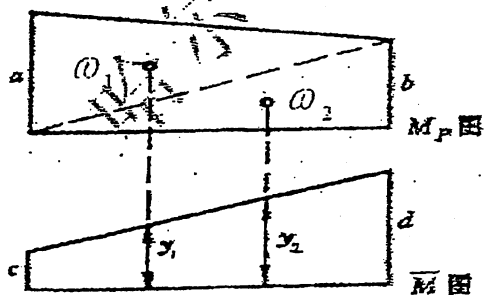
3. 如图形较复杂, 可分解为简单图形。

1) 曲-折组合



$$\int M_i M_K dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 = \sum \omega_j y_j$$

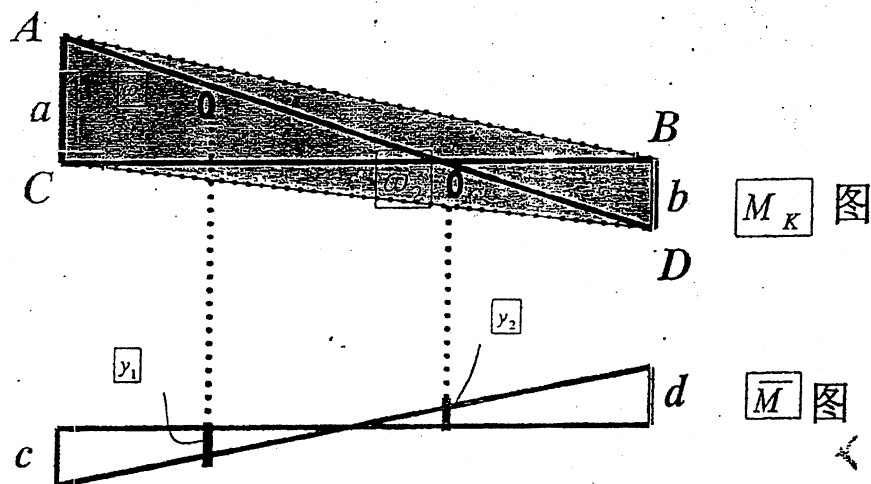
2) 梯-梯同侧组合



$$\int M_i M_K dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 \begin{cases} y_1 = \frac{(2c+d)}{3} \\ y_2 = \frac{(c+2d)}{3} \end{cases}$$

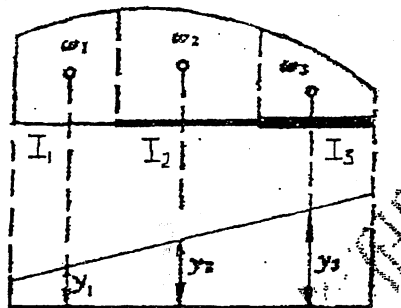
3) 梯-梯异侧组合

44



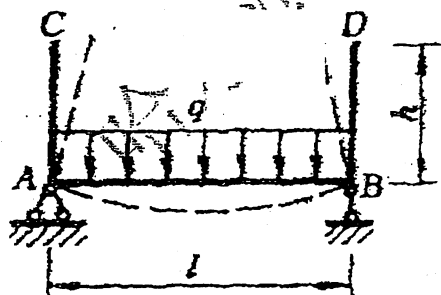
$$\int M_i M_K dx = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 \begin{cases} y_1 = \frac{(2c+d)}{3} \\ y_2 = \frac{(c+2d)}{3} \end{cases} \quad bc \text{ 取负值}$$

4) 阶梯形截面杆

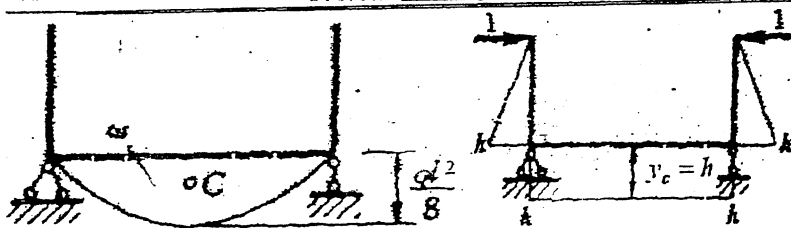


4.4.4 应用举例

例 1. 已知 EI 为常数, 求刚架 C, D 两点距离的改变 Δ_{CD} 。



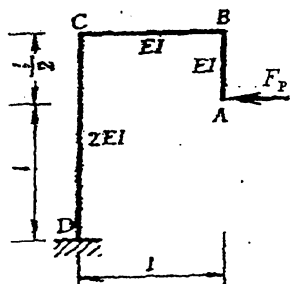
解: 作荷载内力图和单位荷载内力图



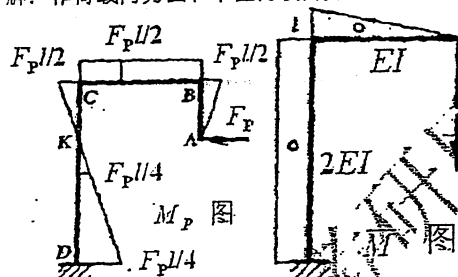
$$\Delta_{cd} = \sum \frac{\omega y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \times \frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times l \times h$$

$$= \frac{qhl^3}{12EI} (\rightarrow \leftarrow)$$

例 2. 已知 EI 为常数, 求刚架 A 点的竖向位移 Δ_A , 并绘出刚架的变形曲线。



解: 作荷载内力图和单位荷载内力图

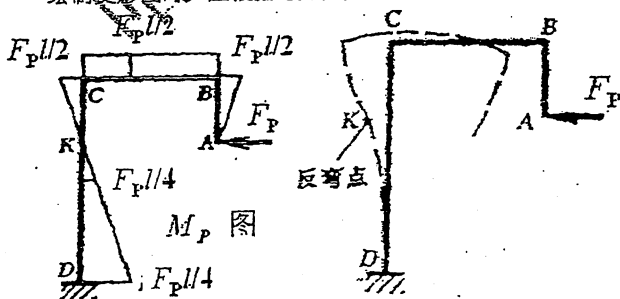


在 \bar{M} 图求面积, 在 M_P 图取竖标, 有:

$$\Delta_A = \sum \frac{\omega y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \times \frac{1}{2} \times l \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2EI} \times l \times \frac{3l}{2} \times \frac{F_P l}{4}$$

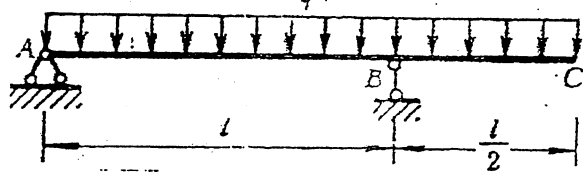
$$= -\frac{F_P l^3}{16EI} (\downarrow)$$

绘制变形图时, 应根据弯矩图判断杆件的凹凸方向, 注意反弯点的利用。如:

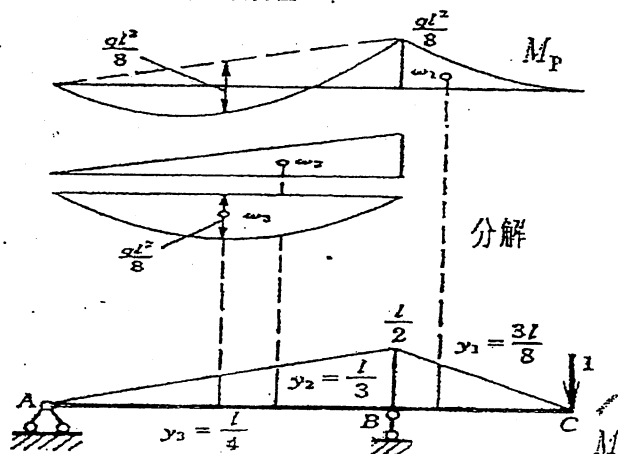


43

例 3. 已知 EI 为常数, 求 Δ_{Cy} .



解: 作荷载和单位荷载的内力图



$$\Delta_{Cy} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times \frac{l}{2} \right) \times \frac{3l}{8} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{ql^2}{8} \times l \right) \times \frac{l}{3} - \left(\frac{2}{3} \times \frac{ql^2}{8} \times l \right) \times \frac{l}{4} \right] = \frac{ql^4}{128EI} (\downarrow)$$

4.5 其他外因引起的位移计算★

4.5.1 静定结构温度变化时的位移计算★

一般公式

$$\Delta = \sum \int (\bar{F}_N \delta \epsilon + \bar{F}_Q \delta \gamma + \bar{M} \delta \theta) ds - \sum \bar{F}_{Ri} c_i$$

荷载位移公式

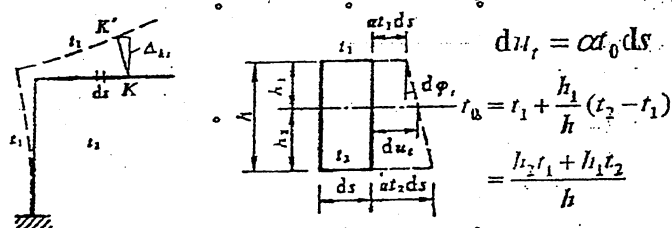
$$\Delta_P = \sum \int (\bar{F}_N \delta \epsilon_P + \bar{F}_Q \delta \gamma_P + \bar{M} \delta \theta_P) ds$$

温度位移公式

$$\Delta_t = \sum \int (\bar{F}_N \delta \epsilon_t + \bar{F}_Q \delta \gamma_t + \bar{M} \delta \theta_t) ds$$

48

图示结构，设外侧温度升高 t_1 ，内侧温度升高 t_2 ，求 K 点的竖向位移 $(\Delta_{Ky})_t$ 。

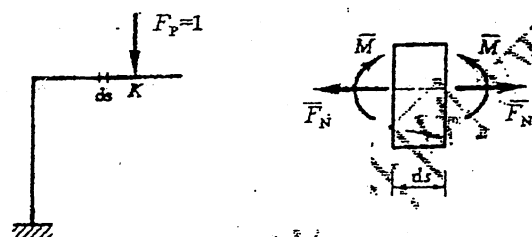


设温度沿杆件截面厚度为线性分布，杆轴温度 t_0 与上、下边缘的温差 Δt 为：

$$t_0 = \frac{h_1 t_2 + h_2 t_1}{h} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

另外，温度变化时，杆件不引起剪应变，微段轴向伸长和截面转角为：

$$du_t = \alpha_0 ds \quad d\theta_t = \frac{\alpha \Delta t ds}{h} \quad \alpha \leftrightarrow \text{线膨胀系数}$$



将温度引起的变形代入公式，可得

$$(\Delta_{Ky})_t = \sum \int (\bar{F}_N du_t + \bar{F}_Q dv_t + \bar{M} d\theta_t)$$

$$= \sum \int \bar{F}_N \alpha_0 ds + \sum \int \bar{M} \frac{\alpha \Delta t ds}{h}$$

沿杆长温度不变 $\Rightarrow \sum \alpha_0 \int \bar{F}_N ds + \sum \alpha \Delta t \int \frac{\bar{M} ds}{h}$

对等截面直杆 $\Rightarrow \sum \alpha_0 \omega_N + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_M$

F_N 图面积

M 图面积

上式中的正、负号：

若温度以升高为正，则轴力以拉为正；

若 \bar{M} 和 Δt 使杆件的同一边产生拉伸变形，其乘积为正。

几种情况：

温度引起的轴向变形影响不能少。

咨询

对梁和刚架: $\Delta_t = \sum \alpha_0 \omega_N + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_M$

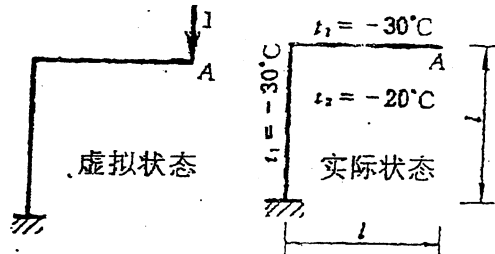
对桁架: $\Delta_t = \sum \alpha_0 \bar{F}_N l$

问题: 当桁架有制造误差 Δ_l 时, 如何求位移?

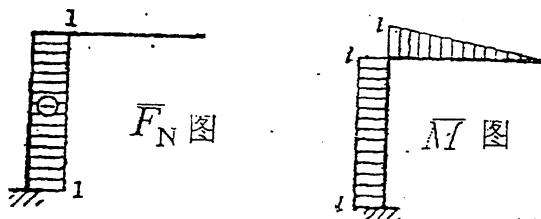
$\Delta_M = \sum \bar{F}_N \Delta_l$

例: 刚架施工时温度为 20°C , 试求冬季外侧温度为 -10°C , 内侧温度为 0°C 时 A 点的竖向位移 Δ_{Ay} . 已知 $l=4\text{m}$, $\alpha=10^{-5}$, 各杆均为矩形截面杆, 高度 $h=0.4\text{m}$.

解: 构造虚拟状态



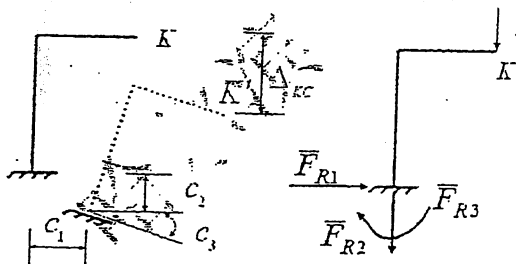
单位荷载内力图为:



$t_0 = \frac{(-10-20) + (0-20)}{2} = -25^\circ\text{C}$, $\Delta t = -20 - (-30) = 10^\circ\text{C}$

$\Delta_{Ay} = \sum \alpha_0 \omega_N + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_M = -0.005\text{m} (\uparrow)$

4.5.2 静定结构支座移动时的位移计算★



实际位移状态

虚拟力状态

静定结构由于支座移动并不产生内力, 材料 (杆件) 也不产生变形, 只发生刚体位移. (该位移也可由几何关系求得). 有

$\therefore du = dv = d\theta = 0$

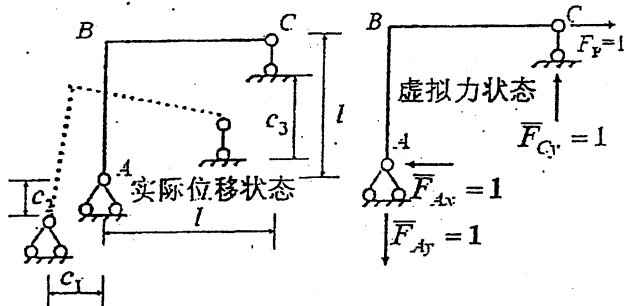
$$\Delta_c = \sum \int (\bar{F}_N du + \bar{F}_Q dv + \bar{M} d\theta) - \sum \bar{F}_{Ri} c_i$$

$$= -\sum \bar{F}_{Ri} c_i$$

例 1: 求 $\Delta_{Cx} = ?$

468

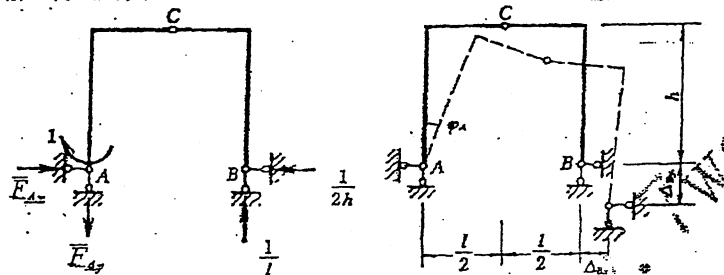
解：构造虚设力状态



$$\Delta_{Cx} = -(1 \times c_1 + 1 \times c_2 - 1 \times c_3) = -(c_1 + c_2 - c_3)$$

例 2: 已知 $l=12\text{m}$, $h=8\text{m}$, $\Delta_{Bx}=0.04\text{m}$, $\Delta_{By}=0.06\text{m}$, 求 $\varphi_A=?$

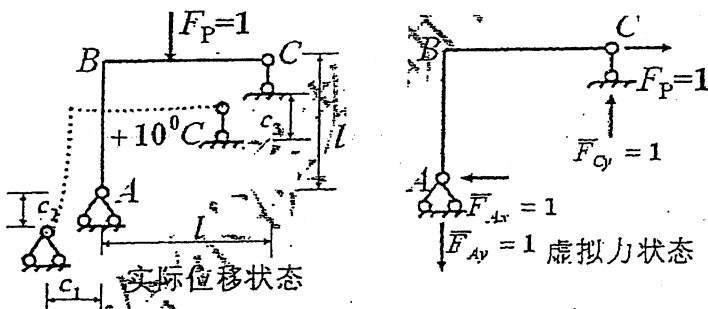
解：构造虚设力状态



$$\varphi_A = -\sum \bar{F}_{Ri} c_i = -\left(-\frac{1}{l} \Delta_{By} - \frac{1}{2h} \Delta_{Bx}\right) = 0.0075 \text{ rad 顺时针}$$

例 3: 求 $\Delta_{Cx}=?$

解：构造虚设力状态



同时考虑荷载、温度和支座位移的影响

$$\Delta_{Cx} = \frac{F_P l^3}{16EI} - (c_1 + c_2 - c_3) + 10\alpha l \left(1 + \frac{l}{h}\right)$$

问题：试给出多因素下的位移计算一般公式

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\sum \bar{F}_{Ri} c_i + \sum \int \bar{F}_N du + \sum \int \bar{F}_Q dv + \sum \int \bar{M} d\theta \\
&= -\sum \bar{F}_{Ri} c_i + \sum \int \bar{F}_N [(du)_P + (du)_I] + \sum \int \bar{F}_Q [(dv)_P + (dv)_I] \\
&\quad + \sum \int \bar{M} [(d\theta)_P + (d\theta)_I] \\
&= -\sum \bar{F}_{Ri} c_i + \sum \int \bar{F}_N (du)_P + \sum \int \bar{F}_Q (dv)_P + \sum \int \bar{M} (d\theta)_P \\
&\quad + \sum \int \bar{F}_N (du)_I + \sum \int \bar{M} (d\theta)_I \\
&= \underbrace{\sum \bar{F}_N F_{NP}}_{\text{支座}} ds + \sum \int \frac{k \bar{F}_Q F_{QP}}{GA} ds \\
&\quad + \sum \int \frac{\bar{M} M_P}{EI} ds + \underbrace{\sum \alpha t_0 \omega_K + \sum \frac{\alpha \Delta t}{h} \omega_M}_{\text{温度}} \\
&= \Delta_C + \Delta_P + \Delta_t
\end{aligned}$$

4.6 线弹性体结构的互等定律★

4.6.1 线性杆系结构的变形能

根据能量守恒, 对线弹性、小变形结构, 外力所做的功恒等于储存于体内的应变能。

$$\begin{aligned}
V_e &= \sum \int \frac{F_N^2}{2EA} ds + \sum \int \frac{k F_Q^2}{2GA} ds + \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds \\
&\quad + \sum \int \frac{M_x^2}{2GI_p} ds
\end{aligned}$$

或者

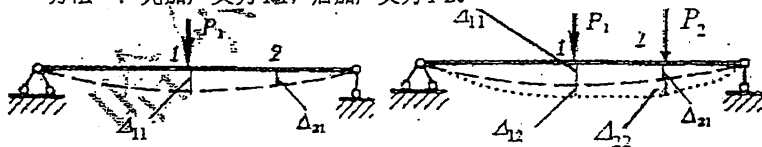
$$\begin{aligned}
V_e &= \frac{1}{2} \left(\sum \int EA \varepsilon^2 ds + \sum \frac{GA}{k} \gamma^2 ds \right. \\
&\quad \left. + \sum \int EI \theta^2 ds + \sum \int GI_p \varphi^2 ds \right)
\end{aligned}$$

- 1) 总为正;
- 2) 与路径无关, 是状态的函数
- 3) 内力或位移的二次式;
- 4) 叠加原理不适用;

4.6.2 线弹性结构的互等定理

1. 功的互等定理:

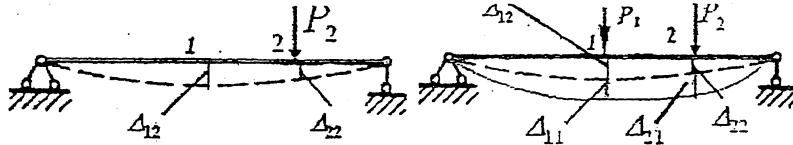
方法一: 先加广义力 P_1 , 后加广义力 P_2 .



第 I 状态

$$W_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_1 \Delta_{12} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22}$$

先加广义力 P_2 , 后加广义力 P_1 .



478

第 II 状态:

$$W_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_2 \Delta_{21} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11}$$

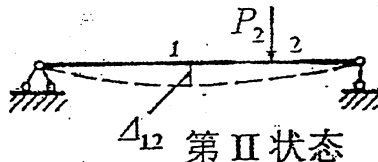
$$\text{由 } W_1 = W_2 \Rightarrow P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$$

在线性变形体系中, I 状态的外力在 II 状态位移上所做虚功, 恒等于 II 状态外力在 I 状态位移上所做虚功——功的互等定理

方法二



第 I 状态



第 II 状态

由虚功原理

$$W_{12} = P_1 \Delta_{12}$$

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$$

$$= \sum \int \left(\frac{F_{N1} F_{N2}}{EA} + k \frac{F_{Q1} F_{Q2}}{GA} + \frac{M_1 M_2}{EI} + \frac{M_{x1} M_{x2}}{GI_p} \right) ds$$

$$W_{21} = P_2 \Delta_{21}$$

$$= \sum \int \left(\frac{F_{N2} F_{N1}}{EA} + k \frac{F_{Q2} F_{Q1}}{GA} + \frac{M_2 M_1}{EI} + \frac{M_{x2} M_{x1}}{GI_p} \right) ds$$

2. 位移互等定理

由功的互等定理, 等式两边同除广义力乘积 $P_1 P_2$, 则可得

$$\frac{\Delta_{12}}{P_2} = \frac{\Delta_{21}}{P_1}$$

上式表明, 第二个单位广义力引起, 第一个单位广义力作用处沿第一广义力方向的位移, 恒等于第一个单位广义力引起, 第二个单位广义力作用处沿第二广义力方向的位移——位移互等定理

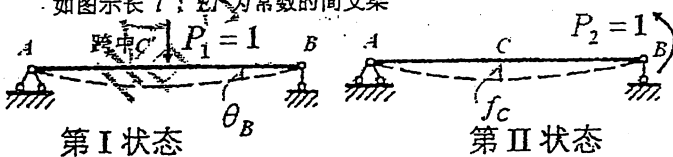
$$\text{若记 } \delta_{12} = \frac{\Delta_{12}}{P_2}, \delta_{21} = \frac{\Delta_{21}}{P_1} \text{ 则 } \delta_{12} = \delta_{21}$$

$$\text{由 } \delta_{12} = \frac{\Delta_{12}}{P_2} = \frac{\Delta_{21}}{P_1} = \delta_{21}$$

可见

- 1) 单位广义力是量纲为一的量;
- 2) 互等不仅是指数值相等, 且量纲也相同。

如图示长 l (EI 为常数) 的简支梁

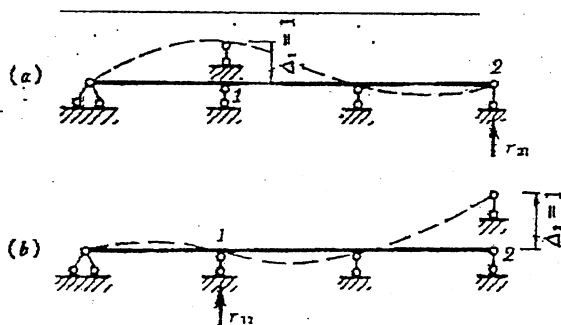


第 I 状态

第 II 状态

$$\delta_{21} = \theta_B = \frac{l^2}{16EI} \quad \delta_{12} = f_c = \frac{l^2}{16EI}$$

3. 反力互等定理

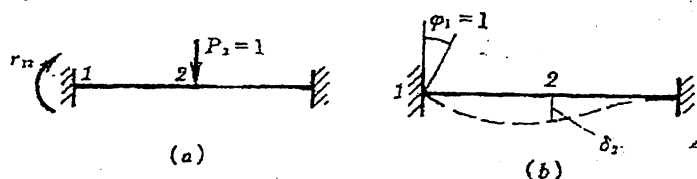


由功的互等定理有：

$$r_{21} \cdot 1 = r_{12} \cdot 1 \longrightarrow r_{21} = r_{12}$$

支座 1 发生单位广义位移时，引起的 2 支座中的反力，恒等于支座 2 发生单位广义位移时，引起的 1 支座中的反力——反力互等定理

4. 反力位移互等定理



问题：如何建立方程，如何叙述定理？

$$r_{12} \cdot \phi_1 + P_2 \cdot \delta_{21} = 0 \longrightarrow r_{12} = -\delta_{21}$$

单位广义力引起的结构中某支座的反力，等于该支座发生单位广义位移时引起的单位广义力作用点沿其方向的位移，但符号相反。

4.7 结论与讨论

1. 变形体虚功原理所揭示的是，体系上平衡的外力在体系的协调位移上的一个虚功恒等关系。
2. 单位荷载法，只是虚功原理的一种应用。单位荷载又称为单位广义力，是一种无量纲和单位的广义“力”。
3. 图乘法的条件是：等直杆；至少有一个图形是直线。
4. 温度引起的结构位移计算时，必须考虑轴线温度改变引起的位移。每项符号按温度和单位广义力所引起的变形是否一致来确定，一致时为正。反之为负。
5. 单位荷载法源于虚功原理，根据所求位移确定单位广义力状态后，关键是求外因引起的变形位移。掌握了这一点，不管材料性质、作用的外因是什么，就都能解决需求位移计算问题。
6. 对于由曲杆组成的结构或变截面复杂受荷结构等，可用数值积分来求位移近似值。
7. 线弹性结构多种外因共同作用的位移计算，可用统一公式进行计算，也可按各因素分别计算后叠加得到。
8. 位移、反力、位移和反力互等定理所指出的都是影响系数互等，它们的量纲和单位都是相同的。

68

第5章 超静定结构的解法

遵循材料力学中同时考虑“变形、本构、平衡”分析超静定问题的思想，可有不同的出发点：

以力作为基本未知量，在自动满足平衡条件的基础上进行分析，这时主要应解决变形协调问题，这种分析方法称为力法；

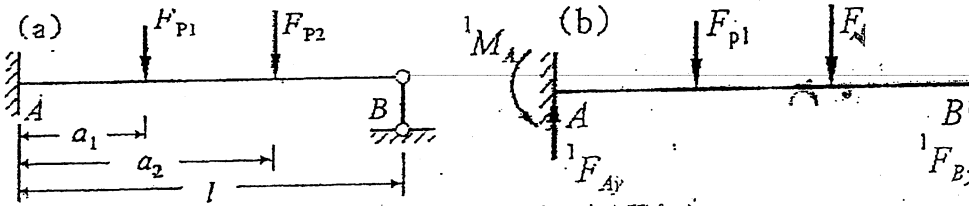
以位移作为基本未知量，在自动满足变形协调条件的基础上来分析，当然这时主要需解决平衡问题，这种分析方法称为位移法；

如果一个问题中既有力的未知量，也有位移的未知量，力的部分考虑位移协调，位移的部分考虑力的平衡，这样一种分析方案称为混合法。

在本章中将主要介绍力法和位移法(含弯矩分配法)。

5.1 力法★★★

5.1.1 力法的基本原理

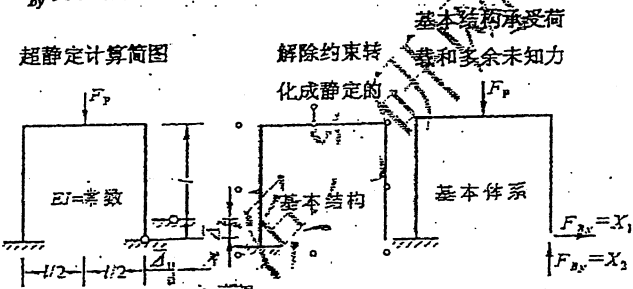


有一个多于约束的超静定结构，有四个反力，只有三个方程，因此必须设法补充方程。只要满足：

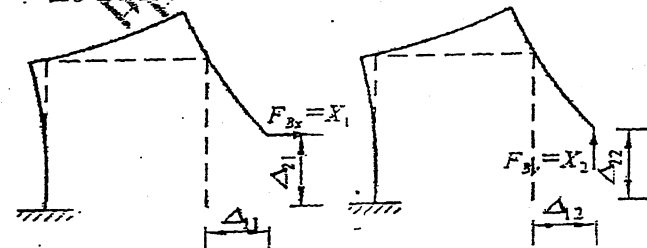
$$^1F_{Ay} = F_{P1} + F_{P2} - ^1F_{By}$$

$$^1M_A = \sum F_{Pi} a_i - ^1F_{By} l$$

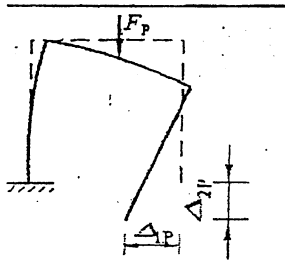
$^1F_{By}$ 为任意值，均平衡。



用已掌握的方法，分析单个基本未知力作用下的受力和变形。：位移包含基本未知力 X_i



同样方法分析“荷载”下的受力、变形



为消除基本结构与原结构差别，建立位移协调条件

$$\Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = \bar{\Delta}_1$$

$$\Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = \bar{\Delta}_2$$

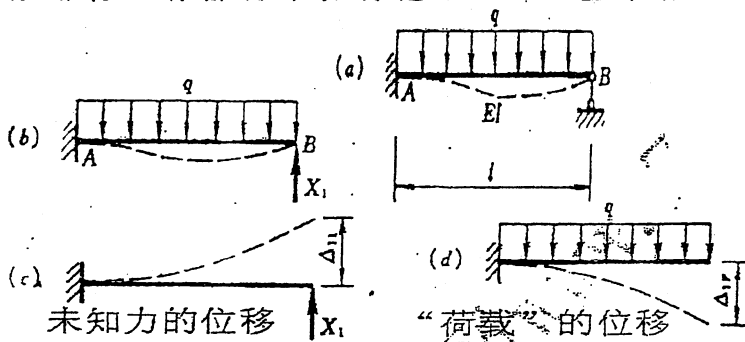
由此可解得基本未知力，从而解决受力变形分析问题

5.1.2 力法基本原理举例

例 1. 求解图示单跨梁

原结构，待解的未知问题

基本体系，已掌握受力、变形



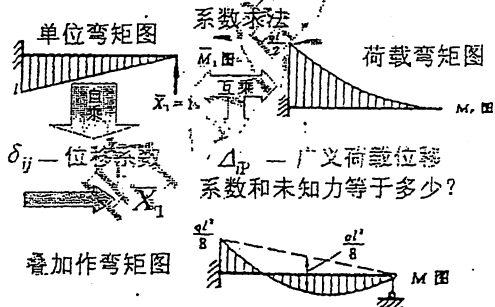
未知力的位移 X_1 “荷载”的位移 Δ_1

消除两者差别，总位移等于已知位移

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{1P} = \bar{\Delta}_1 = 0$$

变形协调条件——力法典型方程

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{1P} = \bar{\Delta}_1 = 0 \quad \text{或} \quad \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$



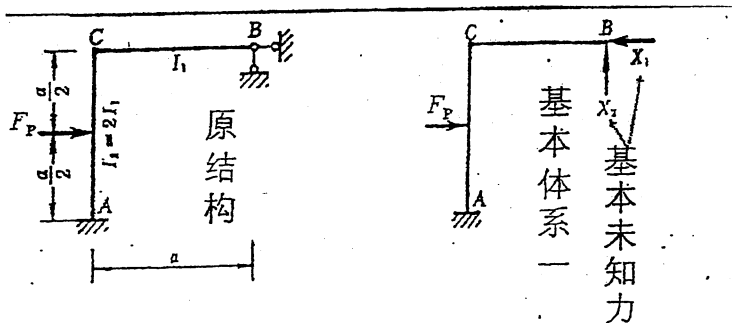
例 2. 求解图示结构

解法 1:

有两个多余约束

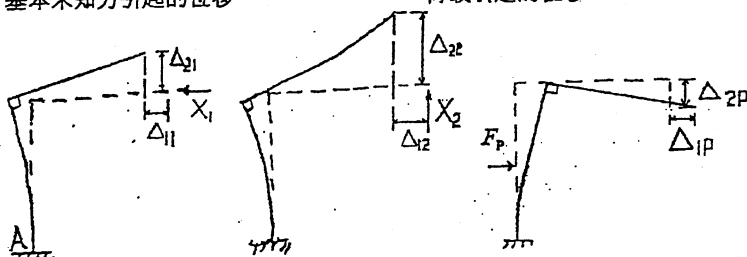
解除约束代以未知力

52



基本未知力引起的位移

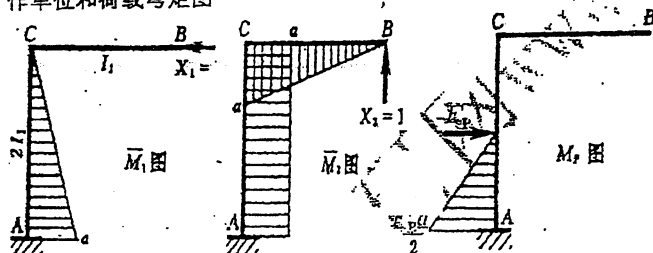
荷载引起的位移



变形协调条件——力法典型方程

$$\begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1p} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

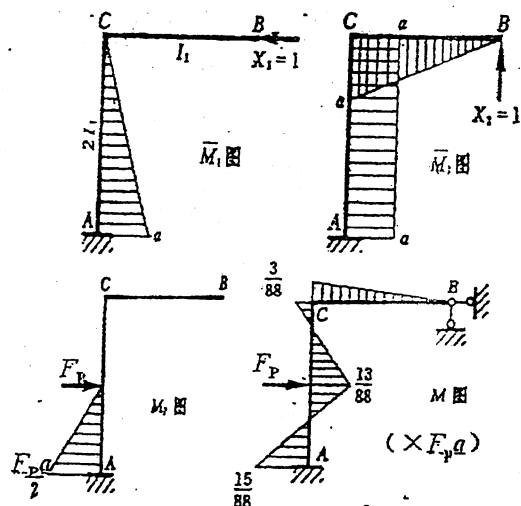
作单位和荷载弯矩图



求系数、建立力法方程并求解

$$\begin{cases} \frac{X_1}{6} + \frac{X_2}{4} - \frac{5F_p}{96} = 0 \\ \frac{X_1}{4} + \frac{5X_2}{6} - \frac{F_p}{16} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{4F_p}{11} \\ X_2 = -\frac{3F_p}{88} \end{cases}$$

仅与刚度相对值有关



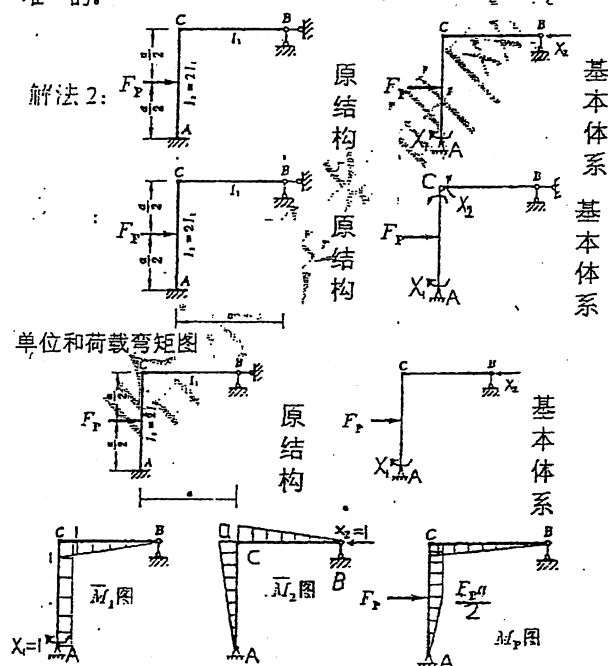
由叠加原理求得

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P$$

力法基本思路小结

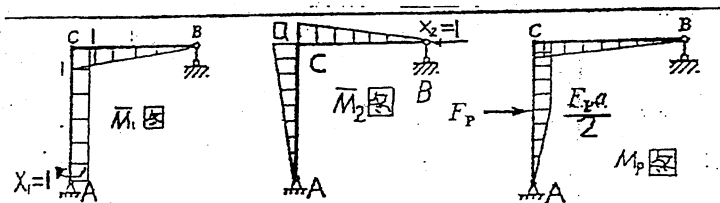
- 1) 根据结构组成分析, 正确判断多余约束个数——超静定次数。
- 2) 解除多余约束, 转化为静定的基本结构。多余约束代以多余未知力——基本未知力。
- 3) 分析基本结构在单位基本未知力和外界因素作用下的位移, 建立位移协调条件——力法典型方程。
- 4) 从典型方程解得基本未知力, 由叠加原理获得结构内力。超静定结构分析通过转化为静定结构获得了解决。

由于从超静定转化为静定, 将什么约束看成多余约束不是唯一的, 因此力法求解的基本结构也不是唯一的。



由单位和荷载弯矩图可勾画出基本体系变形图

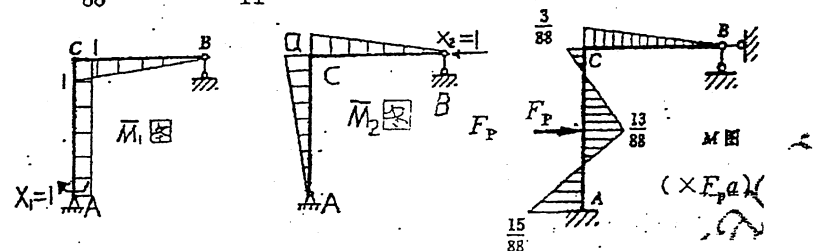
54



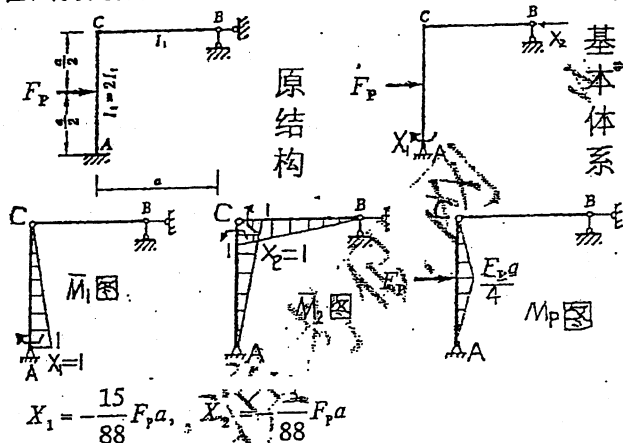
由单位和荷载 M 图可求得位移系数、建立方程

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} = 0 \\ \Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = -\frac{15}{88}F_p a, \quad X_2 = \frac{4}{11}F_p$$



单位和荷载弯矩图



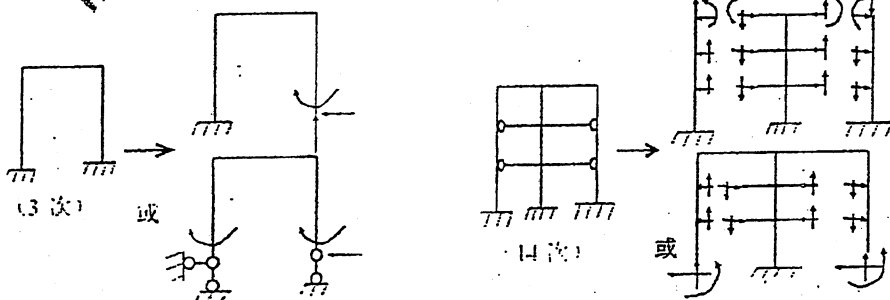
$$X_1 = -\frac{15}{88}F_p a, \quad X_2 = \frac{4}{11}F_p$$

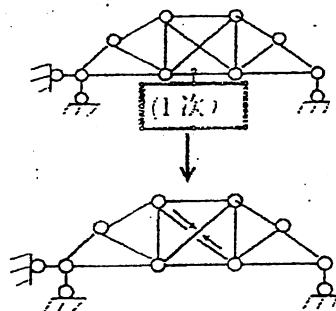
小结：力法的解题步骤

1. 确定结构的超静定次数和基本结构(体系)

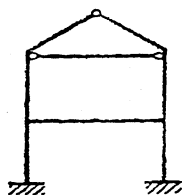
超静定次数 = 基本未知力的个数 = 多余约束数

变成基本结构所需解除的约束数

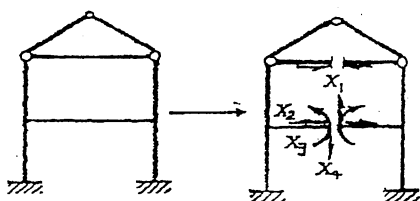
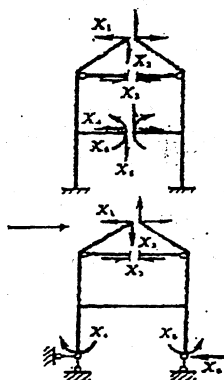




建立力法典型方程



(1次)



(4次)

确定超静定次数时应注意:

- 1) 切断弯曲杆次数 3、链杆 1, 刚结变单较 1, 拆开单较 2; 总次数也可由计算自由度得到。
- 2) 一个超静定结构可能有多种形式的基本结构, 不同基本结构带来不同的计算工作量。因此, 要选取工作量较少的基本结构。
- 3) 可变体系不能作为基本结构
2. 建立力法典型方程

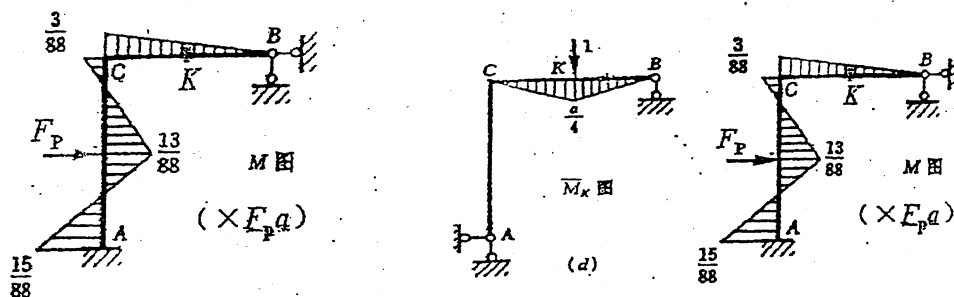
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = \bar{\Delta}_1 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = \bar{\Delta}_n \end{cases} \quad \text{或} \quad dX + \Delta_P = \bar{\Delta}$$

3. 作基本结构在单位未知力和荷载 (如果有) 作用下的弯矩 (内力) 图 \bar{M}_i, M_P
4. 求基本结构的位移系数 δ_{ij}
5. 求基本结构的广义荷载位移 Δ_{iP}
6. 解方程求未知力 X_i
7. 根据叠加原理作超静定结构的内力图

$$M = \sum_i \bar{M}_i X_i + M_P \quad F_N = \sum_i \bar{F}_{Ni} X_i + F_{NP} \quad F_Q = \sum_i \bar{F}_{Qi} X_i + F_{QP}$$

8. 任取一基本结构, 求超静定结构的位移

例如求 K 截面竖向位移:



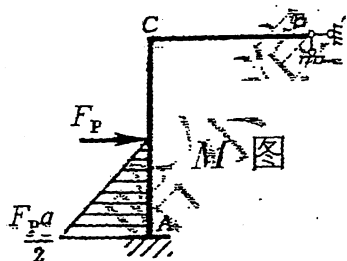
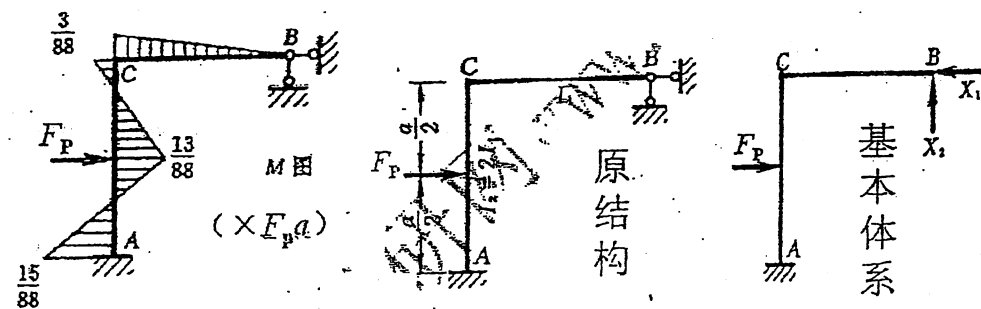
$$\Delta_{K_y} = \frac{1}{EI_1} \times \frac{a^2}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{88} F_P a + \frac{1}{2EI_1} \times \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{88} F_P a + \frac{15}{88} F_P a \right) \times \frac{a^2}{2} - \frac{F_P a^3}{16} \right] = -\frac{3F_P a^3}{1408EI_1} \quad (1)$$

$$\Delta_{K_y} = -\frac{1}{EI_1} \times \frac{a^2}{8} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{88} F_P a = -\frac{3F_P a^3}{1408EI_1} \quad (1)$$

9. 对计算结果进行校核

对结构上的任一部分，其力的平衡条件均能满足。

$$\sum M_C = 0$$



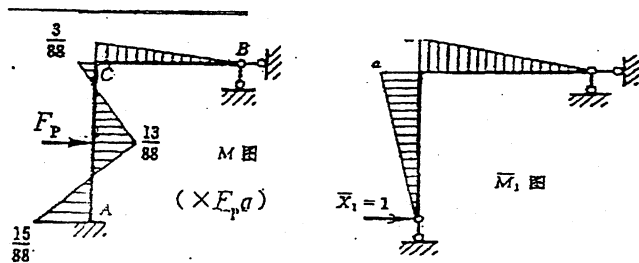
$$\begin{cases} d_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ d_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases} \quad \text{求得:}$$

$$X_1 = 0, X_2 = 0$$

可证：平衡条件均能满足。

$$\Delta_{Bx} = \Delta_{1P} \neq 0, \Delta_{By} = \Delta_{2P} \neq 0$$

结论：对计算结果除需进行力的校核外，还必需进行位移的校核。



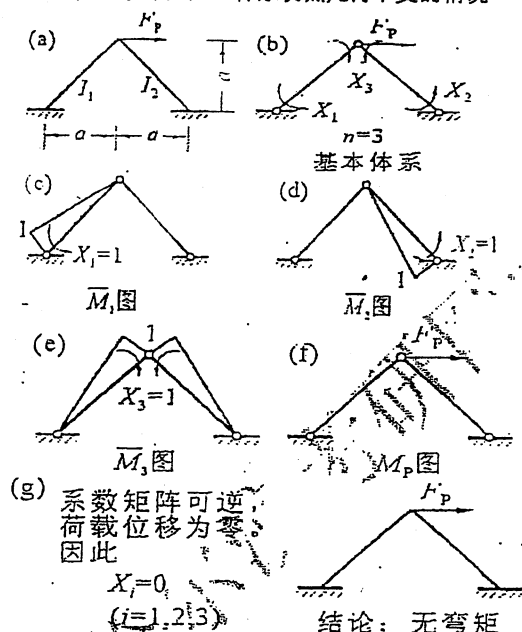
$$\Delta_{Ax} = \frac{1}{EI_1} \times \frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{88} F_p a + \frac{1}{2EI_1} \times \left[\frac{1}{2} \times \frac{3}{88} F_p a^2 \times \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{15}{88} F_p a^2 \times \frac{a}{3} - \frac{F_p a^3}{16} \right] = 0$$

5.1.3 力法计算的简化

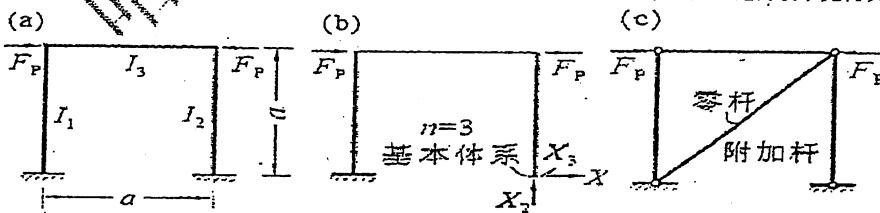
1. 无弯矩状态的判别

前提条件：结点荷载；不计轴向变形。

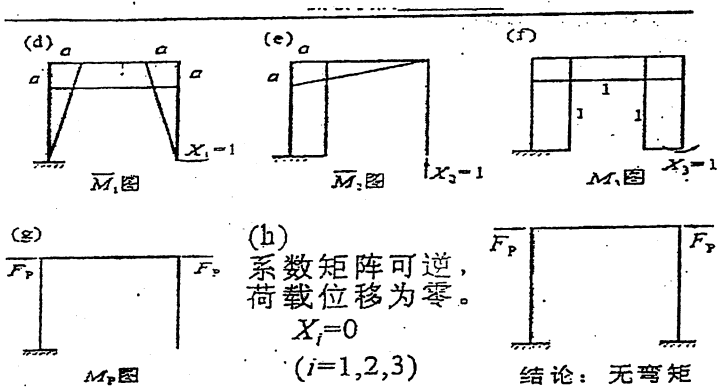
刚结点变成铰结点后，体系仍然几何不变的情况



刚结点变成铰结点后，体系几何可变。但是，添链杆的不变体系在给定荷载下无内力的情况



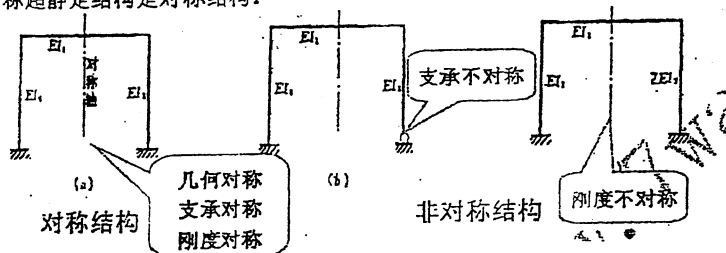
58



利用上述结论, 结合对称结构的对称性, 可使手算分析得到简化。

5.1.3.1 对称性的利用

注意: 结构的几何形状、支承情况以及杆件的刚度三者之一有任何一个不满足对称条件时, 就不能称超静定结构是对称结构。

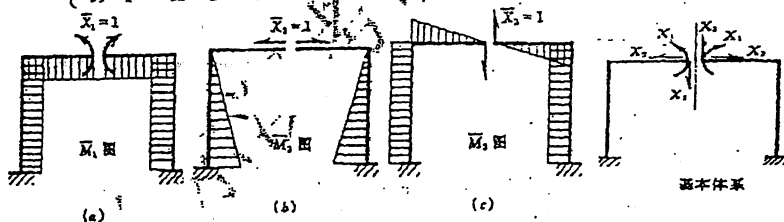


1. 对称结构的求解:

1) 选取对称的基本结构

力法典型方程为:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

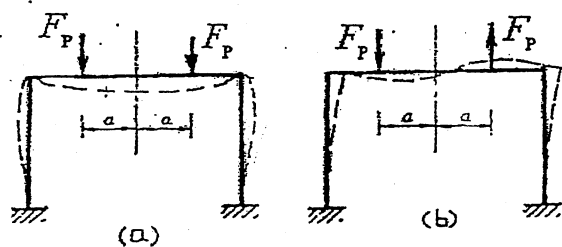


$$\begin{cases} \delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33} \neq 0, & \delta_{12} = 0 \\ \delta_{13} = \delta_{31} = 0, & \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \end{cases}$$

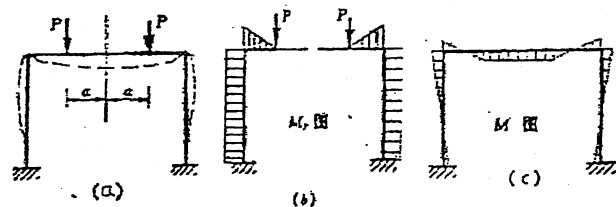
典型方程简化为:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases}$$

正对称与反对称荷载

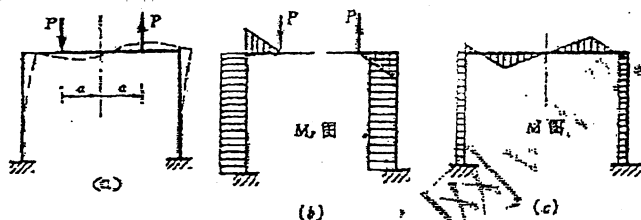


如果作用于结构的荷载是对称的，如：



$$\begin{cases} \Delta_{3p} = 0 \\ X_3 = 0 \\ M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p \end{cases}$$

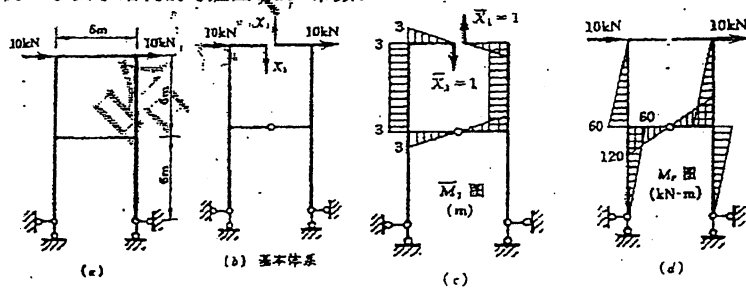
如果作用于结构的荷载是反对称的，如：



$$\begin{cases} \Delta_{1p} = \Delta_{2p} = 0 \\ X_1 = X_2 = 0 \\ M = \bar{M}_3 X_3 + M_p \end{cases}$$

结论：对称结构在正对称荷载作用下，其内力和位移都是正对称的；在反对称荷载作用下，其内力和位移都是反对称的。

例，求图示结构的弯矩图， EI = 常数。

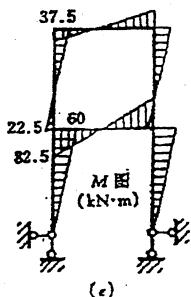


解：根据以上分析，力法方程为：

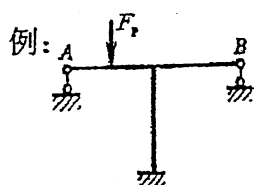
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

58

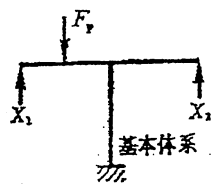
$$\begin{cases} \delta_{11} = 144/EI \\ \Delta_{1P} = 1800/EI \\ X_1 = -12.5 \\ M = \bar{M}_1 X_1 + M_P \end{cases}$$



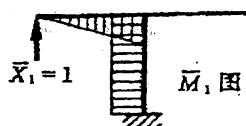
(c)



(a)



(b)



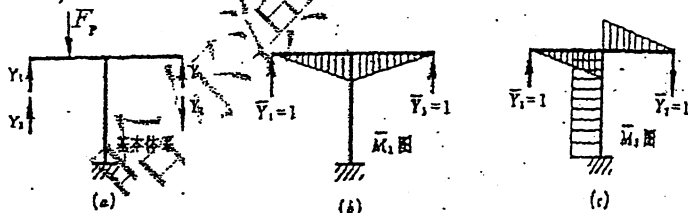
(c)



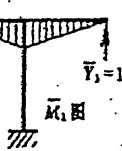
(d)

由于 $\delta_{12} \neq 0$ 问题无法化简

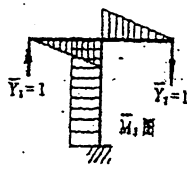
2) 未知力分组和荷载分组



(a)



(b)

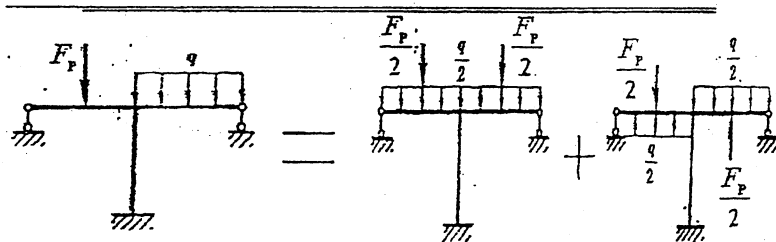


(c)

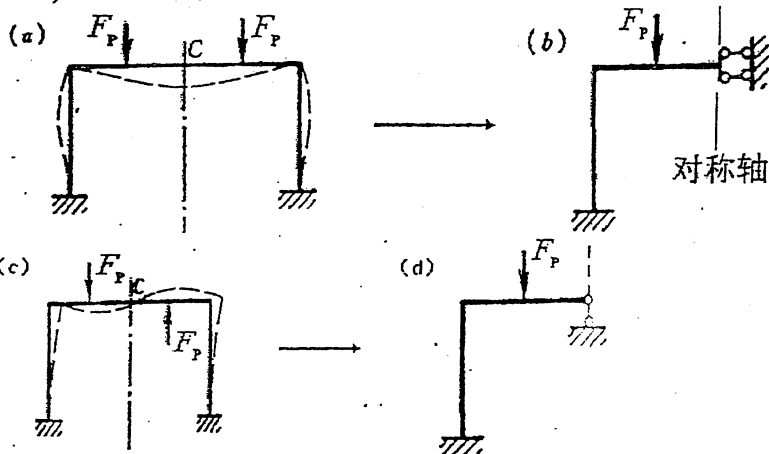
$$X_1 = Y_1 + Y_2, \quad X_2 = Y_1 - Y_2, \quad \delta_{12} = 0$$

$$\begin{cases} \delta_{11} Y_1 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{22} Y_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

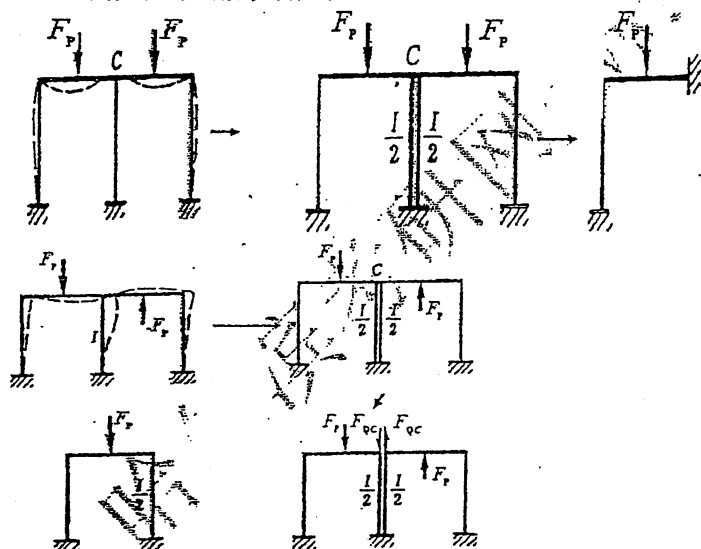
对称结构承受一般非对称荷载时，可将荷载分组，如：



3) 取半结构计



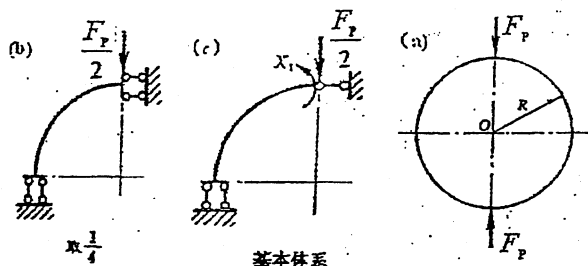
问题：偶数跨对称刚架如何处理？



例：求作图示圆环的弯矩图。EI=常数

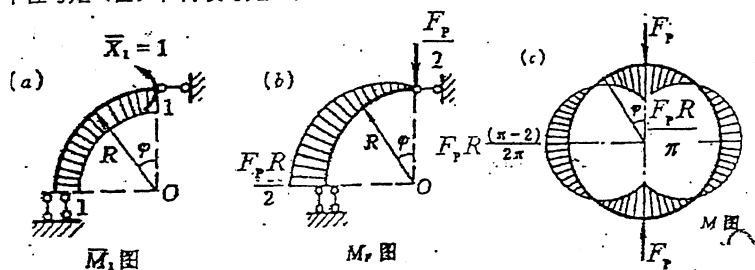
解：取结构的 1/4 分析

64



基本体系

单位弯矩 (图) 和荷载弯矩 (图) 为:



\bar{M}_1 图

M_P 图

$$\bar{M}_1 = 1 \quad M_P = -\frac{F_P R}{2} \sin \varphi$$

若只考虑弯矩对位移的影响, 有:

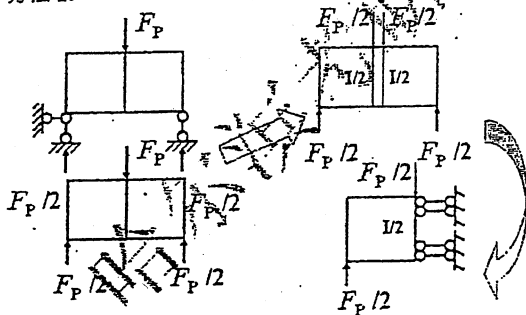
$$\Delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EI} = -\frac{F_P R^2}{2EI} \int \sin \varphi d\varphi = -\frac{F_P R^2}{2EI} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = -\frac{F_P R^2}{2EI} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi/2} = -\frac{F_P R^2}{2EI} (1) = -\frac{F_P R^2}{2EI}$$

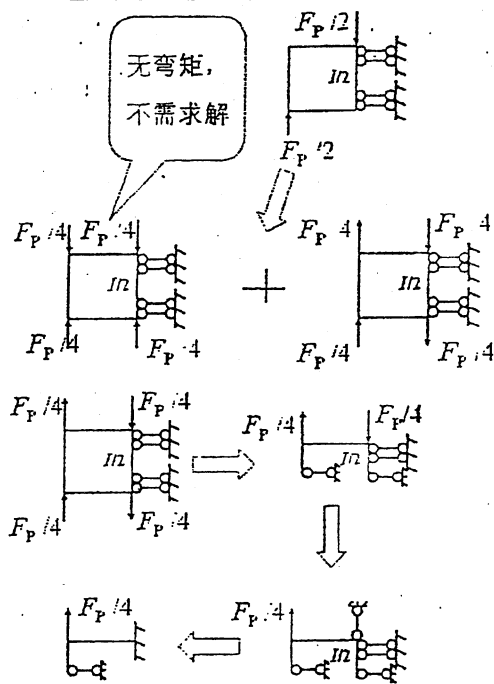
弯矩为:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + M_P = F_P R \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\sin \varphi}{2} \right)$$

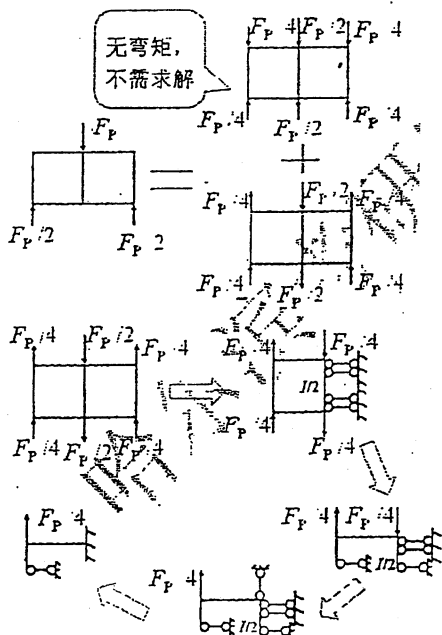
例 1. 试用对称性对结构进行简化. EI 为常数.

方法 1:



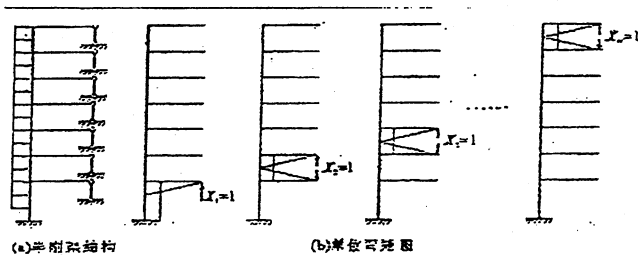


方法2:



5.1.3.2 使单位弯矩图限于局部

64

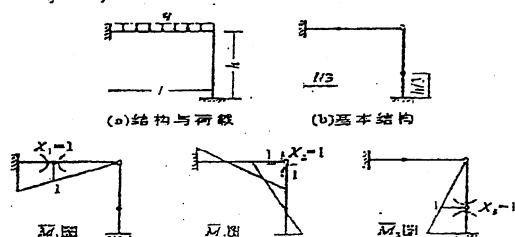


$$\delta_{ij} = \delta'_{ji} = 0 \quad i = 1, \dots, n-2$$

$$j = 3, \dots, n \quad j \geq i+2$$

5.1.3.3 合理地安排较的位置

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = 0$$



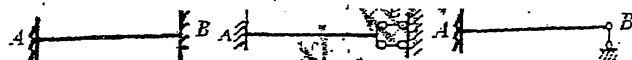
5.2 位移法★★★

5.2.1 位移法的基本原理

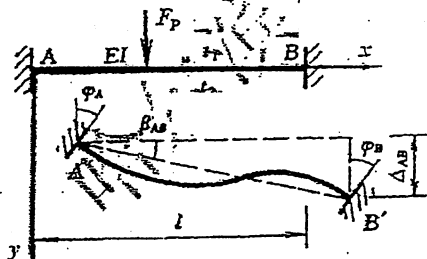
已有的知识:

1. 结构组成分析;
2. 静定结构的内力分析和位移计算;
3. 超静定结构的内力分析和位移计算——方法: 已解得如下单跨梁结果。

位移法中的基本单跨梁



单跨超静定梁在荷载、温度改变和支座移动共同作用下



在线性小变形条件下, 由叠加原理可得
转角位移方程(刚度方程)

$$\begin{cases} M_{AB} = 4i\varphi_A + 2i\varphi_B - \frac{6i}{l}\Delta_{AB} + M_{AB}^F \\ M_{BA} = 4i\varphi_B + 2i\varphi_A - \frac{6i}{l}\Delta_{AB} + M_{BA}^F \end{cases}$$

其中: $i = \frac{EI}{l}$ 称杆件的线刚度。

M_{AB}^F, M_{BA}^F 为由荷载和温度变化引起的杆端弯矩, 称为固端弯矩。

同理, 另两类杆的转角位移方程为

A 端固定 B 端铰支

$$M_{AB} = 3i\varphi_A - \frac{3i}{l}\Delta_{AB} + M_{AB}^F$$

A 端固定 B 端定向

$$M_{AB} = i\varphi_A + M_{AB}^F$$

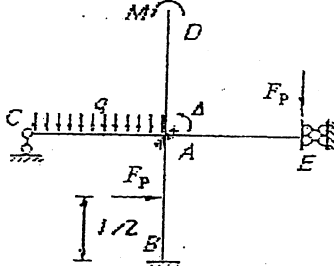
$$M_{BA} = -i\varphi_A + M_{BA}^F$$

5.2.2 位移法基本思路

5.2.2.1 第一种思路

图示各杆长度为 l , EI 等于常数, 分布集度 q , 集中力 F_P , 力偶 M 如何求解?

力法未知数 3 个, 但独立位移未知数只有一个 (A 点转角, 设为 Δ)。



利用转角位移方程可得:

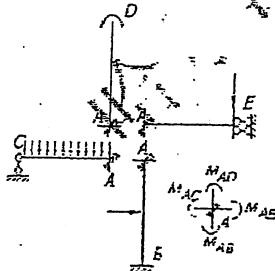
$$M_{AD} = -M$$

$$M_{AC} = -3i\Delta + \frac{ql^2}{8}$$

$$M_{AB} = -4i\Delta + \frac{F_P l}{8}$$

$$M_{AE} = -i\Delta + \frac{F_P l}{2}$$

在此基础上, 由图示结点平衡得 $\sum M = 0$



位移法思路(平衡方程法)

1. 以某些结点的位移为基本未知量;
2. 将结构拆成若干具有已知力-位移(转角-位移)关系的单跨梁集合;
3. 分析各单跨梁在外因和结点位移共同作用下的受力;
4. 将单跨梁拼装成整体;

66

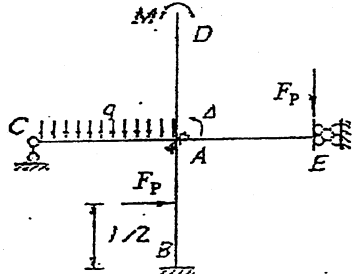
5. 用平衡条件消除整体和原结构的差别,建立和位移个数相等的方程;

6. 求出基本未知量后,由单跨梁力-位移关系可得原结构受力。

5.2.2.2 第二种思路

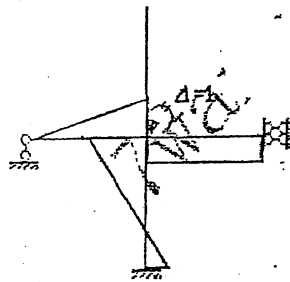
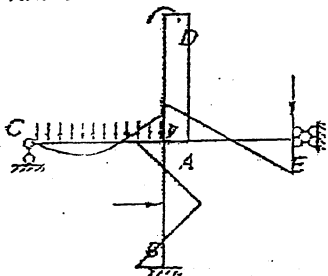
图示各杆长度为 l , EI 等于常数,分布集度 q ,集中力 F_P ,力偶 M 。如何求解?

以 A 点转角做基本未知量,设为 Δ 。在 A 施加限制转动的约束,以如图所示体系为基本体系(基本结构的定义和力法相仿)。



利用“载常数”可作图示荷载弯矩图

利用“形常数”可作图示单位弯矩图



位移法思路(典型方程法)

1. 以位移为基本未知量,先“固定”(不产生任何位移)
2. 考虑外因作用,由“载常数”得各杆受力,作弯矩图。
3. 令结点产生单位位移(无其他外因),由“形常数”得各杆受力,作弯矩图。
4. 两者联合原结构无约束,应无附加约束反力(平衡)。
5. 列方程可求位移。

A. 典型方程法基本概念

位移未知量(一些特殊情况以后结合例题讨论)结点位移包括角位移和线位移

独立角位移 n_a = 刚结点数

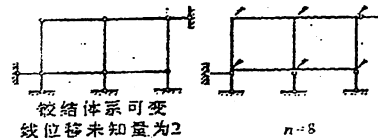
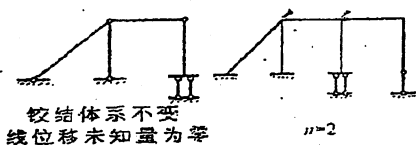
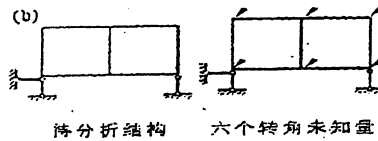
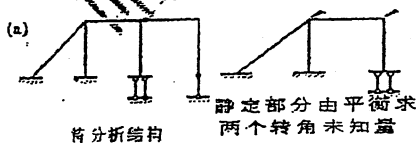
独立线位移 n_l = ?

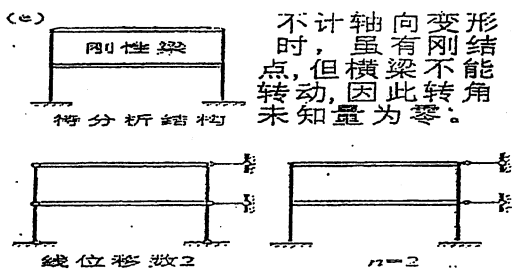
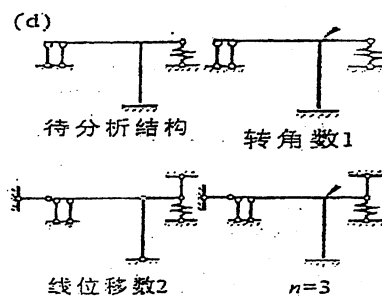
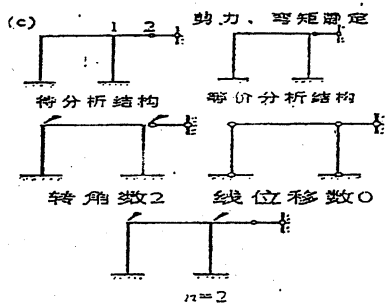
不考虑轴向变形时, n_l = “刚结点”变成铰,为使铰结体系几何不变所需加的支杆数。

考虑轴向变形时, n_l = 结点数 $\times 2$ - 约束数

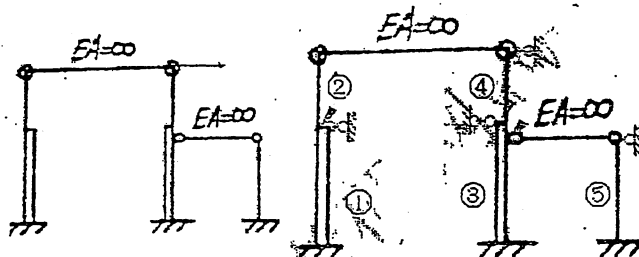
总未知量 $n = n_a + n_l$

位移未知数确定举例



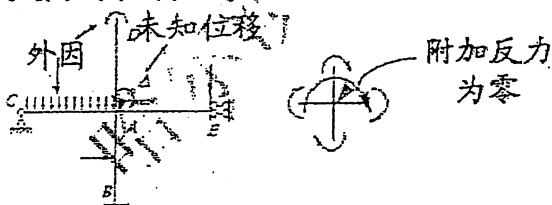


基本结构: 加约束“无位移”, 能拆成已知杆端力-杆端位移关系“单跨梁”的超静定结构。
基本体系: 受外因和未知位移的基本结构。



基本方程: 外因和未知位移共同作用时, 附加约束没有反力——实质为平衡方程。

$$[K]\{\Delta\} + \{R\} = \{0\}$$



B. 典型方程法步骤

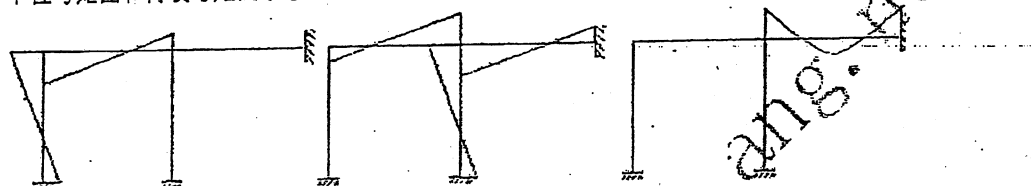
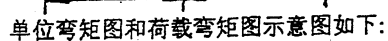
- 确定独立位移未知量数目 (隐含建立基本体系, 支杆只限制线位移, 限制转动的约束不能阻止线位移)
- 作基本未知量分别等于单位时的单位弯矩图
- 作外因 (主要是荷载) 下的弯矩图
- 由上述弯矩图取结点、隔离体求反力系数
- 建立位移法典型方程并且求解

$$\sum k_i \Delta_i + R_i = 0 \quad (i=1, \dots, n)$$


68


$$\dot{M} = \sum \bar{M}_j \Delta_j + M_p$$


例一:用位移法计算图示刚架,并作弯矩图 $E=\text{常数}$.




\overline{M} , 图


 k_{11}
 $8i$
 $4i$
 $k_{11} = 12i$


 k_{21}
 $4i$
 $4i$
 $k_{21} = 4i$


 k_{12}
 $4i$
 $4i$
 $k_{12} = 4i$


 k_{22}
 $8i$
 $4i$
 $8i$
 $k_{22} = 20i$

荷载弯矩图

· 1 · 1 附, 周

取结点考虑平衡

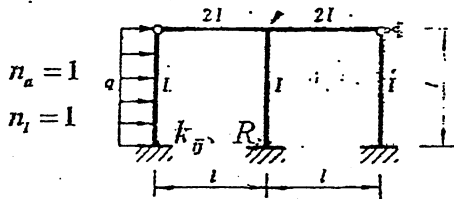
$$R_{1P} = 0 \quad R_{2P} = -\frac{ql^2}{12}$$

位移法典型方程:

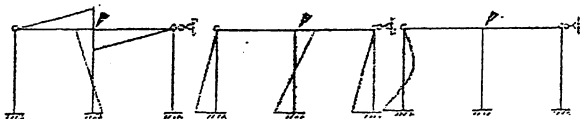
$$\begin{cases} k_{11}\Delta_1 + k_{12}\Delta_2 + R_{1P} = 0 \\ k_{21}\Delta_1 + k_{22}\Delta_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12i\Delta_1 + 4i\Delta_2 + 0 = 0 \\ 4i\Delta_1 + 20i\Delta_2 - \frac{ql^3}{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -\frac{ql^2}{672i} \\ \Delta_2 = \frac{ql^2}{224i} \end{cases}$$

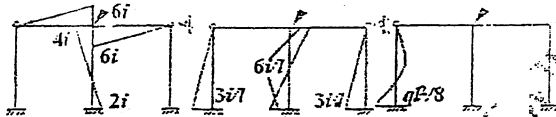
例二:用位移法计算图示刚架,并作弯矩图 E =常数.



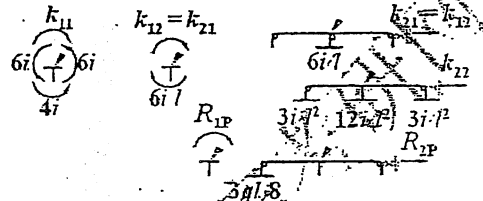
单位弯矩图和荷载弯矩图示意图如下:



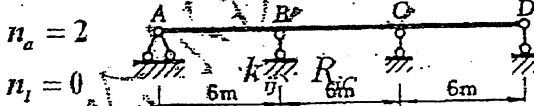
由形、载常数可得单位和荷载弯矩图如下:



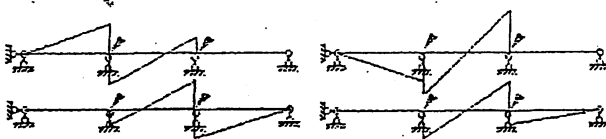
取结点和横梁为隔离体,即可求得全部系数



例三:图示等截面连续梁,支座下沉 Δ , C 支座下沉 0.6Δ , EI 等于常数,作弯矩图.

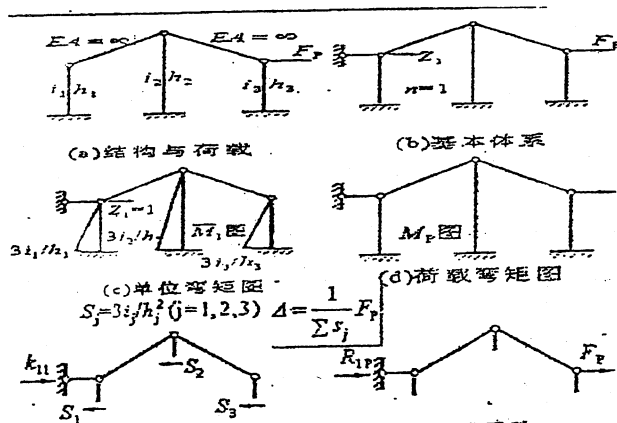


单位弯矩和支座位移弯矩图的示意图如下:

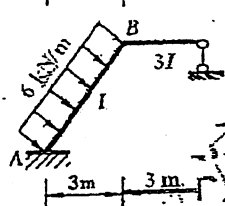
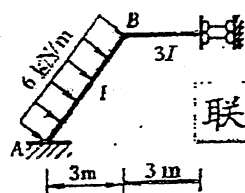
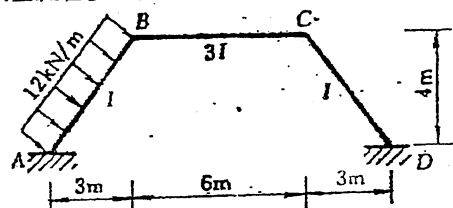


特殊情况讨论 (剪力分配法)

68



例五: 用位移法计算图示刚架, 并作弯矩图 $E=$ 常数.



对称时

$$n_a = n = 1$$

反对称时

$$n_a = 1$$

$$n_b = 1$$

对称荷载组

用位移法求解

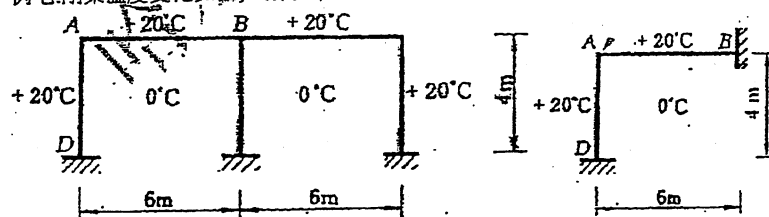
$$n = 1$$

反对称荷载组

用力法求解

$$n = 1$$

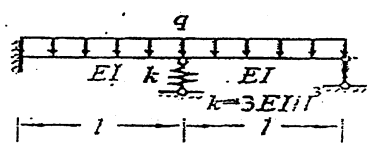
例七: 刚架温度变化如图, 试作其弯矩图 $EI=$ 常数, 截面为矩形, 高为 h .



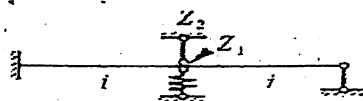
$$\Delta_{AV} = \alpha t_0 l_{AD} = 40\alpha \quad \Delta_{AH} = \alpha t_0 l_{AB} = 60\alpha$$

例八: 试作图示结构弯矩图.

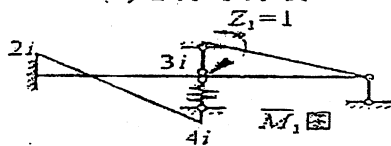
70



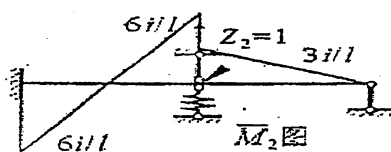
(a) 结构与荷载



(b) 基本体系



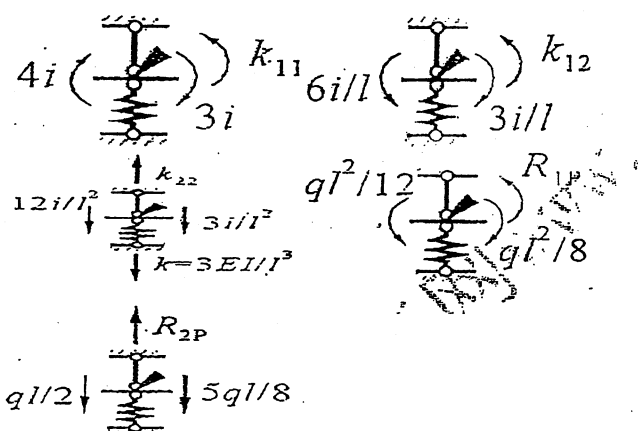
(c) 转角引起的弯矩图



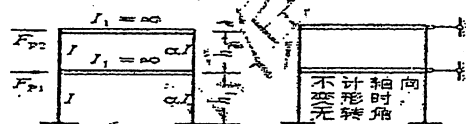
(d) 线位移的弯矩图



(e) 荷载弯矩图

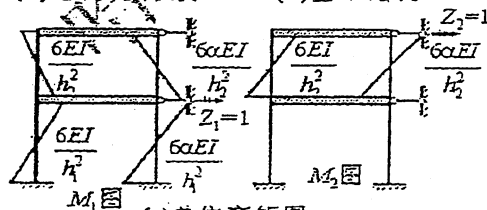


例九: 试作图示结构弯矩图



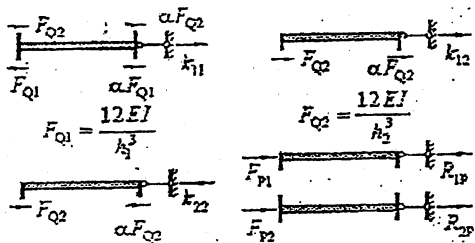
(a) 结构与荷载

(b) 基本结构



(c) 单位弯矩图

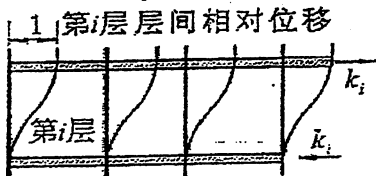
74



基本结构荷载下无弯矩

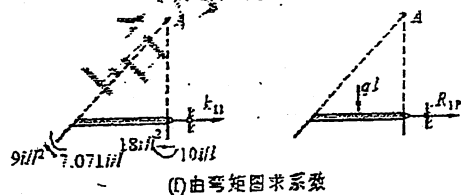
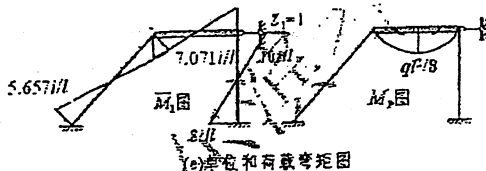
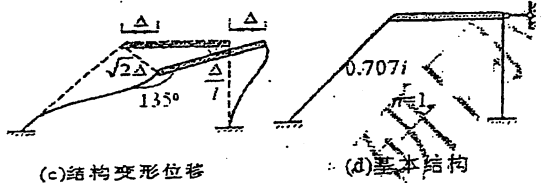
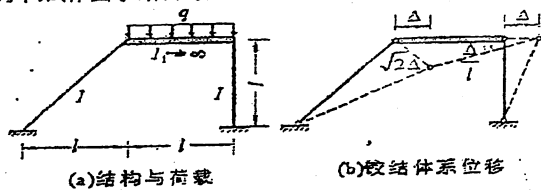
(d)由弯矩图求系数

已知楼层第j个柱子的抗侧移刚度为 $12EI_j/h^3$, 那么图示层侧移刚度 k_i 等于多少?



$k_i = \sum 12EI_j/h^3$, k_{ii} , k_{ii+1} 是多少? n 层刚架结构刚度矩阵 $[K]$ 什么样?

例十:试作图示结构弯矩图.



5.3 力法与位移法的比较

• 力法

基本未知量：多余力

基本结构：一般为静定结构，能求 M 的超静定结构也可。

作单位和外因内力图

由内力图自乘、互乘求系数，主系数恒正。

建立力法方程（协调）

$$[\delta]\{X\} + \{A\} = \{A\}$$

解方程求独立结点位移

迭加作内力图

用变形条件进行校核

• 位移法

基本未知量：结点独立位移

基本结构：无位移超静定次数更高的结构

作单位和外因内力图

由内力图的结点，隔离体平衡求系数，主系数恒正。

建立位移法方程（平衡）

$$[K]\{A\} + \{F\} = \{0\}$$

解方程求独立结点位移

迭加作内力图

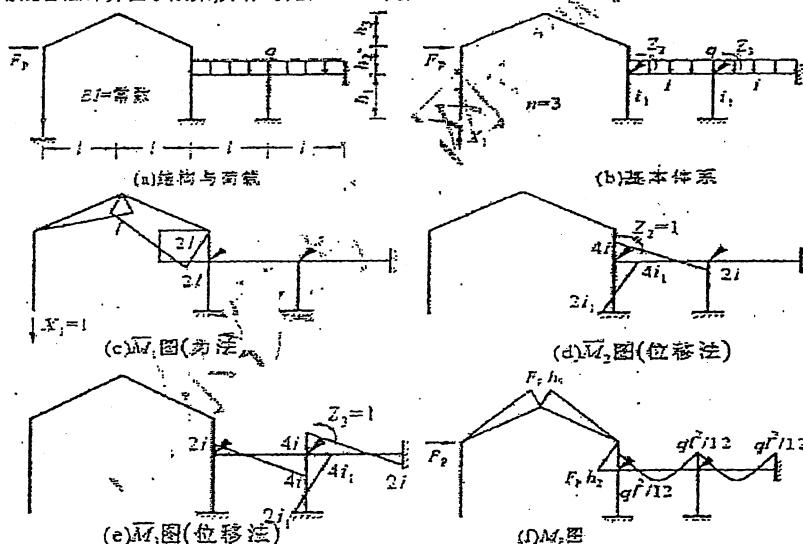
用平衡条件进行校核

5.4 混合法

基本思路

联合法是一个计算简图用同一种方法，联合用力法、位移法。混合法则是同一个计算简图一部分用力法、另一部分用位移法。超静定次数少，独立位移多的部分取力为未知量。超静定次数多，独立位移少的部分取位移为未知量。

用混合法计算图示刚架，并作弯矩图。 EI = 常数。



5.5 弯矩分配法★★★

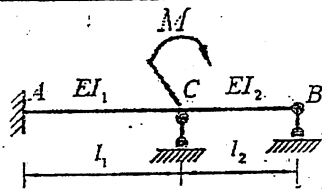
5.5.1 弯矩分配法的基本思想

弯矩分配法是基于位移法的逐步逼近精确解的近似方法。从数学上说，是一种异步迭代法。单独使用时只能用于无侧移（线位移）的结构。

以图示具体例子加以说明

按位移法求解时，可得下页所示结果

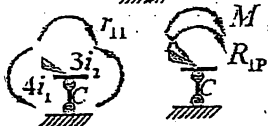
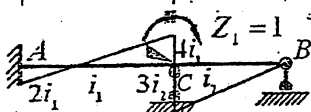
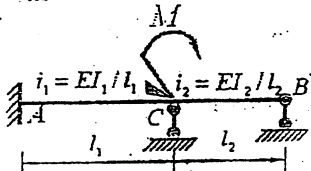
74



$$r_{11} = 4i_1 + 3i_2 \quad R_{1P} = -M \quad Z_1 = M / (4i_1 + 3i_2)$$

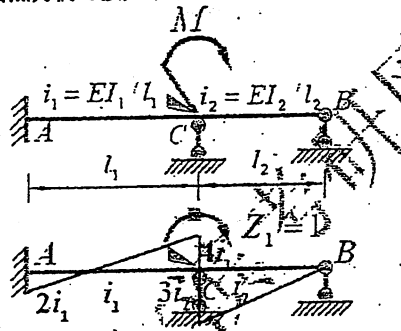
$$M_{CA} = M \times 4i_1 / (4i_1 + 3i_2) \quad M_{CB} = M \times 3i_2 / (4i_1 + 3i_2)$$

$$M_{AC} = M_{CA} \times 2i_1 / 4i_1 \quad M_{BC} = M_{CB} \times 0 / 3i_2$$



由此可得到什么结论呢?

结点力偶可按如下系数分配、传递到杆端



$$\mu_{CA} = 4i_1 / (4i_1 + 3i_2) \quad \mu_{CB} = 3i_2 / (4i_1 + 3i_2) \quad C_{CA} = 1/2; C_{CB} = 0$$

$$M_{CA} = M \times \mu_{CA} \quad M_{CB} = M \times \mu_{CB} \quad M_{AC} = M_{CA} \times C_{CA}; M_{BC} = M_{CB} \times C_{CB}$$

那么如果外荷载不是结点力偶, 情况又如何呢?

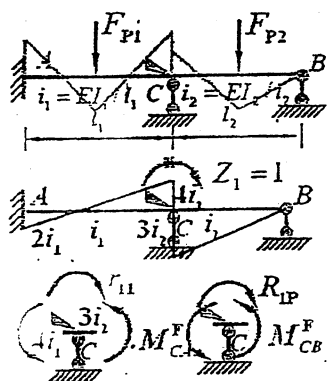
位移法求解如图所示, 相当的 C 点集中力偶 M 为

$$M = -(M_{CA}^F + M_{CB}^F)$$

叠加得最终杆端弯矩为

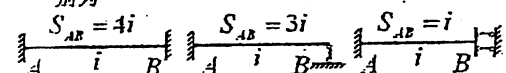
$$M_{CA} = M \times \mu_{CA} + M_{CA}^F \quad M_{CB} = M \times \mu_{CB} + M_{CB}^F$$

$$M_{AC} = M \times \mu_{CA} \times C_{CA} + M_{AC}^F \quad M_{BC} = M \times \mu_{CB} \times C_{CB} + M_{BC}^F$$



5.5.2 基本名词定义

1. 转动刚度: AB 杆仅当 A 端产生单位转动时, A 端所施加的杆端弯矩, 称为 AB 杆 A 端的转动刚度, 记作 S_{AB} 。对等直杆, 由形常数可知 S_{AB} 只与 B 端的支撑条件有关。三种基本单跨梁的转动刚度分别为



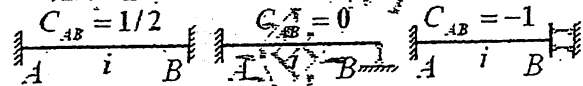
A 端一般称为近端 (本端), B 端一般称为远端 (它端)。

2. 不平衡力矩: 结构无结点转角位移时, 交汇于 A 结点各杆固端弯矩的代数和, 称为 A 结点的不平衡力矩
3. 分配系数: 结构交汇于 A 结点各杆的转动刚度总和分子某杆该端的转动刚度, 称为该杆 A 结点的分配系数, 例如交汇于 A 结点的 n 杆中第 i 杆 A 结点的分配系数为:

$$\mu_{Ai} = \frac{S_{Ai}}{\sum_{j=1}^n S_{Aj}}$$

显然, A 结点各杆的分配系数总和恒等于 1。

4. 分配力矩: 将 A 结点的不平衡力矩改变符号, 乘以交汇于该点各杆的分配系数, 所得到的杆端弯矩称为该点各杆的分配力矩 (分配弯矩)。
5. 传递系数: 三类位移法基本杆件 AB , 当仅其一端产生转角位移时, 远端的杆端弯矩和近端的杆端弯矩的比值, 称为该杆的传递系数, 记作 C_{AB} 。例如对位移法三类等直杆



显然, 传递系数也仅与远端约束有关。

6. 传递力矩: 将 A 结点的分配力矩乘以传递系数, 所得到的杆端弯矩称为该点远端的传递力矩 (传递弯矩)。

最终杆端弯矩: 杆端固端弯矩、全部分配弯矩和传递弯矩的代数和即为该杆端的最终杆端弯矩。

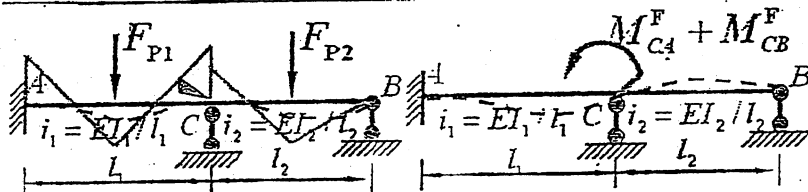
对于仅一个转动位移的结构, 应用上述名词, 本质是位移法的求解也可看成是先固定结点, 由固端弯矩获得结点不平衡力矩; 然后用分配系数求杆端分配弯矩; 接着用传递系数求传递弯矩; 最后计算杆端最终杆端弯矩。这种直接求杆端弯矩, 区段叠加作 M 图的方法即为弯矩分配法。

5.5.3 弯矩分配法的物理概念

1. 单结点分配

设有如图所示单结点 (位移) 结构。首先锁定结点使无位移。由载常数可获得 AC 、 CB 杆的固端弯矩, 此时附加刚臂上产生不平衡力矩 $M_{CA}^F + M_{CB}^F$, 放松结点 (反向加不平衡力矩) 使产生实际结点位移, 此时可分配和传递计算分配和传递弯矩。

75



锁定结果和放松结果叠加，结点达到平衡、产生实际结点位移，这就是位移法的结果。因此杆端最终弯矩由固端弯矩和分配弯矩（或传递弯矩）相加得到，这时结果是精确解。

2. 多结点(位移)分配

对多结点(位移)结构，弯矩分配法的思路是：首先将全部结点锁定，然后从不平衡力矩最大的一结点开始，在锁定其他结点条件下放松该结点使其达到“平衡”(包括分配和传递)。接着重新锁定该结点，放松不平衡力矩次大的结点，如此一轮一轮逐点放松，直至不平衡力矩小到可忽略。最后累加固端、分配和传递得结果。

因为分配系数小于 1，传递系数也小于 1(因为定向支座处不分配)，因此一轮分配、传递后，新的不平衡力矩一定比原来的小，理论上经过无限次分配、传递结构一定达到平衡，也即可以获得问题的精确解。

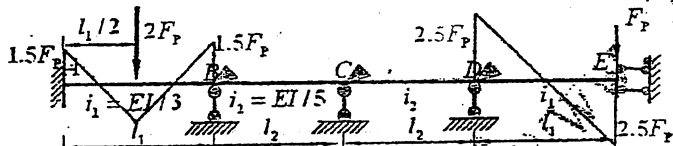
由弯矩分配法思路可知，对多结点问题它是一种逐渐逼近精确解的近似方法。

实际应用时，一般只进行二、三轮的分配和传递(考试只进行二轮即可)。

分配和传递可从任意一点开始，前述从不平衡力矩最大点开始，经验证明这样可加速收敛。

5.5.4 弯矩分配法举例

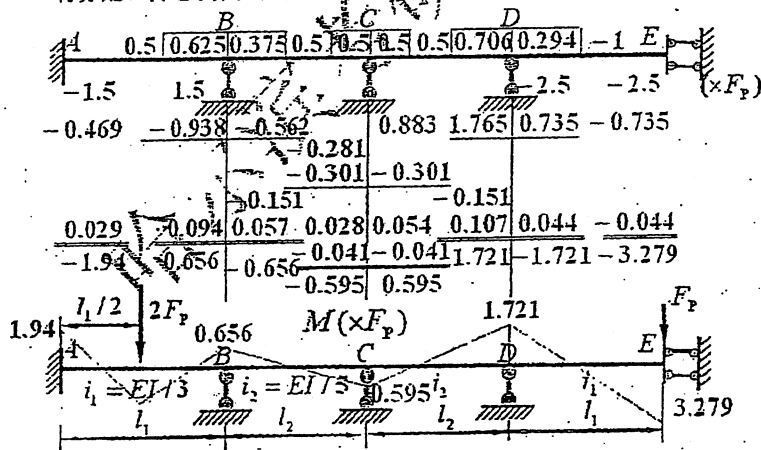
例子：试求作图示连续梁的 M 图。 EI 等于常数， $l_1=6\text{ m}$ ， $l_2=5\text{ m}$ 。(只计算二轮)



解：锁定 B、C、D 三结点，由载常数可得图示固端弯矩，对此锁定结构，由形常数可求得分配系数为：

$$\mu_{BA} = 0.625, \mu_{BC} = 0.375, \mu_{CB} = 0.5, \mu_{CD} = 0.5, \mu_{DC} = 0.706, \mu_{DE} = 0.294$$

将分配、传递系数如图标于结点和杆上，将固端弯矩也标于图上。即可如图所示做弯矩分配。



第6章 移动荷载下的结构分析

6.1 移动荷载及影响线的概念

1. 移动荷载

荷载大小、方向不变，荷载作用点随时间改变，结构所产生加速度的反应与静荷载的反应相比可以忽略，这种特殊的作用荷载称移动荷载。(吊车、车辆)。

2. 特点

结构的反应(反力、内力和变形)随荷载作用位置改变。

3. 主要需要解决的问题

移动荷载下的最大响应问题，线弹性条件下解决方案是利用影响线。

4. 影响线定义

单位移动荷载下某物理量随荷载位置变化规律的图形。

5. 应注意的问题

由上述定义可知，物理量是固定的，单位移动荷载位置是变动的，影响线图形的纵标是荷载作用于此处时物理量的值。

物理量影响线要注意：外形、数值(单位)和符号。

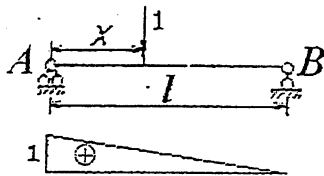
6. 影响线作法

其一为静力法，另一为机动法(虚功法)。

6.2 静力法做影响线★★

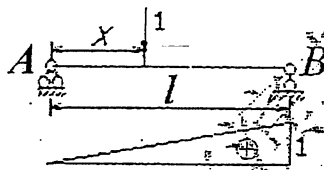
1. 按定义用静力平衡方程建立影响量方程，由函数作图的方法称作静力法。

简支单跨梁： F_{Ay} 反力影响线



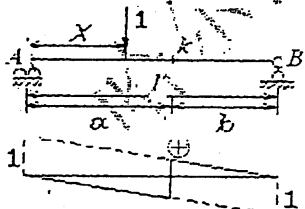
$$F_{Ay} = 1 - \frac{x}{l}$$

简支单跨梁： F_{By} 反力影响线



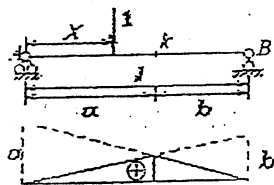
$$F_{By} = \frac{x}{l}$$

F_{Qk} 影响



$$\begin{cases} F_{Qk} = -F_{By} & x \leq a \\ F_{Qk} = F_{Ay} & x \geq a \end{cases}$$

简支单跨梁： M_k 影响

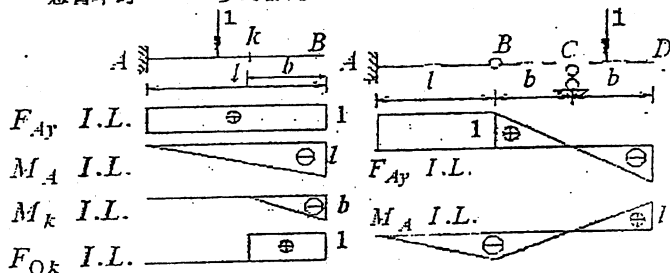


$$\begin{cases} M_k = R_b b & x \leq a \\ M_k = R_a a & x \geq a \end{cases}$$

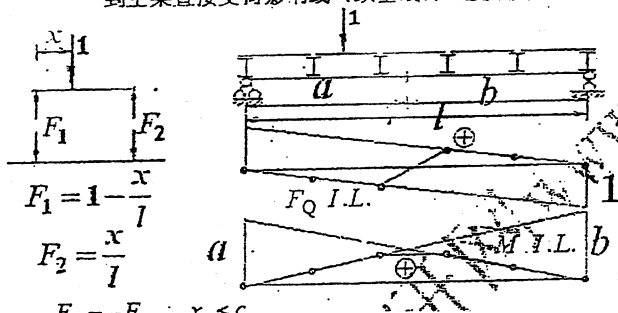
反力影响线是基本弯矩、剪力影响线可由反力影响线导出。

2. 按定义用静力平衡方程建立影响量方程，由函数作图的方法称作静力法。

悬臂单跨 多跨静定



3. 经结点传荷的主梁：由静力法可证明荷载在次梁上移，主梁内力线性变化。因此，将结点投影到主梁直接受荷影响线（或基线），连投影点可得主梁影响线。



$$F_1 = 1 - \frac{x}{l}$$

$$F_2 = \frac{x}{l}$$

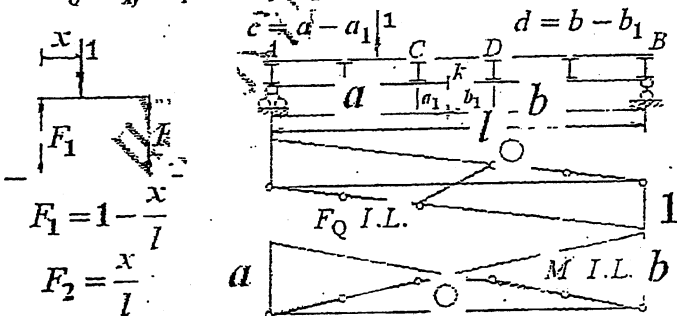
$$F_Q = -F_{By} \quad x_1 \leq c$$

$$F_Q = F_{Ay} \quad x_1 \geq a + b_1$$

$$F_Q = -(F_{By} - F_2) \quad a \geq x_1 \geq c$$

$$F_Q = F_{Ay} - F_1 \quad a + b_1 \leq x_1 \leq a$$

x_1 为 1 的坐标



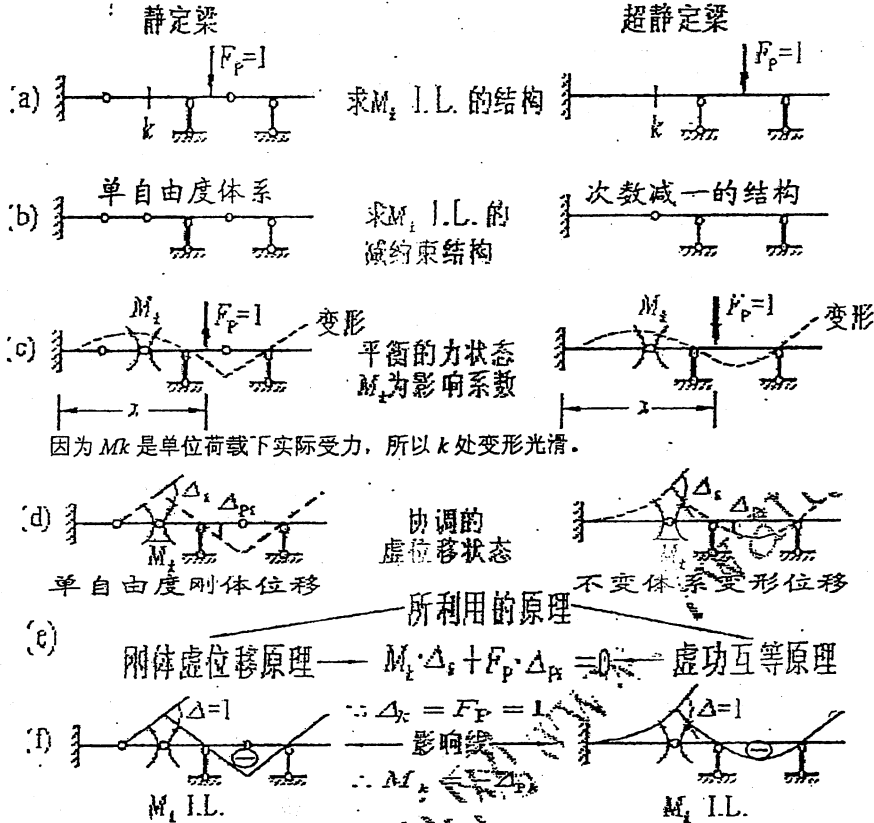
$$F_1 = 1 - \frac{x}{l}$$

$$F_2 = \frac{x}{l}$$

4. 按定义实质为求移动荷载下某杆轴力。因此关键是熟练掌握桁架在单位力位于任何 X 位置时指定杆内力如何求。内力可用结点投影方程、截面力矩方程或联合用投影和力矩方程求，与对应可投影、力矩和联合法列影响量方程并作图。

6.3 虚功法做影响线★★

1. 虚功法（机动法）作影响线的原理

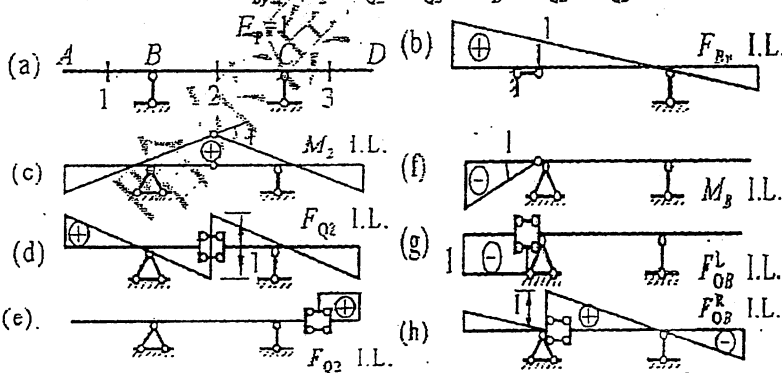


由此得结论：影响线等于单位虚位移图（注意形状、控制值和符号）。

机动法作影响线的实质是什么？将平衡问题化为几何问题来解决。

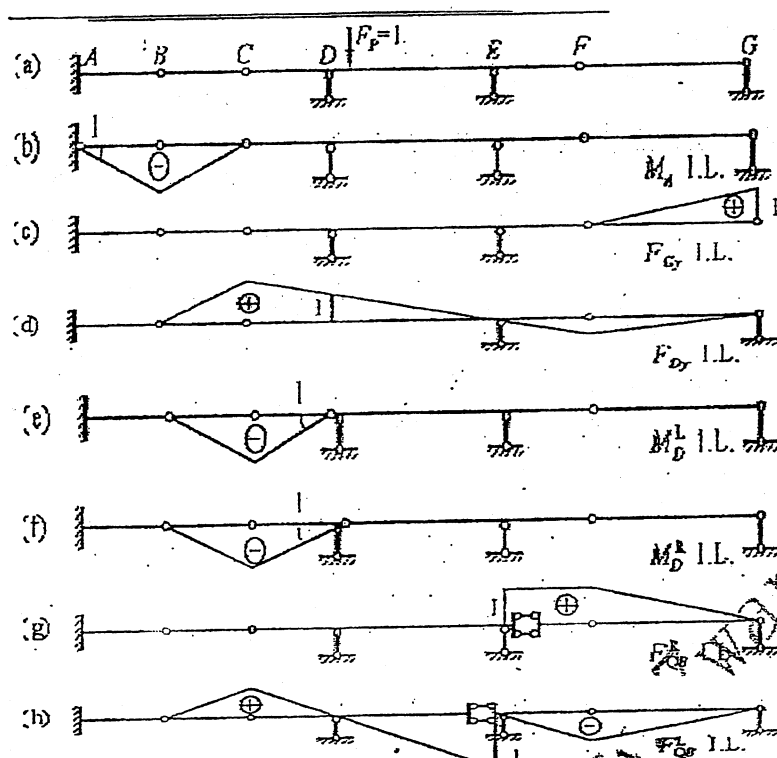
结论“虚位移图即影响线”是否恒正确？只适用于垂直杆轴单位移动荷载情况。

试作图示外伸梁的 F_{By} 、 M_2 、 F_{Q2} 、 F_{Q3} 、 M_B 、 F_{QB}^L 、 F_{QB}^R 影响线。

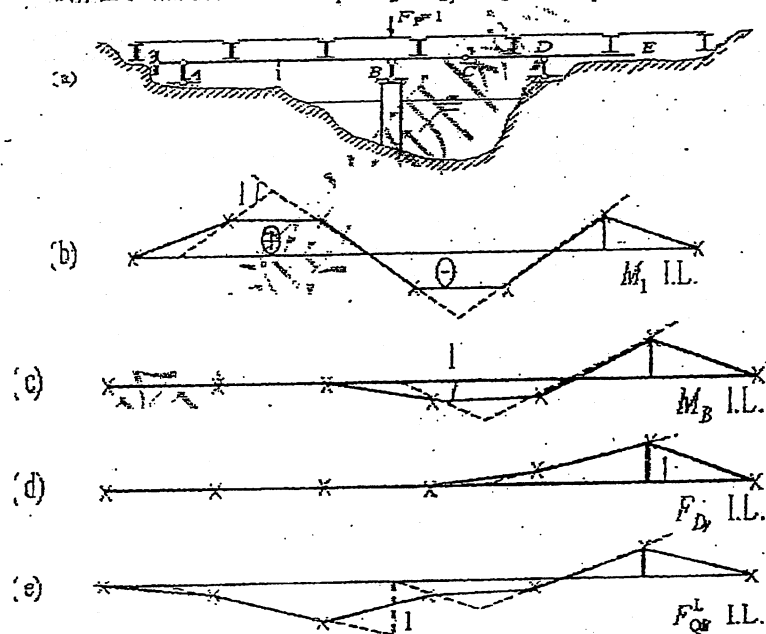


试作图示多跨梁的 M_A 、 F_{Cy} 、 F_{Dy} 、 M_D^L 、 M_D^R 、 F_{QB}^R 、 F_{QB}^L 影响线。

88



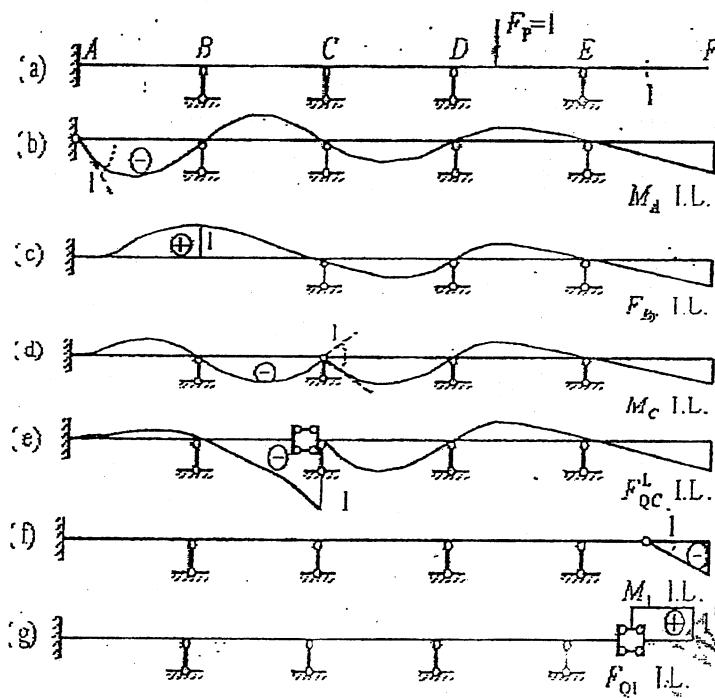
试作图示结点传荷主梁的 M_1 、 M_B 、 F_D 、 F_{Q1}^1 影响线



虚功（机动）法作影响线，关键在记住：变形图即为影响线形状，一些支座左右侧内力影响线，先按跨中内力影响线作，然后考虑往支座移。

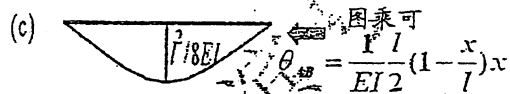
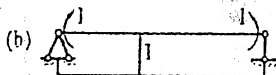
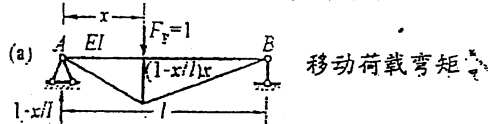
试作图示连续梁的 M_A 、 F_B 、 M_C 、 F_{Q1}^1 、 M_1 、 F_{Q1} 影响线

80

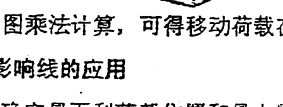
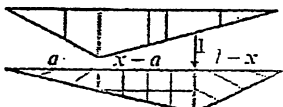
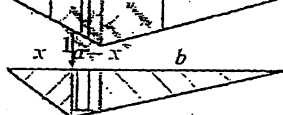
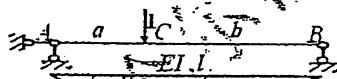


2. 作静定结构变形影响线

作简支梁相对转角 θ_{AB} 影响线的例子



作简支梁挠度 v_C 影响线的例子



图乘法计算, 可得移动荷载在 C 左、右的影响系

6.4 影响线的应用

1. 确定最不利荷载位置和最大影响量

8P

假定移动荷载下结构处线性状态，迭加原理适用。

给定移动荷载处于某位置时，需求量的值可通过该量影响线由迭加原理得到。

给定移动荷载使某量达最大的位置称最不利荷载位置。确定它的步骤是：作所求量的影响线；根据影响线确定临界荷载判别式，用它排除非临界荷载；对临界荷载试算，找最大。

2. 临界荷载判别式

多边形影响线情况

左、右移 Δx 影响量的改变量 ΔZ 为

$$\Delta Z = \Delta x \sum R_i \tan \alpha_i$$

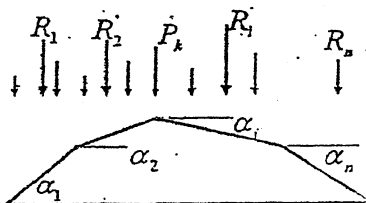
为使向左移动时 ΔZ 为负，必须左移时（右移 ΔZ 为正）

$$\sum R_i \tan \alpha_i > 0$$

为使向右移动时 ΔZ 为负，必须右移时（左移 ΔZ 为正）

$$\sum R_i \tan \alpha_i < 0$$

这就是临界荷载判别



三角形影响线情况（作为多边形的特例）

为使向左移动时 ΔZ 为负，必须左移时

$$(R_E + P_k)/a > R_E/b$$

为使向右移动时 ΔZ 为负，必须右移时

$$R_E/a < (P_k + R_E)/b$$

例：求图示简支梁 K 截面弯矩的最不利荷载位

作出 M_K 影响线如图

利用判别式确定临界荷载

$$\frac{4.5+2}{6} > 0; \quad \frac{2}{6} < \frac{4.5}{10}$$

$$\frac{7+3}{6} > \frac{2+4.5}{10}; \quad \frac{3}{6} < \frac{7+2+4.5}{10}$$

另两种情况不是临界荷载

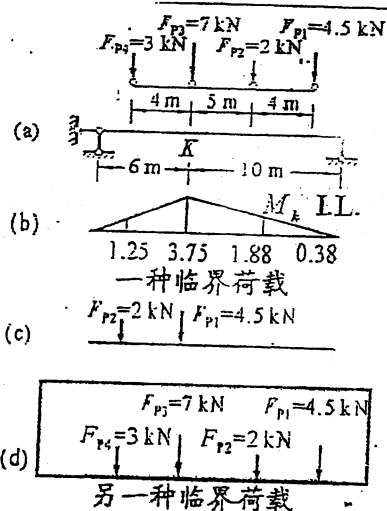
经试算可得

$$M_K^1 = 19.375 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$M_K^3 = 35.47 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

所以最不利荷载位置是

82



3. 活荷载的最不利布置

对一些可任意分段布置的活荷载，利用某量的影响线可确定活载如何布置使其达最大或最小。

4. 包络图的概念

给定移动荷载下各截面某量最大（或最小）值的连线称该量的包络图。可分段布置的活荷载和恒载共同作用下，使各截面某量最大（或最小）值的连线也称该量的包络图。

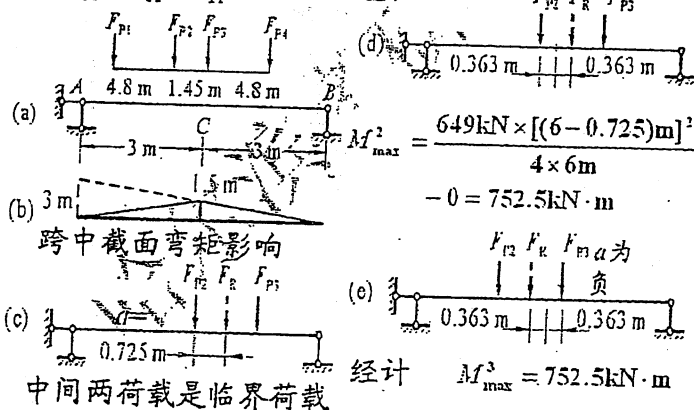
5. 绝对最大弯矩的概念

弯矩包络图中最大的弯矩值即为整个结构中最大的，因此称作绝对最大弯矩。简支梁绝对最大弯矩可按如下思路来求：

首先，移动荷载在某位置弯矩图是凸多边形，因此绝对最大弯矩必在某力下。设某力在 x 位置其下弯矩达极值，则 $M(x)$ 对 x 的导数应等于零，由此可求得 $x=(l-a)/2$ 。在这些极值中寻找最大的（以跨中弯矩影响线为据判断临界荷载，只对临界荷载试算），自然是绝对最大的。

例：求图示简支梁绝对最大弯矩。

$$F_{p1} = F_{p2} = F_{p3} = F_{p4} = 324.5\text{ kN} \cdot \text{m}$$



$$M_{\max}^2 = \frac{649\text{ kN} \times [(6 - 0.725)\text{ m}]^2}{4 \times 6\text{ m}}$$

$$-0 = 752.5\text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\max}^3 = 752.5\text{ kN} \cdot \text{m}$$

84

附录

2009 年硕士研究生入学考试大纲

考试科目名称: 结构力学 考试科目代码: 872

一、考试要求

要求考生全面系统地掌握结构力学的基本概念、基本理论和基本方法, 并且能综合运用结构力学的理论、方法分析解决具体的问题。

二、考试内容

1) 杆系结构组成分析

- 自由度、计算自由度
- 静定结构组成规则, 杆件体系几何组成分析

2) 静定结构受力分析

- 静定梁、刚架、组合结构、三铰拱和桁架结构的内力计算
- 静定结构的一般性质

3) 静定结构的位移计算

- 变形体虚功原理
- 单位荷载法, 图乘法, 互等定理
- 荷载作用、温度作用、支座移动、制造误差所引起的结构位移计算

4) 超静定结构受力分析

- 超静定次数的确定
- 力法解超静定结构 (梁、刚架、组合结构、桁架) 由荷载作用、温度作用、支座移动、制造误差所引起的内力
- 位移法基本未知量和基本结构的确定
- 位移法解超静定结构 (梁、刚架) 由荷载作用、支座移动所引起的内力
- 力矩分配法解超静定结构
- 超静定结构的位移计算
- 超静定结构内力计算结果的校核

5) 移动荷载作用下的结构分析

- 静力法作静定结构内力及支座反力影响线
- 机动法作静定结构内力及支座反力影响线
- 最不利荷载位置的确定

三、试卷结构.

考试时间: 180 分钟; 试卷满分: 150 分

1) 题型结构

- 客观题 (填充题和单项选择题) (60 分)
- 分析计算题 (90 分)

2) 内容结构

- 杆系结构组成分析 (10-20 分)
- 静定结构受力分析 (40-50 分)
- 结构位移计算 (15-25 分)
- 超静定结构受力分析 (50-60 分)
- 移动荷载作用下的结构分析 (15-25 分)

四、参考书目

- 1、结构力学教程 (I) 龙驭球、包世华主编 高等教育出版社 2003 年 5 月第一版
- 2、结构力学 (I) 王焕定、章梓茂、景瑞编著 高等教育出版社 2004 年 7 月第二版

