材料的基本力学性质

材料的基本力学性质

- 张量及基本运算
- 二阶张量，应力与应变
- 晶体的弹性性质

张量及基本运算

- **晶体物理性质的张量表示法**
- 描述物质宏观物理性质的物理量的定义

若可测物理量关系为线性时：

$$B = C A$$

A 作用物理量；B 感生物理量；**场量**，不表示与材料本身性质。

C **物质量**，材料本身具有的性质。

张量及基本运算

- 用张量描述晶体的物理性质

(1) 场量与物质量均为张量

物理量如质量、体积、密度 —— 标量

物理量如电场强度、电极化强度—— 矢量

如不均匀电场作用、材料本身不均匀，各点电场强度和电极化强度的方向和大小均不相同？除矢量外，有些物理量如应力—应变等？

二阶张量 $$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

张量及基本运算

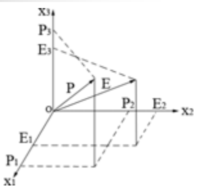
- 晶体电极化率 χ

某点电极化强度P与场强E不同方向

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

有

$$[\chi_{ij}] = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix}$$



张量及基本运算

张量表示式和名称	阶数 m	分量数 3^m	物理量示意
$[T]$ 标量	0	$3^0 = 1$	质量、温度、密度
$[T_i]$ 一阶张量	1	$3^1 = 3$	电场强度、电极化强度、热释电系数
$[T_{ij}]$ 二阶张量	2	$3^2 = 9$	介电系数、电极化率、应力、应变
$[T_{ijk}]$ 三阶张量	3	$3^3 = 27$	压电模量、线性电光系数、二级非线性极化率
$[T_{ijkl}]$ 四阶张量	4	$3^4 = 81$	弹性系数、光弹系数、二次电光系数、电致伸缩系数

张量及基本运算

(2) 用张量描述的晶体的物理性质

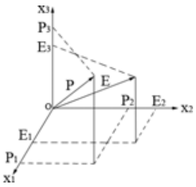
$$B_{ijk\ldots} = C_{ijk\ldots lmn\ldots} A_{lmn\ldots}$$

$[A_{lmn\ldots}]$：p阶作用张量；

$[B_{ijk\ldots}]$：q阶感生张量；

$[C_{ijk\ldots lmn\ldots}]$：$(p+q)$阶物性张量。

晶体的各向异性：量的大小和方向



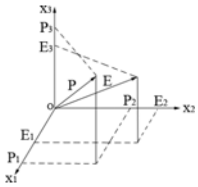
张量及基本运算

- 晶体电极化率 x
  某点电极化强度P与场强E不同方向

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

有

$$[\chi_{ij}] = \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix}$$



张量及基本运算

- **张量的变换和定义**
- 坐标系的变换

(1)坐标系变换的类型

右旋正交笛卡尔坐标系O，单位矢量$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

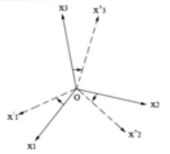
$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

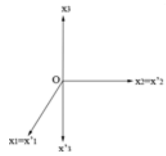
$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3)$

张量及基本运算

- 坐标系O经某种操作变换为坐标系O'
  如操作时坐标原点不动，测量的长度单位不变，O'仍未正交直角坐标系，如此条件下的操作可分为两类：

1. 第一类操作，**真旋转**，只包括纯粹的旋转，坐标系O和O'手性相同；
2. 第二类操作，**非真旋转**，中心反演、旋转反演，手性相反。





张量及基本运算

- 坐标系变换矩阵

新、旧坐标系基矢为单位矢量$\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}'_i$

相互关系为：

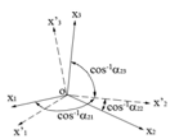
$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

或：

$(\mathbf{e}'_i) = (a_{ij})\ (\mathbf{e}_j)$

$(a_{ij}) = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\alpha_{ij})$

α_{ij}为新i轴与旧j轴的方向余弦



		O系		
		e_1	e_2	e_3
O'系	e'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	e'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	e'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

张量及基本运算

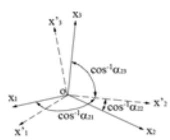
- 正变换系数矩阵为：

$$(A) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- 逆变换及系数矩阵[(A)的转置$(\tilde{A})$]：

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$$

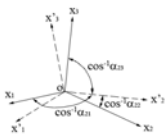
或：$(\mathbf{e}_i) = (a_{ji})\ (\mathbf{e}'_i)$



		O系		
		e_1	e_2	e_3
O'系	e'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	e'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	e'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

张量及基本运算

- 同时 $(A)\cdot(\tilde{A})=(I)=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
- 即 $(\tilde{A})=(A)^{-1}$
- 逆变换阵为正变换阵的逆，(A)为正交阵



		O系		
		e_1	e_2	e_3
O'系	e'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
	e'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
	e'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

张量及基本运算

- 9个矩阵系数非独立，须满足的关系为
  由 $(A)\cdot(\tilde{A})=(I)$ 可得正交归一关系式：

$$a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{13}=1$$
$$a^2_{21}+a^2_{22}+a^2_{23}=1$$
$$a^2_{31}+a^2_{32}+a^2_{33}=1 \quad \text{及}$$
$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0$$
$$a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0$$
$$a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0$$

即： $a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$ 或 $a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$

张量及基本运算

- **9个系数只有三个是独立的**
- 满足 $a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$ 或 $a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$ 称 **线性正交变换**
- 如$O\rightarrow O'\rightarrow O''$变换矩阵分别为$A$、$B$，则
  $O\rightarrow O''$的变换矩阵C:

$$(C)=(B)(A)$$

张量及基本运算

- 根据矩阵行列式的值确定坐标系变换的类型

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix} \qquad \Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

由于

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}=0$$
$$a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}=0$$
$$a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}=0$$

可得到： $\dfrac{a_{11}}{A_{11}}=\dfrac{a_{12}}{A_{12}}=\dfrac{a_{13}}{A_{13}}$ 令该式等于$1/k$

张量及基本运算

- 可得到：$A_{ij}=k\,a_{ij}$
  即： $\Delta=k\,(a^2_{11}+a^2_{12}+a^2_{13})=k$
  所以 $\dfrac{a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2}{A_{11}^2+A_{12}^2+A_{13}^2}=\dfrac{1}{k^2}$

$$\Delta^2=k^2=A^2_{11}+A^2_{12}+A^2_{13}$$

带入正交归一关系式：

$$\Delta=k=\pm 1$$

线性正交变换，变换矩阵行列式的值只能为±1

张量及基本运算

- $\Delta=\pm 1$的物理意义

不动或绕某轴旋转360⁰： $(a_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\delta_{ij})$

$\Delta=+1$

只做真旋转 $(a_{ij})=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

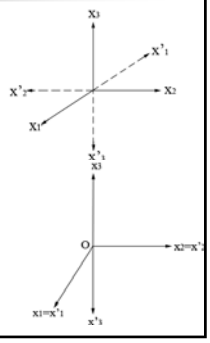
真旋转时， $\Delta=+1\rightarrow-1$ ？

张量及基本运算

- 中心反演操作：$(a_{ij})=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

  Δ ＝ － 1
- x_1x_2平面反映：$(a_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

  Δ ＝ － 1

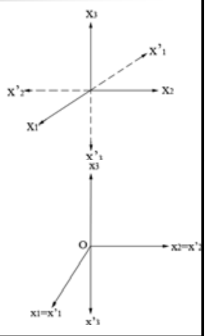


张量及基本运算

- 真旋转不改变坐标系手性

  Δ ＝ ＋ 1
- 第二类操作改变坐标系手性

  Δ ＝ － 1



张量及基本运算

- **张量的变换**

  (1) 零阶张量（标量）的变换

  $\Phi(x_1,x_2,x_3)$，与方向无关；

  坐标系变换时，值不变，**真标量**；

  第二类操作时，量值符号改变（旋光性），**赝标量**

  $$\Phi' = \pm\,\Phi$$

张量及基本运算

- **张量的变换**

  (2) 一阶张量（矢量）的变换

  矢量分量的变换即点坐标的变换

  $$\boldsymbol{r} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3} = x_i\boldsymbol{e_i}$$

  $$= x'_1\boldsymbol{e'_1} + x'_2\boldsymbol{e'_2} + x'_3\boldsymbol{e'_3} = \boldsymbol{r'}$$

  即：$x_j\boldsymbol{e_j} = x'_k\boldsymbol{e'_k}$

  那么 $\boldsymbol{e'_i}\,(x_j\boldsymbol{e_j}) = \boldsymbol{e'_i}\,(x'_k\boldsymbol{e'_k})$

  得到 $x'_i = a_{ij}\,x_j$

张量及基本运算

- 区分新、旧坐标

  $$\boldsymbol{x'_i} = a_{i'j}\,\boldsymbol{x_j}$$
- 又 $(\boldsymbol{e'_i}) = (a_{ij})\,(\boldsymbol{e_j})$
- *矢量变换与坐标系基矢的变换完全一样。*

  $$(\boldsymbol{r'}) = (A)(\boldsymbol{r})$$
  $$(x') = (A)(x)$$
- 逆变换：$\boldsymbol{r_i} = a_{j'i}\,\boldsymbol{r'_j}$

  $x_i = a_{j'i}\,x'_j$

  $(\boldsymbol{r}) = (A)^{-1}(\boldsymbol{r'})$

  $(x) = (A)^{-1}(x')$　　$(A)^{-1} = (a_{j'i})$正变换阵的逆

张量及基本运算

- 极矢量和轴矢量

  极矢量：速度$\boldsymbol{v}$、电场强度$\boldsymbol{E}$、电极化矢量$\boldsymbol{P}$

  轴矢量：角速度 ω、动量矩$\boldsymbol{L}$，右旋坐标系中，采用右手螺旋法则规定正指向。

  差别：取镜面与矢量线段垂直，通过镜面反映，极矢量的方向反转，轴矢量的方向不变。若取镜面包含矢量的线段，经反映，极矢量方向不变，而轴矢量反向。

张量及基本运算

- 极矢量和轴矢量的变换规律

极矢量正变换：$\boldsymbol{x'_i} = a_{i'j}\,\boldsymbol{x_j}$

逆变换：$\boldsymbol{r_i} = a_{j'i}\,\boldsymbol{r'_j}$

$x_i = a_{j'i}\,x'_j$

轴矢量第一类操作，同极矢量

第二类操作正变换：$\boldsymbol{x'_i} = -\,a_{i'j}\,\boldsymbol{x_j}$

逆变换：$\boldsymbol{r_i} = -\,a_{j'i}\,\boldsymbol{r'_j}$

$x_i = -\,a_{j'i}\,x'_j$

张量及基本运算

- **张量的变换**

(3) 二阶张量的变换

设矢量$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$由二阶张量$\boldsymbol{T}$联系，分量关系为：

$$p_k = T_{kl}\,q_l$$

矩阵为：

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

新坐标系中，仍有：$p'_i = T'_{ij}\,q'_j$

张量及基本运算

- 如$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$同类矢量，现考虑都是极矢量：

$$p'_i = a_{i'k}\,p_k$$
$$q'_j = a_{j'l}\,q_l$$

- 带入 $p_k = T_{kl}\,q_l$ 可得：

$$p'_i = a_{i'k}\,p_k = a_{i'k}\,T_{kl}\,q_l = a_{i'k}\,T_{kl}\,a_{j'l}\,q'_j$$

- 比较式：$p'_i = T'_{ij}\,q'_j$ 显然有

$$T'_{ij} = a_{i'k}\,T_{kl}\,a_{j'l}$$

- 所以二阶张量变换时矩阵关系为

$$(T'_{ij}) = (A)\,(T_{kl})\,(A)^{-1}$$

即：$T'_{ij} = a_{i'k}\,a_{j'l}\,T_{kl}$

张量及基本运算

- 如$\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$都是轴矢量：

$$(p'_i) = \pm\,(a_{i'k})\,(p_k)$$
$$(q'_j) = \pm\,(a_{j'l})\,(q_l)$$

- 二阶张量变换时矩阵关系仍为：

$$(T'_{ij}) = (A)\,(T_{kl})\,(A)^{-1}$$
$$T'_{ij} = a_{i'k}\,a_{j'l}\,T_{kl}$$

无论变换为第一类或第二类

张量及基本运算

- 如$\boldsymbol{p}$极矢量、$\boldsymbol{q}$轴矢量：

$$p'_i = a_{i'k}\,p_k$$
$$q'_j = \pm\,a_{j'l}\,q_l$$

- 二阶张量变换时矩阵关系为：

$$(T'_{ij}) = \pm\,(A)\,(T_{kl})\,(A)^{-1}$$
$$T'_{ij} = \pm\,a_{i'k}\,a_{j'l}\,T_{kl}$$

$\boldsymbol{p}$轴矢量、$\boldsymbol{q}$极矢量上式仍成立

张量及基本运算

- 据此，可将二阶张量分为***二阶极张量***，***二阶轴张量***
- ***二阶极张量***

$$\boldsymbol{(T'_{ij}) = (A)\,(T_{kl})\,(A)^{-1}}$$
$$\boldsymbol{T'_{ij} = a_{i'k}\,a_{j'l}\,T_{kl}}$$

- ***二阶轴张量***

$$\boldsymbol{(T'_{ij}) = \pm\,(A)\,(T_{kl})\,(A)^{-1}}$$
$$\boldsymbol{T'_{ij} = \pm\,a_{i'k}\,a_{j'l}\,T_{kl}}$$

张量及基本运算

- 二阶张量的逆变换

二阶极张量

$$\boldsymbol{T_{kl} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, T'_{ij}}$$
$$\boldsymbol{(T) = (A)^{-1}\,(T')\,(A)}$$

二阶轴张量

$$\boldsymbol{T_{kl} = \pm\, a_{i'k}\, a_{j'l}\, T'_{ij}}$$
$$\boldsymbol{(T) = \pm(A)^{-1}\,(T')\,(A)}$$

张量及基本运算

- 二阶张量变换的展开式

极张量：$T'_{ij} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, T_{kl}$ 即对k、l下标求和

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{i'k}\, a_{j'1}\, T_{k1} + a_{i'k}\, a_{j'2}\, T_{k2} + a_{i'k}\, a_{j'3}\, T_{k3} \\ &= a_{i'1}\, a_{j'1}\, T_{11} + a_{i'1}\, a_{j'2}\, T_{12} + a_{i'1}\, a_{j'3}\, T_{13} \\ &+ a_{i'2}\, a_{j'1}\, T_{21} + a_{i'2}\, a_{j'2}\, T_{22} + a_{i'2}\, a_{j'3}\, T_{23} \\ &+ a_{i'3}\, a_{j'1}\, T_{31} + a_{i'3}\, a_{j'2}\, T_{32} + a_{i'3}\, a_{j'3}\, T_{33} \end{aligned}$$

矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

张量及基本运算

- 二阶张量分量的变换和坐标二重积的变换相同

由式 $\boldsymbol{x'_i} = a_{i'j}\, \boldsymbol{x_j}$

$$x'_i\, x'_j = (a_{i'k}\, x_k) \cdot (a_{j'l}\, x_l) = a_{i'k}\, a_{j'l}\, (x_k\, x_l)$$

比较式 $T'_{ij} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, T_{kl}$ **相同**

注意：展开时$k \neq l$项出现成对项，如$k = 1$，$l = 2$

$$a_{i'1}\, a_{j'2}\, (x_1\, x_2) + a_{i'2}\, a_{j'1}\, (x_2 x_1)$$

对坐标二重积：$x_1\, x_2 = x_2 x_1$，
但张量只有$T_{12} = T_{21}$时才成立

采用坐标二重积表示分量的二重积，*坐标顺序不颠倒*。

对轴张量，第二类操作—坐标二重积变换前× (-1)

张量及基本运算

- **例**：坐标系O经过绕x_3右旋角 θ 变换为O'

变换矩阵为：

$$(A) = (a_{i'j}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

坐标的变换关系为：

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = (a_{i'j}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ x_3 \end{pmatrix}$$

张量及基本运算

- 二阶张量分量T'_{ij}的变换和$\pm(x'_i)(x'_j)$一样，

取$i' = 1$，$j' = 2$：

$$\begin{aligned} T'_{12} &\sim \pm\, (x'_i)(x'_j) \\ &= \pm\, (x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)(-x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta) \\ &= \pm\, \{ -(x_1)(x_1) \cos\theta \sin\theta - (x_2)(x_1) \sin^2\theta \\ &\quad + (x_1)(x_2) \cos^2\theta + (x_2)(x_2) \sin\theta \ \sin\theta \} \end{aligned}$$

坐标系O中二重积相当于二阶张量在O系中对应分量：

$$\begin{aligned} T'_{12} \sim \pm\, \{ &-T_{11} \cos\theta \sin\theta - T_{21} \sin^2\theta \\ &+ T_{12} \cos^2\theta + T_{22} \sin\theta \ \sin\theta \} \end{aligned}$$

张量及基本运算

- 利用式 $T'_{ij} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, T_{kl}$ 也可得到：

$$\begin{aligned} T'_{12} = \pm\, (&a_{1'1}\, a_{2'1}\, T_{11} + a_{1'1}\, a_{2'2}\, T_{12} + a_{1'1}\, a_{2'3}\, T_{13} \\ &+ a_{1'2}\, a_{2'1}\, T_{21} + a_{1'2}\, a_{2'2}\, T_{22} + a_{1'2}\, a_{2'3}\, T_{23} \\ &+ a_{1'3}\, a_{2'1}\, T_{31} + a_{1'3}\, a_{2'2}\, T_{32} + a_{1'3}\, a_{2'3}\, T_{33} \end{aligned}$$

由变换矩阵

$$(A) = (a_{i'j}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同样得到：

$$\begin{aligned} T'_{12} = \pm\, \{ &-T_{11} \cos\theta \sin\theta - T_{21} \sin^2\theta \\ &+ T_{12} \cos^2\theta + T_{22} \sin\theta \ \sin\theta \} \end{aligned}$$

张量及基本运算

- **张量的变换**

(4) 三、四阶及更高阶张量的变换

三阶张量分量的变换：27个分量

$$T'_{ijk} = \pm\, a_{i'l}\, a_{j'm}\, a_{k'n}\, T_{lmn}$$
$$T_{lmn} = \pm\, a_{i'l}\, a_{j'm}\, a_{k'n}\, T'_{ijk}$$

四阶张量分量的变换：81个分量

$$T'_{ijkl} = \pm\, a_{i'm}\, a_{j'n}\, a_{k'o}\, a_{l'p} T_{mnop}$$
$$T_{mnop} = \pm\, a_{i'm}\, a_{j'n}\, a_{k'o}\, a_{l'p} T'_{ijkl}$$

m阶张量分量的变换：

$$T'_{abc\ldots m} = \pm\, a_{a'\alpha}\, a_{b'\beta}\, a_{c'\gamma} \ldots a_{m'\omega} T_{\alpha\beta\gamma\ldots\omega}$$

张量及基本运算

- **张量的定义**

三维空间直角坐标系的坐标变换($a_{i'j}$)下；

物理量的3^m 个分量依照前述变换定律进行变换；

这3^m个分量的有序集合称三维空间中的一个m阶张量。

其中不论在第一类变换或第二 类坐标系变换，都取正号者为极张量；

在第一类坐标系变换取正号、第二类坐标系变换下取负号者为轴张量。

张量及基本运算

- **操作矩阵及其变换**

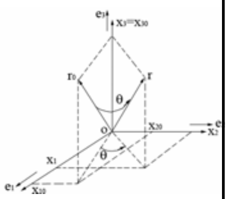
(1) 操作矩阵

坐标系O中矢量$\boldsymbol{r_0}$绕特定轴$\boldsymbol{n}$右旋 θ 角→$\boldsymbol{r}$，表示为：

$$\hat{R}(n,\theta)r_0 = r$$

$\hat{R}(e_3,\theta)$，线性正交变换，$|\boldsymbol{r_0}| = |\boldsymbol{r}|$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$



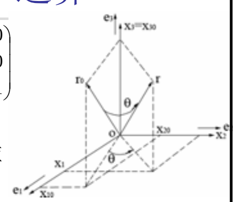
张量及基本运算

- 操作$\boldsymbol{R}$的矩阵 $D(\hat{R}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(r) = D(\hat{R})(r_0)$$

矩阵元b_{ij}，i和操作后的矢量分量对应

j与未操作前的对应



$$(r) = D(\hat{R})(r_0) = (b_{ij})(r_0)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$

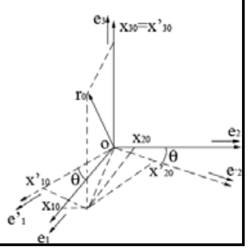
张量及基本运算

坐标系O经 $\hat{R}(e_3,\theta) \to O''$， $\boldsymbol{r_0}$矢量的正变换矩阵为$(A)= (a_{ij})$，则O系经 $\hat{R}(e_3,-\theta)$变换为O'时，矢量变换为： $D(\hat{R}) = (A)^{-1}$

与式 $(r) = D(\hat{R})(r_0) = (b_{ij})(r_0)$ 比较可得

$$D(\hat{R}) = (b_{ij}) = (a_{ij})^{-1} = (a_{ji})$$

即 $$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



张量及基本运算

(2) *两个连续操作的结果可归并为一个操作，后者的操作矩阵为两个操作矩阵的乘积。*

设对$\boldsymbol{r}$的操作为 $\hat{R}_1$，操作矩阵为 $D(\hat{R}_1)$， $D(\hat{R}_1)(r) = (r')$

对$\boldsymbol{r'}$再操作为 $\hat{R}_2$，操作矩阵为 $D(\hat{R}_2)$， $D(\hat{R}_2)(r') = (r'')$

$$(r'') = D(\hat{R}_2) D(\hat{R}_1)(r)$$

相当于 $(r'') = D(\hat{R}_3)(r)$

其中 $D(\hat{R}_3) = D(\hat{R}_2) D(\hat{R}_1)$

张量及基本运算

例1. 绕x_3将矢量右旋 θ_1角，再右旋 θ_2角，相当于绕x_3右旋(θ_1+ θ_2)角，即：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例2. 旋转反演，绕x_3将矢量右旋 θ角，再对原点中心反演：

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

张量及基本运算

例3. 绕x_3将矢量右旋 θ角，再x_1x_2平面镜面反映：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

张量及基本运算

(3) 操作矩阵的变换

坐标系O经$\hat{R}$，$\boldsymbol{r_0} \to \boldsymbol{r}$，操作矩阵为 $D(\hat{R})$

设坐标系O经变换(A)变为O'系，由O'系看$\hat{R}$，其操作矩阵 $D'(\hat{R})$？

$O \to O'$系，$\boldsymbol{r_0}\,(x_0) \to \boldsymbol{r}\,(x'_0)$，其坐标变换阵 $(x'_0) = (A)(x_0)$

$\boldsymbol{r}\,(x) \to \boldsymbol{r}\,(x')$，其坐标变换阵 $(x') = (A)(x)$

但 $\hat{R}$ 对$\boldsymbol{r_0}$操作使之变为$\boldsymbol{r}$，有如下关系：

$$D(\hat{R})(x_0)=(x)$$

张量及基本运算

即可得到：$(x')=(A)D(\hat{R})(A)^{-1}(x'_0)$

操作$\hat{R}$ 在O'系中，使矢量$\boldsymbol{r'_0}$变为$\boldsymbol{r'}$矢量

$$(x')=D'(\hat{R})(x'_0)$$

其中 $D'(\hat{R})$ 为 $\hat{R}$ 操作在O'系中的操作矩阵。

对比即可得到

$$D'(\hat{R})=(A)D(\hat{R})(A)^{-1}$$

对于m阶张量进行操作 $\hat{R}$，

$$D(\hat{R})\otimes D(\hat{R})\otimes\cdots\otimes D(\hat{R})$$

张量及基本运算

- 张量的基本运算

1. 零张量

某坐标系中所有分量为零，则在所有的坐标系中该张量的所有分量也全为零，称零张量。

2. 张量的加减法

同价、同类型张量 → 同价、同类型。

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$一阶极张量，在坐标变换$(a_{i'j})$下变为$\boldsymbol{A'}$、$\boldsymbol{B'}$，则应有：

$$A_i' + B_i' = a_{i'j}A_j + a_{i'j}B_j = a_{i'j}(A_j + B_j)$$

张量及基本运算

3. 张量的数乘

$$c\,[T_{ijk\ldots}] = [\,c\,T_{ijk\ldots}]$$

4. 张量的收缩

m阶张量$[T_{ijk\ldots}]$，当其中有两个下标i和j相等时，形成一个$(m\text{-}2)$阶张量，称张量的降阶。

四阶极张量，坐标变换$(a_{i'j})$：

$$T'_{ijkl} = a_{i'm}\,a_{j'n}\,a_{k'o}\,a_{l'p}\,T_{mnop}$$

$i = j$，则有：

$$T'_{ijkl} = a_{i'm}\,a_{i'n}\,a_{k'o}\,a_{l'p}\,T_{mnop}$$

张量及基本运算

$$T'_{ijkl} = a_{i'm} a_{i'n} a_{k'o} a_{l'p} T_{mnop}$$

$$a_{i'm} a_{i'n} = \delta_{mn}$$

于是： $T'_{ijkl} = a_{k'o} a_{l'p} T_{mnop}$

即T_{mnop}是按二阶张量的变换规律进行变换

张量及基本运算

5. 张量的乘积：外积和内积

(1). 外积

$[T_{ijk\ldots}]$为t阶张量，$[S_{pqr\ldots}]$为s阶张量，则量

$$T_{ijk\ldots} \cdot S_{pqr\ldots} = C_{ijk\ldots pqr\ldots}$$

是一个$(t+s)$阶张量C的分量，称T、S的外积。

两个二阶张量$[T_{ij}]$、$[S_{pq}]$所有分量的可能乘积为：

$$T'_{ij} \cdot S'_{kl} = (a_{i'm} a_{j'n} T_{mn}) \cdot (a_{k'p} a_{l'q} S_{pq})$$
$$= a_{i'm} a_{j'n} a_{k'p} a_{l'q} (T_{mn} \cdot S_{pq})$$

服从4阶张量变换规律。

张量及基本运算

5. 张量的乘积：外积和内积

(2). 内积（点积）

t阶张量$[T_{ijk\ldots}]$和s阶张量$[S_{pqr\ldots}]$相乘，若有相同的下标时，乘积称内积（点积）。如相同下标有n对，则内积构成$(t+s-2n)$阶张量。

例1. 二阶 $[T_{ij}]$、一阶$[B_j]$点乘

$$T'_{ij} \cdot B'_j = (a_{i'k} a_{j'l} T_{kl}) \cdot (a_{i'm} B_m) = a_{i'k} a_{j'l} a_{j'm} (T_{kl} \cdot B_m)$$
$$= a_{i'k} a_{j'l} \delta_{lm} (T_{kl} \cdot B_m) = a_{i'k} (T_{kl} \cdot B_l)$$

说明$T'_{ij} \cdot B'_j$ 乘积按一阶张量变换，有

$$T_{ij} \cdot B_j = C_i$$

张量及基本运算

例2. 四阶 $[c_{ijkl}]$、二阶$[S_{kl}]$双点乘

$$c'_{ijkl} : S'_{kl} = (a_{i'm} a_{j'n} a_{k'p} a_{l'q} c_{mnpq}) : (a_{k'r} a_{l's} S_{rs})$$
$$= a_{i'm} a_{j'n} (c_{mnpq} : S_{pq})$$

说明c'_{ijkl} : S'_{kl}按而阶张量变换，有

$$c_{ijkl} \cdot S_{kl} = T_{ij}$$

张量及基本运算

6. 张量的微分

设m阶$[T_{pqr\ldots}]$为坐标(x_j)的函数，即$[T_{pqr\ldots}(x_j)]$，则微分

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[T_{pqr\ldots}(x_j)\right]$$

是一个$(m+1)$阶张量。

张量及基本运算

- 张量的对称性质
- 只要是某阶某类的物理量张量必然有某种对称性；
- 对于某种张量，其下标作对称置换时，此张量各分量之间具有一定的关系。下标置换对称性通常由该物理量张量的性质和热力学关系决定。

张量及基本运算

1. 各阶各类张量所固有的对称性质

(1). **偶数阶的极张量和奇数阶的轴张量具有中心对称的性质**

二阶极张量，变换关系为：$T'_{ij} = a_{i'k}\, a_{j'l}\, T_{kl}$

如中心反演，$a_{j'j} = -\delta_{i'j}$ 那么

$$T'_{ij} = (-\delta_{i'k})\,(-\delta_{j'l})\, T_{kl} = T_{ij}$$

即变换后分量值不变。

变换属中心反演性质，说明二阶极张量有中心对称性质。

(2). **奇数阶的极张量和偶数阶的轴张量具有中心反对称性质**

即：如三阶极张量 $T'_{ijk} = -T_{ijk}$

张量及基本运算

2. 张量下标置换的对称性

(1). 对称张量：分量的两个下标互换，分量值不变。

$$T_{ijkl} = T_{jikl}$$

对称张量在坐标系变换时，对称性不变。

(2). 反对称张量：两个下标互换，分量值不变，符号反。

$$T_{ijkl} = -T_{jikl}$$

反对称性在坐标系变换下保持不变。

张量及基本运算

(3). 全对称张量：怎么换，都不变。

$$T_{ijkl} = T_{jikl} = T_{kijl} = T_{kjil} = T_{jkil} = T_{ikjl}$$

对于i，j和k下标为全对称张量。

在坐标系变换时，对称性不变。

张量及基本运算

- 循环坐标中的张量

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$x'_1 = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$

$x'_2 = x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$

$x'_3 = x_3$

张量及基本运算

- 1. 循环坐标系及笛卡尔直角坐标系

一组基矢$\boldsymbol{g}$，$\bar{g}$ 和$\boldsymbol{e}$，与笛卡尔坐标系的三个基矢$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$和$\boldsymbol{e}_3$关系为：

$$\boldsymbol{g} = ½\,(\boldsymbol{e}_1 - i\,\boldsymbol{e}_2)$$

$$\bar{g} = ½\,(\boldsymbol{e}_1 + i\,\boldsymbol{e}_2)$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_3$$

该复坐标系称循环坐标系

$\bar{g} = \boldsymbol{g}^*$ （复共轭）

$\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{g} = \bar{g} \cdot \bar{g} = 0 \qquad \boldsymbol{g} \cdot \bar{g} = ½$

$(\boldsymbol{g} \times \bar{g}) \cdot \boldsymbol{e} = -i/2$

坐标系线性独立，非正交归一

张量及基本运算

- 变换关系

$\xi = x_1 + i\,x_2 = r\,e^{i\phi}$

$\bar{\xi} = x_1 - i\,x_2 = r\,e^{-i\phi}$

$z = x_3$

其中 ϕ 为$\boldsymbol{r}$与$\boldsymbol{x}_1$轴的夹角

或

$x_1 = ½\, i\,(\xi + \bar{\xi})$

$x_2 = ½\, i\,(-\xi + \bar{\xi})$

$x_3 = z$

张量及基本运算

- 2. 循环坐标系中对张量的操作

(1). 极矢量$\boldsymbol{r}$，设操作 $\hat{R}$ 是绕$\boldsymbol{x_3}$(z)轴逆时针旋转 θ

$\boldsymbol{r}(\xi,\bar{\xi},z) \rightarrow \boldsymbol{r}'(\xi',\bar{\xi}',z')$

$\xi' = \xi e^{i\theta}$

$\bar{\xi}' = \bar{\xi} e^{-i\theta}$

$z' = z$

操作矩阵 $C(\hat{R})$ 形式：$\begin{pmatrix} \xi' \\ \bar{\xi}' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \\ z \end{pmatrix}$

张量及基本运算

- 引入新循环坐标系，以(A_l)替代$(\xi,\bar{\xi},z)$，便于和直角坐标系表示法(x_i)相比较

下标 l的取值不是 (1,2,3)，取角度 θ的倍数(1,-1,0)，即令：

$$(A_1, A_{\bar{1}}, A_0) = (\xi, \bar{\xi}, z)$$

其中 $A_{\bar{1}} = A_{-1}$

其变换可写为：$(A_{k'}) = C(\hat{R})(A_l)$

每个循环坐标的变换为：

$$A_{k'} = C_{k'l}(\hat{R})A_l = e^{ik'\theta}\delta_{k'l}A_l = e^{il\theta}\delta_{k'l}A_l$$

张量及基本运算

- 比较 $\begin{pmatrix} \xi' \\ \bar{\xi}' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\xi} \\ z \end{pmatrix}$ 和 $(A_{k'}) = C(\hat{R})(A_l)$

可得到

$$C(\hat{R}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

如 $\hat{R}$ 非真旋转，则：

$$C_{k'l}(\hat{R}) = -e^{ik'\theta}\delta_{k'l} = -e^{il\theta}\delta_{k'l}$$

张量及基本运算

- (2). 对二阶张量进行 $\hat{R}$ 操作

设操作为 $\hat{R}(e,\theta)$，由直角坐标二重积变换

$$x'_1 x'_1 = \frac{1}{4}\left(A_1A_1e^{i2\theta} + A_1A_{\bar{1}} + A_{\bar{1}}A_1 + A_{\bar{1}}A_{\bar{1}}e^{-i2\theta}\right)$$

同样，由 $x_1 = ½ i(\xi + \bar{\xi})$

$x_2 = ½ i(-\xi + \bar{\xi})$

$x_3 = z$

可得

$$x'_1 x'_1 = \frac{1}{2}(A'_1 + A'_{\bar{1}}) \cdot \frac{1}{2}(A'_1 + A'_{\bar{1}}) = \frac{1}{4}(A'_1 A'_1 + A'_1 A'_{\bar{1}} + A'_{\bar{1}} A'_1 + A'_{\bar{1}} A'_{\bar{1}})$$

张量及基本运算

- 比较可得 $A'_1 A'_1 = A_1A_1e^{i2\theta}$

$A'_1 A'_{\bar{1}} = A_1A_{\bar{1}} = A_1A_{\bar{1}}e^{i(\theta-\theta)}$

$A'_{\bar{1}} A'_1 = A_{\bar{1}}A_1 = A_{\bar{1}}A_1e^{i(-\theta+\theta)}$

$A'_{\bar{1}} A'_{\bar{1}} = A_{\bar{1}}A_{\bar{1}}e^{-i2\theta}$

同样可得 $A'_1 A'_0 = A_1A_0e^{i\theta} = A_1A_0e^{i(1+0)\theta}$

$A'_{\bar{1}} A'_0 = A_{\bar{1}}A_0e^{-i\theta} = A_{\bar{1}}A_0e^{i(-1+0)\theta}$

因此 $A'_{k_1} A'_{k_2} = e^{i(l_1+l_2)\theta}\delta_{k'_1l_1}\delta_{k'_2l_2}A_{l_1}A_{l_2}$

$(k'_1, k'_2, l_1, l_2 = 1, \bar{1}, 0)$

张量及基本运算

- 两个结论

1. 直角坐标的每个二重积都可用循环坐标二重积的一组线性组合来表示，有理由假设二阶张量循环分量的变换和循环坐标二重积的变换是对应的。

$$T'_{k_1k_2} \text{--} A'_{k_1}A'_{k_2}$$

张量及基本运算

2．二阶张量也可由九个循环分量组成。可以将任意常数乘各 $A'_{k_1}A'_{k_2}$ 项然后相加，即可得到下述用循环分量表示的二阶张量。

$$[T'_{k_1k_2}]=a(A'_1A'_1)+\bar{a}(A'_{\bar{1}}A'_{\bar{1}})+b(A'_1A'_{\bar{1}})+\bar{b}(A'_{\bar{1}}A'_1)$$
$$+c(A'_1A'_0)+\bar{c}(A'_{\bar{1}}A'_0)+d(A'_0A'_1)+\bar{d}(A'_0A'_{\bar{1}})+e(A'_0A'_0)$$

$$[T'_{ik}]=[T'_{k_1k_2}]$$

张量及基本运算

- (3). 对m阶张量进行 $\hat{R}$ 操作

$$[T'_{k_1k_2\ldots k_m}]=a(A'_1A'_1\cdots A'_1)+\bar{a}(A'_{\bar{1}}A'_{\bar{1}}\cdots A'_{\bar{1}})+\cdots+n(A'_0A'_0\cdots A'_0)$$

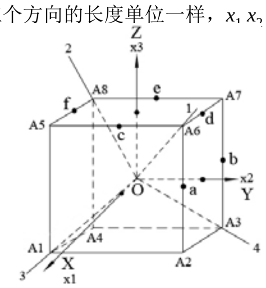
共 3^m 项，括号中循环坐标m重即的变换，满足下式:

$$A'_{k_1}A'_{k_2}\cdots A'_{k_m}=e^{i(l_1+l_2+\cdots+l_m)\theta}\times\delta_{k'_1l_1}\delta_{k'_2l_2}\cdots\delta_{k'_ml_m}(A_{l_1}A_{l_2}\cdots A_{l_m})$$

结论：经过 $\hat{R}$ 操作后，m阶张量的循环分量的变换和循环坐标m重积的变换相同。

晶体的对称操作

- 物理学坐标系和对称操作矩阵
  右旋、三个方向的长度单位一样，$x_1\ x_2\ x_3$



晶体的对称操作

- 过原点并垂直于 x_1 轴的平面，以此为镜面反映：

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

- Jones符号 $(-x_1\,x_2\,x_3)$，或 $\hat{\sigma}_{x_1}$
- 同理 $(x_1\,{-x_2}\,x_3)$，$\hat{\sigma}_{x_2}$ 为过以原点并垂直于 x_2 轴的平面为镜面反映，操作矩阵：$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

晶体的对称操作

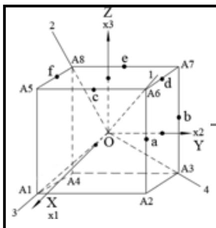
- 如两个操作连续进行：

$$(r')=(D(\hat{R}_1))(r)$$
$$(r'')=(D(\hat{R}_2))(r')$$

则 $(r'')=(D(\hat{R}_2))(r')=(D(\hat{R}_2))\times(D(\hat{R}_1))(r)=(D(\hat{R}_3))(r)$

即 $\hat{R}_1\cdot\hat{R}_2=\hat{R}_3$

其矩阵服从矩阵乘法律：$[D(\hat{R}_1)]\cdot[D(\hat{R}_2)]=[D(\hat{R}_3)]$



第 1 类	操 作	
E	$(x_1x_2x_3)$	不变操作
C_{2x_1}	$(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$	以 x_1、x_2、x_3 为轴的 180^0 旋转
C_{2x_2}	$(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)$	
C_{2x_3}	$(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)$	
C^+_{31}	$(x_3x_1x_2)$	以O1、O2、O3、O4为轴的反时针 120^0 旋转
C^+_{32}	$(\bar{x}_3x_1\bar{x}_2)$	
C^+_{33}	$(\bar{x}_3\bar{x}_1x_2)$	
C^+_{34}	$(x_3\bar{x}_1\bar{x}_2)$	
C^-_{31}	$(x_2x_3x_1)$	以O1、O2、O3、O4为轴的反时针 240^0 旋转
C^-_{32}	$(x_2\bar{x}_3\bar{x}_1)$	
C^-_{33}	$(\bar{x}_2x_3\bar{x}_1)$	
C^-_{34}	$(\bar{x}_2\bar{x}_3x_1)$	
$C^+_{4x_1}$	$(x_1\bar{x}_3x_2)$	绕 x_1、x_2、x_3 轴的反时针 90^0 旋转
$C^+_{4x_2}$	$(x_3x_2\bar{x}_1)$	
$C^+_{4x_3}$	$(\bar{x}_2x_1x_3)$	
$C^-_{4x_1}$	$(x_1x_3\bar{x}_2)$	绕 x_1、x_2、x_3 轴的反时针 270^0 旋转
$C^-_{4x_2}$	$(\bar{x}_3x_2x_1)$	
$C^-_{4x_3}$	$(x_2\bar{x}_1x_3)$	
C_{2a}	$(x_2x_1\bar{x}_3)$	以Oa、Ob、Oc、Od、Oe、Of为轴的 180^0 旋转
C_{2b}	$(\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_3)$	
C_{2c}	$(x_3\bar{x}_2x_1)$	
C_{2d}	$(\bar{x}_1x_3x_2)$	
C_{2e}	$(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$	
C_{2f}	$(\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_2)$	

说明	第 1 类 操 作		第 2 类 操 作	
不变操作	E	$(x_1x_2x_3)$	I	$(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$
以x_1、x_2、x_3为轴的180⁰旋转	C_{2x_1}	$(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$	σ_{x_1}	$(\bar{x}_1x_2x_3)$
	C_{2x_2}	$(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)$	σ_{x_2}	$(x_1\bar{x}_2x_3)$
	C_{2x_3}	$(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)$	σ_{x_3}	$(x_1x_2\bar{x}_3)$
以O1、O2、O3、O4为轴的反时针120⁰旋转	C_{31}^+	$(x_3x_1x_2)$	S_{61}^-	$(\bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_2)$
	C_{32}^+	$(\bar{x}_3x_1\bar{x}_2)$	S_{62}^-	$(x_3\bar{x}_1x_2)$
	C_{33}^+	$(\bar{x}_3\bar{x}_1x_2)$	S_{63}^-	$(x_3x_1\bar{x}_2)$
	C_{34}^+	$(x_3\bar{x}_1\bar{x}_2)$	S_{64}^-	$(\bar{x}_3x_1x_2)$
以O1、O2、O3、O4为轴的反时针240⁰旋转	C_{31}^-	$(x_2x_3x_1)$	S_{61}^+	$(\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_1)$
	C_{32}^-	$(x_2\bar{x}_3\bar{x}_1)$	S_{62}^+	$(\bar{x}_2x_3x_1)$
	C_{33}^-	$(\bar{x}_2x_3\bar{x}_1)$	S_{63}^+	$(x_2\bar{x}_3x_1)$
	C_{34}^-	$(\bar{x}_2\bar{x}_3x_1)$	S_{64}^+	$(x_2x_3\bar{x}_1)$
绕x_1、x_2、x_3轴的反时针90⁰旋转	$C_{4x_1}^+$	$(x_1\bar{x}_3x_2)$	$S_{4x_1}^-$	$(\bar{x}_1x_3\bar{x}_2)$
	$C_{4x_2}^+$	$(x_3x_2\bar{x}_1)$	$S_{4x_2}^-$	$(\bar{x}_3\bar{x}_2x_1)$
	$C_{4x_3}^+$	$(\bar{x}_2x_1x_3)$	$S_{4x_3}^-$	$(x_2\bar{x}_1\bar{x}_3)$
绕x_1、x_2、x_3轴的反时针270⁰旋转	$C_{4x_1}^-$	$(x_1x_3\bar{x}_2)$	$S_{4x_1}^+$	$(\bar{x}_1\bar{x}_3x_2)$
	$C_{4x_2}^-$	$(\bar{x}_3x_2x_1)$	$S_{4x_2}^+$	$(x_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$
	$C_{4x_3}^-$	$(x_2\bar{x}_1x_3)$	$S_{4x_3}^+$	$(\bar{x}_2x_1\bar{x}_3)$
以Oa、Ob、Oc、Od、Oe、Of为轴的180⁰旋转	C_{2a}	$(x_2x_1\bar{x}_3)$	σ_{da}	$(\bar{x}_2\bar{x}_1x_3)$
	C_{2b}	$(\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_3)$	σ_{db}	$(x_2x_1x_3)$
	C_{2c}	$(x_3\bar{x}_2x_1)$	σ_{dc}	$(\bar{x}_3x_2\bar{x}_1)$
	C_{2d}	$(\bar{x}_1x_3x_2)$	σ_{dd}	$(x_1\bar{x}_3\bar{x}_2)$
	C_{2e}	$(\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_2)$	σ_{de}	$(x_1x_3x_2)$
	C_{2f}	$(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$	σ_{df}	$(x_3x_2x_1)$

中心反演

第 1 类 操 作		第 2 类 操 作	
E	$(x_1x_2x_3)$	I	$(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$
C_{2x_1}	$(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)$	σ_{x_1}	$(\bar{x}_1x_2x_3)$
C_{2x_2}	$(\bar{x}_1x_2\bar{x}_3)$	σ_{x_2}	$(x_1\bar{x}_2x_3)$
C_{2x_3}	$(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)$	σ_{x_3}	$(x_1x_2\bar{x}_3)$
C_{31}^+	$(x_3x_1x_2)$	S_{61}^-	$(\bar{x}_3\bar{x}_1\bar{x}_2)$
C_{32}^+	$(\bar{x}_3x_1\bar{x}_2)$	S_{62}^-	$(x_3\bar{x}_1x_2)$
C_{33}^+	$(\bar{x}_3\bar{x}_1x_2)$	S_{63}^-	$(x_3x_1\bar{x}_2)$
C_{34}^+	$(x_3\bar{x}_1\bar{x}_2)$	S_{64}^-	$(\bar{x}_3x_1x_2)$
C_{31}^-	$(x_2x_3x_1)$	S_{61}^+	$(\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_1)$
C_{32}^-	$(x_2\bar{x}_3\bar{x}_1)$	S_{62}^+	$(\bar{x}_2x_3x_1)$
C_{33}^-	$(\bar{x}_2x_3\bar{x}_1)$	S_{63}^+	$(x_2\bar{x}_3x_1)$
C_{34}^-	$(\bar{x}_2\bar{x}_3x_1)$	S_{64}^+	$(x_2x_3\bar{x}_1)$
$C_{4x_1}^+$	$(x_1\bar{x}_3x_2)$	$S_{4x_1}^-$	$(\bar{x}_1x_3\bar{x}_2)$
$C_{4x_2}^+$	$(x_3x_2\bar{x}_1)$	$S_{4x_2}^-$	$(\bar{x}_3\bar{x}_2x_1)$
$C_{4x_3}^+$	$(\bar{x}_2x_1x_3)$	$S_{4x_3}^-$	$(x_2\bar{x}_1\bar{x}_3)$
$C_{4x_1}^-$	$(x_1x_3\bar{x}_2)$	$S_{4x_1}^+$	$(\bar{x}_1\bar{x}_3x_2)$
$C_{4x_2}^-$	$(\bar{x}_3x_2x_1)$	$S_{4x_2}^+$	$(x_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$
$C_{4x_3}^-$	$(x_2\bar{x}_1x_3)$	$S_{4x_3}^+$	$(\bar{x}_2x_1\bar{x}_3)$
C_{2a}	$(x_2x_1\bar{x}_3)$	σ_{da}	$(\bar{x}_2\bar{x}_1x_3)$
C_{2b}	$(\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_3)$	σ_{db}	$(x_2x_1x_3)$
C_{2c}	$(x_3\bar{x}_2x_1)$	σ_{dc}	$(\bar{x}_3x_2\bar{x}_1)$
C_{2d}	$(\bar{x}_1x_3x_2)$	σ_{dd}	$(x_1\bar{x}_3\bar{x}_2)$
C_{2e}	$(\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_2)$	σ_{de}	$(x_1x_3x_2)$
C_{2f}	$(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1)$	σ_{df}	$(x_3x_2x_1)$

中心反演

- $\hat{S}_{63}^+$ Jones符号(x_2 -x_3 x_1)

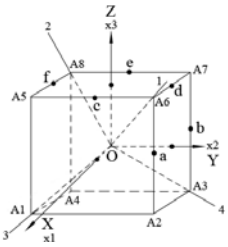
$$\left(\hat{S}_{63}^+\right)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

晶体的对称操作

- 注意区分操作矩阵 $\left[D(\hat{R})\right]$和坐标变换矩阵(A)

$$\left(\hat{R}\right)=\left[D\left(\hat{R}\right)\right]=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

- 对称操作写成矩阵时，矩阵形式与坐标轴选择方法有关。



晶体的对称操作

- 证明：$\hat{C}_{31}^+$ 的Jones符号为$(x_3x_1x_2)$
  $\hat{C}_{31}^+$ 绕[111]逆时针旋转120度

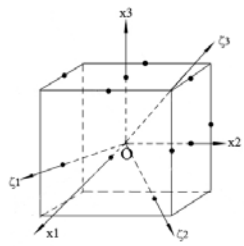
$$k_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(e_1+e_2+e_3\right)$$

如$\boldsymbol{k}_1$在x_1x_2平面内，可得

$$k_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1-e_2\right)$$

$\boldsymbol{k}_2$=$\boldsymbol{k}_3$ x $\boldsymbol{k}_1$得到

$$k_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(e_1+e_2-2e_3\right)$$



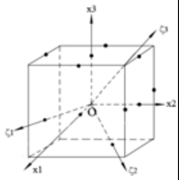
晶体的对称操作

- 从原坐标到新坐标(x_1 x_2 x_3)的变换矩阵为

$$(A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

则

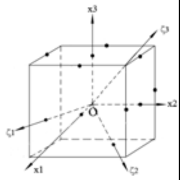
$$(A)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$



晶体的对称操作

- 原坐标绕$\boldsymbol{k}_3$逆时针旋转120度的操作矩阵为

$$D\left(\hat{R}\right)=\begin{bmatrix}\cos 120^0&-\sin 120^0&0\\\sin 120^0&\cos 120^0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$



- 即点P坐标变到P' ($\boldsymbol{k}_1$ $\boldsymbol{k}_2$ $\boldsymbol{k}_3$)坐标系，如变到($\boldsymbol{x}_1$ $\boldsymbol{x}_2$ $\boldsymbol{x}_3$)，操作矩阵为

$$\left(\hat{C}_{31}^+\right)=(A)\left[D\left(\hat{R}\right)\right](A)^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

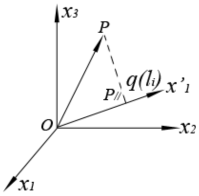
二 阶 张 量

- 考虑最简单情况：

联系2个矢量： $p_{ij} = T_{ij} q_j$ 或 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{q}$

导数关系： $T_{ij} = \dfrac{\partial p_i}{\partial q_j}$

二阶张量在某给定方向上的值



- $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{q}$ 所定义二阶张量$\boldsymbol{p}$

当矢量$\boldsymbol{q}$ 的方向沿某给定方向(l_i)时

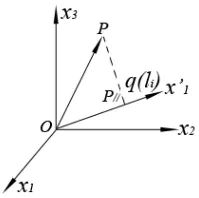
$\boldsymbol{p}$沿该方向上的分量$p_{//}$与矢量$\boldsymbol{q}$的模之比定义为二阶张量$\boldsymbol{T}$在该方向上的数值T，即：

$$T = \frac{p_{//}}{q}$$

(l_i)为该方向相对于个坐标轴的方向余弦

$$q_i = q l_i$$

二阶张量在某给定方向上的值



- 显然： $p_{//} = \dfrac{p \cdot q}{q} = \dfrac{p_i q_i}{q}$

可得到： $p_{//} = T_{ij}\, q_j\, q_i /q$

而 $T = p_{//}/q = T_{ij}\, q_j\, q_i /q^2 = T_{ij}\, l_j\, l_i$

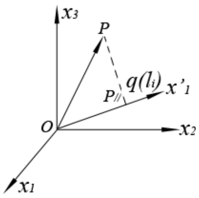
可调整为：

$$T = l_i\, T_{ij}\, l_j$$

矩阵形式为：

$$T = (l_1 l_2 l_3)\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

二阶张量在某给定方向上的值

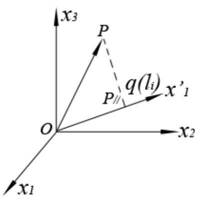


$$T = (l_1 l_2 l_3)\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

- 展开得到9项，简化：新坐标系($\boldsymbol{x'}_i$)，某一$\boldsymbol{x'}_i$沿l_i方向，则$l_i = a_{1'i}$：

$$T = T_{ij}\, a_{1'j}\, a_{1'i}$$

二阶张量在某给定方向上的值

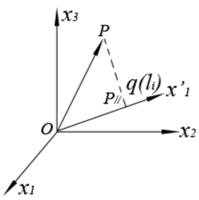


$$T = (l_1 l_2 l_3)\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

- 根据二阶张量变换定律，当结果可写为： $T = a_{1'i}\, a_{1'j}\, T_{ij} = T'_{11}$时，$T$值是新坐标系中$T'$的某一分量$T'_{11}$。

即 **特定方向上的T值**

二阶张量在某给定方向上的值



- 如果$\boldsymbol{p}//\boldsymbol{q}$则：

$$T = T_{ii}\, l_i\, l_i = T_{11}\, l_1^2 + T_{22}\, l_2^2 + T_{33} l_3^2$$

如再有： $T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_0$

则： $T = T_0$

由此，二阶张量沿某给定方向上的数值取决于沿什么方向及张量本身性质。

二阶张量的示性面

- **二次曲面方程的变换规律和二阶对称张量的变换规律一样：**

一般(x_i)坐标系中，二次曲面方程如下式：

$$S_{ij}\, x_i\, x_j = 1 \qquad (i,j= 1,2,3\ )$$

S_{ij}为$x_i\, x_j$ 项的系数

对于对称二阶张量：$S_{ij} = S_{ji}$，上式描述一个二阶对称张量。方程可能为椭球面或双曲面。

二阶张量的示性面

- **当变换到新坐标系(x'_i)，坐标变换矩阵($a_{i'j}$)，有**

$$x_i = a_{k'i}\, x'_k \qquad\qquad x_j = a_{l'j}\, x'_l$$

$$S_{ij}\,(a_{k'i}\, x'_k)(a_{l'j}\, x'_l) = 1$$

或

$$(S_{ij}\, a_{k'i}\, a_{l'j})\, x'_k\, x'_l = 1$$

令 $a_{k'i}\, a_{l'j}\, S_{ij} = S'_{kl}$则

$S'_k\, x'_k\, x'_l = 1$ ----------新坐标系的二次曲面方程

与二阶对称张量的分量变换规律一致

曲面方程可描述二阶对称张量的某些几何关系，二阶示性面

二阶张量的示性面

- **二阶张量的几何表示法——二阶示性面：**

将 $S_{ij}\, x_i\, x_j = 1$ 中系数以张量的分量代替，二阶示性面方程为：

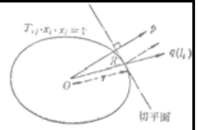
$$T_{ij}\, x_i\, x_j = 1$$

1) 二阶示性面的矢径-法线性质（椭球面）

二阶张量T按式 $p_{ij} = T_{ij} q_j$ 联系两个矢量$\boldsymbol{p}$和$\boldsymbol{q}$时，**当$\boldsymbol{q}$取沿二阶示性面上某点R的矢径方向时，通过该点的示性面的法线方向即为矢量$\boldsymbol{p}$的方向。**

矢径***OR***的方向余弦(l_i)，R点坐标($r\, l_i$)，$\boldsymbol{q}$沿矢径(l_i)方向，分量为($q\, l_i$)，二阶示性面方程为余弦中系数以张量的分量代替，二阶示性面方程为：

$$F(x_j) = T_{ij}\, x_i\, x_j - 1 = 0$$



过R做示性面的切平面，于此切平面垂直的法线方向平行于$\boldsymbol{p}$矢量方向

过R示性面的法线方向的方向余弦应和：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_R = T_{ij} x_j \quad \text{成正比}$$

带入R坐标($r\, l_i$)，则R的三个法线方向的方向余弦与($r\, T_{ij}\, l_j$)成正比；$\boldsymbol{p}$的三个分量由 $p_{ij} = T_{ij} q_j$

由此，$\boldsymbol{p}$的三个分量分别与过R点的二阶示性面法线方向的三个余弦成正比，即平行关系。

二阶张量的示性面

2) 二阶示性面的矢径长度

二阶示性面沿某一给定方向的矢径长度$\boldsymbol{r}$在数值上等于该二阶示性面所表征的二阶张量在该方向上数值$\boldsymbol{T}$的平方根的倒数，即：

$$r = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

或 $\quad T = 1 / r^2$

二阶张量的示性面

- **二阶张量的主轴与主值：**

二次曲面的主轴为三个相互垂直的对称轴。

如把三个主轴方向选为新坐标轴方向（即主轴坐标系），式$S_{ij}\, x_i\, x_j = 1$ 可简化为：

$$S_1\, x_1^2 + S_2\, x_2^2 + S_3\, x_3^2 = 1$$

即一般的二阶张量

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

在主轴坐标系中可简化为

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

二阶张量的主轴与主值

- **二阶张量的主轴与主值：**

$$S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = 1$$

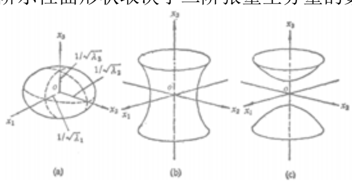
$S_1\ S_2\ S_3$ 二阶示性面主系数

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

$T_{11}\ T_{22}\ T_{33}$ 二阶张量主值

二阶张量的主轴与主值

- 1) 矢径-法线性质仍成立
- 2) 矢径长度 $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$
- 3) 二阶示性面形状取决于二阶张量主分量的数值



- 4) 由任意坐标变换到主轴坐标，二阶张量自由度不变

二阶对称张量的简化表示

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

- 双下标　ij = 11, 22 , 33 , 23 = 32, 31 = 13, 12 = 21
- 单下标　I = 1, 2, 3, 4, 5, 6

即 $$(T_I) = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix}$$

应 力 张 量

- **彻体力和体力矩**
- **彻体力：力是直接作用于物体整个体积内部的质点上的长程力。**

  如重力：　$\boldsymbol{F}\,dV = \rho\,\boldsymbol{g}\,dV$
- **体力矩：有永电矩或永磁矩的介质置于电场或磁场中，除彻体力外，出现体力矩。由长程力作用于dV的每个质点，力矩大小与dV成正比。**

  如磁场中：　$\boldsymbol{G}\,dV = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}\,dV$

应 力 张 量

- **应力及其标记法**
- 1) 表面力：压缩、弯曲、拉伸、扭转

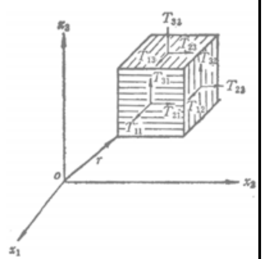
  作用于面积上，大小与作用面积成正比
- 2) 应力：微观本质为弹性恢复力。

  作用于面积上，大小与作用面积成正比

  定义：物体受外作用，体内一部分与相邻所产生的与接触面积成正比的相互作用力与作用面积之比称为内应力或应力，即单位面积上所受的力。

应 力 张 量

- 3) 应力标记法：笛卡尔坐标系
- 取 $r\,(x_i)$ 处无限小体积元， 每个力分解为沿三个坐标轴方向的分量。
- T_{ij}：第一下标 i 表示应力的方向与第 i 坐标轴正方向平行，第二下标 j 表示应力所作用的面积与第 j 坐标轴垂直。



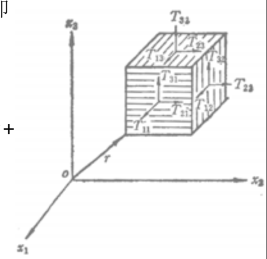
应 力 张 量

- $i = j$：应力方向与作用面垂直，即正应力，+ 张应力，—压应力。
- $i \neq j$：应力方向与作用面积相切，称切应力。

  力作用面外法线沿正x_j方向，$\boldsymbol{T}_{ij}$为+应力沿正 i 轴方向；

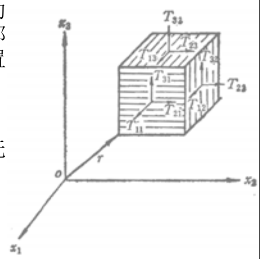
  $\boldsymbol{T}_{ij}$为—，沿— i 轴方向

  面外法线沿— x_j方向， $\boldsymbol{T}_{ij}$为的 +、—与上述相



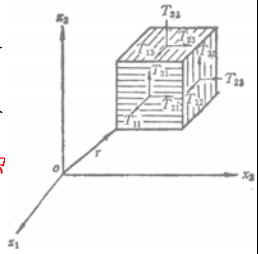
应 力 张 量

- 如在物体内任何点处，不论面元的取向，其单位面积作用力的数值都相等，与这个面元在物体中的位置及所取方位无关，称为均匀应力。
- 如果不满足此条件，则可把r处的立方体积元取得无限小，在这个无限小体元内可按均匀应力处理。



应 力 张 量

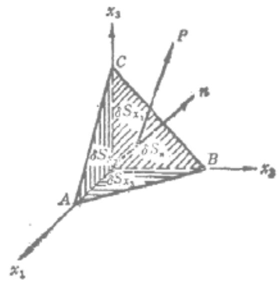
- **应力是二阶对称极张量**
- $\boldsymbol{T}_{ij}$一组分量在一定条件下组成一个$\boldsymbol{T}$二阶张量。
- (1) $\boldsymbol{T}$联系着两个矢量，并服从二阶张量变换规律的9个分量特殊性质：***作用方向与坐标轴平行，作用面积垂直于坐标轴***。



应 力 张 量

- 最一般情况：一个无限小四面体，在这个范围内可认为满足均匀应力条件。
- 平衡态，合力为0。 x_1方向：

$- P_1\ \delta S_n + T_{11}\ \delta S_{x1} + T_{12}\ \delta S_{x2}$
$+ T_{13}\ \delta S_{x3} + F_{x1}\ \delta V = 0$



应 力 张 量

- δV比 δS一更快趋于0，彻体力相趋于0：

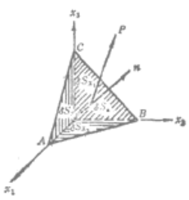
$$P_1 = T_{11}\frac{\delta S_{x1}}{\delta S_n} + T_{12}\frac{\delta S_{x2}}{\delta S_n} + T_{13}\frac{\delta S_{x3}}{\delta S_n}$$

- δS_n面外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向余弦

$$n_1 = \frac{\delta S_{x1}}{\delta S_n} \quad n_2 = \frac{\delta S_{x2}}{\delta S_n} \quad n_3 = \frac{\delta S_{x3}}{\delta S_n}$$

- 所以有：

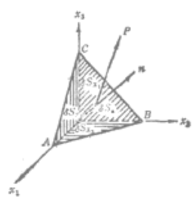
$$P_1 = T_{11}\,n_1 + T_{12}\,n_2 + T_{13}\,n_3$$
$$P_2 = T_{21}\,n_1 + T_{22}\,n_2 + T_{23}\,n_3 \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$$
$$P_3 = T_{31}\,n_1 + T_{32}\,n_2 + T_{33}\,n_3$$



应 力 张 量

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n}$$

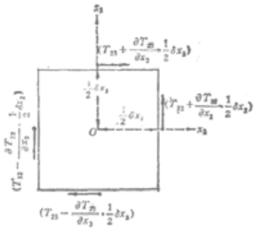
- $[T_{ij}]$将作用于任意小面元上的应力$\boldsymbol{P}$矢量和该面元的外法向矢$\boldsymbol{n}$联系起来。
- 其坐标变换符合二阶极张量的变换规律。
- $[T_{ij}]$在平衡条件下构成二阶极张量。



应 力 张 量

- 应力是对称张量；讨论应力为非均匀时的较一般情况

当体元仍较小，彻体力仍可忽略。应力不均匀，在各面元上的应力不相等，设其随距离的变化为线性。



- 过O点与x_1轴平行的转轴的转矩，逆时针为+，有正应力矩

$$\left[\left(T_{32}-\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}\cdot\frac{1}{2}\delta x_2\right)\delta x_1\delta x_3\right]\frac{1}{2}\delta x_2+\left[\left(T_{32}+\frac{\partial T_{32}}{\partial x_2}\cdot\frac{1}{2}\delta x_2\right)\delta x_1\delta x_3\right]\frac{1}{2}\delta x_2=T_{32}\delta x_1\delta x_2\delta x_3$$

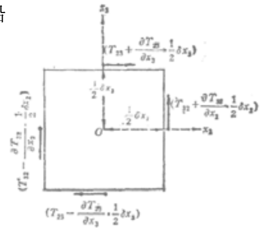
应 力 张 量

- 同理，负应力矩为 $-T_{23}\delta x_1\delta x_2\delta x_3$ 沿 x_1轴的体力距分量为 $G_1\delta x_1\delta x_2\delta x_3$
- 过O点与x_1轴的转动方程为：

$$(T_{32}-T_{23})\delta x_1\delta x_2\delta x_3+G_1\delta x_1\delta x_2\delta x_3=I_1\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}$$

- I_1转动惯量

$$I_1=\rho\delta x_1\delta x_2\delta x_3\left(\bar{\delta}x_2^2+\bar{\delta}x_3^2\right)$$



应 力 张 量

$$(T_{32}-T_{23})\delta x_1\delta x_2\delta x_3+G_1\delta x_1\delta x_2\delta x_3=I_1\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\qquad I_1=\rho\delta x_1\delta x_2\delta x_3\left(\bar{\delta}x_2^2+\bar{\delta}x_3^2\right)$$

- 可简化为：$T_{32} - T_{23} + G_1 = 0$
- 同理：$T_{ji} - T_{ij} + G_k = 0$
- 由此：G $\neq$ 0，应力不对称

  G = 0，即不存在体力距， $T_{ji} = T_{ij}$

  即 应力为对称张量

应 力 张 量

- 应力张量的简化下标

$$(T)=\begin{bmatrix}T_{11}&T_{12}&T_{13}\\T_{21}&T_{22}&T_{23}\\T_{31}&T_{32}&T_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_1&T_6&T_5\\T_6&T_2&T_4\\T_5&T_4&T_3\end{bmatrix}$$

$$(T)=\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\end{bmatrix}$$

应 力 张 量

- 主轴坐标系中的应力 $(T)=\begin{bmatrix}T_1&0&0\\0&T_2&0\\0&0&T_3\end{bmatrix}$
- 将主应力方向选为坐标轴时，所有切应力分量都为零。
- 应力张量是场张量，其取向和分量数只取决于外力和所选择的坐标系。因此，应力的主轴坐标系与晶体的对称性无关。

应 力 张 量

- 应力张量举例
- 1) 流体静压力：$T_1 = T_2 = T_3 = - P$

$$(T)=\begin{bmatrix}-P&0&0\\0&-P&0\\0&0&-P\end{bmatrix}$$

- 2)单轴向应力

$$(T)=\begin{bmatrix}T&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

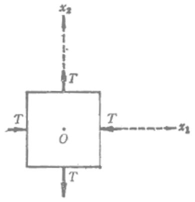
应 力 张 量

- 3) 双向轴应力

  晶体中切出一薄片，大面为x_1x_2面

  $+T_2 = -T_1 = T$，此时$T_3 = 0$

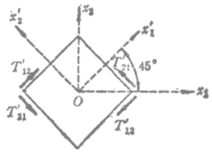
$$(T)=\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & +T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



应 力 张 量

- 应力的分量和取向与坐标系的选择有关，如逆时针转45^0，坐标变换阵为：

$$(a_{i'j})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- 新坐标系中应力张量T'变现为纯切应力：$(T')=\begin{bmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

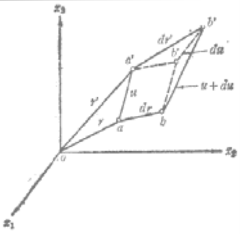
应 变 张 量

- 形变：物体中**各质点的位置**发生位移；物体内各质点之间**相对位置**必须变化，即有相对的位移。
- 1. 位移梯度张量 $\boldsymbol{e}$

形变后a → a’　矢径 $\boldsymbol{r}$ → $\boldsymbol{r}'$ $(x_i + u_i)$

b → b’　矢径 $\boldsymbol{r}$ + d$\boldsymbol{r}$ →

$\boldsymbol{r}'$ + d$\boldsymbol{r}'$ [$(x_i + d\,x_i) + (u_i + du_i)$]



应 变 张 量

- 各质点之间相对位置必须变化：

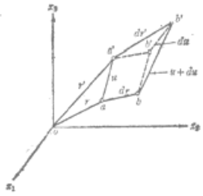
  b → b’’　刚性运动　d$\boldsymbol{u}$ = 0

  b’’ → b’　形变　$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$

  或　$u_i = u_i(r)$

  $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$为质点的位移场

  质点的微分位移



$$du = \frac{du}{dr}dr \qquad \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \qquad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j$$

应 变 张 量

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j$$

- 如物体的形变为无限小均匀形变，则可认为***各位移变量是各坐标变量的线性关系***，即质点的微分位移和质点坐标变量的线性关系（即上式）中的各偏微商为常数，与点坐标无关。

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \qquad du_i = e_{ij}dx_j$$

- $[e_{ij}]$二阶张量，称位移梯度张量 $\nabla \boldsymbol{u}$

$$e_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}=\nabla u$$

d$\boldsymbol{u}$ = $\nabla\boldsymbol{u}$ · d$\boldsymbol{r}$

应 变 张 量

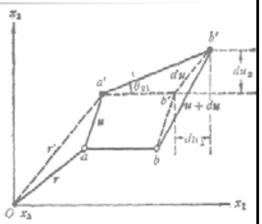
- 2. $\boldsymbol{e}$张量各分量的物理意义

如$dx_2 = dx_3 = 0$，即a,b质点间的线元沿x_1轴方向：

$$du_1 = e_{11}dx_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1$$

$$du_2 = e_{21}dx_1 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1$$

$$du_3 = e_{31}dx_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1$$



du_1 du_2 du_3为b相对于a在形变过程中沿x_1 x_2 x_3 轴方向位移的增量。

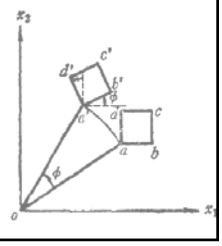
应 变 张 量

- $e_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ ：*ab*线元的相对伸长，即伸长率。
- $e_{21}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ ：*ab*线元两端在形变中沿x_2方向位移增量
  与线元长度比，无限小变形时：$e_{21}\approx\theta_{21}$
- 同理$e_{31}\approx\theta_{31}$，e_{21} e_{31}不是相对伸长，而是形变，即***切变***，e_{11}称***正变***。
- 推而广之，即dx_1 dx_2 $dx_3\neq 0$，也成立。

应 变 张 量

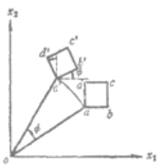
- 3. $[e_{ij}]$张量包括了无形变的纯转动分量。
  *abcd*做纯刚性转动→*a'b'c'd'*
  *ab*与x_1平行，向x_1转动： $\phi = e_{21}$
  *ad*与x_2平行，向$-x_1$转动： $\phi = -e_{12}$
- 二维空间的位移梯度张量$[e_{ij}]$表为：

$$[e_{ij}]=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix}$$



应 变 张 量

$$[e_{ij}]=\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix}$$



- 纯刚性转动，$[e_{ij}]\neq 0$，即该张量的部分分量并不描述真正的形变，但描述纯刚性转动，且这部分分量有反对称性质。
- 同理可证，三维情况亦如此。

应 变 张 量

- 4. 材料在均匀形变下的特点

  $e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 式中各量均为常量

  将 $du_i=e_{ij}dx_j$ 积分，则

  $u_i = (\boldsymbol{u}_0)_i + e_{ij}x_j$ $\boldsymbol{u}_0$为圆点O的位移

  形变后，a的坐标（即a'）为：

  $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}$ 即 $x'_i = x_i + (\boldsymbol{u}_0)_i + e_{ij}x_j$

  如原点无位移，则：

  $u_i = e_{ij}x_j$

  $x'_i = x_i + e_{ij}x_j$

应 变 张 量

$u_i = e_{ij}x_j$

$x'_i = x_i + e_{ij}x_j$

- 均匀形变，位移和坐标—线性关系，质点在变形前后的坐标亦为线性关系，并有如下特点：
  1). 直线仍然是直线；
  2). 平行的直线仍平行，且伸长（缩短）成比例。
  3). 圆变为椭圆，椭圆变为另一不同的椭圆。

应 变 张 量

- 定义新物理量来描述纯形变（去除刚性平动和转动）
  二阶张量可分解为一个对称张量和一个反对称张量之和。

$$[e_{ij}] = [S_{ij}] + [R_{ij}]$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(e_{ij}+e_{ji}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=S_{ji}$$

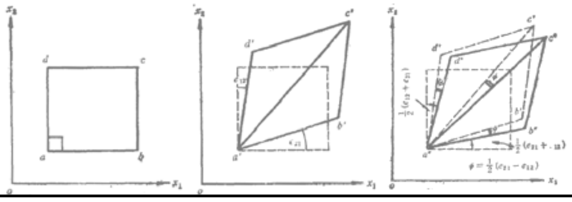
$$R_{ij}=\frac{1}{2}\left(e_{ij}-e_{ji}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=-R_{ji}$$

- 定义**$[S_{ij}]$为应变张量**，即从位移梯度张量$[e_{ij}]$中减去纯刚性旋转张量$[R_{ij}]$后的***纯形变部分***。

应 变 张 量

- $[S_{ij}] = [e_{ij}] - [R_{ij}]$

$$[e_{ij}]-[R_{ij}]=\begin{bmatrix}e_{11}&e_{12}\\e_{21}&e_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}(e_{12}-e_{21})\\\frac{1}{2}(e_{21}-e_{12})&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{11}&\frac{1}{2}(e_{12}+e_{21})\\\frac{1}{2}(e_{21}+e_{12})&e_{22}\end{bmatrix}$$



应 变 张 量

- 1. 应变张量$[S_{ij}]$的性质：二阶对称张量

$$[S_{ij}]=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}\\S_{21}&S_{22}&S_{23}\\S_{31}&S_{32}&S_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_{11}&\frac{1}{2}(e_{21}+e_{12})&\frac{1}{2}(e_{13}+e_{31})\\\frac{1}{2}(e_{21}+e_{12})&e_{22}&\frac{1}{2}(e_{23}+e_{32})\\\frac{1}{2}(e_{13}+e_{31})&\frac{1}{2}(e_{23}+e_{32})&e_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

应 变 张 量

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\\\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

- 对角分量$S_{ii} = e_{ii}$，沿x_i轴伸长率，正应变
- 非对角分量S_{ii} (i≠j)，切应变分量。

应 变 张 量

- 引入位移梯度张量的转置张量：

$$\tilde{\nabla}u=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\\\frac{\partial u_1}{\partial x_3}&\frac{\partial u_2}{\partial x_3}&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

- 因此，$S=\frac{1}{2}(\nabla u+\tilde{\nabla}u)=\nabla_s u$

$$[S_{ij}]=\frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_3}{\partial x_1}&\frac{\partial u_3}{\partial x_2}&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}&\frac{\partial u_2}{\partial x_1}&\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial u_1}{\partial x_2}&\frac{\partial u_2}{\partial x_2}&\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\\\frac{\partial u_1}{\partial x_3}&\frac{\partial u_2}{\partial x_3}&\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}\right\}$$

应 变 张 量

- 2. 应变张量的简化下标表示

  双下标：$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{23} = S_{32}, S_{31} = S_{13}, S_{12} = S_{21}$

  单下标：$S_1, S_2, S_3, (1/2)S_4, (1/2)S_5, (1/2)S_6$

$$(S)=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}\\S_{21}&S_{22}&S_{23}\\S_{31}&S_{32}&S_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1&\frac{1}{2}S_6&\frac{1}{2}S_5\\\frac{1}{2}S_6&S_2&\frac{1}{2}S_4\\\frac{1}{2}S_5&\frac{1}{2}S_4&S_3\end{bmatrix}$$

$$S_I=e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\qquad S_I=(e_{ij}+e_{ji})=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

应 变 张 量

- 简化后(S_I)为应变矩阵，可写成6元矩阵，并消除(1/2)因子：

$$\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\\\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\\\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\\\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}&0&0\\0&\frac{\partial}{\partial x_2}&0\\0&0&\frac{\partial}{\partial x_3}\\0&\frac{\partial}{\partial x_3}&\frac{\partial}{\partial x_2}\\\frac{\partial}{\partial x_3}&0&\frac{\partial}{\partial x_1}\\\frac{\partial}{\partial x_2}&\frac{\partial}{\partial x_1}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

简化为：$S_I=\nabla_{Ij}u_j$

应 变 张 量

$$S_I = \nabla_{Ij} u_j \qquad \nabla_{Ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$$

应 变 张 量

- 3. 应变与晶体对称性
  应变张量是场张量，是物质在受到外界作用（包括应力、电场和温度）后所作出的响应。
- 晶体中应变，和外界作用和晶体对称性都有关，这和应力张量之不同。

应 变 张 量 举 例

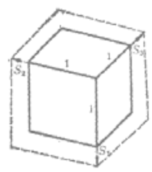
- 1. 立方体的容变
  选取坐标系为主轴坐标系，则物体中的应变张量取对角形式，即：

$$(S) = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

- 三个主轴方向相互垂直，沿此三方向的应变为主应变，即伸长或缩短。当物体不发生纯刚性转动，$[R_{ij}] = 0$， 形变后由于无切变，因此三个主方向仍保持互相垂直 。

应 变 张 量 举 例

- 单位立方体的容变：
  $\triangle = (1 + S_1)(1 + S_2)(1 + S_3) - 1$
  $S_i << 1$时， $S_i <<$ 高次项忽略
  可近似认为：
  $\triangle \approx S_1 + S_2 + S_3 = S_{ii}$



应 变 张 量 举 例

- 2. 单位球的应变
- ①三维应变
  球面方程： $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

均匀形变后，沿三个主轴方向的半轴长不再相等，原球面上质点离原点的距离分别为：

$x_1' = x_1(1 + S_1)$， $x_2' = x_2(1 + S_2)$， $x_3' = x_3(1 + S_3)$

球变椭球，方程为：

$$\frac{x_1'^2}{(1+S_1)^2} + \frac{x_2'^2}{(1+S_2)^2} + \frac{x_3'^2}{(1+S_3)^2} = 1$$

应 变 张 量 举 例

- ②二维应变

设 $(S) = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

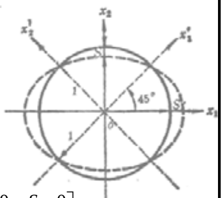
应变只发生在x_1x_2平面内

特殊情况：$(S) = \begin{bmatrix} +S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

应 变 张 量 举 例

- 主轴坐标系(x_i)绕x_3轴右旋45^0，变为新坐标系(x'_i)，其坐标变换矩阵为：

$$\left(a_{i'j}\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- 在新坐标系中，应变张量形式为 $(S)=\begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

应 变 张 量 举 例

$$(S)=\begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 此时无正应变分量，只有切应变分量，称为纯切变。
- 由此，坐标变换可以使正应变和切应变互相变换，即物体中的应变状态的描述与选择的坐标系有关。该结论对任意二维应变都成立。

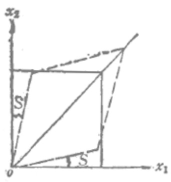
应 变 张 量 举 例

- 3). 单切变与纯切变

$$(S)=\begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

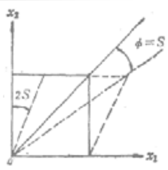
- 如果对于一个二维正方形，则形变后的平行四边形两棱边与原正方形两边所夹小角应都是S，此时：

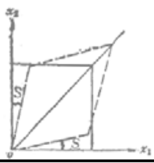
$$S_{12}+S_{21}=S$$



应 变 张 量 举 例

- 另一种二维切变，即单切变，这不是应变，只是一般的形变。
- 单切变与纯切变不同点在于相差一个纯刚性旋转，形变后的平行四边形再经绕x_3轴向顺时针方向作纯刚性旋转角度S。





应 变 张 量 举 例

- 4). 线性应变张量定义的适用范围

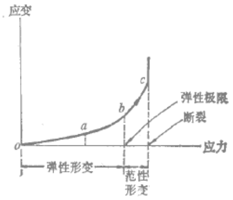
$$S_{ij}=\frac{1}{2}\left(e_{ij}+e_{ji}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=S_{ji}$$

- 上式定义的应变张量表示出应变与位移关系中的线性项，如果材料中出现非线性应变，即应变中包含有位移对坐标导数的二次方项，上式不成立。
- 要避免出现这种情况，要求材料中的位移梯度值要比弹性限度值小得多，实际中最大应变是10^{-4}量级。

晶体的弹性性质

- 晶体不受作用力时不形变，无形变晶体的内部粒子排列于其平衡位置。
- 当形变发生时，粒子间发生了相对的位移， 平衡状态被破坏，使粒子间产生相互作用力， 这种力驱使粒子恢复到原来的平衡位置，表现为晶体的内应力。

晶体的弹性性质



- 晶体受力产生形变可分为两类：

  (1). 受外力作用时有形变产生，撤去外力后，仍能恢复原来的起始状态，称弹性形变。（线性的oa段+非线性ab段）

  (2). 应力超过弹性极限后，去掉施加外力，晶体不能恢复原状，而是处于一种新的准平衡位置，晶体发生了永久性形变，称塑性形变。

Hooke 定 律

- 在弹性极限内，固体受外力作用时应变和应力成线性正比关系，Hooke定律。
- 1. 各向同性固体中的Hooke定律

  均匀且各向同性固体棒，沿棒长方向的纯拉伸力，张应力T，沿棒长方向的正应变为$S = \triangle l / l$

  Hooke定律可写为： $S = s\,T$

  s：弹性顺服系数

  或 $T = c\,S$

  c：弹性劲度系数

Hooke 定 律

- 2. 晶体中的Hooke定律

  $$S_{ij} = s_{ijkl}\,T_{kl}$$

  共代到表九个方程，其中：

  $$S_{11} = s_{1111}T_{11} + s_{1112}T_{12} + s_{1113}T_{13} + s_{1121}T_{21} + s_{1122}T_{22} + s_{1123}T_{23} + s_{1131}T_{31} + s_{1132}T_{32} + s_{1133}T_{33}$$

  s_{ijkl}：晶体顺服系数，共9 x 9 = 81个分量

Hooke 定 律

- 物理意义：沿长方形晶棒的棱边方向施加拉应力T_{11}，将有S_{11}、S_{12}、…S_{33}9个应变分量，说明有x_1、x_1、x_{33}方向的正应变，还有切应变，从而使原来互为直角的棱边变为斜交 。
- 如想让晶体棒发生纯弯曲，而在其两边的端面加上切向力，其结果不仅会使晶体弯曲，而且还会扭变。

Hooke 定 律

- 3. 晶体的弹性系数形成四阶极张量

  (1). 证明（自学）

  $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{s} : \boldsymbol{T}$　　　$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{S}$

  (2). 弹性系数的简化下标表示

  沿用应力和应变的简化下标，双下标ij、kl采用单下标M、N替代：

  双下标：11, 22 , 33, 23 = 32, 31 = 13 , 12 = 21

  单下标： 1， 2， 3， 4， 5， 6

Hooke 定 律

- 具体有：

  $s_{MN} = s_{ijkl}$， 当M和N都等于1,2,3

  $s_{MN} = 2\,s_{ijkl}$， 当M和N等于4,5,6

  $s_{MN} = 4\,s_{ijkl}$， 当M和N都等于4,5,6

  和 ： $c_{MN} = c_{ijkl}$，　M，N = 1,2,3…,6

Hooke 定 律

- 4. Hooke定律的矩阵形式

简化后

$$S_M = s_{MN}\,T_N \qquad \text{和} \qquad T_M = c_{MN}\,S_N$$

展开为

$$\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}&s_{13}&s_{14}&s_{15}&s_{16}\\s_{21}&s_{22}&s_{23}&s_{24}&s_{25}&s_{26}\\s_{31}&s_{32}&s_{33}&s_{34}&s_{35}&s_{36}\\s_{41}&s_{42}&s_{43}&s_{44}&s_{45}&s_{46}\\s_{51}&s_{52}&s_{53}&s_{54}&s_{55}&s_{56}\\s_{61}&s_{62}&s_{63}&s_{64}&s_{65}&s_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\c_{41}&c_{42}&c_{43}&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\c_{51}&c_{52}&c_{53}&c_{54}&c_{55}&c_{56}\\c_{61}&c_{62}&c_{63}&c_{64}&c_{65}&c_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\\S_4\\S_5\\S_6\end{bmatrix}$$

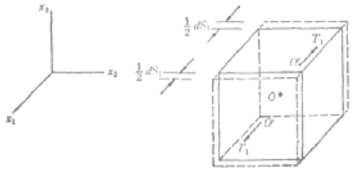
顺服矩阵和劲度矩阵互为逆矩阵

应力的功和静态晶体应变能

- 1. 应力的功

无应变时晶体为小立方体，体积等于1个单位。

施加均匀应力T_M，产生均匀的小应变s_M，当所有应变分量变为$S_M + d\,S_M$过程中，各应力分量T_M所做元功：$dW = T_M\,dS_M$



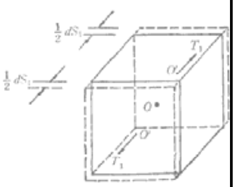
应力的功和静态晶体应变能

- 正应力所做功：
- $M = 1$，$T_1 \perp x_1$ 晶体两个表面向外拉伸
- $S_1 \rightarrow S_1 + d\,S_1$

  设每个表面的位置都向外移动1/2 $d\,S_1$
- 可认为其它两对表面在T_1作用下只改变面积的大小，而各面的中心的位置不变；其它应变分量和整个立方体的中心也保持不变。
- 显然，所做功为：

$$2\,(T_1\,½\,dS_1) = T_1\,dS_1$$

其他两个方向的功为： $T_2\,dS_2$， $T_3\,dS_3$



应力的功和静态晶体应变能

- 切应力所做功：
- $M = 4$，切应力T_{23}、T_{32}
- 在T_4作用下所做的功为:

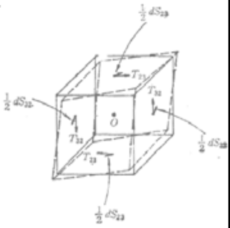
$$2\,(T_{23}\,½\,dS_{23}) + 2\,(T_{32}\,½\,dS_{32}) = T_{23}\,dS_{23} + T_{32}\,dS_{32}$$

$$T_{23} = T_{32} = T_4,\quad S_{23} = S_{32} = ½\,S_4$$

总功为： $T_4\,dS_4$

同理T_5、T_6总功为： $T_5\,dS_5$、$T_6\,dS_6$

同时考虑正、切应力： $dW= T_{ij}\,dS_{ij}$



应力的功和静态晶体应变能

- 2. 晶体的应变能

- 晶体受应力作用，且外界所作的功只有应力所作的功dW，则晶体系统的自由能$G = U - \theta\,S^*$的增量为：

$$dG = -\,S^*\,d\,\theta + dW$$

温度不变，而且设无压电效应，则晶体的应变只由应力所产生$dW = T_M\,dS_M$

$$d\,\theta = 0$$

晶体自由能的增量为：

$$dG = dW = T_M\,dS_M$$

应力的功和静态晶体应变能

- 带入Hooke定律得到

$$dG = c_{MN}\,S_N\,dS_M$$

微分形式： $\dfrac{\partial G}{\partial S_M} = c_{MN}\,S_N$

对S_N求导： $\dfrac{\partial^2 G}{\partial S_N \partial S_M} = c_{MN}$

- 自由能是状态的函数，本例中状态只由应变确定，因此将G对S微分与M和N的次序无关，即

$$\frac{\partial^2 G}{\partial S_N \partial S_M} = \frac{\partial^2 G}{\partial S_M \partial S_N}$$

- 可见： $c_{MN} = c_{NM}$， 同理可推出： $s_{MN} = s_{NM}$

应力的功和静态晶体应变能

- 据此在c和s的6x6矩阵中，除了对角矩阵元外，其余非对角元相对于对角元为对称者都相等，独立分量数目减少到21个。
- 积分式：$dG = c_{MN} S_N dS_M$，可得晶体应变能为：

  $$G = \tfrac{1}{2} c_{MN} S_M S_N$$

  即应变能密度
- 正定性约束条件：如晶体处于零应变态时是静态平衡的状态，则在这种条件下晶体所具有的应变能应是最小的应变能，***应变能密度只能取正值***。

弹性系数和晶体对称性

- 1. 弹性是所有晶类都具有的性质。
- 2. 均质体的弹性系数
- 均质体即各向同性体，具有比晶体中对称性最高的晶类还要高的对称性。
- 均质体的弹性系数的不为零的独立分量数应比立方晶系的更少。
- 将立方晶系的(c_{MN})绕其任何对称轴旋转任何角度（一般45^0）后所得到的新矩阵表=原矩阵表，再减少某些分量便可求得均质体的(c_{MN})。

弹性系数和晶体对称性

- 均质体

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix}$$

$$c_{44} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & 2(s_{11}-s_{12}) & 0 \\ & & & & & 2(s_{11}-s_{12}) \end{bmatrix}$$

- 均质体的弹性系数只有两个不为零的独立分量：c_{11}、c_{12}。
- 如一各向同性的长棒，沿其轴向(x_1)加拉伸张力T_1，则棒沿拉伸方向有纵向正应变S_1，同时也发生沿与此垂直方向的横向正应变S_2和S_3：

$$S_1 = s_{11} T_1 = T_1 / c_{11}$$
$$S_2 = T_1 / c_{12}$$
$$S_3 = T_1 / c_{12}$$

- c_{11}、c_{12}分别表示纵向和横向应变。

弹性系数和晶体对称性

- 均质体受某方向拉伸时，沿与此垂直方向的压缩并不与拉伸有相同的数值。
- 如均质体棒受到正应力的作用，则不会有切应变发生；同样若只受到切应力的作用时，则只有切应变发生。

弹性系数和晶体对称性

- 实际工程运用。

杨氏模量 $E = 1 / s_{11}$

切变模量 $G = \dfrac{1}{2(s_{11} - s_{12})} = c_{44}$

泊松比 $\upsilon = - E\, s_{12}$

三者关系为： $G = \dfrac{E}{2(1+\gamma)}$