2. 西北工业大学2000年硕士研究生入学考试材料力学试题

（满分100分）

2.1　圆形弹簧夹板在夹紧平板上产生3N的正压力(图2.1(a))弹簧横截面为20mm×10mm的矩形。求弹簧在A截面产生的最大正应力。(15分)

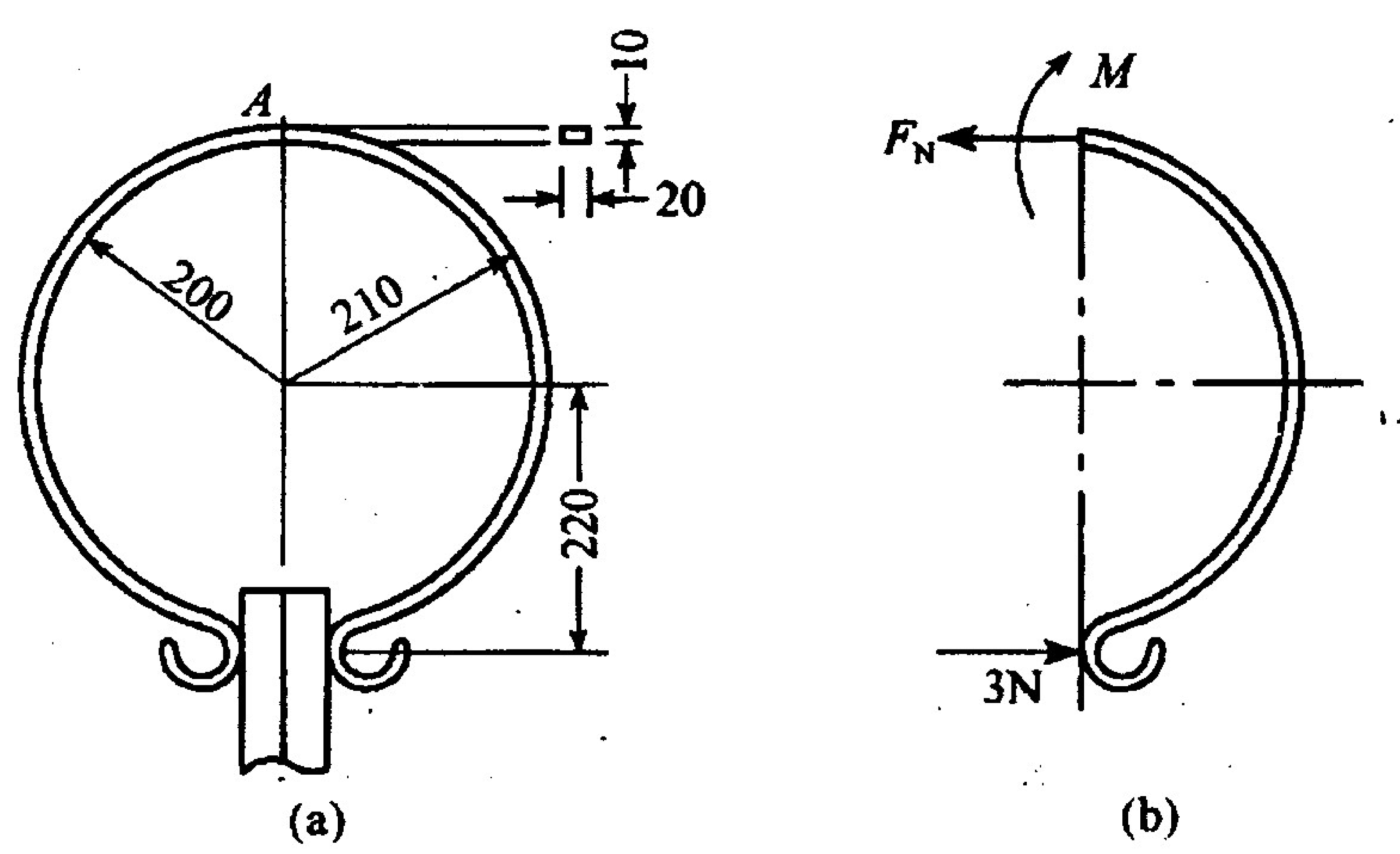


图2.1

解　这是拉弯组合变形题目。沿弹簧夹板A截面截取分离体(图2.1(b))，由平衡条件$\sum F_x=0$得$F_N=3N$；$\sum M_A=0$得

$$M=3\times(220+205)\times10^{-3}=1.275(\mathrm{N\cdot m})$$

故A截面受到拉伸和弯曲组合变形，最大正应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W}=\frac{3}{10\times20\times10^{-6}}+\frac{1.275\times6}{10^2\times20\times10^{-9}}=3.84\times10^6(\mathrm{Pa})=3.84(\mathrm{MPa})$$

点评　①在求A截面内力时要注意，弯矩、轴力都作用在截面形心处，故求弯矩时应对A截面形心求矩，其力臂应为平板上力作用点到A截面形心的距离。②注意拉弯组合或压弯组合叠加后最大(小)应力的计算。

2.2　钢制球形气罐(图2.2)的内径$r=1.5$m，若罐内承受$p=300$kPa的气压，且最大正应力不允许超过12MPa时，求气罐所需的最小厚度δ。(15分)

解　这是薄壁压力容器进行设计的题目。在承受内压的球形气罐中，其单元体近似是一个二向等拉单元体(图2.2(b))。且$\sigma_1=\sigma_2=\sigma=\dfrac{rp}{2\delta}$，而$\sigma_3\approx0$。

题目未要求用强度理论或简单拉伸强度条件计算，故先用单向拉伸设计，即

$$\sigma_1=\frac{rp}{2\delta}\leqslant[\sigma]，得\ \delta\geqslant\frac{rp}{2[\sigma]}=\frac{1.5\times300\times10^3}{2\times12\times10^6}=18.8(\mathrm{mm})$$

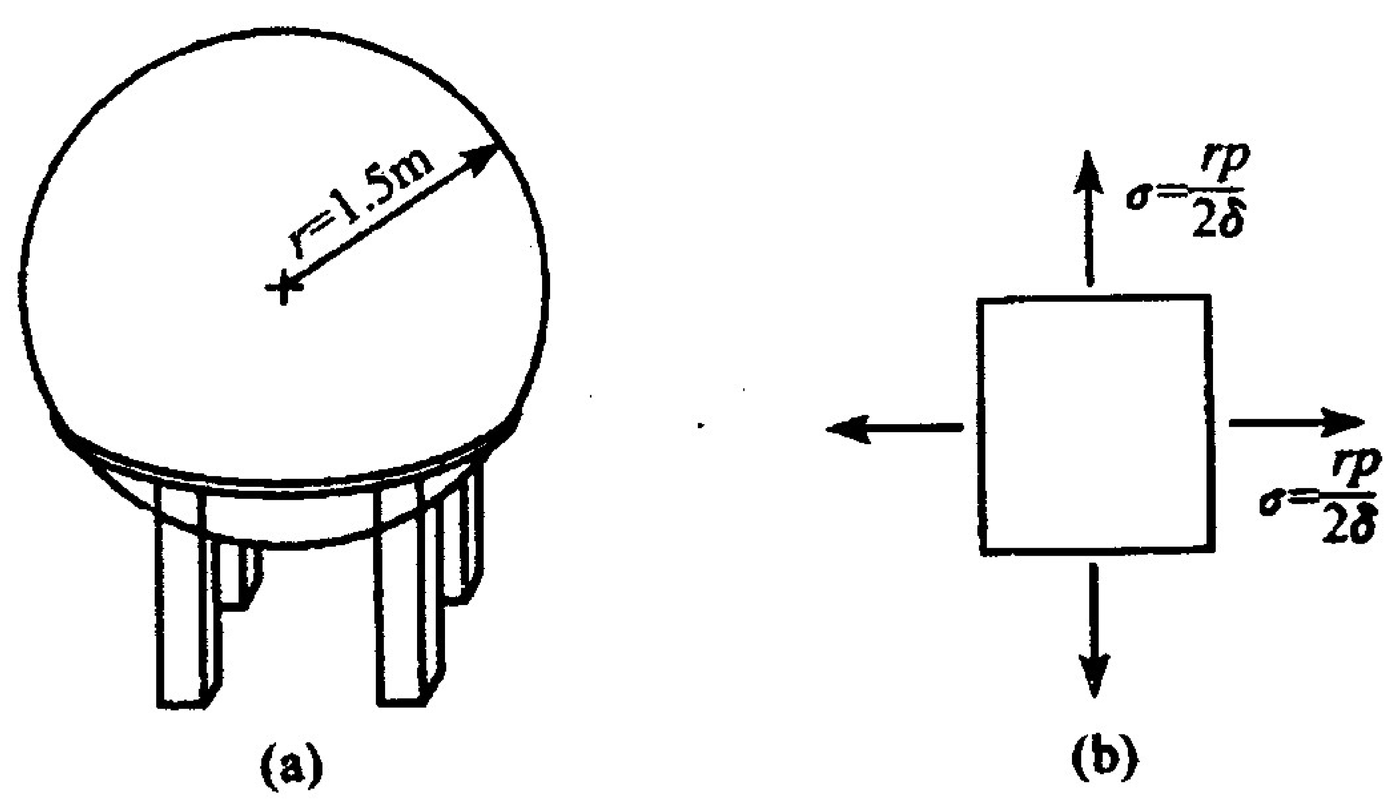


图 2.2

如果用第三强度理论进行设计，则 $\sigma_{r,3}=\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma]$ 由于 σ_3 近似认为等于零，计算结果同上。

如果用第四强度理论进行设计，则

$$\sigma_{r,4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_1\leqslant[\sigma]$$

计算结果依然相同。

点评 ①薄壁压力容器(柱形、球形)球体在静水压力作用下，其上单元体应力状态及应力分量计算应熟记结果。②本题选自 Macmillan Publishing Company，R. C. Hibbeler 著的 *Mechanics of Materials*。未告知用什么理论来进行设计，以上计算可知，在两向等拉情况下，单向拉伸强度条件及第三、第四强度理论计算结果相同。

2.3 简易吊车如图 2.3 所示，最大起重重量 $W=20\text{kN}$。已知 AB 杆的外径 $D=50\text{mm}$，内径 $d=40\text{mm}$，材料为 Q235 钢，其弹性模量 $E=206\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$\sigma_s=235\text{MPa}$，$a=304\text{MPa}$，$b=1.12\text{MPa}$。若规定稳定安全因数 $n_{st}=2$，校核 AB 杆是否稳定。(15 分)

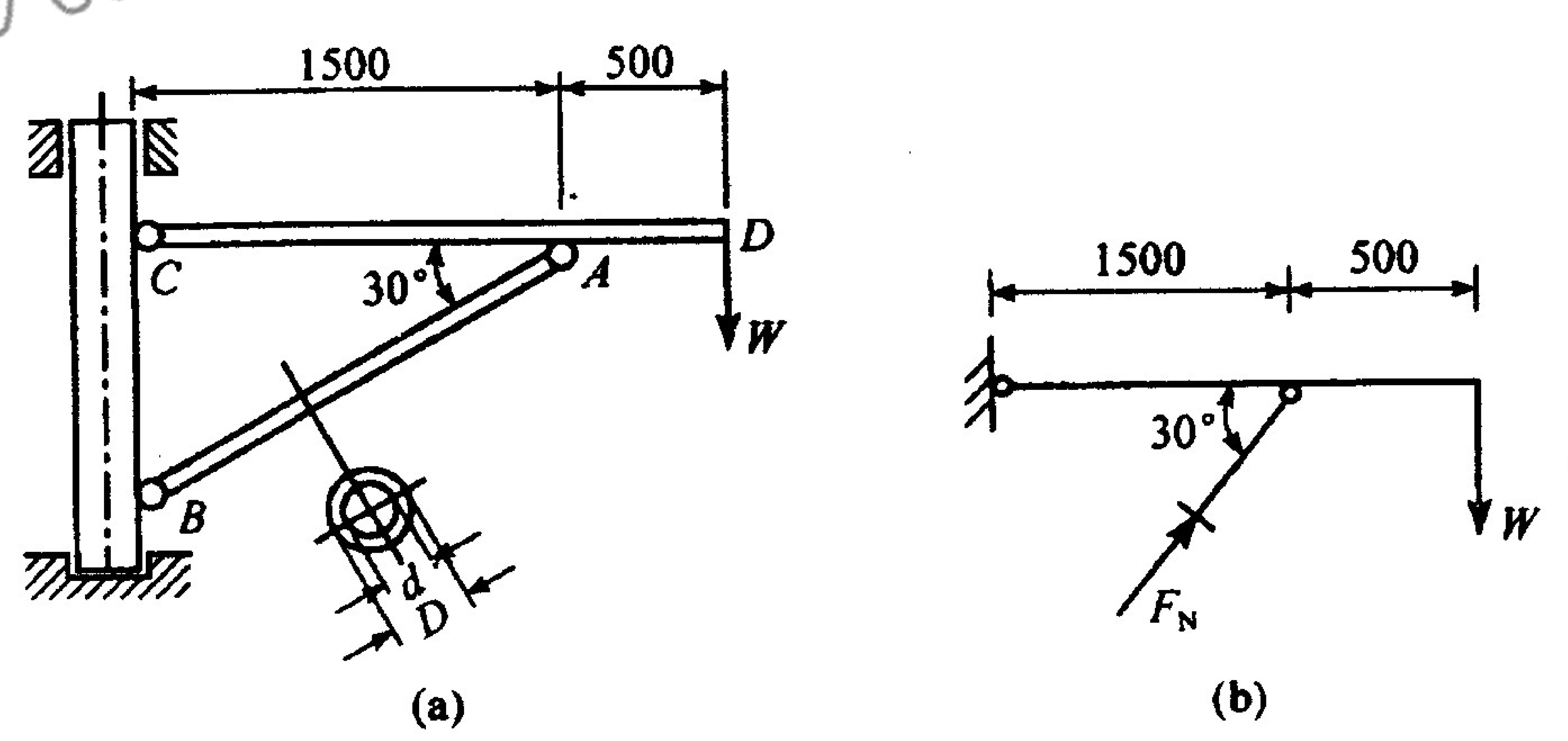


图 2.3

解 这是最简单的两端铰支压杆的稳定性校核题目。

(1) 求 AB 杆的轴力 F_N。由平衡方程 $\sum M_C=0$，即 $2W=F_N\sin30°\times1.5$

解得

$$F_N=\frac{8}{3}W=\frac{160}{3}\text{kN}$$

(2) 计算 AB 杆的柔度。其中 $\mu=1$，$l_{AB}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times1500=\frac{3000}{\sqrt{3}}(\mathrm{mm})=1732(\mathrm{mm})$，$\alpha=\frac{d}{D}=0.8$，惯性半径 $i=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}=1.6\times10^{-2}(\mathrm{m})$，故其柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times1732\times10^{-3}}{1.6\times10^{-2}}=108.2$$

而 $\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times206\times10^9}{200\times10^6}}=101<\lambda$，故为大柔度杆。

(3) 计算 AB 杆的临界载荷值。因 $\lambda>\lambda_p$，故选用欧拉公式计算临界载荷。即

$$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times206\times10^9\times\pi\times5^4\times10^{-8}(1-0.8^4)}{64\times(1\times\sqrt{3})^2}$$
$$=122.8\times10^3(\mathrm{N})=122.8(\mathrm{kN})$$

而

$$\frac{F_{cr}}{F_N}=\frac{122.8\times3}{16}=2.3>n_{st}=2$$

故 AB 杆稳定。

点评 ①压杆的稳定性校核，是计算稳定安全因数 $n=\frac{F_{cr}}{F_N}\geqslant n_{st}$。而 F_{cr} 计算要依据杆的支承条件，截面图形几何性质等，最重要的依据柔度判断杆的类型，决定 F_{cr} 的计算公式。②若给出梁的尺寸和许用应力 $[\sigma]$，则还需对梁的强度进行核校。

2.4 重 70kg 的运动员从 0.6m 高处落在跳板 A 端(图 2.4(a))，跳板的横截面为 480mm×65mm 的矩形，木材的弹性模量为 $E=12\mathrm{GPa}$。假设运动员腿不弯曲，试求：(1) 跳板中的最大弯曲正应力；(2) A 点的最大位移(求位移的方法不限)。(15 分)

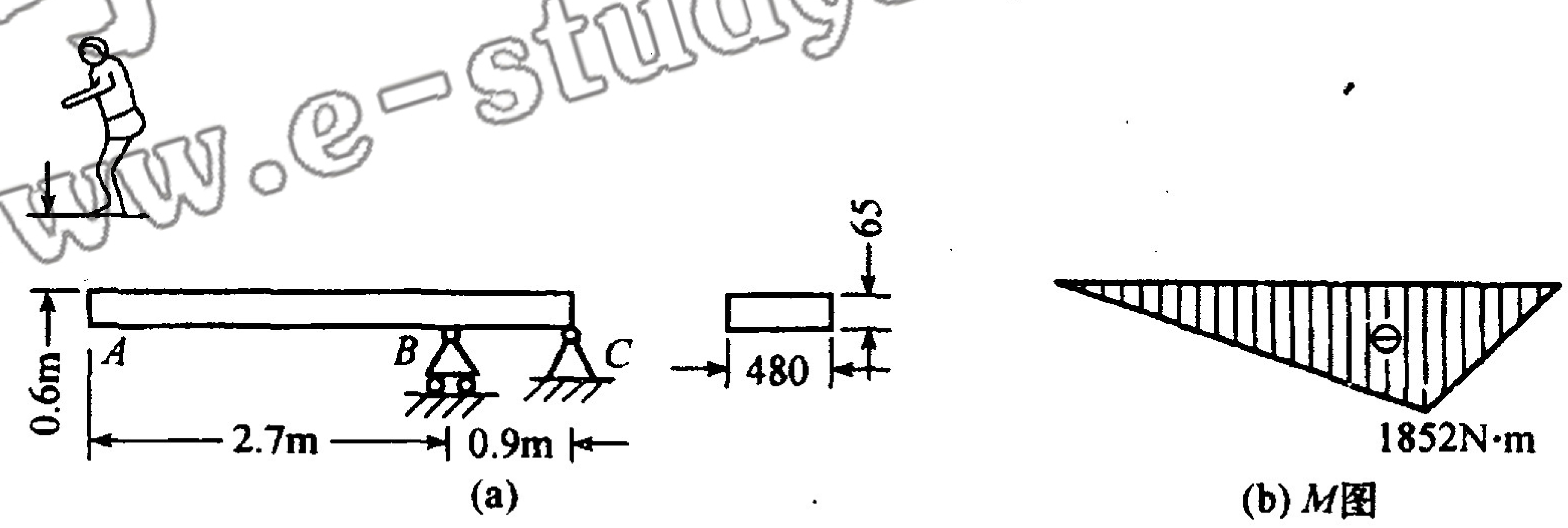


图 2.4

解 这是动载荷方面的题目。原题目中假设运动员的腿保持刚性(即不考虑冲击物的变形)，故可按初速度为零的自由落体冲击去考虑。

(1) 冲击点 A 沿冲击方向的静位移 Δ_{st}。外伸梁端的位移 Δ_{st} 可直接写出 $\left(\Delta_{st}=\frac{Fa^2}{EI}(l+a)\right)$，亦可用叠加或能量法求出，如用能量法求选用图乘法，作弯矩图如图 2.4(b)所示，其中最大弯矩为 $M_{max}=70\times9.8\times2.7=1852(\mathrm{N\cdot m})$。在冲击点作用单位力(方向同冲击方向)，得形状类似于图 2.4(b)的单位力内力图 $\overline{M}$，两图相乘得

$$\Delta_{st}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}\times2.7\times1851\times\frac{2}{3}\times2.7+\frac{1}{2}\times0.9\times1851\times\frac{2}{3}\times2.7\right)$$

$$=\frac{12}{12\times10^{9}\times480\times65^{3}\times10^{-12}}\times6.0\times10^{3}=45.5\times10^{-3}(\mathrm{m})=45.5(\mathrm{mm})$$

（2）求动荷因数 K_{d}。直接代入动荷因数公式，得

$$K_{\mathrm{d}}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{\mathrm{st}}}}=1+\sqrt{1+\frac{0.6\times2}{45.5\times10^{-3}}}=6.23$$

（3）跳板中的最大弯曲正应力 $\sigma_{\mathrm{d,max}}$。梁中最大静弯矩为 1852N·m，故

$$\sigma_{\mathrm{d,max}}=K_{\mathrm{d}}\sigma_{\mathrm{st,max}}=K_{\mathrm{d}}\times\frac{M_{\max}}{\frac{bh^{2}}{6}}=6.23\times\frac{6\times1852}{480\times65^{2}\times10^{-9}}$$

$$=34.1\times10^{6}(\mathrm{Pa})=34.1(\mathrm{MPa})$$

（4）A 点的最大位移 $\Delta_{\mathrm{d,max}}$。代入动荷因数，得

$$\Delta_{\mathrm{d,max}}=K_{\mathrm{d}}\Delta_{\mathrm{st}}=6.23\times45.5=283(\mathrm{mm})$$

点评 ①题目不特别要求时，动荷因数可不必从能量法求起而直接引用结果。②求位移的方法不限，故直接写出自由端位移，用简支梁和外伸梁叠加，能量法中任一种均可。③关注跳板的中性轴，尽管 $I=\frac{bh^{3}}{12}$ 或 $W=\frac{bh^{2}}{6}$ 熟知，但 b 和 h 如何选定，h 一定是和中性轴垂直的边。

2.5 图 2.5 所示钢制圆轴受弯矩 M 和扭矩 T 作用，圆轴直径 $d=18.3\mathrm{mm}$，实验测得轴表面最低处 A 点沿轴线方向的线应变 $\varepsilon_{x}=5\times10^{-4}$，在水平直径表面上的 B 点沿圆轴轴线成 45°方向的线应变 $\varepsilon_{x'}=4.5\times10^{-4}$，$\varepsilon_{y'}=-4.5\times10^{-4}$。已知钢的弹性模量 $E=200\mathrm{GPa}$，泊松比 $\mu=0.25$，许用应力 $[\sigma]=180\mathrm{MPa}$。求：(1) 弯矩 M 和扭矩 T；(2) 按第三强度理论校核轴的强度。（15 分）

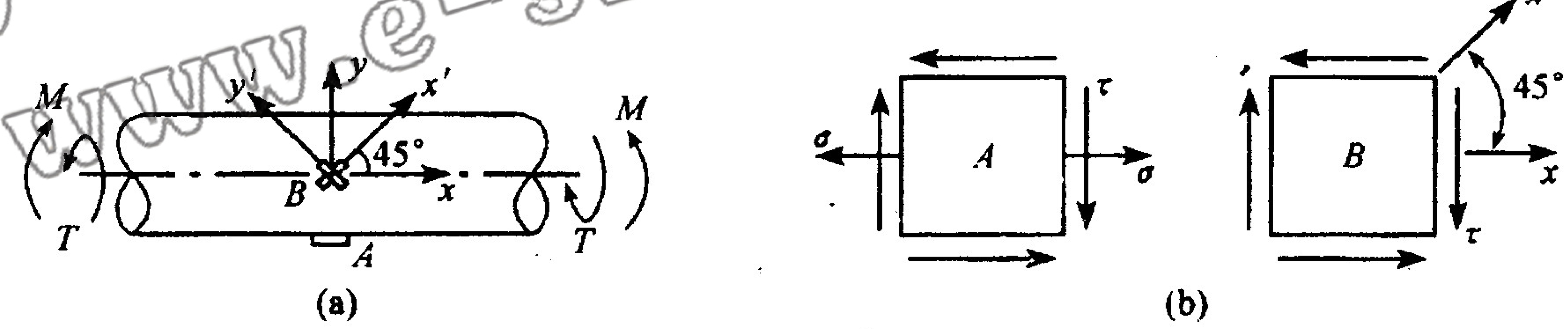


图 2.5

解 这是强度理论方面的题目，且涉及弯曲，扭转组合变形，题中给出 B 点±45°的线应变及 A 点的线应变，只要正确分析应力状态，就可从广义胡克定律中确定应力分量或外力的大小。

（1）计算弯矩 M 和扭矩 T。取 A 点研究，A 点在轴的最下方，单元体上有扭矩 T 对应的切应力和弯矩 M 对应的正应力，画 A 点单元体如图 2.5(b)所示。由应力应变分析知，线应变仅与正应力有关，故由胡克定律

$$E\varepsilon_{x}=\sigma=\frac{M}{W}[\sigma_{x}-\mu(\sigma_{y}+\sigma_{z})]$$

其中，σ_{y}、σ_{z} 为零，解出

$$M=E\varepsilon_{x}W=200\times10^{9}\times5\times10^{-4}\times\frac{\pi(18.3\times10^{-3})^{3}}{32}=60.2(\mathrm{N\cdot m})$$

取B点研究，B点在中性层处，故仅有扭矩对应的切应力，画B点单元体如图2.5(b)所示。该单元体为纯剪切应力状态，由应力分析求沿$x'(\alpha=45^\circ)$和$y'(\alpha=135^\circ)$方向的正应力为

$$\sigma_{45^\circ}=\tau=\frac{T}{W_p},\quad \sigma_{-45^\circ}=-\tau$$

由广义胡克定律

$$\varepsilon_{x'}=\frac{1}{E}(\sigma_{45^\circ}-\mu\sigma_{-45^\circ})=\frac{1}{E}(\tau+\mu\tau)=\frac{T}{EW_p}(1+\mu)$$

解得

$$T=\frac{EW_p\varepsilon_{x'}}{1+\mu}=\frac{200\times10^9\times\pi\times(18.3\times10^{-3})^3\times4.5\times10^{-4}}{16\times(1+0.25)}=86.6(\mathrm{N\cdot m})$$

故轴受到的弯矩$M=60.2\mathrm{N\cdot m}$，扭矩$T=86.6\mathrm{N\cdot m}$。

(2) 校核轴强度。由受力情况知轴为弯扭组合变形，对圆轴弯扭组合第三强度理论的表达式为

$$\sigma_{r,3}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+T^2}=\frac{32}{\pi(18.3\times10^{-3})^3}\sqrt{60.2^2+86.6^2}$$
$$=175.3\times10^6(\mathrm{Pa})=175.3(\mathrm{MPa})<[\sigma]=180(\mathrm{MPa})$$

故轴满足强度要求。

点评 ①此题是圆轴在组合变形作用下，已知应变求应力最终求解外力的逆运算问题。②此题也可由$\varepsilon_{y'}=\frac{1}{E}(\sigma_{-45^\circ}-\mu\sigma_{45^\circ})=-\frac{T}{EW_p}(1+\mu)$求解扭矩$T$。③读者应关注图2.5(b)中$A$点应力状态下第三、第四强度理论的表达式，且当该点来自圆轴时，第三、第四强度理论的进一步演化式，从而计算中可不必求出各个主应力。

2.6 钢制T形构架由杆AB和DE组成，杆AB垂直焊接在直径$d=50\mathrm{mm}$的圆杆DE上，D处可视为刚接点，E端固定，杆AB两端分别作用1560N和325N的集中力。若钢材的许用应力$[\sigma]=160\mathrm{MPa}$，试用第三强度理论校核DE杆的强度。(15分)

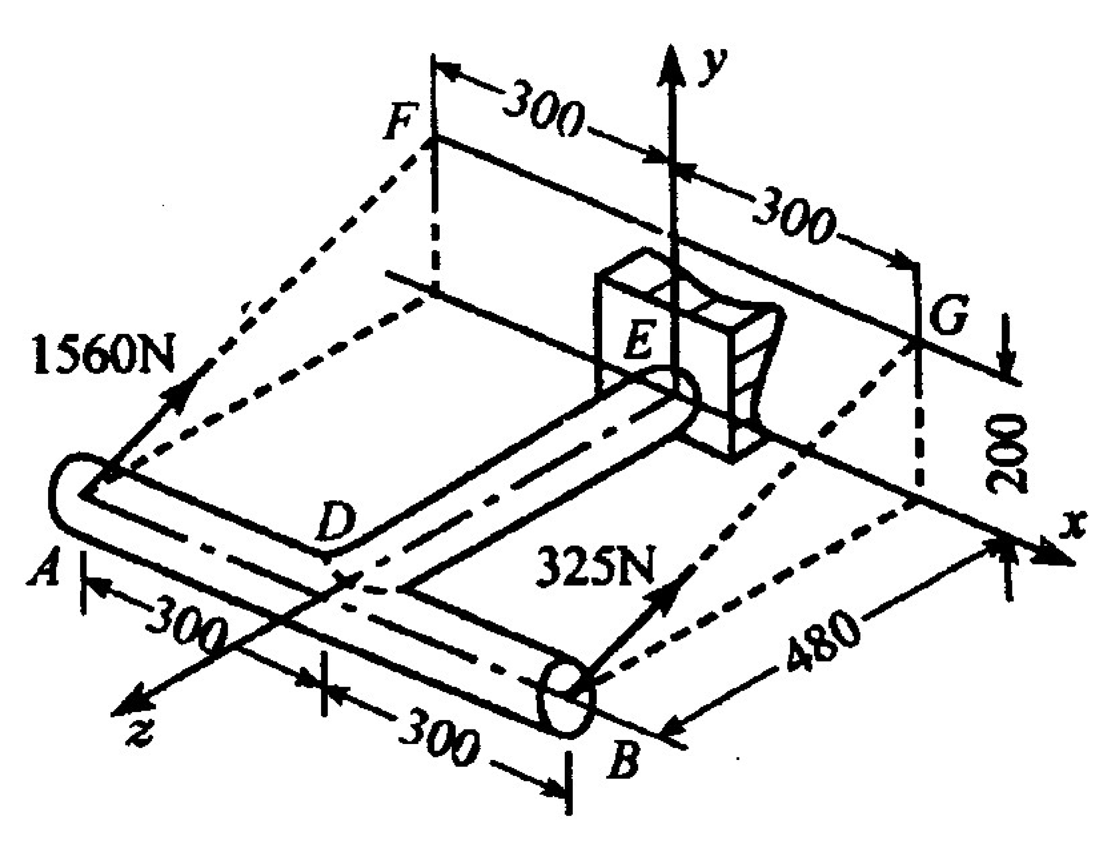
解 这同样是强度理论方面的题目，其组合变形包括压缩弯曲及扭转，重要的是在此组合变形下第三强度理论的表达式和危险截面及其内力分量的确定。

(1) 内力分析，确定危险截面及内力分量。由图2.6(a)知$AF=BG=\sqrt{480^2+200^2}=520(\mathrm{mm})$，设$\angle GBH=\alpha$，且$F_1=1560\mathrm{N}$，$F_2=325\mathrm{N}$，则

$$F_{1z}=F_1\cos\alpha=1440\mathrm{N},\quad F_{1y}=F_1\sin\alpha=600\mathrm{N}$$
$$F_{2z}=F_2\cos\alpha=300\mathrm{N},\quad F_{2y}=F_2\sin\alpha=125\mathrm{N}$$

由平衡条件知

$$\sum F_z=0,\quad F_N=F_{1z}+F_{2z}=1740\mathrm{N}(\text{压})$$
$$\sum F_y=0,\quad F_{sy}=F_{1y}+F_{2y}=725\mathrm{N}$$
$$\sum M_z=0,\quad T_z=(F_{1y}-F_{2y})\times0.3=142.5\mathrm{N\cdot m}$$
$$\sum M_y=0,\quad M_y=(F_{1z}-F_{2z})\times0.3=342\mathrm{N\cdot m}$$
$$\sum M_x=0,\quad M_x=(F_{1y}+F_{2y})\times0.48=348\mathrm{N\cdot m}$$



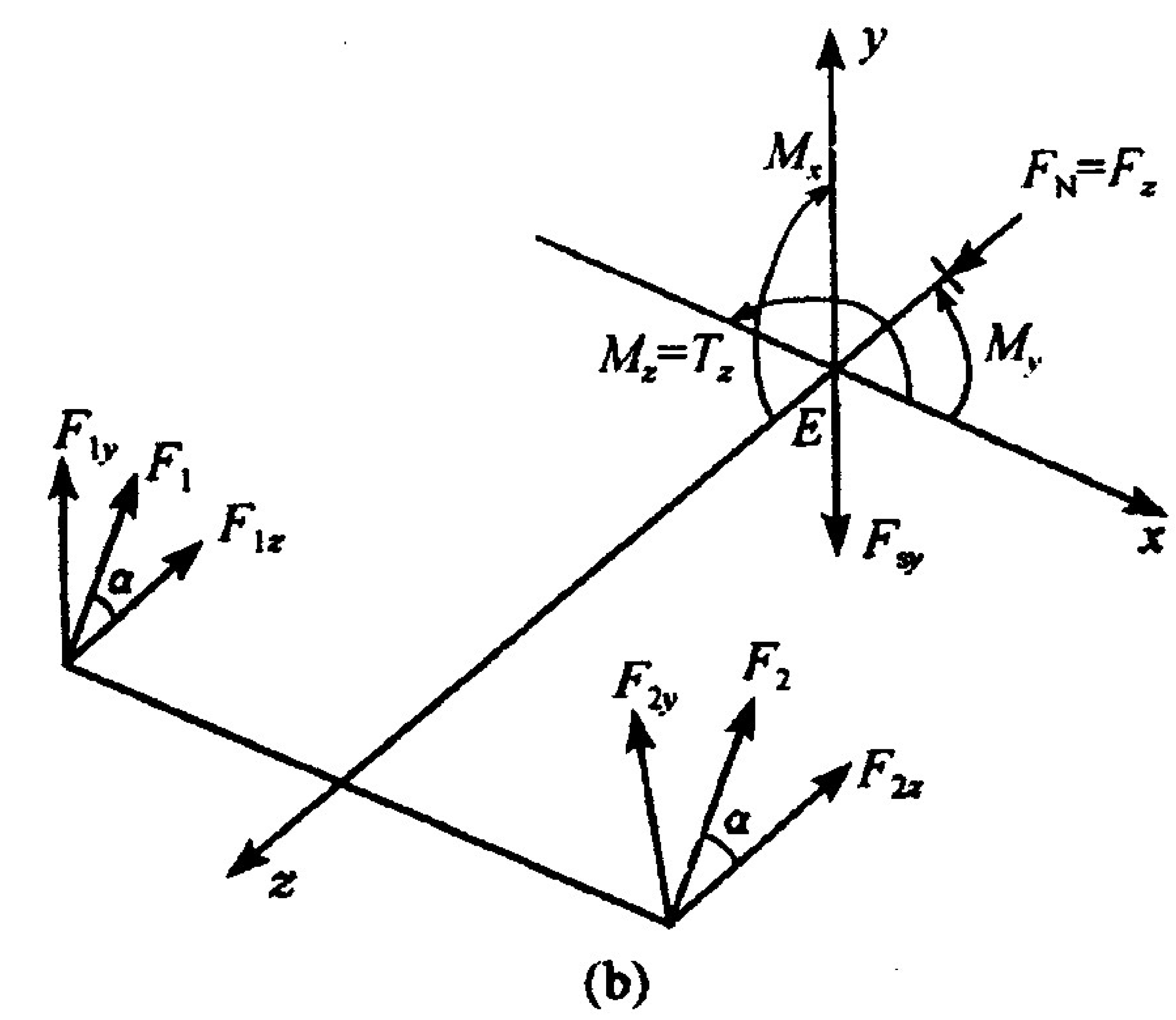


图 2.6

(2) 危险截面上内力分量。如果不计剪切引起的切应力 F_{sy}，则圆轴危险面上的合成弯矩 $M=\sqrt{M_y^2+M_x^2}=\sqrt{342^2+348^2}=488(\text{N}\cdot\text{m})$，则危险截面上的最大正应力（压应力）为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W}=\frac{1740\times4}{\pi\times5^2\times10^{-4}}+\frac{488\times32}{\pi\times5^3\times10^{-6}}=40.7\times10^6(\text{Pa})=40.7(\text{MPa})$$

危险面上扭转引起的切应力为

$$\tau=\frac{T_z}{W_p}=\frac{142.5\times16}{\pi\times5^3\times10^{-6}}=5.81\times10^6(\text{Pa})=5.81(\text{MPa})$$

(3) 用第三强度理论校核 DE 杆强度。将 σ、τ 代入第三强度理论，则

$$\sigma_{r,3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sqrt{40.7^2+4\times5.81^2}=42.3(\text{MPa})<[\sigma]$$

故 DE 杆强度满足。

点评 ①复杂受力情况处，仔细进行内力分析，正确确定各内力分量。②在压弯扭组合变形时，$\sigma_{r,3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sqrt{\left(\frac{F_N}{A}+\frac{M}{W}\right)^2+4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2}$，而不可贸然写成 $\sigma_{r,3}=\frac{1}{W}\sqrt{M_y^2+M_z^2+T^2}$ 或 $\sigma_{r,3}=\frac{1}{W}\sqrt{M_y^2+M_z^2+T^2}+\frac{F_N}{A}$。③如果要计入切力 F_{sy} 的影响，问题变得更为复杂。因为这时最大压应力所在点，不在 y 轴上 $y=-\frac{d}{2}$ 点，由 F_{sy} 引起的切应力不为零，且方向不易确定，故一般不予考虑。

2.7 钢制工字形截面简支梁如图 2.7 所示，梁上承受均布载荷 $q=24\text{kN/m}$，已知钢材弹性模量为 $E=200\text{GPa}$，截面图形对 x 轴的惯性矩为 $I_x=216\times10^6\ \text{mm}^4$，截面高度 $h=407\text{mm}$。求：(1) 未加载荷时，梁中点 C 与活动铰间的间隙为 $\delta_0=20\text{mm}$，求加载后各支座反力。(2) 欲使三支座的反力相等，则梁中点 C 与活动铰的间隙 δ_0' 应为多少？(10 分)

解 这是超静定方面的题目。在均布载荷作用下，如果梁中面位移 $\Delta_{yC}>\delta_0$，则出现多余约束，否则则是静定问题。而第二问则用中间支座调整三支座反力，使三支座反力相等，可用调节 δ_0 改变支反力。

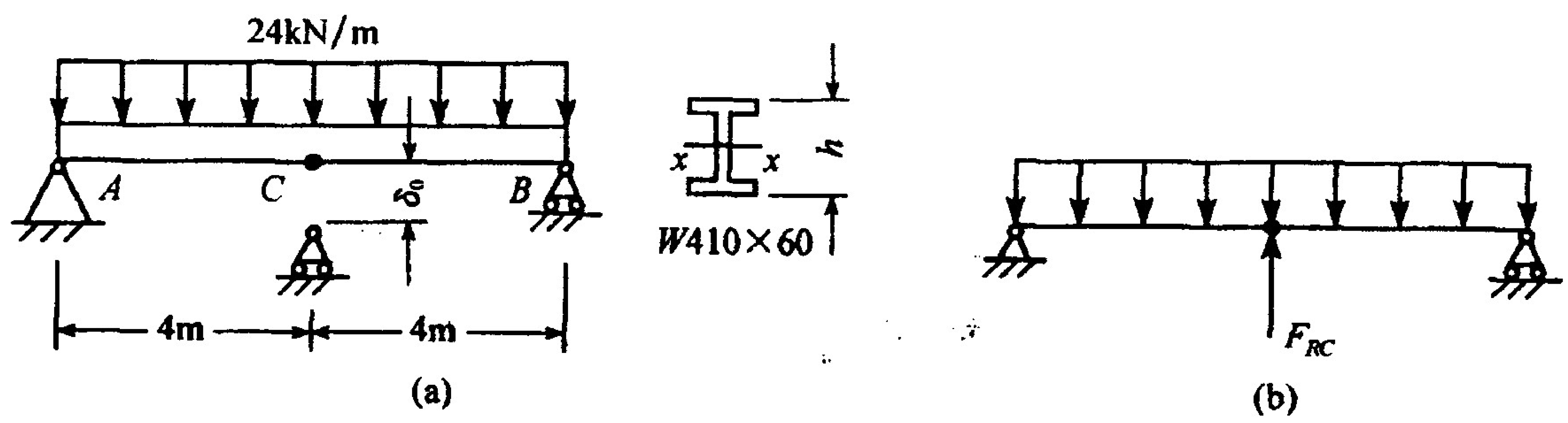


图 2.7

(1) 判断梁是否为超静定。在均布载荷作用下，简支梁中面的位移为

$$\Delta_{yC}=\frac{5ql^4}{384EI}=\frac{5\times24\times10^3\times8^4}{384\times200\times10^9\times216\times10^{-6}}$$
$$=29.6\times10^{-3}(\text{m})=29.6(\text{mm})>20\text{mm}$$

故当均布载荷作用时，中间支座必产生反力。

(2) 求当 $\delta_0=20$mm 时，各支座的反力。取相当系统如图 2.7(b)所示，则 C 面变形协调条件为

$$\Delta_{yq}-\Delta_{yF_{RC}}=\delta_0$$

其中 $\Delta_{yq}=\Delta_{yC}=29.6$mm，$\Delta_{yF_{RC}}=\dfrac{F_{RC}l^3}{48EI}$，代入得

$$F_{RC}=\frac{(29.6-20)\times10^{-3}\times48EI}{l^3}=\frac{9.6\times10^{-3}\times48\times200\times10^9\times216\times10^6}{8^3}$$
$$=38.88\times10^3(\text{N})=38.88(\text{kN})$$

(3) 当 $\delta_0=20$mm 时，各支座的反力为

$$F_{Ay}=F_{By}=(24\times8-38.88)/2=76.56(\text{kN})$$

(4) 当要求 $F_{Ay}=F_{By}=F_{Cy}$ 时，上述变形协调方程中即要求 $F_{Cy}=64$kN$(24\times8/3)$，即改变为

$$\Delta_{yq}-\frac{64\times10^3\times8^3}{48EI}=\delta'_0$$

将具体数值代入，得

$$\Delta_{yF_{RC}}=\frac{64\times10^3\times8^3}{48\times200\times10^9\times216\times10^{-6}}=15.8\times10^{-3}(\text{m})=15.8(\text{mm})$$

代入协调方程得 $\delta'_0=29.6-15.8=13.8(\text{mm})$。

点评 ①问题首先是是否超静定的判断即 Δ_{yC} 大于或小于 δ_0，一般情况下，问题必为超静定。②这里熟记简单梁的位移计算结果显得相当重要，如 $\Delta_{yC}=\dfrac{5ql^4}{384EI}$，$\Delta_{yC}=\dfrac{Fl^3}{48EI}$ 等，否则要用积分法或能量法求之，工作量将大量增加。当然题目要求用某种方法求位移时，则要仔细求解。