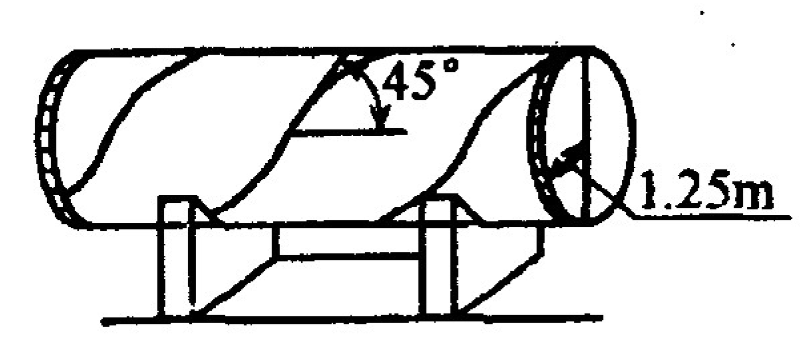
3. 西北工业大学 2001 年硕士研究生入学考试 材料力学试题

（满分 100 分）

3.1　图 3.1(a)所示圆筒形薄壁压力容器，用厚度为 15mm 的钢板沿 45°倾斜的接缝焊接而成，其内半径为 1.25m，当内压为 4MPa 时，求焊缝的正应力和切应力。（10 分）



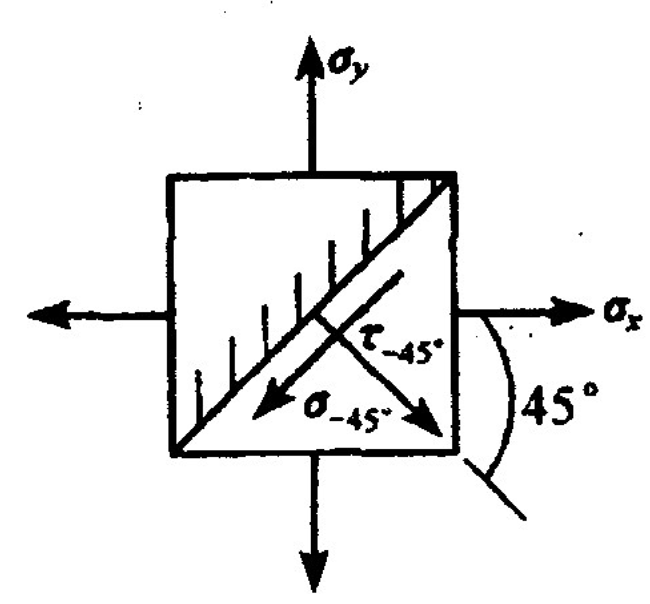


图 3.1

解　这是平面应力状态下求斜截面 α 上的应力问题。要熟知教材中讲述薄壁压力容器上沿轴向取 dx 所截单元体的应力状态，其余问题直接代入斜截面上 σ_α、τ_α 计算公式即可。

(1) 确定 A 点应力状态。围绕 A 点用两个横截面和包含直径的纵向平面截取单元体(图 3.1(b))。在内压 p 作用下，该点的轴向应力和周向应力分别为

$$\sigma_x = \frac{pD}{4\delta} = \frac{pR}{2\delta} = \frac{4\times10^6\times1.25}{2\times15\times10^{-3}} = 166.7\times10^6(\text{Pa}) = 166.7(\text{MPa})$$

$$\sigma_y = \frac{pD}{2\delta} = 2\sigma_x = 333.3\text{MPa}$$

(2) 求斜截面上的应力。由斜截面上应力公式求焊缝处的应力分量，注意由 α 的正负号规定知 $\alpha=-45°$，代入 σ_x、σ_y、$\tau_{xy}=0$，α 得

$$\sigma_{-45°} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\alpha - \tau_{xy}\sin2\alpha$$
$$= \frac{166.7+333.3}{2} + \frac{166.7-333.2}{2}\cos(2\times(-45°)) = 250(\text{MPa})$$

$$\tau_{-45°} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin2\alpha - \tau_{xy}\cos2\alpha = 83.3\text{MPa}$$

焊缝处应力方向如图 3.1(b)所示。

点评　①对于薄壁压力容器的应力状态确定，没有熟记公式时，从纵向压力 $F_r = p\cdot\frac{\pi D^2}{4}$，而承力面为 $A=\pi D\delta$。极易得出，周向截出单位长度（轴向）半圆，向上压力 $F_y=$

Dp，承力面 $A=2\times\delta\times1$，同样可以确定，或记住周向应力为轴向应力的 2 倍即可。②任意斜截面上的应力 σ_α、τ_α 公式不易记住，但用莫尔应力圆同样可以确定，或由应力圆上相关参数推出 σ_α、τ_α 的表达式。

3.2 图 3.2(a)所示齿轮传动机构，F 端为固定端，A、B、G 为轴承，不承受力矩。轴 ABC 的直径 $d_1=25\text{mm}$，轴 DGF 的直径 $d_2=30\text{mm}$，两轴材料相同，切变模量 $G=80\text{MPa}$。试求 A 端面的转角 φ_A。(16 分)

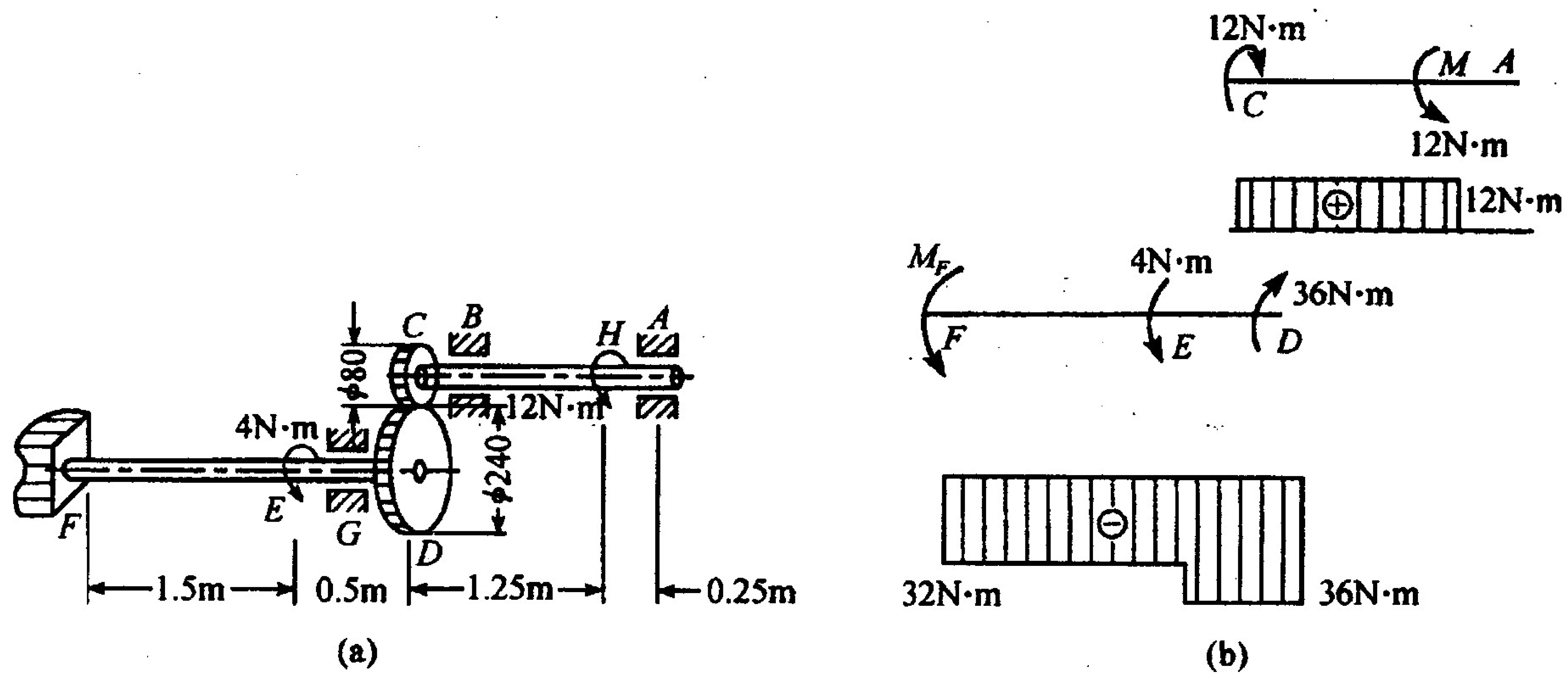


图 3.2

解 这是圆轴扭转中求扭转角的题目。涉及不同扭转刚度，齿轮间力矩的传递问题。同时应注意两段中扭转角的正、逆时向，以防叠加错误。

(1) 作扭矩图。设齿轮 C 和 D 间切向啮合力 F_1，则由轴 ABC 的扭矩平衡有 $F_1\times 40\times10^{-3}=12\text{N}\cdot\text{m}$ 得 $F_1=300\text{N}$。

轴 DEF 在齿轮 D 处受到的扭矩为

$$M_D=F_1\times120\times10^{-3}=36\text{N}\cdot\text{m}$$

作两轴的扭矩图如图 3.2(b)所示。

(2) 变形计算。由圆轴扭转的变形公式知，下轴 DF 中

$$\varphi_{DF}=\varphi_{DE}+\varphi_{EF}=\frac{T_{DE}l_{DE}}{GI_p}+\frac{T_{EF}l_{EF}}{GI_p}=\frac{32}{G\pi d_2}(T_{DE}l_{DE}+T_{EF}l_{EF})$$

$$=\frac{32}{80\times10^9\times\pi\times30^4\times10^{-12}}(36\times0.5+32\times1.5)=1.04\times10^{-2}(\text{rad})(\text{顺时向})$$

注意到 C、D 两齿轮啮合在一起，转动中所转过线距离相等，则

$$\varphi_C=\frac{120}{40}\varphi_{DF}=3\times1.04\times10^{-2}=3.12\times10^{-2}(\text{rad})(\text{逆时向})$$

ABC 轴 AH 段扭矩为零，故

$$\varphi_{AC}=\varphi_{AH}+\varphi_{HC}=\varphi_{HC}=\frac{T_{HC}l_{HC}}{GI_{p1}}=\frac{32}{G\pi d^4}T_{HC}l_{HC}$$

$$=\frac{32}{80\times10^9\times\pi\times25^4\times10^{-12}}\times12\times1.25=0.489\times10^{-2}(\text{rad})(\text{逆时向})$$

故 A 端面的转角为

$$\varphi_A=\varphi_C+\varphi_{AC}=3.61\times10^{-2}\text{rad}=2.07°$$

点评 ①两齿轮间虽啮合力相等，但由于齿轮直径不同，传递的力偶则不同。②叠加中应注意转向问题，以免叠加错误。AC 轴中，如果 C 端固定，A 则转过 φ_{AC}，但 C 端由于 DF 轴存在，亦转过了 φ_C，同为逆时向，故 $\varphi_A=\varphi_C+\varphi_{AC}$。

3.3 置于电阻加热装置(图 3.3(a))中的杆 CD 温度从 $T_1=30℃$升高到$T_2=180℃$，当温度为 T_1 时 C 端面和刚性梁 BF 间隙为$\delta=0.7\text{mm}$，试求当温度升高到 T_2 时 AB、EF 杆中的应力。已知 AB、EF 杆的横截面面积均为 $A_{st}=125\text{mm}^2$，弹性模量 $E_{st}=200\text{GPa}$；CD 杆的横截面面积为 $A_{al}=375\text{mm}^2$，弹性模量 $E_{al}=70\text{GPa}$；线胀系数 $\alpha_{al}=23\times10^{-6}/℃$。(16 分)

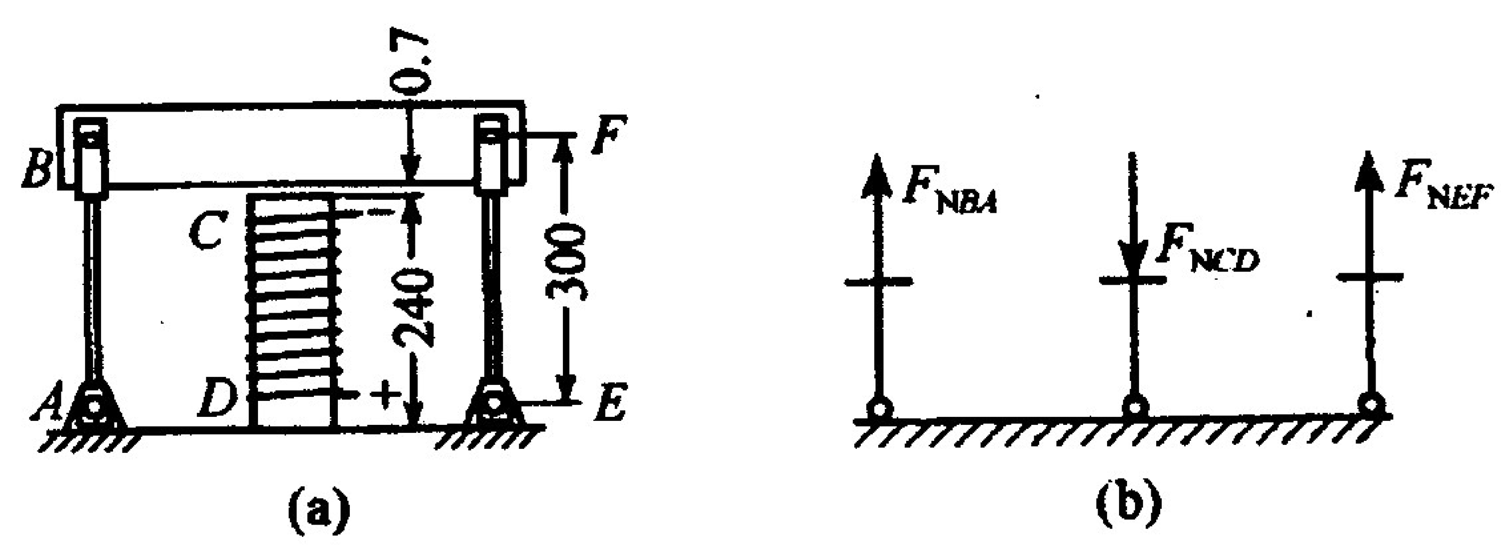


图 3.3

解 这是温度应力方面的题目。当没有刚性梁 BF 限制时，杆 CD 由于温升而伸长，则有 $\Delta l_{tCD}=\alpha_{al}\Delta t l_{CD}=23\times10^{-6}\times(180-30)\times240=0.828(\text{mm})>\delta=0.7\text{mm}$，因此其不可能自由伸长。$AB$、$EF$ 两杆同时受到轴向拉伸，故共有 3 个轴力 F_{NAB}、F_{NEF}、F_{NCD}。而平面平行力系，仅可提供两个独立的平衡方程，故问题属一次超静定问题。

(1) 列出静力平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad F_{NCD}=F_{NAB}+F_{NEF}\ \text{且}\ F_{NAB}=F_{NEF}$$

(2) 列出变形协调条件。设 CD 杆的压缩量为 Δl_{CD}、AB、EF 杆的伸长量为

$$\Delta l_{AB}=\Delta l_{EF}$$

则有

$$\Delta l_{CD}+\Delta l_{EF}+\delta=\Delta l_{tCD}$$

这里各变形量均取绝对值。

(3) 写出物理关系

$$\Delta l_{CD}=\frac{F_{NCD}l_{CD}}{E_{al}A_{al}},\quad \Delta l_{EF}=\frac{F_{NEF}l_{EF}}{E_{st}A_{st}}$$

(4) 将物理关系代入变形协调方程，得出补充方程，即

$$\frac{F_{NCD}l_{CD}}{E_{al}A_{al}}+\frac{F_{NEF}l_{EF}}{E_{st}A_{st}}=\alpha_{al}\Delta t l_{CD}-\delta$$

代入数值得

$$16F_{NCD}+21F_{NEF}=0.128\times125\times14\times10^3$$

将 $F_{NCD}=2F_{NEF}$代入上式，解得 $F_{NEF}=F_{NAB}=4.23\text{kN}$。

(5) 求出 AB、EF 两杆中由于温升而引起的应力

$$\sigma_{AB}=\sigma_{EF}=F_{NAB}/A_{st}=\frac{4.23\times10^3}{125\times10^{-6}}=33.8\times10^6(\text{Pa})=33.8(\text{MPa})$$

点评 ①首先是超静定问题的判断，即 $\Delta l_{tCD}>\delta$，才会出现超静定问题。②列出变形

协调条件是本题的关键。③如果上述条件不变，仅在温度升高时，AB 和 EF 杆也从 $T_1=30℃$ 升高到 $T_2=50℃$，且 $\alpha_{st}=12\times10^{-6}/℃$，两杆中的应力应为多少？在 AB，EF 两杆温度也升高后，而柱 CD 条件不变，问题有两种可能：其一，两杆由于温升而伸长 Δl_{tEF} 与间隙 δ 之和大于 Δl_{tCD}，即柱温升后不受刚性梁变形限制，则杆、柱均不受力，而当 $\Delta l_{tEF}+\delta<\Delta l_{tCD}$ 时，由于 BF 刚性梁的限制，杆、柱均受力，问题亦属一次超静定问题。代入相关数据有

$\alpha_{st}\Delta t_{EF} l_{EF}+\delta=12\times10^{-6}\times(50-30)\times300+0.7=0.772(\mathrm{mm})<\Delta l_{tCD}$ 故问题仍属一次超静定问题，平衡方程亦然，不同之处仅为变形协调条件为

$$\Delta l_{CD}+\Delta l_{EF}=\Delta l_{tCD}-(\Delta l_{tEF}+\delta)$$

代入相关数据可以解得 $F_{NEF}=1.85\mathrm{kN}$，$\sigma_{EF}=14.8\mathrm{MPa}$，具体解法请读者自己完成。

3.4　受均布载荷 q 作用的矩形截面梁 AD，左端铰支，B 处由直径为 d 的圆杆 BC 悬吊（图 3.4(a)），测得圆杆 BC 的轴向应变为 501×10^{-6}，试求梁 AD 的最大弯曲正应力。已知：$d=10\mathrm{mm}$，$E=200\mathrm{GPa}$，$q=3.5\mathrm{kN/m}$，$b=40\mathrm{mm}$，$h=60\mathrm{mm}$。（16 分）

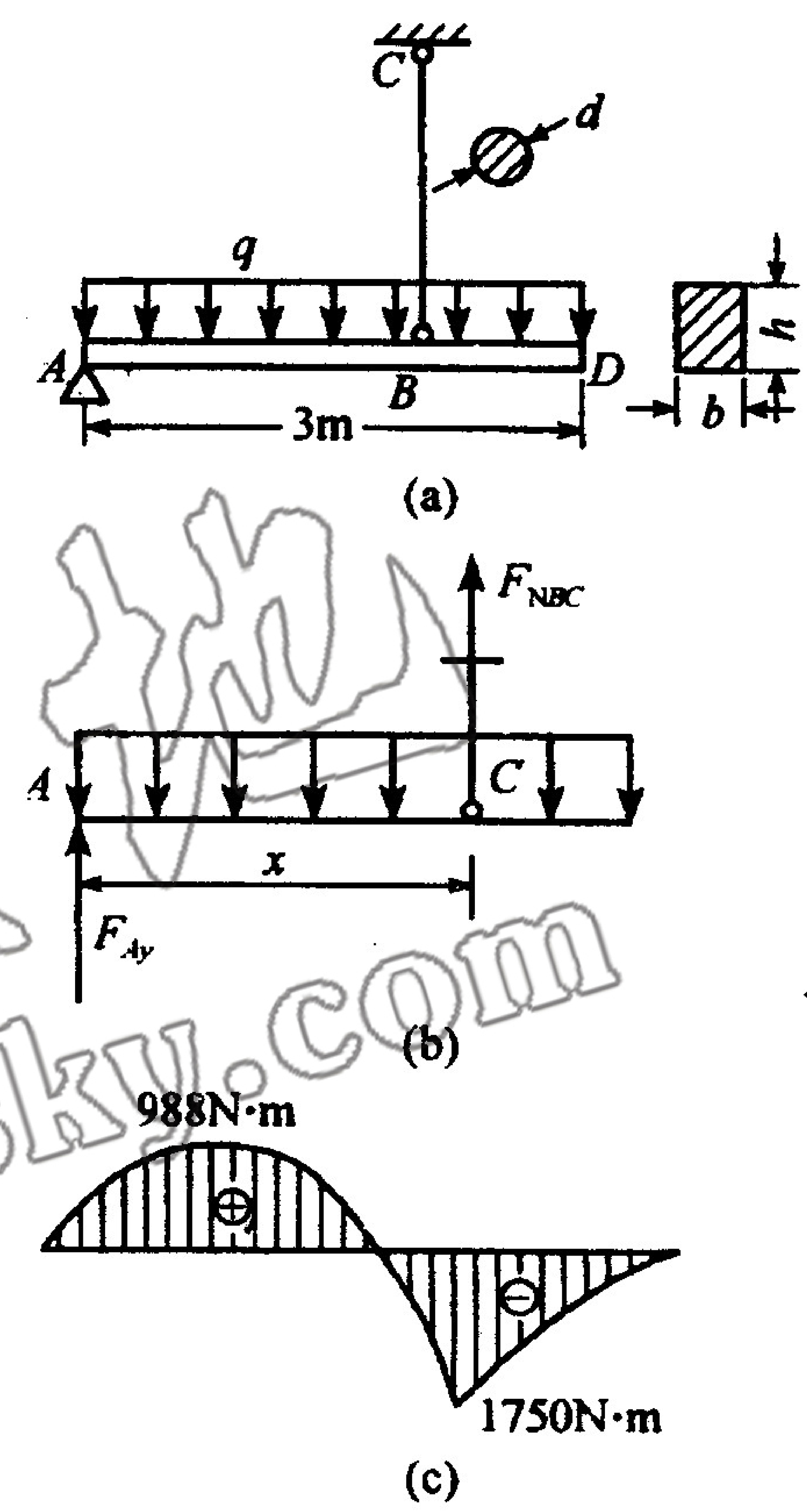


图 3.4

解　这是一个弯曲应力方面的题目。题中仅给出 ε_{BC}，要由此推得 BC 的轴力 F_{NBC}。

(1) 确定 BC 杆的轴力及 B 点位置。依题意由应变计算 CB 杆的轴力，然后根据 $\sum M_A=0$ 确定 B 点的位置。最终对 AD 梁内力进行分析。首先计算 BC 杆的轴力

$$F_{NBC}=E\varepsilon A=200\times10^9\times501\times10^{-6}\times\frac{\pi\times10^2}{4}\times10^{-6}=7870(\mathrm{N})$$

根据平衡方程 $\sum M_A=0$（图 3.4(b)），$F_{NBC}x=q\dfrac{l^2}{2}$

解得

$$x=\frac{ql^2}{2F_{NBC}}=\frac{3.5\times10^3\times3^2}{2\times7870}=2.0(\mathrm{m})$$

$\sum F_y=0$，得 $F_{Ay}=2630\mathrm{N}$。

(2) 作弯矩图确定 $|M|_{max}$ 并计算 σ_{max}。由弯矩图得 $|M|_{max}=1750\mathrm{N\cdot m}$，则 AD 梁中最大弯曲正应力为

$$\sigma_{max}=\frac{|M|_{max}}{W}=\frac{6|M|_{max}}{bh^2}=\frac{1750\times6}{40\times60^2\times10^{-9}}=72.9\times10^6(\mathrm{Pa})=72.9(\mathrm{MPa})$$

点评　①求弯曲应力中最大应力值，则需确定最大弯矩，一些题目中隐含给出一些条件。如本例中由应变求轴力，由轴力定支承点位置；亦可给定位置，而不告知均布载荷（或其他载荷）的集度或大小，需要做一些简单计算。②题目还可要求一点（如 D）位移，则要考虑弹性支承对变形的影响。

3.5　齿轮传动机构如图 3.5(a)所示，支承 A、B 可分别简化为活动铰支座和固定铰支座，C 处两个啮合力可简化为只有切向力。试求机构在平衡状态时，上轴所需扭矩 T。

若材料的$[\sigma]=120\text{MPa}$,试用第三强度理论设计下轴的直径。(16 分)

解 这是强度理论应用的题目。由于第三强度理论在圆轴受扭转、弯曲组合变形条件下,直接用危险截面的内力表示,故要通过分析,求得可能危险截面上的内力。

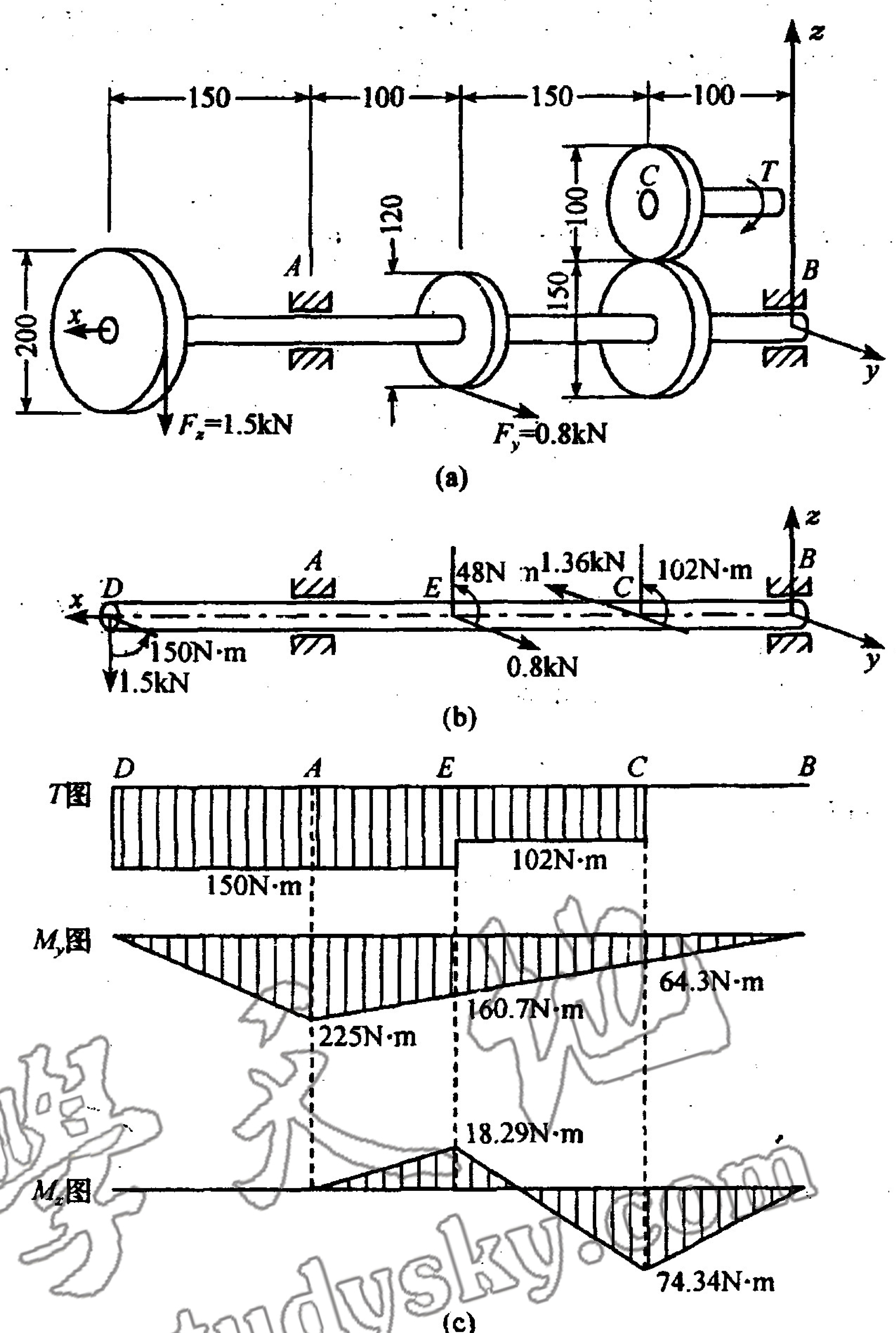


图 3.5

(1) 外力分析。设 C 处两齿轮间的啮合力为 F,列下轴平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad F\times 75=F_z\times 100-F_y\times 60$$

将 $F_z=1.5\text{kN}$,$F_y=0.8\text{kN}$ 代入上式,得

$$F=1.36\text{kN}$$

列上轴平衡方程

$$\sum M_x=0,\quad T=F\times 50=1.36\times 10^3\times 50\times 10^{-3}=68(\text{N}\cdot\text{m})$$

所以上轴所需扭矩 $T=68\text{N}\cdot\text{m}$。

将 F、F_y、F_z 向下轴截面形心简化,得到下轴受力简图如图 3.5(b)所示。

(2) 内力分析。根据下轴受力情况，作扭矩图，xy 平面和 xz 平面内的弯矩图 M_z、M_y(图 3.5(c))。分析各个可能的危险截面内力。

A 截面

$$T_A = 150\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_A = 225\text{N} \cdot \text{m}$$

E 截面

$$T_E = 150\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_E = \sqrt{160.7^2 + 18.29^2} = 161.7(\text{N} \cdot \text{m})$$

C 截面

$$T_C = 102\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_C = \sqrt{64.3^2 + 74.3^2} = 98.3(\text{N} \cdot \text{m})$$

比较 3 个截面的内力分量，知 A 截面为危险截面。

(3) 设计直径。按照第三强度过理论在圆轴弯、扭组合变形时其相当应力的表达式

$$\sigma_{r,3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_A^2 + T_A^2} = \frac{32}{\pi d^3}\sqrt{M_A^2 + T_A^2} \leqslant [\sigma]$$

得

$$d^3 \geqslant \frac{32}{\pi[\sigma]}\sqrt{M_A^2 + T_A^2} = \frac{32}{\pi \times 120 \times 10^6}\sqrt{225^2 + 150^2} = 2.295 \times 10^{-5}(\text{m}^3)$$

解得

$$d \geqslant 28.4\text{mm}$$

可取直径 d=29mm。

点评 ①熟练掌握第三、第四强度理论不同条件下的显式，如本题中 $\sigma_{r,3} = \frac{1}{W}\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \leqslant [\sigma]$，但由于 A、E、C 可能危险截面有待判断，才将 M_y、M_z 合成。②题中未给出上轴受载 T，但可由下轴的平衡条件求出两齿轮的啮合力或该齿轮截面的扭矩。

3.6 梁 AB 和杆 CD 材料相同(图 3.6(a))，梁的横截面为矩形，高 h=60mm，宽 b=30mm，CD 杆直径 d=25mm，l=1m，材料的弹性模量 E=200GPa。σ_p=200MPa。稳定安全因数 n_{st}=2.5。一重 W=3kN 物体自高度 H 处自由下落至梁上 B 点。试求：(1) 当压杆 CD 达到许可压力时，允许下落高度 H 多大？(2) 此时梁内最大动应力是多少？(16 分)

解 这是冲击载荷下由压杆的临界载荷确定自由落体下落高度的问题，当高度 H 确定后，结构动荷因数 K_d 确定，由此确定梁内最大动弯矩及最大动应力。

(1) 计算冲击点 B 的竖向静位移 $\Delta_{B,st}$。由已知几何尺寸，有

AB 梁

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 60^3 \times 10^{-12}}{12} = 3.6 \times 10^{-7}(\text{m}^4)$$

CD 杆

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4}(25 \times 10^{-3})^2 = 4.9 \times 10^{-4}(\text{m}^2)$$

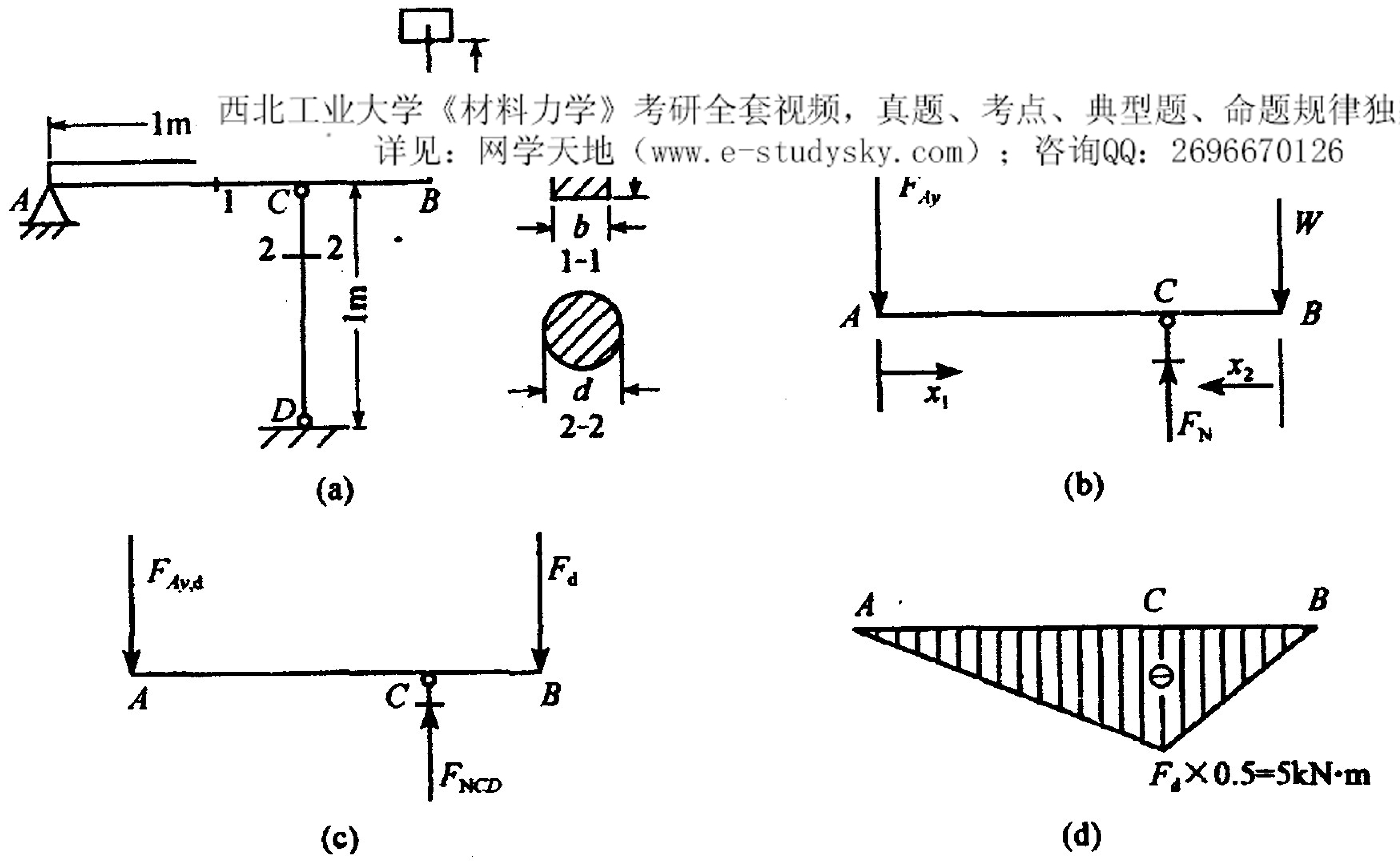


图 3.6

分析 AB 梁静载时的受力情况(图 3.6(b))，由 $\sum M_A=0$，得 CD 杆的内力为

$$F_N=1.5W=4.5\text{kN}$$

由 $\sum M_C=0$，得

$$F_{Ay}=0.5W=1.5\text{kN}(\downarrow)$$

AC 段

$$M_1(x_1)=-F_{Ay}x_1=-1.5x_1$$

BC 段

$$M_2(x_2)=-Wx_2=-3x_2$$

由单位载荷法求 B 处位移，令 $W=1$，得

$$\overline{F}_N=1.5,\quad \overline{M}_1=-0.5x_1,\quad \overline{M}_2=-x_2$$

B 点处静位移为

$$\Delta_{B,st}=\frac{F_N\overline{F}_N l}{EA}+\int_0^1\frac{M_1\overline{M}_1\mathrm{d}x_1}{EI}+\int_0^{0.5}\frac{M_2\overline{M}_2\mathrm{d}x_2}{EI}=5.3\text{mm}$$

(2) 计算允许高度 H_0。由稳定条件计算 CD 杆的许可压力

$$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times200\times10^9}{200\times10^6}}=99$$

CD 杆的柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times l}{\frac{d}{4}}=\frac{1\times1000\times4}{25}=160>\lambda_p$$

故 CD 杆为细长压杆，可由欧拉公式计算临界压力为

$$F_{cr}=\frac{\pi^2E}{\lambda^2}A=\frac{\pi^2\times200\times10^9}{160^2}\times(4.9\times10^{-4})=37.8\times10^3(\text{N})=37.8(\text{kN})$$

CD 杆的许可压力为

$$F_{NCD}=\frac{F_{cr}}{n_{st}}=\frac{37.8}{2.5}=15(\text{kN})$$

由 $\sum M_A=0$，求 B 点处许可动载荷为

$$F_d=\frac{F_{NCD}}{1.5}=10\text{kN}$$

又

$$F_d=WK_d=W\left(1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{B,st}}}\right)=10\text{kN}$$

解出 $H=11.8\text{mm}$。

(3) 计算梁内最大动应力 $\sigma_{d,max}$。根据动载荷情况下的受力情况(图 3.6(c))作 AB 梁的弯矩图(图 3.6(d))，得

$$|M_d|_{max}=5\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{d,max}=\frac{|M|_{max}\frac{h}{2}}{I}=\frac{5\times10^3\times30\times10^{-3}}{3.6\times10^{-7}}=4.16\times10^8(\text{Pa})=416(\text{MPa})$$

点评 ①该题是一个动载荷、稳定性和弯曲变形计算的综合题目。对动载荷问题，首先可按静载分析，求出冲击点沿冲击方向的静位移 $\Delta_{B,st}$。②讨论 CD 杆的稳定性时，必须先计算杆的柔度，判断该杆属于哪一类压杆，选择正确的临界压力计算公式。③$\Delta_{B,st}$除用单位载荷法外，还可将 C 点看作活动铰支座，求出外伸梁 B 端位移，与杆 CD 的压缩量 Δl_{CD}引起 B 端的位移$\frac{3}{2}\Delta l_{CD}$相叠加，求得 $\Delta_{B,st}$。

3.7 作图 3.7(a)所示刚架的弯矩图，并求铰 A 处相邻两端面的相对转角。已知刚架的 EI 为常数(不计轴力、剪力的影响)。(10 分)

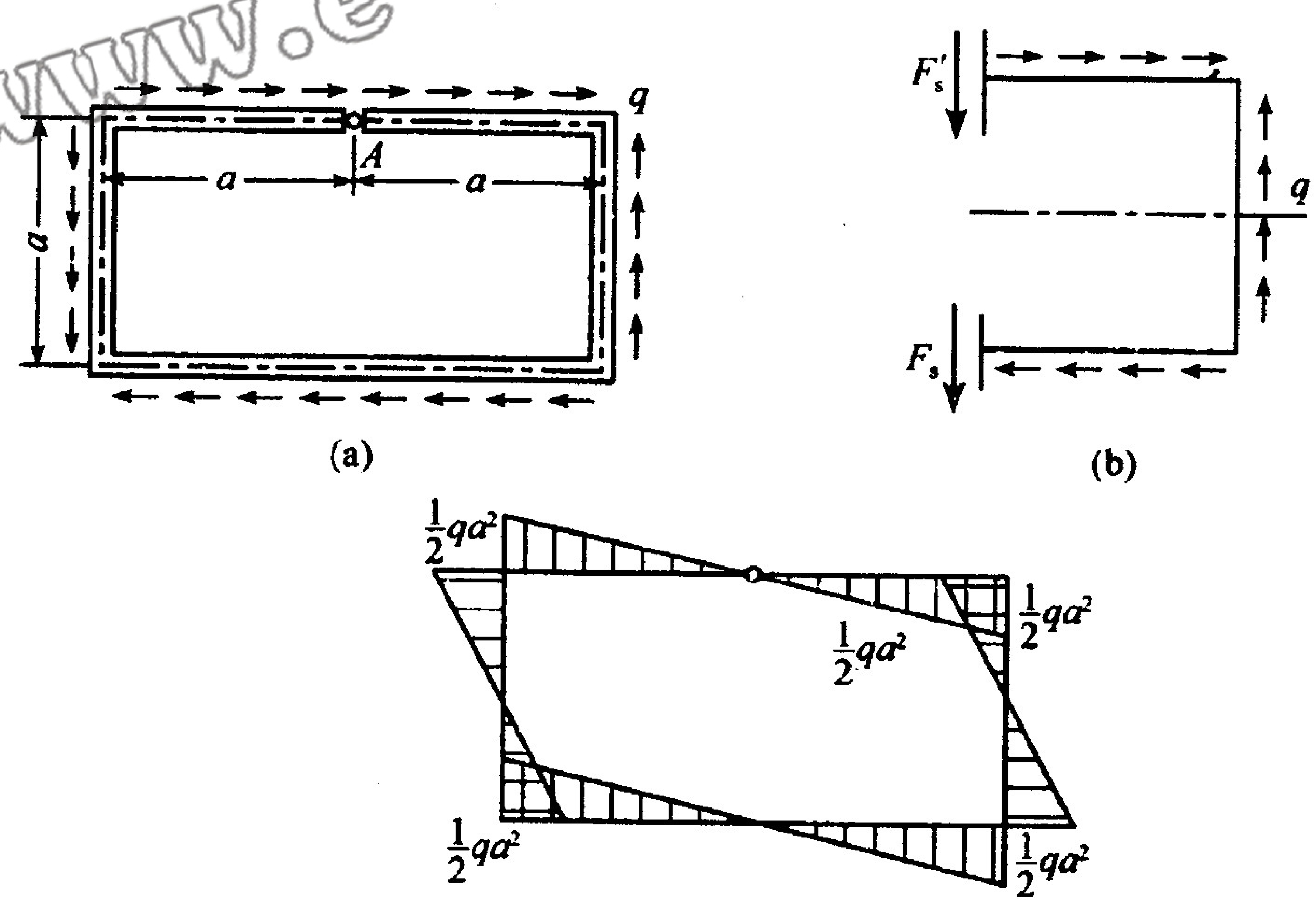


图 3.7

解 这是利用对称性解超静定问题的题目。单一封闭平面刚架为三次超静定，上边有一个中间铰，故刚架为二次超静定问题。

(1) 作刚架内力图。从图 3.7(a)中可以看出，该刚架关于 AB 轴结构对称，载荷反对称，对称面上对称内力为零，即 A，B 面上仅有剪力 F_s、F'_s。在此条件下，现在上下结构又有水平轴为反对称轴，因此截面上的剪力相等，即 $F_s=F'_s$。由于 $\sum F_y=0, 2F_s=qa$，所以 $F_s=\frac{1}{2}qa$。作刚架弯矩图如图 3.7(c)所示。

(2) 求 A 铰相邻两端面的相对转角。由于结构对称，载荷反对称，其变形亦为反对称的，所以直对称轴上铰链 A 处两截面的相对转角必然为零，即 $\theta_{A/A}=0$。

点评 ①注意求解超静定结构时对称性条件及其应用。②题中用变形反对称推知 $\theta_{A/A}=0$。不妨给 A 截面处加一对单位力，该单位力关于 A 截面对称，则 $\overline{M}$ 是对称的，图乘法对对称 $\overline{M}$ 和反对称 M 相乘，亦得 $\theta_{A/A}=0$，具体请读者自己完成。