4. 西北工业大学2002年硕士研究生入学考试材料力学试题

（满分100分）

4.1　图4.1所示两端固定压杆，$E=210\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，$\sigma_s=235\text{MPa}$，$a=304\text{MPa}$，$b=1.12\text{MPa}$，截面有矩形、实心圆形及空心圆形4种，但其横截面积均为5000mm^2，试求上述4种情形下压杆的临界压力F_{cr}。（15分）

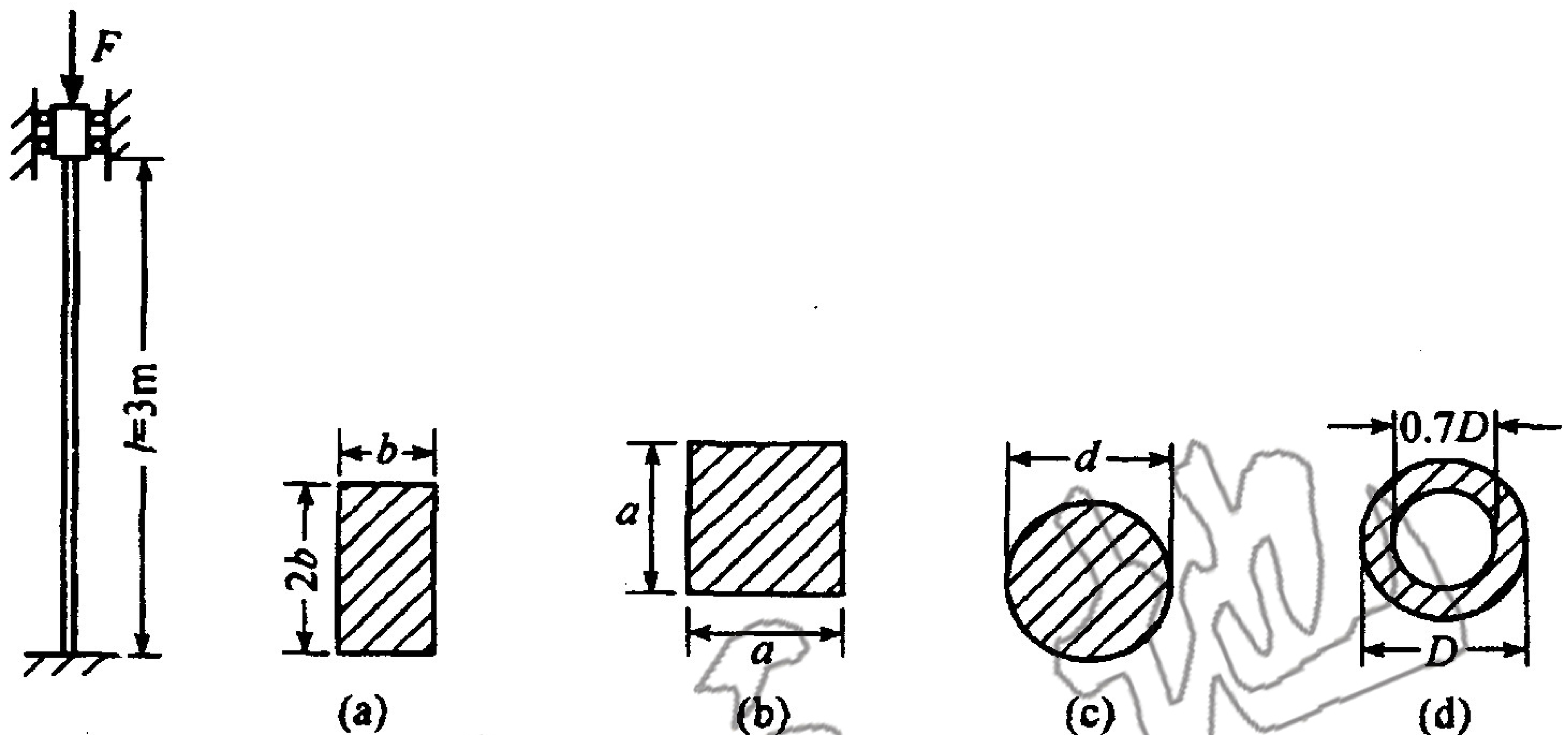


图4.1

解　这是压杆稳定方面的题目。题目在相同支承，相同杆长、相同截面面积条件下，不同几何形状但临界载荷不同，即I谋求最大，从而使临界载荷最大。

（1）求各种情况下杆的柔度。判断压杆的类型。其中$\mu=0.5$，$l=3\text{m}$。则惯性半径i，柔度λ分别为

$$i_a=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{2b\times b^3}{12}}{2b\times b}}=\sqrt{\frac{b^2}{12}}=\sqrt{\frac{50^2}{12}}=14.43(\text{mm})$$

$$\lambda_a=\frac{\mu l}{i_a}=\frac{0.5\times3}{14.4^3\times10^{-3}}=104.2$$

其中，$i_a=\min\{I_y,I_z\}=\min\left\{\frac{b\times(2b)^3}{12},\frac{2b\times b^3}{12}\right\}$，$A=2b\times b=5000\text{ mm}^2$ 解得$b=50\text{mm}$，对于Q235钢

$$\lambda_p=\sqrt{\frac{\pi^2E}{\sigma_p}}=\sqrt{\frac{\pi^2\times210\times10^9}{200\times10^6}}=101.8,\quad \lambda_s=\frac{a-\sigma_s}{b}=\frac{304-235}{1.12}=61.6$$

a截面条件下，$\lambda_a>\lambda_p$，系大柔度杆。

$$i_b=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{\frac{a^4}{12}}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{12}}=\sqrt{\frac{5000}{12}}=20.4$$

$$\lambda_b=\frac{\mu l}{i_b}=\frac{0.5\times 3}{20.4\times 10^{-3}}=73.5$$

$\lambda_s<\lambda_b<\lambda_p$，故 b 截面条件下为中柔度杆，i_b 计算中 $i_y=i_z$；$I_y=I_z=\dfrac{a^4}{12}$，$a^2=5000\text{mm}^2$。

$$i_c=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{d}{4}=\sqrt{\frac{5000\times 4}{\pi}}/4=19.95\times 10^{-3}(\text{m})=19.95(\text{mm})$$

$$\lambda_c=\frac{\mu l}{i_c}=\frac{3\times 0.5}{19.95\times 10^{-3}}=75.2$$

由于 $\lambda_s<\lambda_c<\lambda_p$，故 c 截面条件下为中柔度杆。

$$i_d=\sqrt{\frac{I}{A}}=\frac{D}{4}\sqrt{(1+\alpha^2)}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5000\times 4}{\pi}\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}}=34.1\text{mm}\quad(\alpha=0.7D/D)$$

$$\lambda_d=\frac{\mu l}{i_d}=\frac{0.5\times 3}{34.1\times 10^{-3}}=44.0$$

$\lambda_d<\lambda_s$，为小柔度即短粗杆，仅存在压缩强度问题。

(2) 求四种截面下压杆的临界压力。代入相应的临界压力计算公式，得

$$F_{cr,a}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times 210\times 10^9\times 50^4\times 10^{-12}}{6\times(0.5\times 3)^2}=960\times 10^3(\text{N})=960(\text{kN})$$

$$F_{cr,b}=\sigma_{cr}A=(a-b\lambda)A=(304-1.12\times 73.5)\times 10^6\times 5000\times 10^{-6}$$
$$=1108\times 10^3(\text{N})=1108(\text{kN})$$

$$F_{cr,c}=\sigma_{cr}A=(304-1.12\times 75.4)\times 10^6\times 5000\times 10^{-6}$$
$$=1097\times 10^3(\text{N})=1097(\text{kN})$$

$$F_{cr,d}=\sigma_s A=235\times 10^6\times 5000\times 10^{-6}=1175\times 10^3(\text{N})=1175(\text{kN})$$

点评 ①计算结果显示，相同材料，相同支承，相同截面面积和杆长条件下，其截面不同时，惯性半径越大，即惯性矩 I 越大时，其临界载荷值越高，或者说其稳定性越好。②柔度 λ 的计算，进行压杆类型判断至关重要，不然就有可能选择计算公式错误，从而"入门"不对。

4.2 图 4.2(a)所示外径 $D=80\text{mm}$，内径 $d=0.5D$ 的圆筒在 $M_e=15\text{kN}\cdot\text{m}$ 的力偶矩作用下产生扭转。已知材料的弹性模量 $E=200\text{MPa}$，泊松比 $\mu=0.3$。(20 分)

(1) 求圆筒表面一点 A 沿 x 和 y 方向的线应变 ε_x 和 ε_y。

(2) 求受扭后圆筒的壁厚。

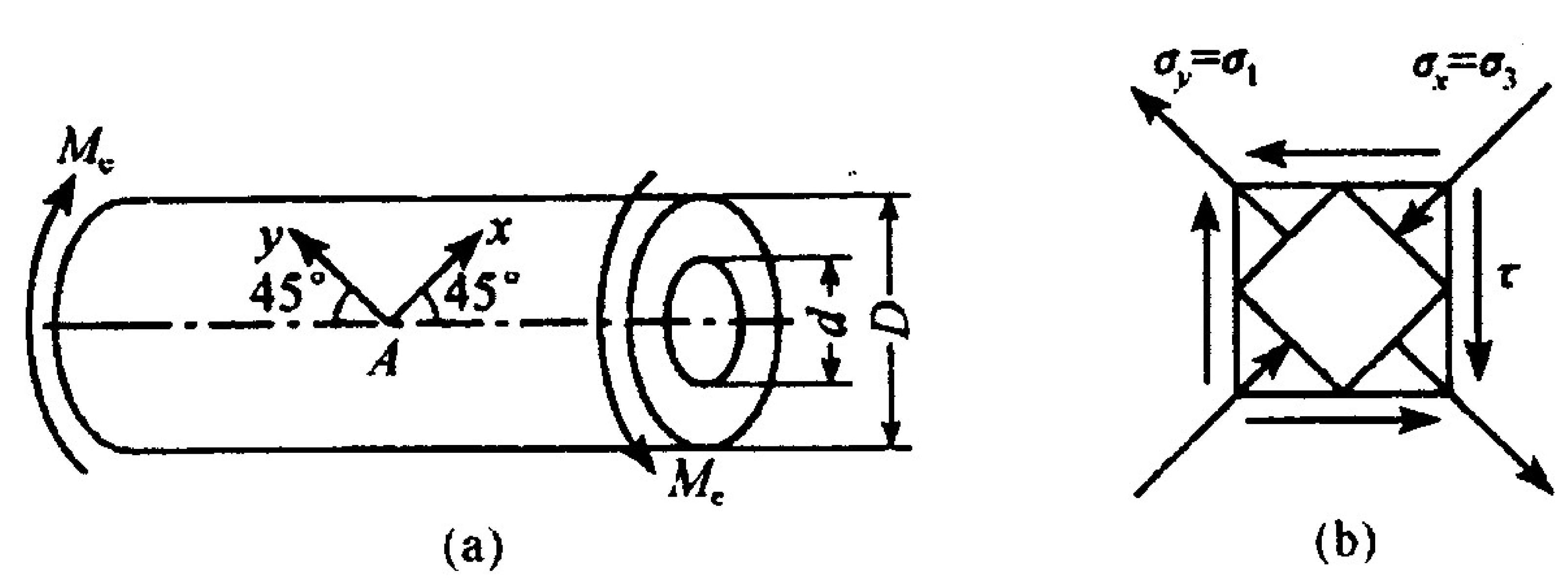


图 4.2

解 这是广义胡克定律方面的题目。当然，广义胡克定律必然涉及应力状态，应熟悉

特殊情况下单元体的选取及应力状态的确定。

（1）A 点处截取单元体如图 4.2(b)所示，纯剪切应力状态切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=\frac{16\times15\times10^3}{\pi\times80^3\times10^{-9}\times(1-0.5^4)}=159.2\times10^6(\mathrm{Pa})=159.2(\mathrm{MPa})$$

沿 x、y 方向的应力为

$$\sigma_x=-\tau_{\max}\sin2\alpha\big|_{\alpha=45^\circ}=-\tau_{\max}=-159.2\mathrm{MPa}=\sigma_3$$

$$\sigma_y=-\tau_{\max}\sin2\alpha\big|_{\alpha=135^\circ}=\tau_{\max}=159.2\mathrm{MPa}=\sigma_1$$

即 σ_x、σ_y 分别为主应力 σ_3、σ_1 在单元体的前后面上，即圆筒的径向 $\sigma_z=0$。由广义胡克定律知

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]=\frac{1}{E}(-\tau_{\max}-\mu\tau_{\max})$$

$$=\frac{-\tau_{\max}(1+\mu)}{E}=\frac{-159.2\times10^6\times(1+0.3)}{200\times10^9}=-1035\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_x+\sigma_z)]=\frac{1}{E}(\tau_{\max}+\mu\tau_{\max})=\frac{\tau_{\max}(1+\mu)}{E}=1035\times10^{-6}$$

（2）径向应变 ε_z。由广义胡克定律可知

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]=\frac{1}{E}[0-\mu(-\tau_{\max}+\tau_{\max})]=0$$

同理，在任意半径 ρ 处的径向应变为

$$\varepsilon_{z\rho}=\frac{1}{E}[\sigma_{z\rho}-\mu(\sigma_{x\rho}+\sigma_{y\rho})]=0$$

因此，圆筒扭转时厚度无变化，壁厚 $\delta=20\mathrm{mm}$。

点评 ①熟知圆轴受扭时如果截取单元体为纯剪切应力状态，在纯剪切条件下的单元体是二向应力状态，且 $\sigma_1=\tau$，$\sigma_3=-\tau$，$\sigma_2=0$。②正应力或主应力表示的广义胡克定律应熟记，一般应力状态，一定要应用广义胡克定律。

4.3 图 4.3(a)所示圆截面折杆，横截面直径均为 d，A 端固定，在折杆平面的竖直上方自高度为 a 处有一重量为 W 的重物自由下落到 C 点。材料的弹性模量为 E，切变模量 $G=0.4E$。（20 分）

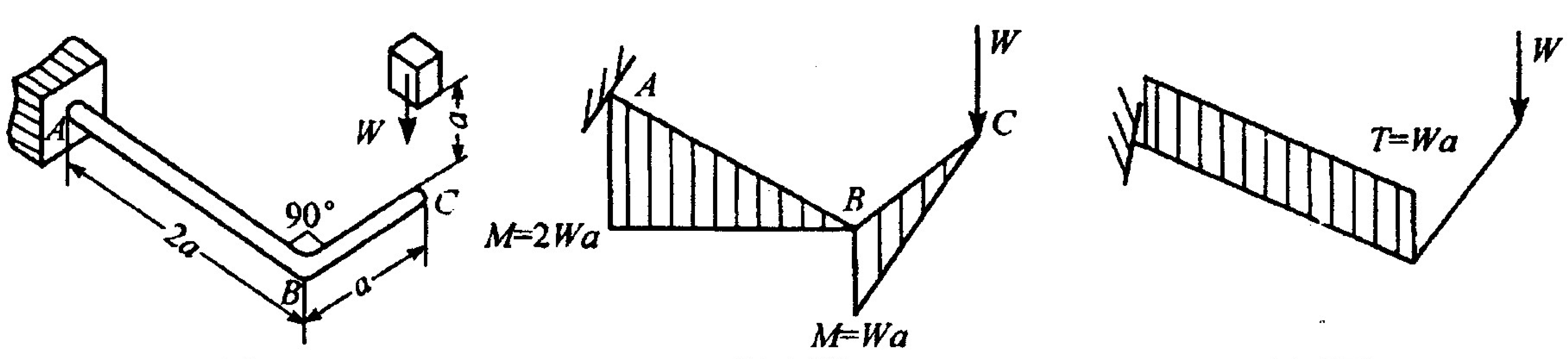


图 4.3

（1）求出动荷因数 K_d 的表达式。

（2）用第三强度理论写出折杆的强度条件表达式。已知折杆的许用应力为[σ]。

解 这是动载荷及强度理论方面的题目。题中未提出特别要求，故可直接引用初速度为零的自由落体冲击的动荷因数表达式。问题转化为求冲击点的静位移 $\Delta_{C,\mathrm{st}}$。

(1) 求冲击点静位移 $\Delta_{C,st}$。直拐选用图乘法，将 W 作用于 C 点，作内力图如图 4.3(b)所示，同时令 $\overline{W}=1$，得单位力图 $\overline{M}$、$\overline{T}$。内力图同单位力图相乘得

$$\Delta_{C,st}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot Wa\cdot\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}2a\cdot 2Wa\cdot\frac{2}{3}\cdot 2a\right)+\frac{1}{GI_p}(2a\cdot Wa\cdot a)$$
$$=\frac{3}{EI}Wa^3+\frac{2}{GI_p}Wa^3$$

题知 $G=0.4E$，$I_p=2I$ 代入上式，得 $\Delta_{C,st}=5.5\dfrac{Wa^3}{EI}=\dfrac{352Wa^3}{E\pi d^4}$。

(2) 动荷因数 K_d。直接将 $\Delta_{C,st}$ 代入动荷因数表达式，即

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta_{C,st}}}=1+\sqrt{\frac{2aE\pi d^4}{352Wa^3}}=1+\sqrt{1+\frac{E\pi d^4}{176Wa^2}}$$

(3) 用第三强度理论写出折杆强度条件表达式。因为折杆中 A 面为危险截面，该面上静应力 $\sigma=\dfrac{M_{\max}}{W_z}=\dfrac{2Wa}{W_z}$，$\tau=\dfrac{T}{W_p}=\dfrac{Wa}{2W_z}$，代入第三强度理论表达式

$$\sigma_{r,3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\frac{1}{W_z}\sqrt{M^2+T^2}=\frac{\sqrt{5}Wa}{W_z}$$

则冲击载荷下第三强度理论写出折杆的强度条件表达式为

$$\sigma_{r,3d}=K_d\frac{\sqrt{5}Wa}{W_z}=K_d\frac{32\sqrt{5}Wa}{\pi d^3}\leqslant[\sigma]$$

点评 ①题解中 $\Delta_{C,st}$ 选用能量法求出，亦可用梁变形的结果直接写出，BC、AB 作为悬臂梁，其自由端挠度分别为 $\dfrac{Wa^3}{3EI}$、$\dfrac{W(2a)^3}{3EI}$；$T=Wa$ 引起 AB 段的扭转角为 $\varphi_{AB}=\dfrac{Wa\cdot 2a}{GI_p}$，引起 C 端位移为 $\varphi_{AB}\cdot a$，故 $\Delta_{C,st}=\dfrac{Wa^3}{3EI}+\dfrac{W8a^3}{3EI}+\dfrac{2Wa^3}{GI_p}$。②第三、第四强度理论平面应力状态(拉、切)下的表达式及其弯扭组合条件下，包括弯矩合成条件下的表达式应熟悉。如在 $M^2=M_y^2+M_z^2$，$T=T_x$ 条件下，第三强度理论写为 $\sigma_{r,3}=\dfrac{1}{W_y}\sqrt{M_y^2+M_z^2+T_x^2}$。

4.4 图 4.4(a)所示结构由直杆 AB 和四分之一圆环 BC 组成(两杆位于同一平面内)，两杆均为圆截面钢杆，AB 的直径 $d_1=20\text{mm}$，BC 的直径 $d_2=50\text{mm}$，材料的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$。若外力 $F=5\text{kN}$，$a=0.6\text{m}$，试校核结构的强度(轴力、剪力对曲杆强度的影响忽略不计)。(15 分)

解 这是弯曲与拉伸强度的计算问题。因为 AB 为二力杆，故仅存轴力 F_N，而曲杆 BC 不计轴力，剪力对强度的影响，仅考虑弯曲强度问题。

(1) 内力分析。设 C 点支座反力分别为 F_{Cx}、F_{Cy}，由平衡方程 $\sum M_A=0$，$Fa=F_{Cx}a$，得 $F_{Cx}=F$，$\sum M_B=0$，得 $F_{Cx}=F_{Cy}=F$，$\sum M_C=0$，得 $F_{NAB}=F$。

(2) AB 杆的拉伸强度。AB 杆为二力杆，仅为单向拉伸，故

$$\sigma_{AB}=\frac{F}{A}=\frac{4F}{\pi d_1^2}=\frac{4\times 5\times 10^3}{\pi\times 20^2\times 10^{-6}}=15.9\times 10^6(\text{Pa})=15.9(\text{MPa})<[\sigma]$$

(3) BC 曲杆的弯曲强度。在任意 α 面上，弯矩 $M(\alpha)=Fa\cdot\sin\alpha-Fa(1-\cos\alpha)$，对 α 求导，得 $M'(\alpha)=Fa\cos\alpha-Fa\sin\alpha=0$，即 $\tan\alpha=1$，故当 $\alpha=45^\circ$ 时 $M(\alpha)$ 最大，且最大值

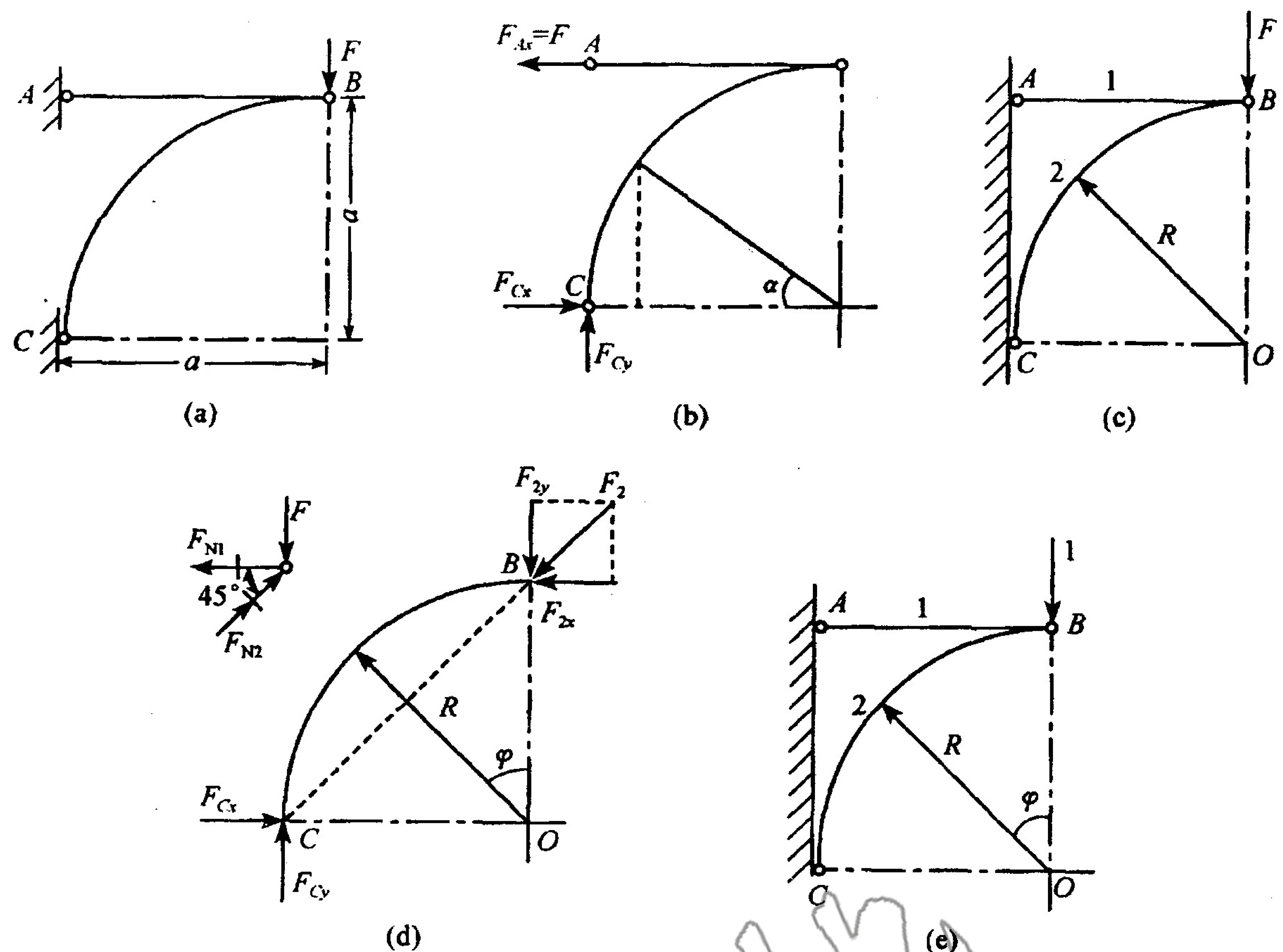


图 4.4

为 $M_{\max}=M(45°)=Fa(\sqrt{2}-1)$，代入弯曲正应力公式，即

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W}=\frac{32Fa(\sqrt{2}-1)}{\pi d_2^3}=\frac{32(\sqrt{2}-1)\times 5\times 10^3\times 0.6}{\pi\times 50^3\times 10^{-9}}$$
$$=101.2\times 10^6(\text{Pa})=101.2(\text{MPa})<[\sigma]$$

结构的强度条件满足。

点评 ①结构的强度校核。首先是组成结构的各个杆件的强度校核。本例中 AB 杆、BC 曲杆的强度均满足，整个结构的强度满足。②注意内力分析技巧，当用截面法从 B 周围截开时，AB 杆的轴力，BC 杆的轴力、剪力、弯矩均暴露出来，给解题带来不便。

下题给出求 B 点沿垂位移的一种解法，读者不妨用于上题。

图 4.4(c)所示结构，由直杆 BC 与小曲率杆 BC 组成，曲杆的轴线为四分之一圆弧，半径为 R。该结构在节点 B 承受铅垂载荷 F 作用，试用单位载荷法计算节点 B 的铅垂位移 Δ_{By}。设杆 AB 各横截面的拉压刚度均为 EA，曲杆 BC 各横截面的弯曲刚度均为 EI。

解 (1) 问题分析杆 AB 为二力杆。因此，节点 B 与杆 AB 的受力如图 4.4(d)所示。根据节点 B 的平衡条件，得杆 AB 的轴力与杆 BC 的杆端外力分别为

$$F_{N1}=F \qquad F_2=\sqrt{2}F \tag{1}$$

根据单位载荷法，节点 B 的铅垂位移为

$$\Delta_{By}=\frac{\overline{F}_{N1}F_{N1}R}{EA}+\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}\overline{M}(\varphi)M(\varphi)R\mathrm{d}\varphi \tag{2}$$

其中，$\overline{F}_{N1}$ 与 $\overline{M}(\varphi)$ 为将铅垂单位力作用于节点 B 时(图 4.4(e))，直杆 AB 与曲杆 BC 的

内力。

(2) 位移计算。杆端力 F_2 的水平与铅垂分力分别为

$$F_{2x}=F_2\cos45°=F,\quad F_{2y}=F_2\sin45°=F$$

所以，曲杆 BC 的弯矩方程为

$$M(\varphi)=FR\sin\varphi-FR(1-\cos\varphi)=FR(\sin\varphi+\cos\varphi-1) \tag{3}$$

在图 4.4(e)所示单位载荷作用下，杆 AB 的轴力与曲杆 BC 的弯矩方程分别为

$$\overline{F}_{N1}=1$$

$$\overline{M}(\varphi)=R(\sin\varphi+\cos\varphi-1)$$

将式(1)、式(3)与上述方程代入式(2)，于是得

$$\Delta_{By}=\frac{1\cdot FR}{EA}+\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2}FR^2(\sin\varphi+\cos\varphi-1)^2R\mathrm{d}\varphi=\frac{FR}{EA}+\frac{FR^3(\pi-3)}{EI}(\downarrow)$$

4.5 图 4.5(a)所示 T 形截面梁，设该截面上的内力仅有正弯矩 M，试求 T 形截面的竖直部分(100mm×20mm)和水平部分(100mm×20mm)各承担弯矩 M 的百分比。(15 分)

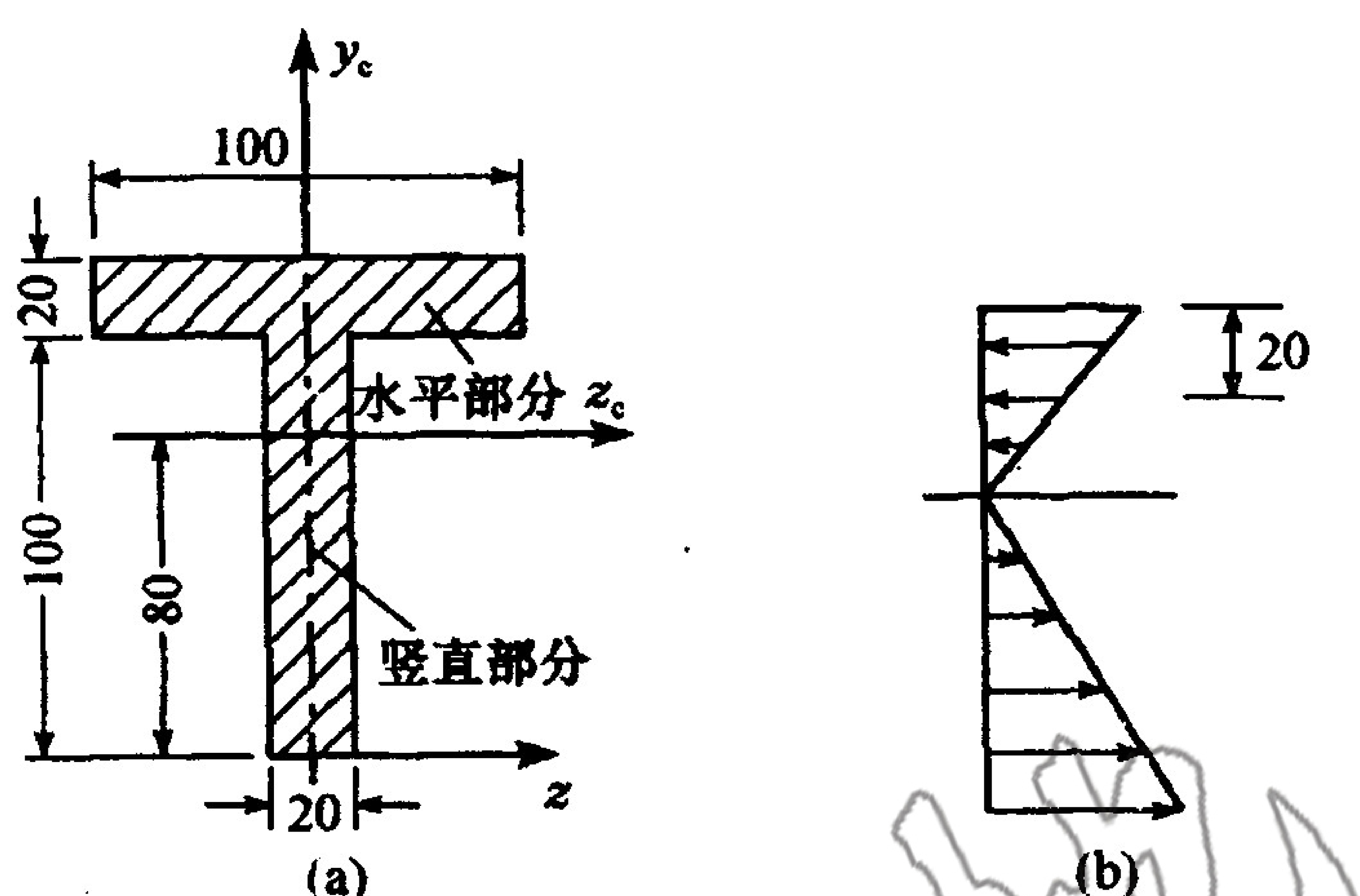


图 4.5

解 这是考察弯曲内力的题目，当然涉及图形几何性质的计算。

(1) 形心的确定。取下底边为参考 z 轴，对称轴为形心轴 y_c，则

$$z_c=0,\quad y_c=\frac{S_z}{A}=\frac{\sum A_i y_{ci}}{\sum A_i}=\frac{100\times20\times50+100\times20\times110}{100\times20\times2}=80(\text{mm})$$

(2) 图形对 z_c 轴的惯性矩 I_{zc}。根据平行移轴公式，得

$$\begin{aligned}I_{zc}&=\frac{100\times20^3}{12}+(110-80)^2\times100\times20+\frac{20\times100^3}{12}\\&\quad+(80-50)^2\times100\times20\\&=5.33\times10^6\ (\text{mm}^4)\end{aligned}$$

(3) 计算竖直部分承担的弯矩。中性轴 y_c 以下部分所承担的弯矩为

$$M_1=F_{N1}\times\frac{2}{3}y_c=\frac{1}{2}y_c\times\sigma_{t,\max}\times b\times\frac{2}{3}y_c=\frac{1}{3}y_c^2\times b\times\frac{My_{\max}}{I_z}=\frac{1}{3}\frac{Mb}{I_z}y_c^3$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{20}{5.33\times10^6}\times80^3\times M=0.64M$$

中性轴以上竖直部分所承担的弯矩为

$$M_2 = F_{\mathrm{Nc}} \times \frac{2}{3}(100 - y_c) = \frac{1}{2}(100 - y_c) \times \sigma_{c,\max} \times b \times \frac{2}{3}(100 - y_c)$$

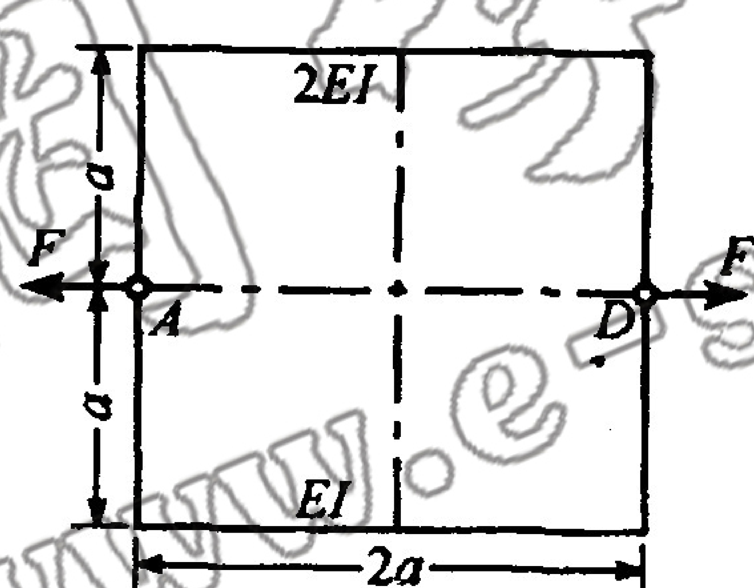
$$= \frac{1}{3}20^2 \times b \times \frac{M(100 - y_c)}{I_z} = \frac{1}{3} \times \frac{20^4}{I_z}M = 0.01M$$

故竖直部分承担的弯矩 $M_{竖} = M_1 + M_2 = (0.64 + 0.01)M = 0.65M$，即$\frac{M_{竖}}{M} = 65\%$。

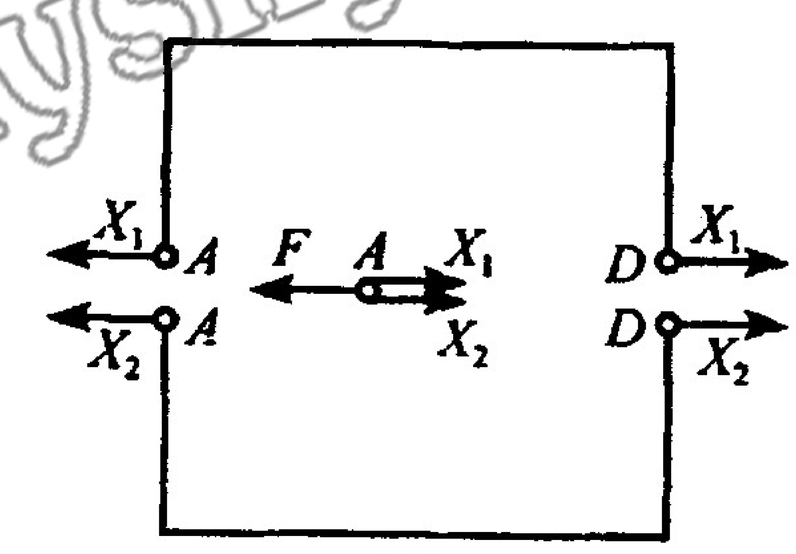
(4) 水平部分承担的弯矩为 $M_{水} = (1 - 0.65)M = 0.35M$，故$\frac{M_{水}}{M} = 35\%$。

点评 ①解中先计算了竖直部分承担的弯矩，亦可选计算水平部分承担的弯矩，相减得竖直部分承担的弯矩。②类似的题目有计算截面上拉应力和压应力的合力大小及作用点，只需计算 z_c 下部分拉应力的合力 F_{Nt}，由于仅受弯矩作用，$F_{\mathrm{Nc}} = F_{\mathrm{Nt}}$、$F_{\mathrm{Nc}}$、$F_{\mathrm{Nt}}$距中性轴分别为 y_2、y_1，则由 $F_{\mathrm{Nt}}y_1 + F_{\mathrm{Nc}}y_2 = M$ 确定作用点。

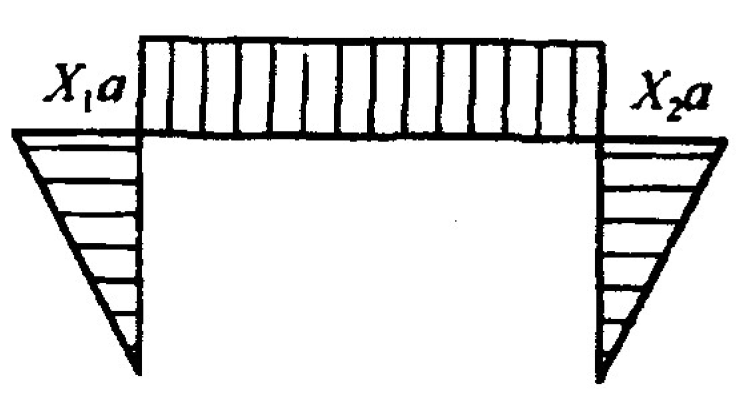
4.6 图 4.6(a)所示正方形框架，A，D 两处为铰链，框架的上半部分抗弯刚度为 $2EI$，下半部分抗弯刚度为 EI。试作此框图的弯矩图。题中 F、a、EI 均为已知。(15 分)



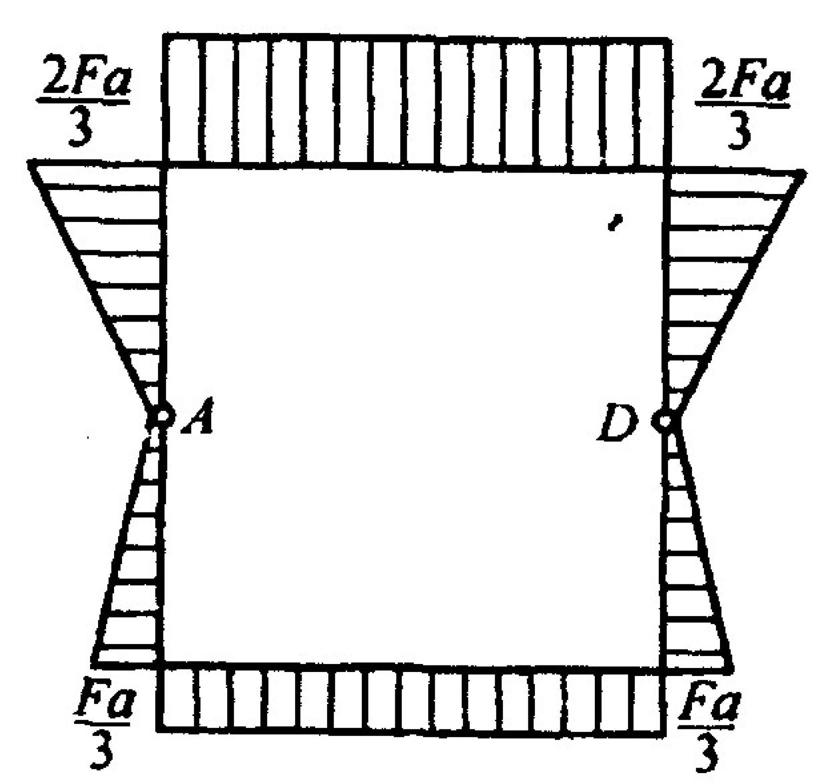
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4.6

解 这是超静定结构问题。一个封闭平面刚架为三次内力超静定，由于两个中间铰的存在，该刚架为一次超静定。

(1) 取静定基如图 4.6(b)所示，在两铰链处 $M_A = M_D = 0$，$F_N = 0$。

结构左右对称，上半部分承担的载荷为 X_1，下半部分承担的载荷为 X_2。

对铰 A 取平衡，应满足

$$X_1 + X_2 = F$$

(2) 变形协调条件。在一对 X_1 和 X_2 作用下，上半部分 AD 间的相对位移为 Δ_{AD1}，下半部分 AD 间的相对位移为 Δ_{AD2}，故变形协调条件为

$$\Delta_{AD1} = \Delta_{AD2}$$

(3) 图乘法求相对位移。作上半部分弯矩图如图 4.6(c)所示，令$\overline{X}_1=1$，得单位力图，两图相乘得

$$\Delta_{AD1}=\frac{1}{2EI}\left[2\cdot\frac{1}{2}a\cdot X_1a\cdot\frac{2}{3}a+2a\cdot X_1a\cdot a\right]=\frac{4X_1a^3}{3EI}$$

下半部分内力图完全类似，只是角点弯矩值为 X_2a，令$\overline{X}_2=1$，相乘得

$$\Delta_{AD2}=\frac{8X_1a^4}{3EI}$$

(4) 求补充方程。将相对位移代入变形协调方程，得

$$X_1=2X_2$$

代入平衡方程，解得 $X_1=\frac{2}{3}F$，$X_2=\frac{1}{3}F$，即 A、D 铰接处，上半部分承担$\frac{2}{3}F$，下半部分承担$\frac{1}{3}F$，其弯矩图如图 4.6(d)所示。

点评 ①刚架上下不对称(上半部分刚度为 $2EI$，下半部分刚度为 EI)，因此要慎用对称性。结构左右对称，可将 B、C 面取为固定端，D 铰处 $X_1+X_2=F$，在 D 铰上、下作用 X_1、X_2，基本思路同本题解，读者不妨一试。②如果题目要求 AD 间相对位移，仅需将 X_1 或 X_2 代入 Δ_{AD1} 或 Δ_{AD2} 即可。如代入 Δ_{AD1}，则 $\Delta_{AD1}=\frac{8Fa^3}{9EI}$，代入 Δ_{AD2}亦然。