

5. 西北工业大学 2003 年硕士研究生入学考试 材料力学试题 (满分 150 分)

5.1 选择题(每小题 5 分,共 50 分)

1. 如图 5.1 所示的等厚度圆环,在相隔 120° 的 A、B、C 三点受三个相同的未知力 F 作用。已知各加力点沿力方向的线位移均为 Δ ,圆环的变形能等于 $V_{\epsilon 0}$,则力 F 的大小为()

- A. $F = \frac{4V_{\epsilon 0}}{3\Delta}$ B. $F = \frac{V_{\epsilon 0}}{\Delta}$ C. $F = \frac{2V_{\epsilon 0}}{3\Delta}$ D. $F = \frac{V_{\epsilon 0}}{3\Delta}$

2. 如图 5.2 所示压杆由钢管套在铝棒上组成,作用轴向力 F 后产生相同的缩短量。若钢管和铝棒的抗拉压刚度相等,则二者的()

- A. 轴力相等,应力不等 B. 轴力不等,应力相等
C. 轴力相等,应力相等 D. 轴力不等,应力不等

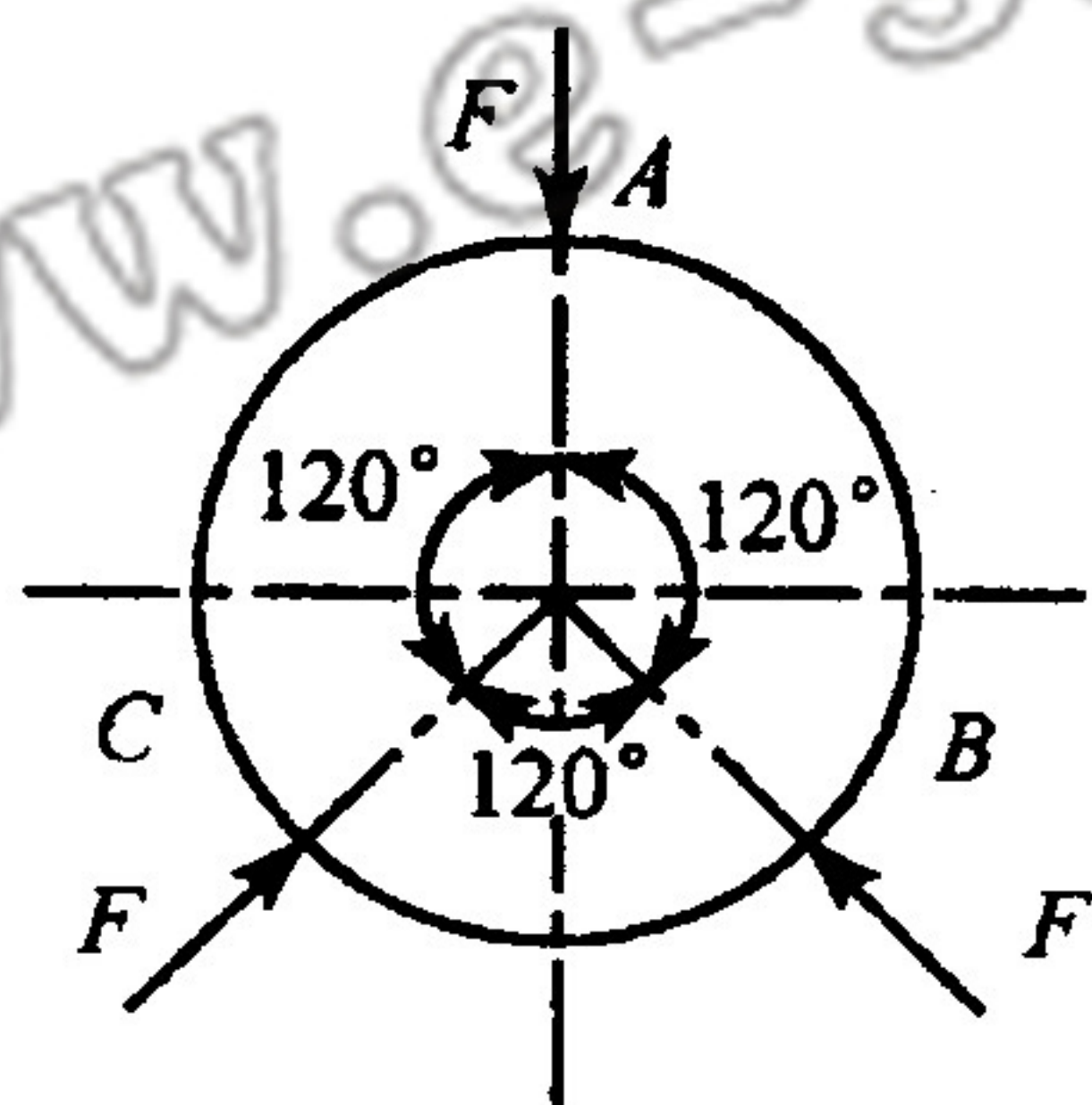


图 5.1

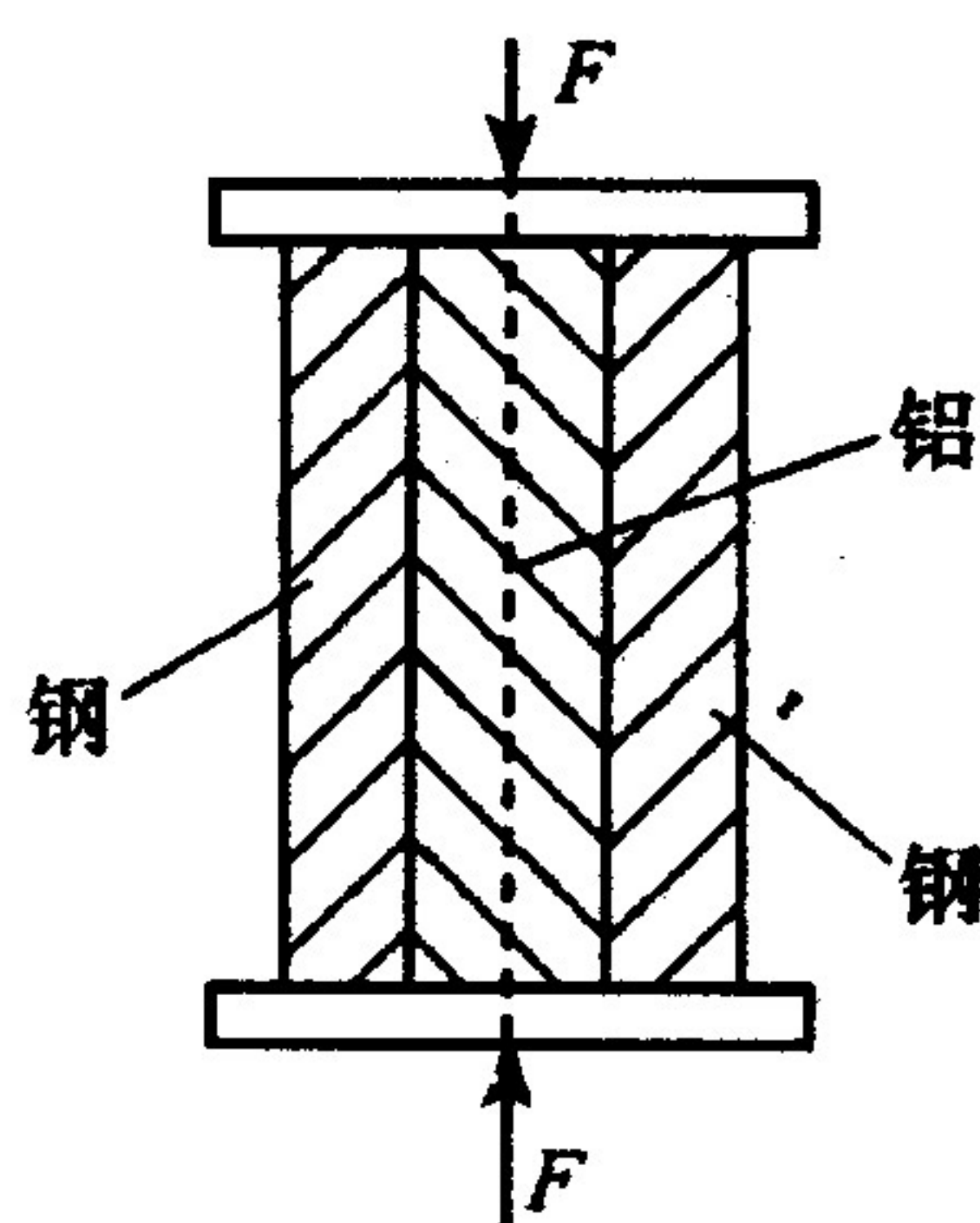


图 5.2

3. 受内压 p 作用的封闭薄壁圆筒,筒壁材料处于二向应力状态。用第三强度理论建立的强度条件为()

- A. $\sigma_{r,3} = \frac{pD}{2t} \leq [\sigma]$ B. $\sigma_{r,3} = \frac{\sqrt{3}pD}{4t} \leq [\sigma]$
C. $\sigma_{r,3} = \frac{pD}{4t} \leq [\sigma]$ D. $\sigma_{r,3} = \frac{3pD}{4t} \leq [\sigma]$

4. 两个材料相同的单元体应力状态分别如图 5.3(a)、(b)所示, σ 与 τ 的数值相等,按第四强度理论判断两者的强度,则()

- A. 图(b)强度比图(a)安全
B. 图(a)强度比图(b)安全
C. 图(b)和图(a)同样安全

D. 图(a)为平面应力状态,图(b)为空间应力状态,两者无法比较

5. 如图 5.4 所示受扭圆轴上贴有三个应变片,实测时应变片读数几乎为零的是()

- A. 1 和 2 B. 1 和 3 C. 2 和 3 D. 1、2 和 3

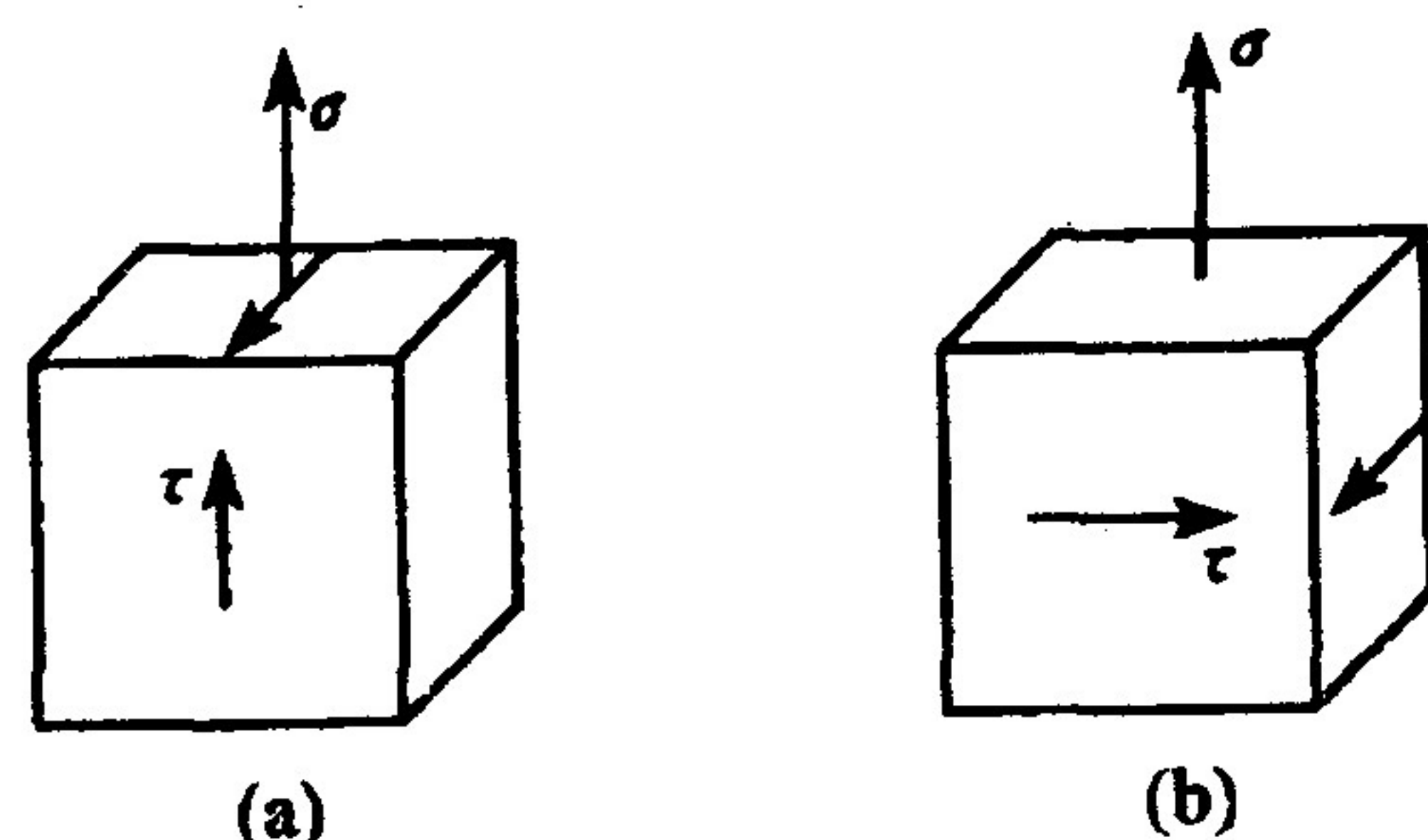


图 5.3

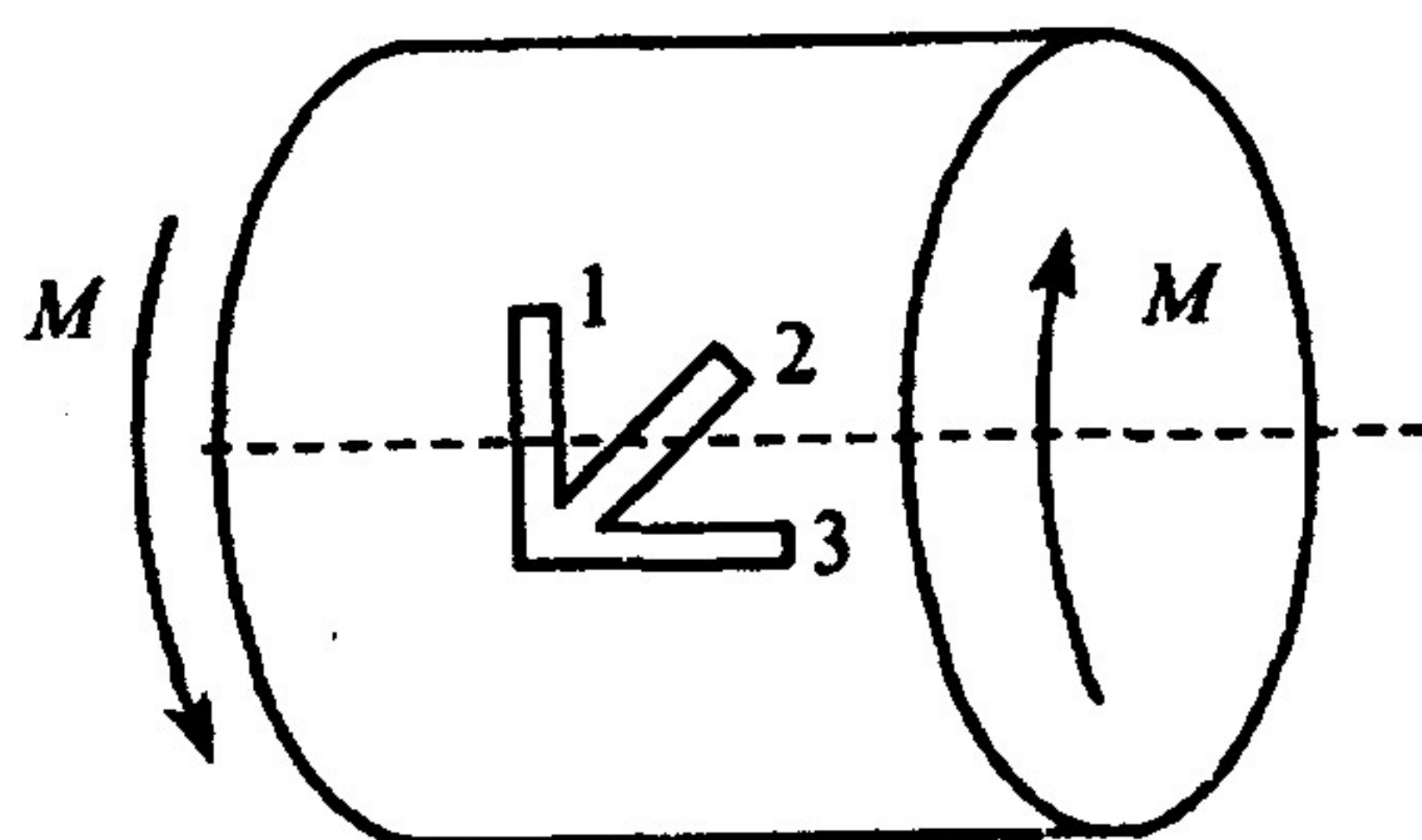


图 5.4

6. 如图 5.5 所示的简支梁受自由落体冲击。今设计了三种不同的受冲系统结构形式,其中图 5.5B 和 C 的弹簧刚度 K 相同,并且均产生了压缩变形,则动荷因数最大的是()。

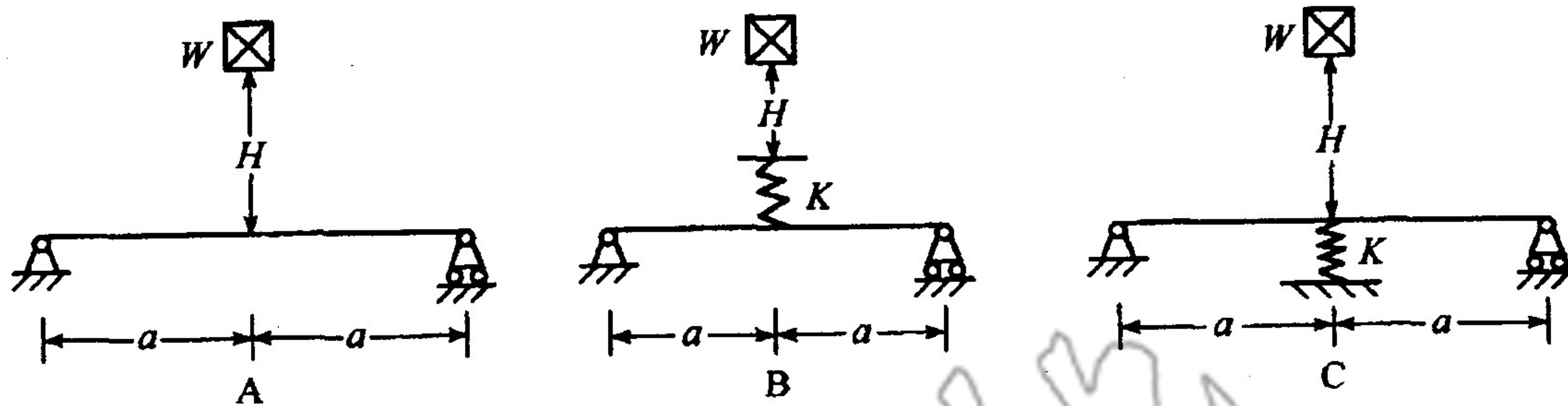


图 5.5

7. 如图 5.6 所示,自重为 q 的梁 AC,一端由固定支座 A 支承,一端由直径为 d 的圆截面杆 DC 悬挂,此时梁上截面 B 的转角为 θ_B 。若将 DC 杆的直径改为 $0.5d$,则梁上截面 B 的转角为()

- A. $\theta_B/2$ B. θ_B C. $2\theta_B$ D. $4\theta_B$

8. 如图 5.7 所示,矩形板 ABCD 在 AD、BC 面上作用有均布压力 p_1 ,在 AB、CD 面上作用有均布压力 p_2 ,欲使 AD、BC 两面的相对距离不变,则应使 $p_1/p_2 = ()$ 。

- A. 1 B. μ C. $-\mu$ D. $1/\mu$

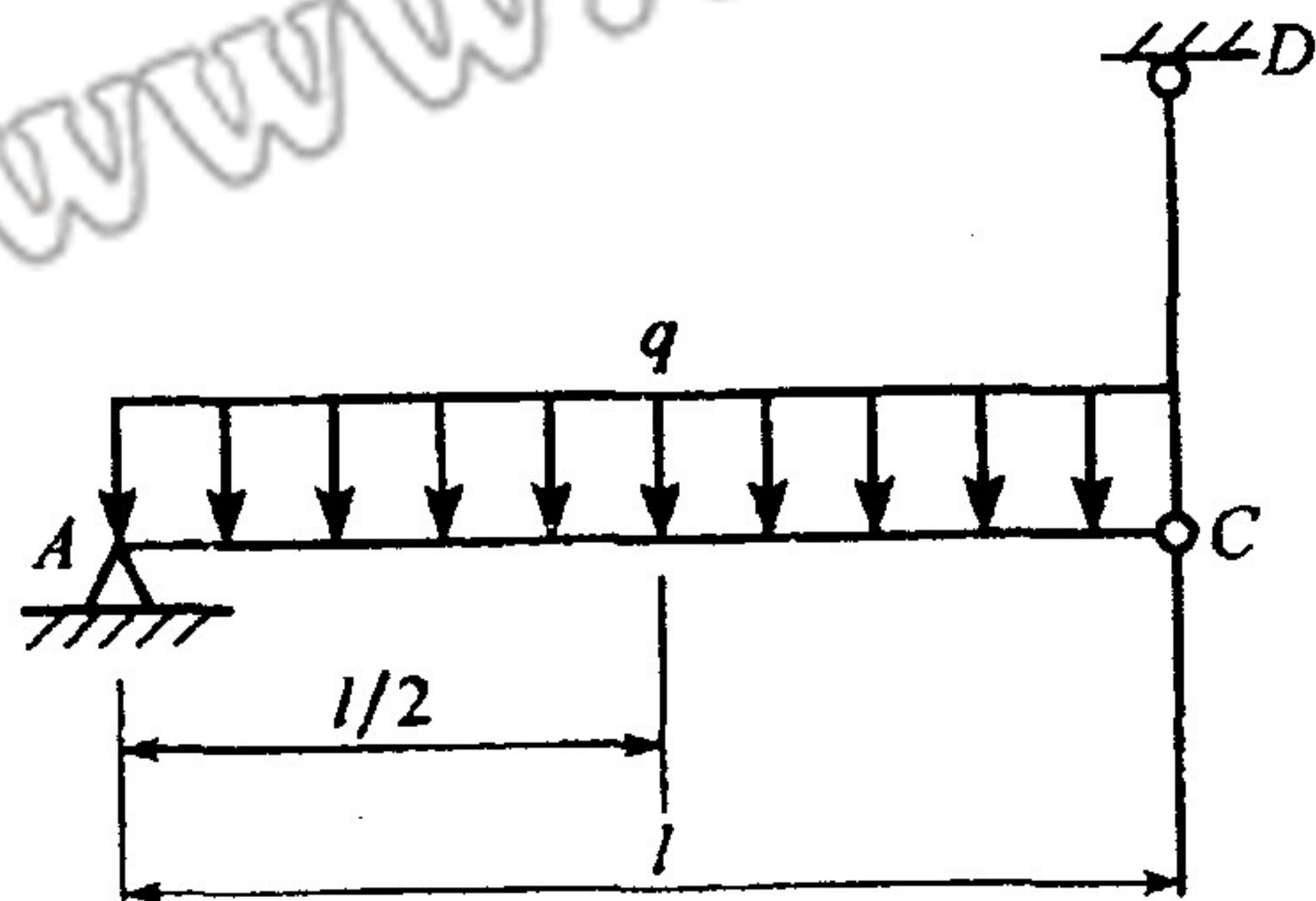


图 5.6

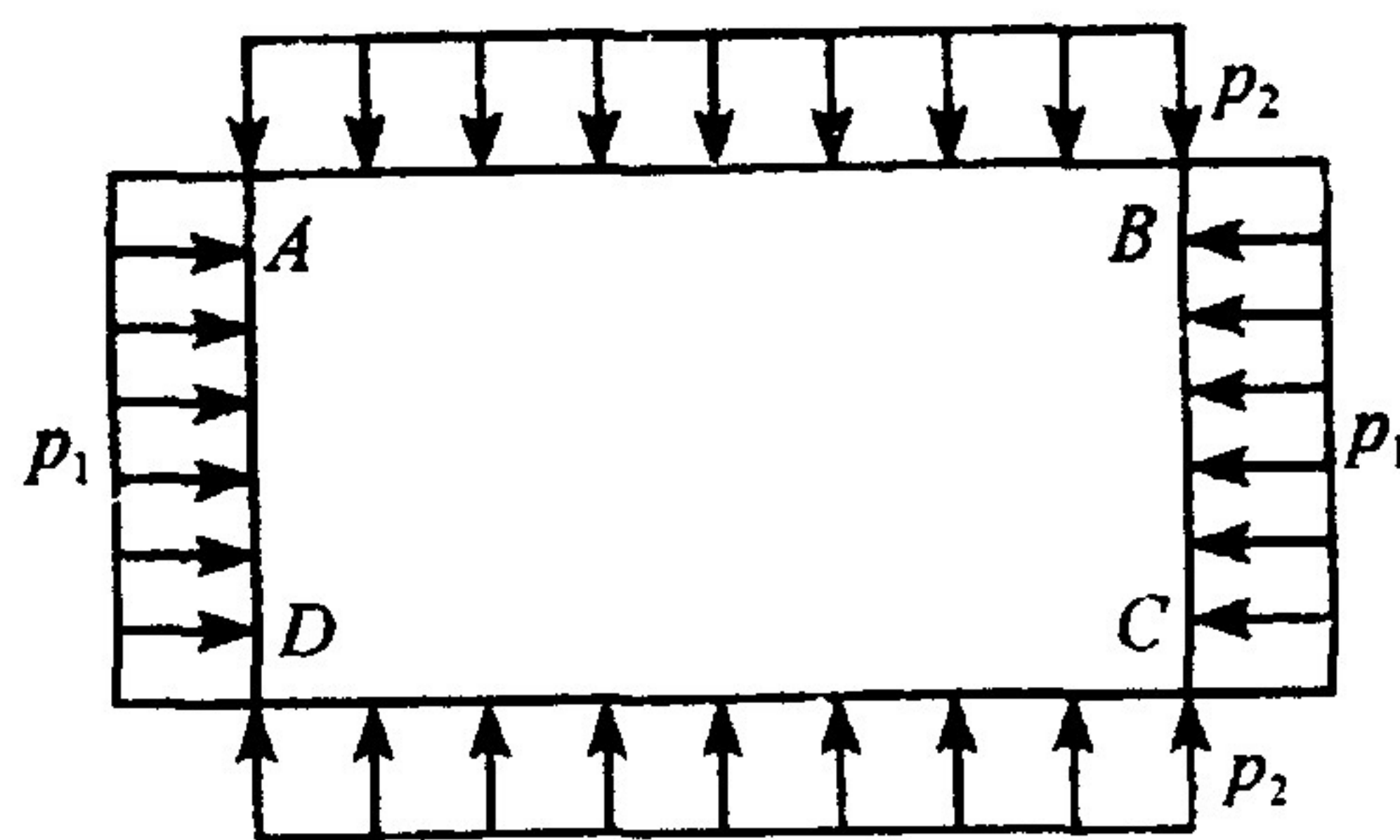


图 5.7

9. 如图 5.8 所示等直杆两端固定,设 AC、CD、DB 三段的轴力分别为 F_{N1} 、 F_{N2} 、 F_{N3} ,则有()

- A. $F_{N1} = F_{N3} = 0, F_{N2} = F$ B. $F_{N1} = F_{N3} = -F, F_{N2} = 0$
C. $F_{N1} = F_{N3} < 0, F_{N2} > 0$ D. $F_{N1} = F_{N3} = F_{N2} = 0$

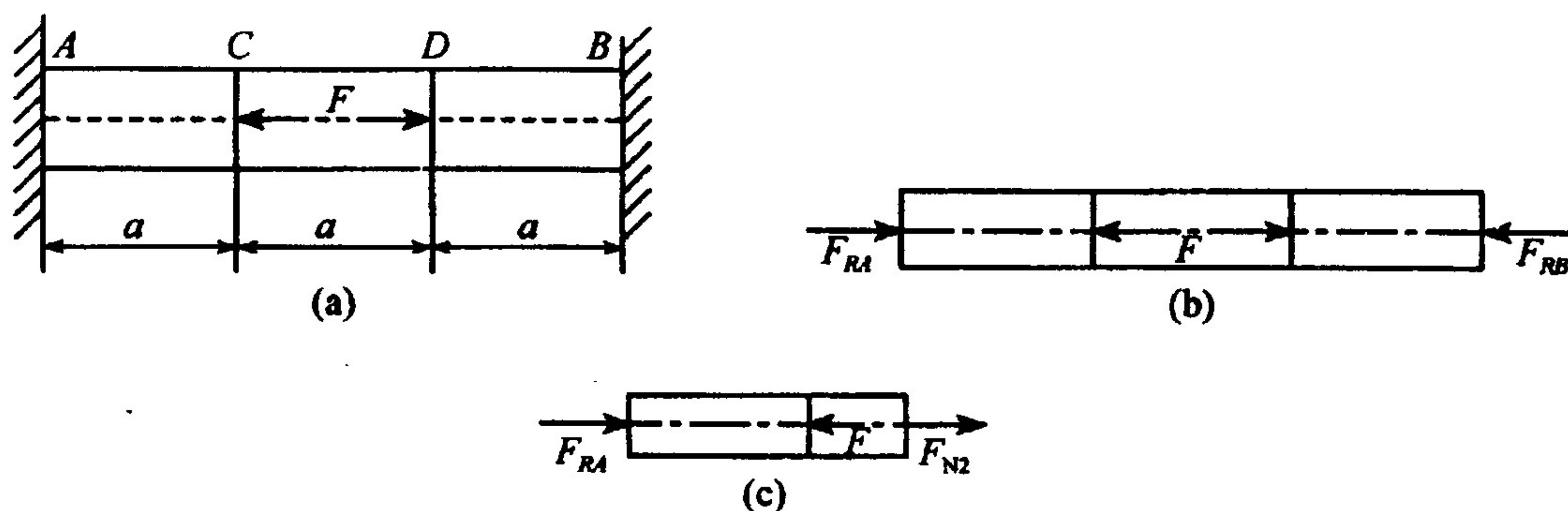


图 5.8

10. 空心圆杆轴向拉伸时, 受力在弹性范围内, 它的()

- A. 内外径都减少 B. 外径减少, 内径增大
C. 内外径都增大 D. 外径增大, 内径减少

解 1. (C) 根据功能原理, 外力功等于应变能, 即 $W = V_{\epsilon_0}$, 三个力 F 在力的作用点的线位移为 Δ , 故 $V_{\epsilon_0} = W = 3 \times \frac{1}{2} F \Delta = \frac{3}{2} F \Delta$, 故 $F = \frac{2V_{\epsilon_0}}{3\Delta}$, 选 C。

2. (A) 题知抗拉压刚度相等, 即 $E_{st} A_{st} = E_{al} A_{al}$, 受力后变形相同, 即 $\Delta l_{st} = \Delta l_{al}$, 解此超静定问题, 静力平衡方程为 $F = F_{N,st} + F_{N,al}$, 而物理关系 $\Delta l_{st} = \frac{F_{N,st} l}{E_{st} A_{st}}$, $\Delta l_{al} = \frac{F_{N,al} l}{E_{al} A_{al}}$ 代入变形协调方程得 $F_{N,st} = F_{N,al}$, 故轴力相等。

然后求两部分应力, 因为 $\sigma_{st} = \frac{F_{N,st}}{A_{st}}$, $\sigma_{al} = \frac{F_{N,al}}{A_{al}}$, 虽然 $E_{st} A_{st} = E_{al} A_{al}$, 但未告知 $A_{st} = A_{al}$, 实际情况是 $E_{st} > E_{al}$, 故 $A_{st} < A_{al}$, 所以 $\sigma_{st} > \sigma_{al}$ 。即两部分应力不等。因此选 A。

3. (A) 受内压 p 作用的薄壁圆筒, 壁厚为 t , 则轴向应力 $\sigma_2 = \frac{pD}{4t}$, 周向应力 $\sigma_1 = \frac{pD}{2t}$, $\sigma_3 \approx 0$, 代入第三强度理论得相当应力 $\sigma_{r,3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2t} \leq [\sigma]$, 故选 A。

4. (C) 图 5.3(a) 所示单元体, 其 $\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma_1$, $\sigma_2 = 0$, 因为在 τ 不为零的条件下, $\frac{\sigma}{2} < \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$, 故 $\sigma_{\max} = \sigma_1$, $\sigma_{\min} = \sigma_3$, 代入第四强度理论得相当应力 $\sigma_{r,4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$ 。图 5.3(b) 所示单元体, 俯视为一纯剪切应力状态, 故 $\sigma_{\max} = \tau$, $\sigma_{\min} = -\tau$, 即 $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$, 代入第四强度理论得相当应力 $\sigma_{r,4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma + \tau)^2 + (2\tau)^2 + (\sigma - \tau)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$, 故选 C。

5. (B) 受扭圆轴表面, 与轴线垂直且相邻 dx 的两截面, 两平行母线相距 $Rd\varphi$ 与径向 dR 所截单元体是纯剪切应力状态。在应变片 1、3 处, 仅存在切应力, 只有在应变片 2 处, 沿着 α 的方向是最大拉应力 $\sigma_1 = \tau = \frac{M_e}{W_p}$, 而与 2 的方向垂直的面有最大压应力 $\sigma_{\min} =$

$-\tau$ ，沿应变片 2 方向的应变 $\epsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E}(\tau + \mu\tau) = \frac{\tau}{E}(1 + \mu)$ ，而在应变片 1 或 3 的方向 $\epsilon_{90^\circ} = 0 = \epsilon_0$ ，故选 B。

6. (C) 初速度为零的自由落体冲击时的动荷因数 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{st}}}$ ，三种情况均相同适用同一动荷因数。在下落高度 h 相同情况下， K_d 大小则取决于 Δ_{st} ，定性分析，A、B 比较，由于 B 中弹簧的存在， $\Delta_{st,B} > \Delta_{st,A}$ ；B、C 比较，同有弹簧，但 C 在下，多余一个约束，梁的刚度增加，即 $\Delta_{st,C} < \Delta_{st,A} < \Delta_{st,B}$ ，故动荷因数最大的是 C。

如果进行定量分析，各梁的冲击点静位移分别为 $\Delta_{st,A} = \frac{Wl^3}{48EI} = \frac{Wa^3}{6EI}$ ， $\Delta_{st,B} = \frac{Wa^3}{6EI} + \frac{W}{K}$ ；在 C 中，变形协调条件为梁的中点位移同弹簧的压缩量相等，即 $\frac{(W - F_R)a^3}{6EI} = \frac{F_R}{K}$ ，解得 $F_R = \frac{Wa^3K}{6EI + Ka^3}$ ，故 $\Delta_{st,C} = \frac{F_R}{K} = \frac{Wa^3}{6EI + Ka^3}$ ，显然， $6EI + Ka^3 > 6EI$ ，即 $\Delta_{st,C} < \Delta_{st,A} < \Delta_{st,B}$ 。

7. (D) CD 杆为二力杆，结构为静定结构，静定结构的内力仅和几何尺寸有关，和材料及截面积无关。用 $\sum M_A = 0$ ，便可求出 CD 杆的轴力 F_N ，且与 CD 杆的直径无关。

当 C 端为活动铰时，梁中面 B 的转角为 0。当 CD 杆直径为 d 时， $\Delta l_{CD} = \frac{4F_N l_{CD}}{\pi d^2}$ ， $\theta_B \times \frac{l}{2} = \Delta l_{CD}$ ，故 $\theta_B = \frac{\delta F_N l_{CD}}{l \pi d^2}$ ；当 CD 杆的直径为 $0.5d$ 时， $\Delta l_{CD} = \frac{16F_N l_{CD}}{\pi d^2}$ ， $\theta'_B \times \frac{l}{2} = \Delta l_{CD}$ ，故 $\theta'_B = \frac{32F_N l_{CD}}{l \pi d^2}$ ， $\theta'_B / \theta_B = 4$ ，即 $\theta'_B = 4\theta_B$ ，故选 D。

8. (B) 题知欲使 AB、BC 两面的相对距离不变，即要求 $\epsilon_x = 0$ 。在图示载荷作用下，即单元体上 $\sigma_x = -p_1$ ， $\sigma_y = -p_2$ ，则 $\epsilon_x = \frac{1}{E}(-p_1 + \mu p_2) = 0$ ，即 $\frac{p_1}{p_2} = \mu$ ，故选 B。当要求 AB、CD 两面间相对距离不变时，则要求 $\epsilon_y = 0$ ，即 $\epsilon_y = \frac{1}{E}(-p_2 + \mu p_2) = 0$ ，则 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{\mu}$ ，则应选 D。

9. (C) 用排除法定性分析，对于此超静定结构，由于结构及载荷对称，A、B 端支座反力亦应对称即 $F_{N1} = F_{N3}$ ，由变形几何关系知，AC、DB 两段压缩量应等于 CD 段的伸长量，故不可能为 A、B、C，故选 C。

如果定量分析，如图 5.8(b) 所示，静力平衡方程为 $F_{RA} = F_{RB}$ ，即 $F_{N1} = F_{N3}$ ，图 5.8(c) 在 CD 段中， $F_{N2} = F - F_{N1}$ 。代入变形几何关系 $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$ ，即 $2 \frac{F_{N1}a}{EA} = \frac{(F - F_{N1})a}{EA}$ ，即 $F_{N1} = \frac{1}{3}F(-)$ ， $F_{N2} = \frac{2}{3}F(+)$ 。

10. (A) 轴向受拉，为单向应力状态，即轴向应变 $\epsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x > 0$ ，而径向、周向应变均为负，即 $\epsilon_y = \epsilon_z = \frac{1}{E}(0 - \mu\sigma_x) = -\frac{\mu}{E}\sigma_x$ 。

5.2 计算题(共 100 分)

1. 如图 5.9 所示梁为铸铁材料,截面形状为倒 T 形,已知 $q=20\text{kN/m}$, $a=1\text{m}$,求梁中最大拉应力和最大压应力。(25 分)

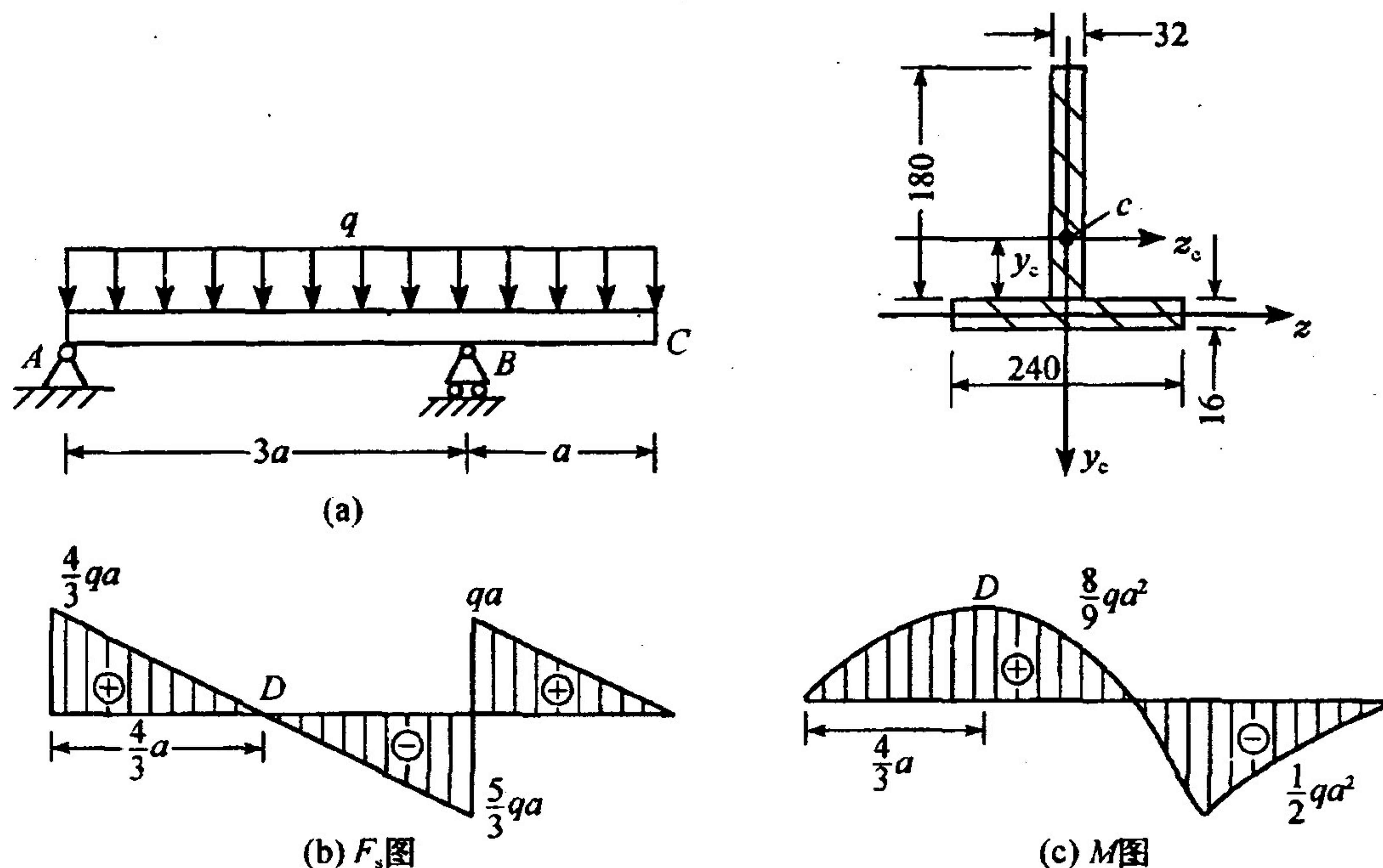


图 5.9

解 这是弯曲应力方面的题目。题目要求梁中最大拉应力 $\sigma_{t,\max}$ 和最大压应力 $\sigma_{c,\max}$, 必须知道正负弯矩的最值面, 图为 T 形截面梁, 最大应力不一定在 $|M|_{\max}$ 面上。

(1) 作内力图。先求出支座反力, 由 $\sum M_A = 0, F_{By} \times 3a = 4qa \cdot 2a$ 得 $F_{By} = \frac{8}{3}qa$, $\sum F_y = 0, F_{Ay} = 4qa - \frac{8}{3}qa = \frac{4}{3}qa$ 。作剪力图如图 5.9(b) 所示。由弯矩图知 $M_D = M_{\max} = \frac{8}{9}qa^2 = \frac{160}{9}\text{kN} \cdot \text{m}$, $M_B = M_{\min} = -\frac{1}{2}qa^2 = -10\text{kN} \cdot \text{m}$

(2) 确定平面图形的形心坐标及形心主惯性矩。y 轴为对称轴, 故 $z_c = 0$,

$$y_c = \frac{\sum A_i y_{ci}}{\sum A_i} = \frac{240 \times 16 \times 0 + 32 \times 180 \times (-90 - 8)}{240 \times 16 + 32 \times 180} = -58.8(\text{mm})$$

$$I_{zc} = \frac{32 \times 180^3}{12} + 32 \times 180 \times (98 - 58.8)^2 + \frac{240 \times 16^3}{12} + 240 \times 16 \times 58.8^2 = 37.76 \times 10^6 (\text{mm}^4)$$

(3) 求最大应力。危险截面可能在 B 或 D 截面, 故应全面分析。

在 B 截面, 负弯矩最大, $y_{t,\max} = 129.2\text{mm}$, $y_{c,\max} = 66.8\text{mm}$, 代入弯曲正应力公式, 得

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M}{I_z} y = \frac{10 \times 10^3 \times 129.2 \times 10^{-3}}{37.76 \times 10^{-6}} = 34.2 \times 10^6 (\text{Pa}) = 34.2(\text{MPa})$$

$$\sigma_{c,\max} = 34.2 \times \frac{66.8}{129.2} = 17.69(\text{MPa})$$

在 D 截面，正弯矩最大， $y_{t,\max}=66.8\text{mm}$ ， $y_{c,\max}=129.2\text{mm}$ ，代入弯矩正应力公式，得

$$\sigma_{t,\max} = \frac{M}{I_{zc}} y_{t,\max} = \frac{160 \times 10^3 \times 86.8 \times 10^{-3}}{9 \times 37.76 \times 10^{-6}} = 31.5 \times 10^6 (\text{Pa}) = 31.5 (\text{MPa})$$

$$\sigma_{c,\max} = 31.5 \times \frac{129.2}{66.8} = 60.8 (\text{MPa})$$

所以梁中最大拉应力为 $\sigma_{t,\max}=34.2\text{MPa}$ ，最大压应力为 $\sigma_{c,\max}=60.8\text{MPa}$ 。

点评 ①弯曲应力中常用 T 形等不对称截面，要注意形心坐标确定及形心主惯性矩的计算。②以本题为例，要求出最大应力，必先找出最大内力所在面，对这种不对称截面，通过作弯矩图，确定正、负弯矩的极限。本题中可不作出剪力图，此处作出仅为了求得弯矩的极值点。但当要求最大切应力时，应确定最大剪切力作用面，故要作出剪力图。③一般把两个危险截面上 $\sigma_{t,\max}$ 、 $\sigma_{c,\max}$ 求出，比较确定最大值。亦可进行比较来确定，如本例中， $M_D \approx 1.8M_B$ ，且 $y_{c,\max}^D = 1.93y_{c,\max}^B$ ，最大压应力一定在 D 截面，因此， B 截面的最大压应力计算可省略。

2. 图 5.10 所示梁 AB 和 CD 的材料相同，横截面相同。在冲击载荷作用下，试求两梁最大应力之比和各自吸收能量之比。（25 分）

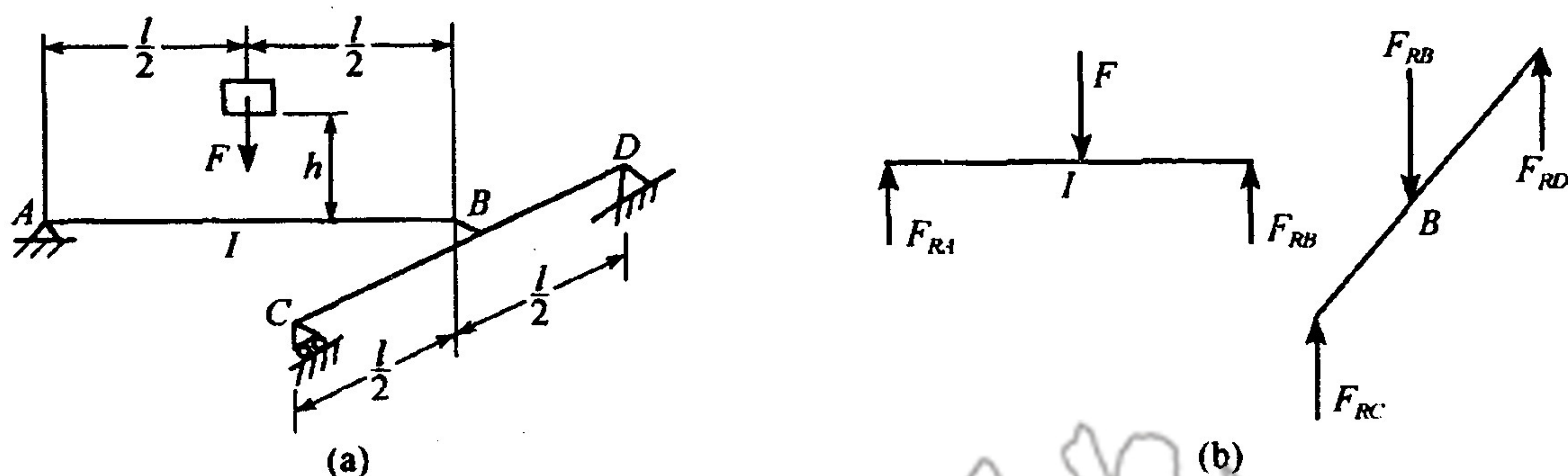


图 5.10

解 这是弯曲内力及有关能量的题目。在此结构下，冲击点确定，冲击点的静位移确定，动荷因数 K_d 确定。由题可知， $F_{By} = \frac{F}{2}$ ，即在 CD 梁中面作用有外载 $F_{By} = \frac{F}{2}$ 。

(1) 求最大应力比。在 AB 梁中， $M_{\max} = \frac{F}{4}l$ ；在 CD 梁中， $M_{\max} = \frac{F}{8}l$ ，故

$$\sigma_{AB,d} = K_d \sigma_{AB,st} = K_d \frac{Fl}{4W}$$

$$\sigma_{CD,d} = K_d \sigma_{CD,st} = K_d \frac{Fl}{8W}$$

两梁材料相同，横截面相同，系统的动荷因数唯一，故

$$\frac{\sigma_{AB,d}}{\sigma_{CD,d}} = \frac{K_d \frac{Fl}{4W}}{K_d \frac{Fl}{8W}} = 2$$

(2) 求两梁吸收的能量之比。根据功能原理，外力功等于应变能，故

$$V_{\epsilon,AB} = \frac{1}{2} F_d \delta_d = \frac{1}{2} K_d^2 \cdot F \cdot \Delta_{st,l} = \frac{1}{2} K_d^2 F \cdot \frac{Fl^3}{48EI}$$

$$V_{e,CD} = \frac{1}{2} F_d \delta_d = \frac{1}{2} K_d \cdot \frac{F}{2} \cdot K_d \Delta_{st,B} = \frac{1}{4} K_d^2 F \cdot \frac{Fl^3}{2 \times 48EI}$$

由题意知两梁 EI 相同, K_d 相同, 故

$$\frac{V_{e,AB}}{V_{e,CD}} = \frac{\frac{K_d^2 F^2 l^3}{2 \times 48EI}}{\frac{K_d^2 F^2 l^3}{8 \times 48EI}} = 4$$

即 AB 与 CD 梁中最大应力之比为 2, 吸收能量之比为 4。

点评 ①题中已知为初速度为零的自由落体冲击, 不可贸然套用 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{st}}}$, 并求出冲击点静位移 $\Delta_{st,I} = \frac{Fl^3}{48EI} + \frac{1}{2} \frac{Fl^3}{2 \times 48EI}$, 从而确定 K_d 。以上推算可知, K_d 在此值中直接被消掉。②对于一个给定结构, 冲击形式一定, 该系统的动荷因数唯一确定, 故 $\sigma_d = K_d \sigma_{st}$, $\Delta_d = K_d \Delta_{st}$ 中 K_d 对整个结构上的任何截面、任何点都相同。

3. 图 5.11 所示梁和柱的材料为 Q235 钢, $\sigma_s = 235\text{MPa}$, 均布载荷 $q = 30\text{kN/m}$, 竖杆为截面为 $40\text{mm} \times 50\text{mm}$ 矩形柱, $\sigma_p = 200\text{MPa}$, $a = 310\text{MPa}$, $b = 1.14\text{MPa}$; 梁为 16 号工字钢, 其高度 $h = 160\text{mm}$, $I_z = 1130\text{cm}^4$, 截面面积 $A = 26.13\text{cm}^2$ 。确定梁及柱的工作安全因数。已知 $E = 210\text{GPa}$ 。(25 分)

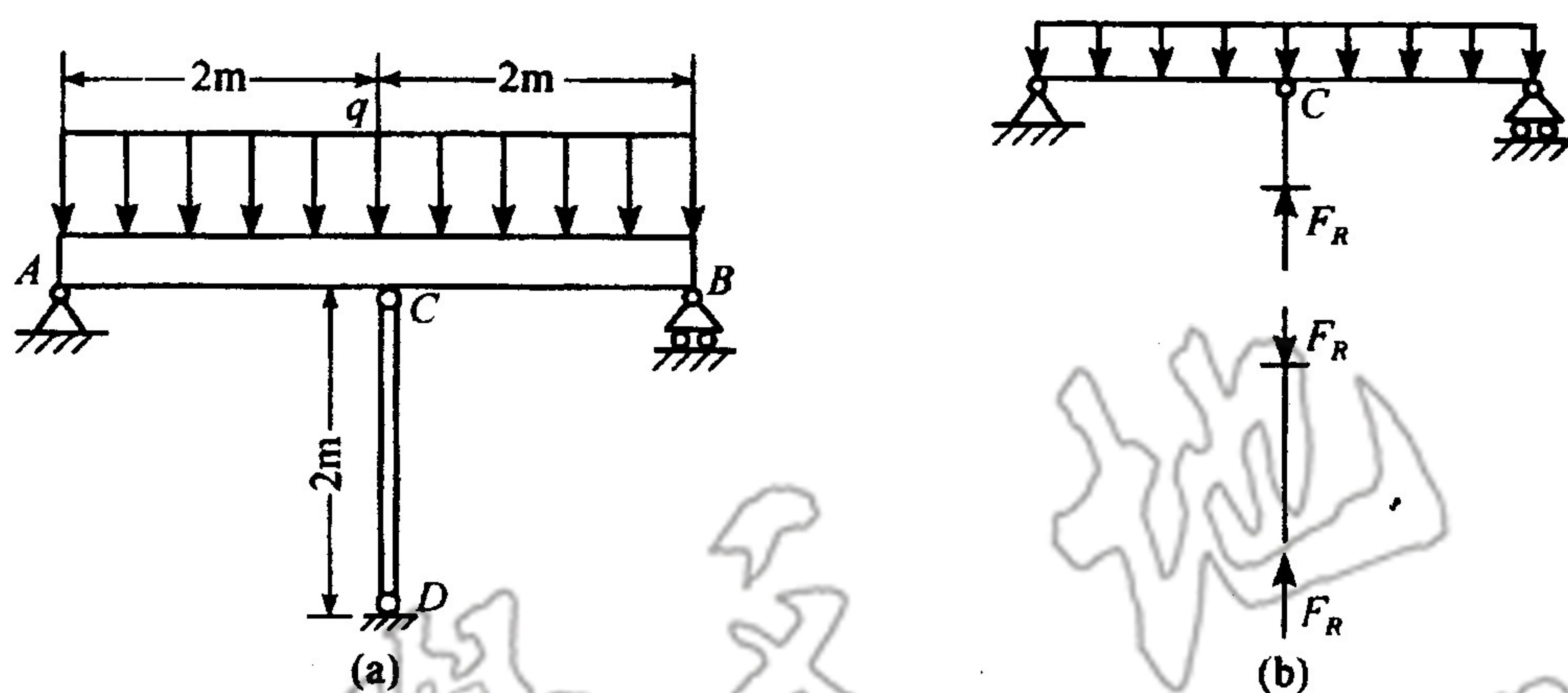


图 5.11

解 这是超静定问题。涉及梁的弯曲应力, 压杆 CD 的临界载荷。而弯曲应力, 临界应力的确定, 则应根据弯曲变形, 轴向压缩的变形协调条件来确定梁、柱的内力。

(1) 解超静定问题。取相当系统如图 5.11(b) 所示, 其变形协调条件为

$$\Delta_{Cy} = \Delta l_{CD}$$

简支梁在均布载荷 q 和集中力 F_R 作用下, 中面 C 的位移为

$$\Delta_{Cy} = \frac{5ql^4}{384EI} - \frac{F_R l^3}{48EI}$$

柱为二力杆, 受压后缩短 $\Delta l_{CD} = \frac{F_R l_1}{EA}$, 代入变形协调方程, 得

$$\frac{F_R l^3}{48EI} + \frac{F_R l_1}{EA} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

解得

$$F_R = \frac{5ql^4}{384I} \left/ \left(\frac{l^3}{48I} + \frac{l_1}{A} \right) \right. = \frac{5 \times 30 \times 10^3 \times 4^4}{384 \times 1130 \times 10^{-8}} \left/ \left(\frac{4^3}{48 \times 1130 \times 10^{-8}} + \frac{2}{40 \times 50 \times 10^{-6}} \right) \right.$$

$$= 74.4 \times 10^3 (\text{N}) = 74.4 (\text{kN})$$

(2) 确定梁的安全因数。梁的危险截面在中面，最大弯矩为

$$M_{\max} = \frac{1}{8}ql^2 - \frac{1}{4}F_R l = \frac{1}{8} \times 30 \times 10^3 \times 4^2 - \frac{1}{4} \times 74.4 \times 10^3 \times 4$$

$$= (60 - 74.4) \times 10^3 = -14.4 \times 10^3 (\text{N} \cdot \text{m})$$

梁中

$$W = \frac{I_z}{h/2} = \frac{1130}{8} \text{ cm}^3$$

故

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{14.4 \times 10^3 \times 8}{1130 \times 10^{-6}} = 101.9 \times 10^6 (\text{Pa}) = 101.9 (\text{MPa})$$

其工作安全因数

$$n = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{235}{101.9} = 2.31$$

(3) 确定柱的稳定安全因数。先求出压杆的临界载荷值 F_{cr} ，因此要判断其柔度以确定采用公式。立柱的柔度为

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{\mu l}{\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}} = \frac{1 \times 2}{\sqrt{\frac{40^2 \times 10^{-6}}{12}}} = \frac{1 \times 2}{11.55 \times 10^{-3}} = 173.2$$

对 Q235 钢

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 101.8$$

$\lambda > \lambda_p$ 为大柔度杆，故采用欧拉公式计算临界载荷。

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi \times 210 \times 10^9 \times 50 \times 40^3 \times 10^{-12}}{12 \times (1 \times 2)^2} = 138.2 \times 10^3 (\text{N}) = 138.2 (\text{kN})$$

柱的稳定安全因数为

$$n = \frac{F_{cr}}{F_R} = \frac{138.2}{74.4} = 1.86$$

梁及立柱的安全因数分别为 2.31 和 1.86。

点评 ①梁 AB 中面位移，可用多种方法求解，解中直接写出不同载荷时梁中面的挠度；叠加完成，这在没有特殊要求时是可行的。②压柱的临界载荷，首先要计算柔度，进行

大、中、小柔度杆判断，选择对应的计算公式。

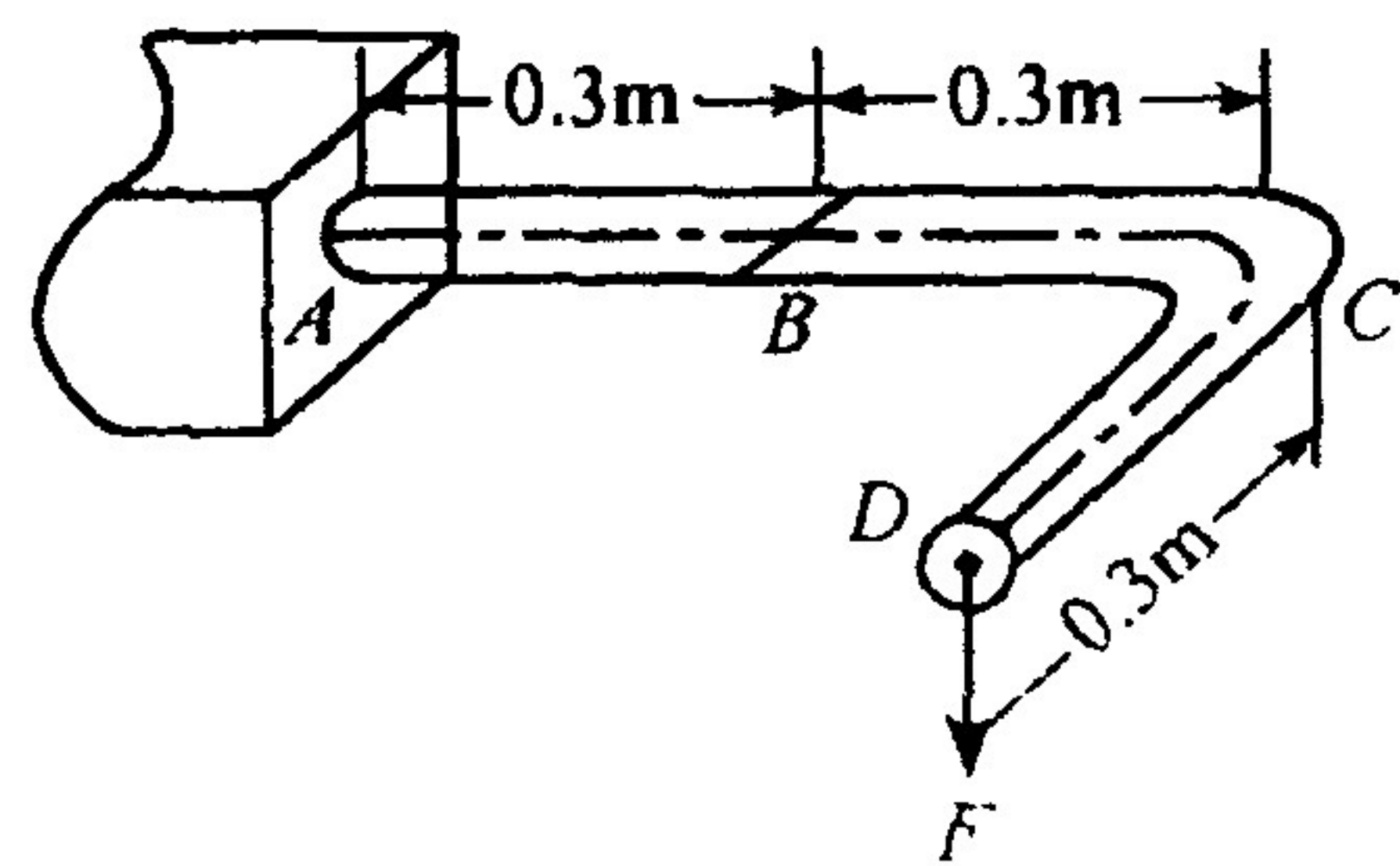


图 5.12

4. 图 5.12 所示，钢制曲拐的横截面直径 $d=30\text{mm}$ ，D 点作用力 F ，曲拐的弹性模量 $E=200\text{GPa}$ ，切变模量 $G=80\text{GPa}$ ，泊松比 $\mu=0.25$ 。在 B 截面水平直径上表面沿圆轴轴线 45° 方向测出线应变 $\epsilon_{45^\circ} = -4 \times 10^{-5}$ ，试由此确定 F 。若钢材的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$ 。试用第四强度理论校核轴的强度。(15 分)

解 这是应力状态，组合变形方面的题目。已知一点给定方向的应变，代入广义胡克定律。确定该点的应力并推出外力 F 。在外力 F 确定后，由内力确定危险截面，这是一个典型的弯扭组合问题。

(1) 确定力 F 。在 B 截面上，扭矩和弯矩值相等，即 $T_B = M_B = 0.3F$ 。水平直径表面取单元体，因在中性轴上，故为纯剪切应力状态，即 $\sigma_1 = \tau, \sigma_3 = -\tau$ ，而 $\tau = \frac{T}{W_p}$ 。代入广义胡克定律，即

$$\begin{aligned}\epsilon_3 = \epsilon_{45^\circ} &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{E}(-\tau - \mu\tau) \\ &= -\frac{\tau}{E}(1 + \mu) = -\frac{T}{EW_p}(1 + \mu) = -4 \times 10^{-5}\end{aligned}$$

将 $T = 0.3F$ 代入，解得

$$F = \frac{4 \times 10^{-5} \times 200 \times 10^9 \times \pi \times 30^3 \times 10^{-9}}{16 \times 0.3 \times (1 + 0.25)} = 113.1(\text{N})$$

(2) 强度校核。危险截面在 A 截面， $M = 0.6F, T = 0.3F$ ，代入用 M, T 表述的第四强度理论的相当应力表达式中，即

$$\begin{aligned}\sigma_{r,4} &= \frac{1}{W} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} = \frac{16}{\pi \times 30^3 \times 10^{-9}} \sqrt{(0.6F)^2 + 0.75(0.3F)^2} \\ &= 13.95 \times 10^6 (\text{Pa}) = 13.95(\text{MPa}) < [\sigma]\end{aligned}$$

轴的强度条件满足。

点评 ①这是典型的弯扭组合变形题目，应熟知第三、第四强度理论在 $\sigma_x = \sigma, \tau_{xy} = \tau$ 的平面应力状态下，两强度理论的表达式以及当该点取至圆轴时的表达式，可不必求出 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 代入原始表达式中，以简化计算。②注意广义胡克定律的应用，熟练单元体的选择及确定应力状态。有时还会用到 E, G, M 间的关系式，如本例中用 E ，而题目则告知 G, μ ，虽为小技，但也会误了大事。

5. 图 5.13 所示圆环受到沿垂直直径方向的压力作用，试求水平直径方向 A, B 两点的相对位移。已知 EI 为常数。(10 分)

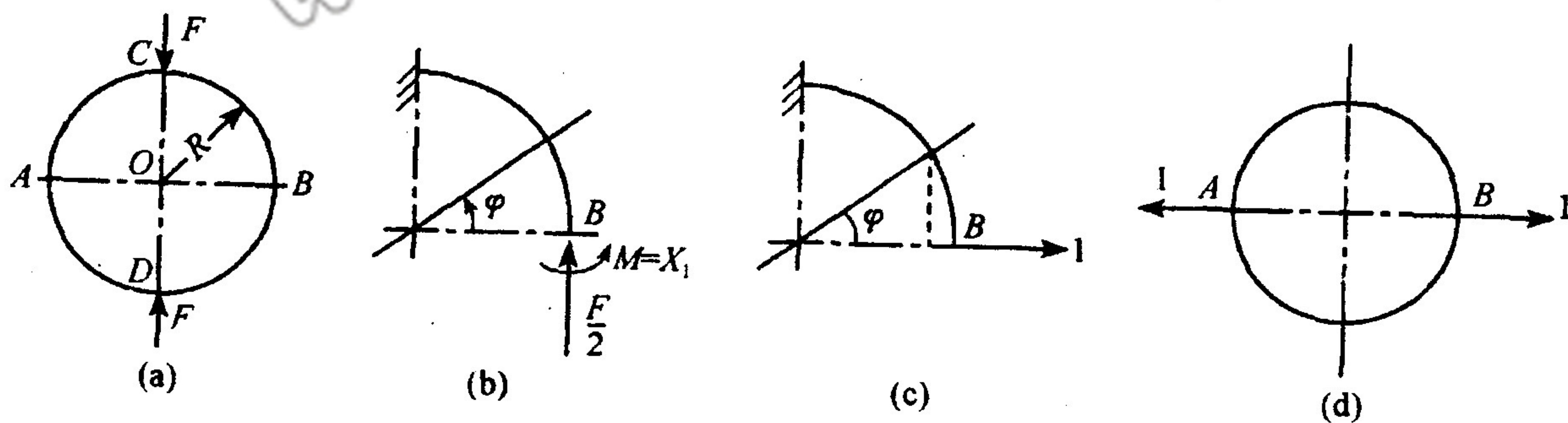


图 5.13

解 这是超静定方面题目。要求位移，必先解超静定。内容涉及对称性的应用，以使计算得到简化。

(1) 解超静定，求内力。结构为单一封闭平面圆环，为三次超静定。但由结构对称，载荷对称可知，对称面 A, B 上的反对称内力 $F_s = 0$ ，同时又为左右对称， A, B 面上的轴力 $F_{NA} = F_{NB}$ ，由 $\sum F_y = 0$ 解得 $F_{NA} = F_{NB} = \frac{F}{2}$ ，问题简化为一次超静定，即 A, B 面上仅有

内力弯矩未知，且相等。取相关系统如图 5.13(b)所示。令 $X_1 = M$ ，其力法正则方程为

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

其中

$$\begin{aligned} EI\delta_{11} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{M} M R d\varphi = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)(-1) d\varphi = \frac{\pi}{2} R \\ EI\Delta_{1F} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\varphi) \overline{M} R d\varphi \\ &= R \int \left[-\frac{F}{2} R (1 - \cos\varphi) \right] \times (-1) d\varphi = \frac{FR^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos\varphi) d\varphi \\ &= \frac{FR^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

代入力法正则方程，得

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -FR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{\pi}$ ，故 X_1 为负，即假设方向与实际内力方向相反。

在任意截面 φ 上，其内力方程为

$$M(\varphi) = -\frac{FR}{2} (1 - \cos\varphi) + FR \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) = FR \left(\frac{\cos\varphi}{2} - \frac{1}{\pi} \right)$$

(2) 求水平直径 A、B 间的相对位移。在静定基上 B 点加单位力如图 5.13(c)所示，其内力方程 $\overline{M}(\varphi) = -R\sin\varphi$ ，代入莫尔积分方程且左右对称，则

$$\begin{aligned} \Delta_{A/B} &= \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} M(\varphi) \overline{M}(\varphi) R d\varphi = \frac{-2R^3 F}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos\varphi}{2} - \frac{1}{\pi} \right) \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{-2FR^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4} \sin\varphi - \frac{\sin\varphi}{\pi} \right) d\varphi = \frac{2FR^3}{\pi EI} \end{aligned}$$

点评 ①这是典型的利用对称性解超静定题目，静定基选择是多样的，如本例可取上(或下)半圆，亦可像图 5.13(b)取其 $\frac{1}{4}$ 作为静定基。②求相对位移，一对单位力可以加在原超静定结构上(刘鸿文主编材料力学第四版即如此)，如选图 5.13(d)中沿 A、B 加一对单位力，但可能会引起新的超静定问题。与其等效的是将单位力加在静定基上，使得问题简化。

如果 B 点单位力加 1，积分时则乘以 2，而加 $\frac{1}{2}$ 时，则要乘 4，请读者注意。