6. 西北工业大学2004年硕士研究生入学考试材料力学试题

（满分150分）

6.1 选择题（每小题5分，共50分）

1. 在杆件的某斜截面上，各点的正应力________。

A. 大小一定相等，方向一定平行　　B. 大小不一定相等，但方向一定平行

C. 大小不一定相等，方向也不一定平行　　D. 大小一定相等，但方向不一定平行

2. 在线弹性范围内，低碳钢材料在拉伸和压缩变形过程，弹性常数________。

A. E相同，μ不同　B. E不同，μ相同　C. E、μ都相同　D. E、μ都不同

3. 图6.1所示等截面圆轴，左段为钢，右段为铝。两端承受扭转力矩后，左右两段________。

A. 最大切应力τ_{max}相同，单位长度扭转角θ不同

B. τ_{max}不同，θ相同

C. τ_{max}和θ都不同

D. τ_{max}和θ都相同

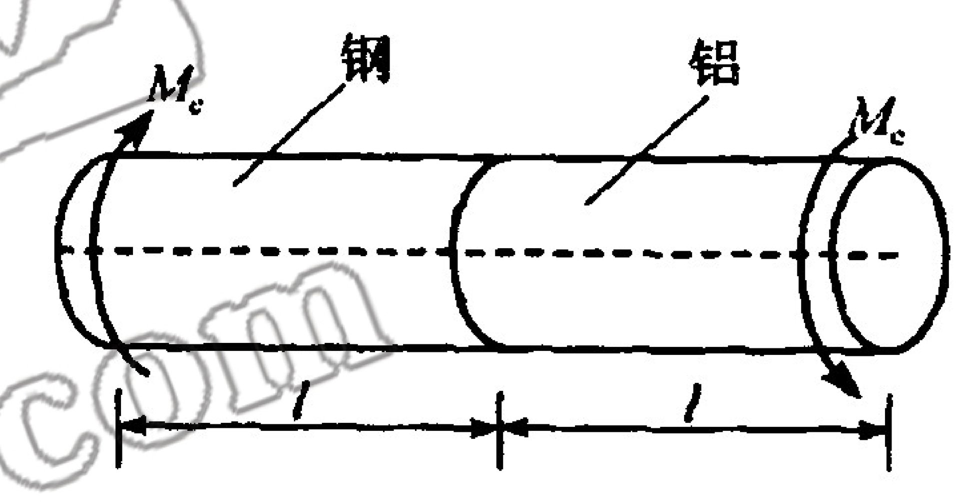
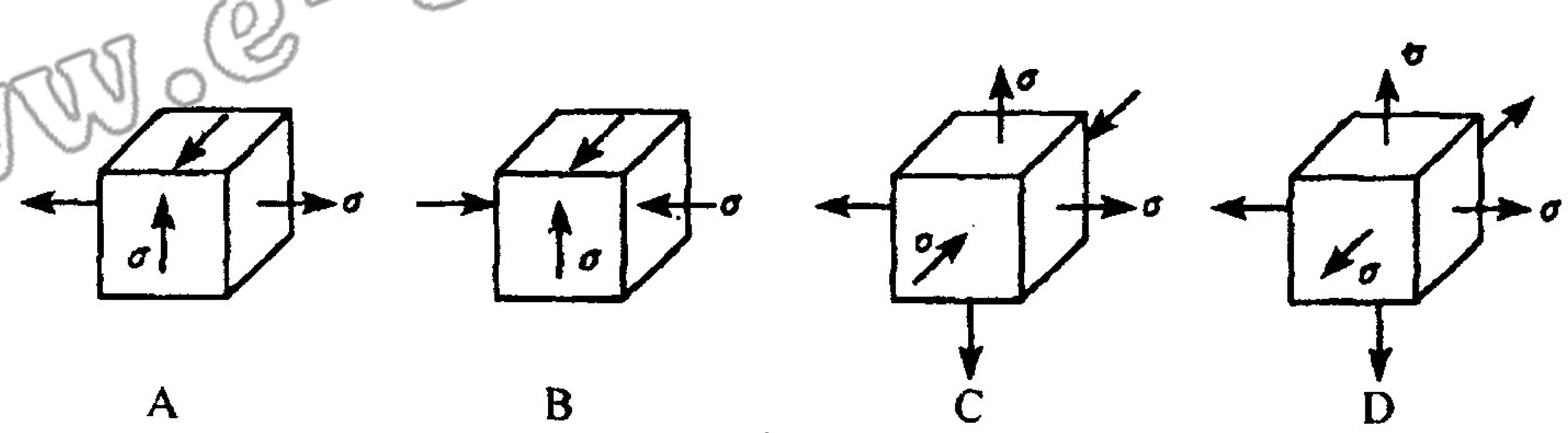


图6.1

4. 在图6.2所示四个单元体中，单元体________的三向应力圆不是题目中所给定的应力圆。



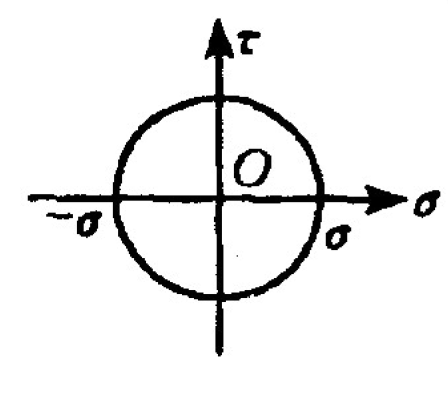


图6.2

5. 图6.3所示等直圆轴，若截面B、A的相对扭转角$\varphi_{AB}=0$，则外力偶M_1和M_2的关系为________。

A. $M_1=M_2$　B. $M_1=2M_2$　C. $M_2=2M_1$　D. $M_1=3M_2$

6. 右端固定的悬臂梁，长为4m，其M图如图6.4(a)所示，则在$x=2$m处________。

A. 既有集中力，又有集中力偶　　B. 只有集中力

C. 既无集中力，也无集中力偶　　D. 只有集中力偶

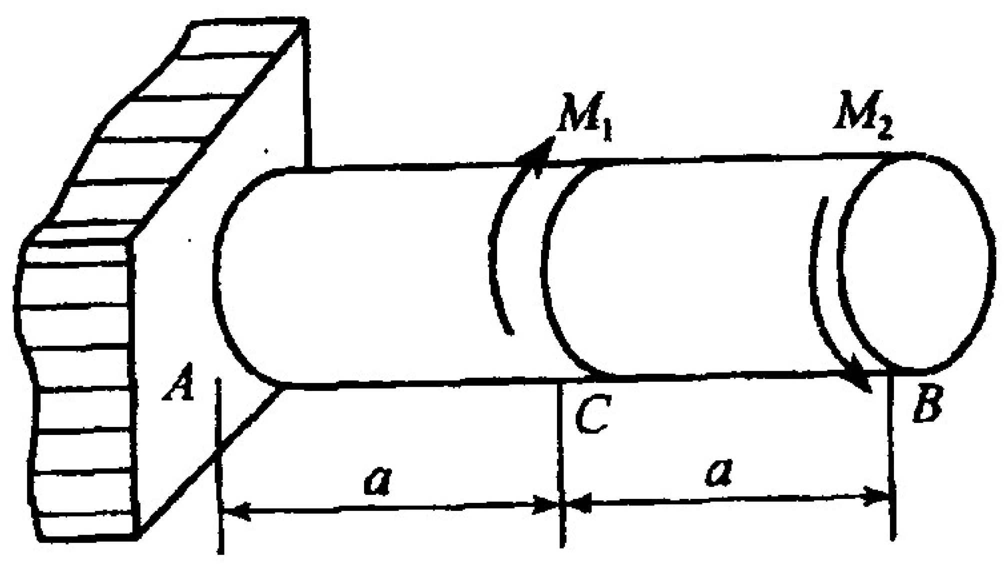


图 6.3

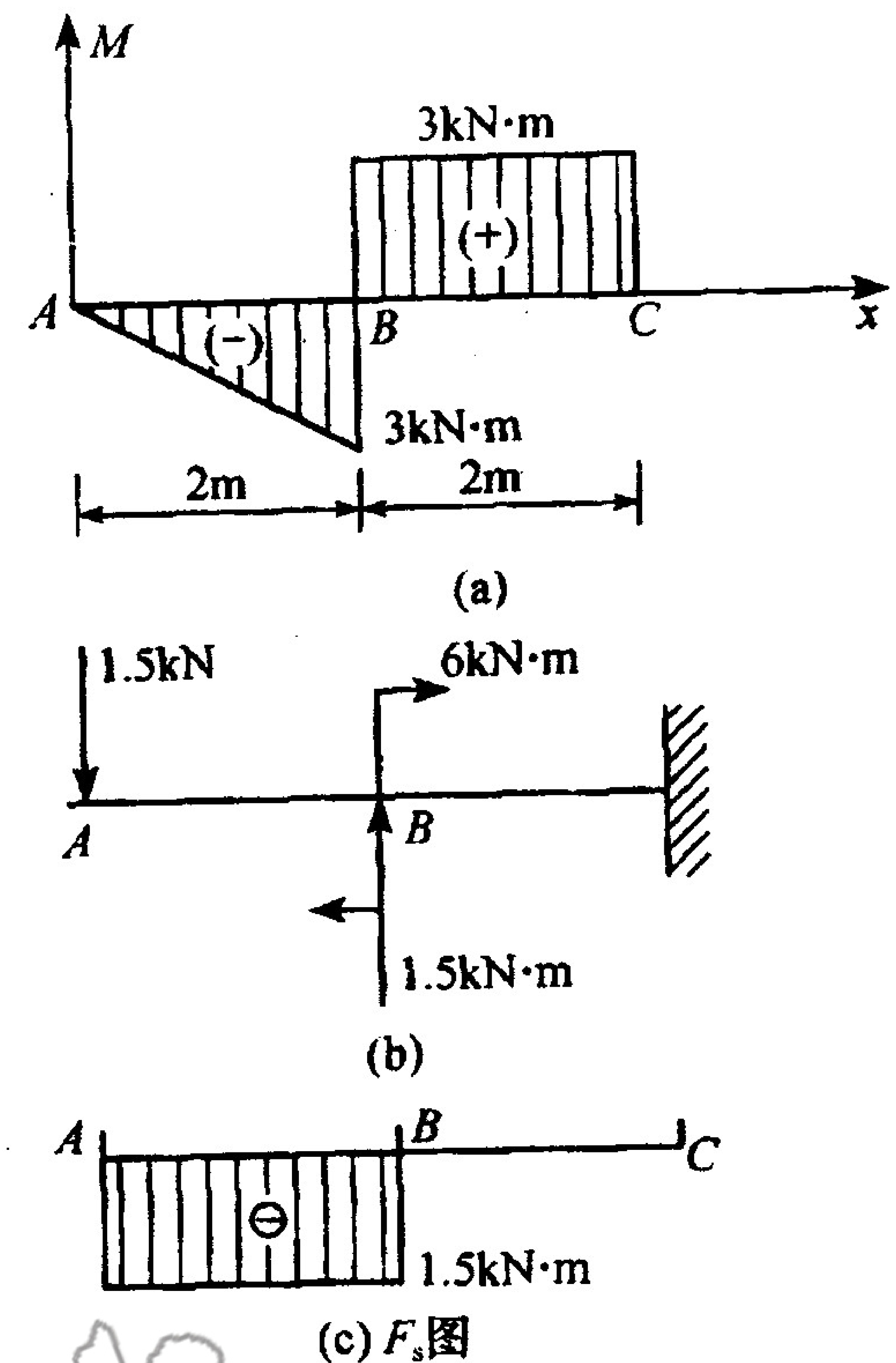


图 6.4

7. 等腰三角形截面铸铁梁，强度极限 $\sigma_b^+/\sigma_b^- = \frac{1}{3}$，在图 6.5(a)所示载荷作用下该梁将在________首先发生破坏。

A. B 截面上边缘　B. B 截面下边缘　C. C 截面上边缘　D. C 截面下边缘

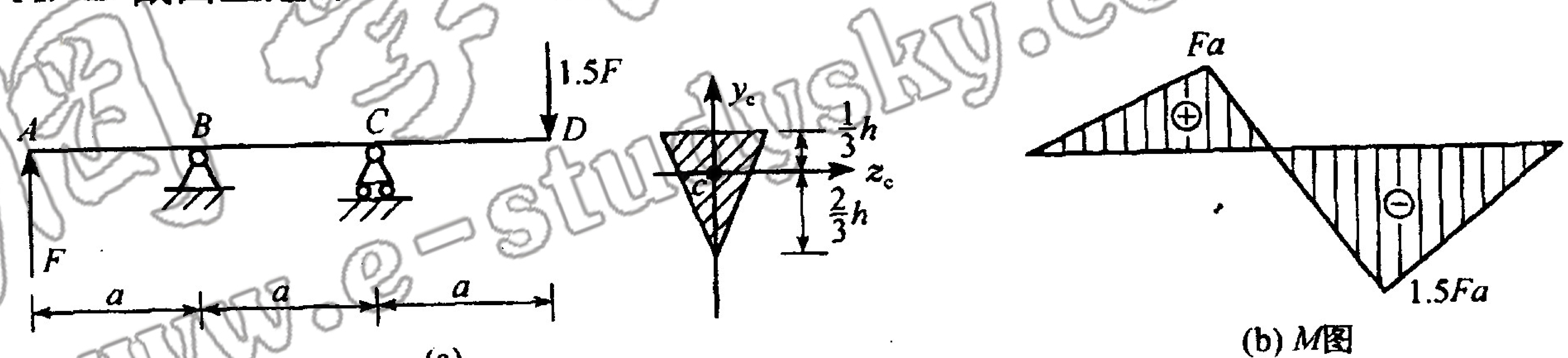


图 6.5

8. 将弹性模量分别为 E_1 和 E_2，形状尺寸相同的二根杆并联地固接在两端的刚性板上，如图 6.6 所示。若在载荷 F 作用下，二杆拉伸变形相等，则________。

A. $E_1<E_2$　B. $E_1=E_2$　C. $E_1>E_2$　D. E_1、E_2 为任意

9. 图 6.7 所示半圆形曲杆的弯矩方程为________。

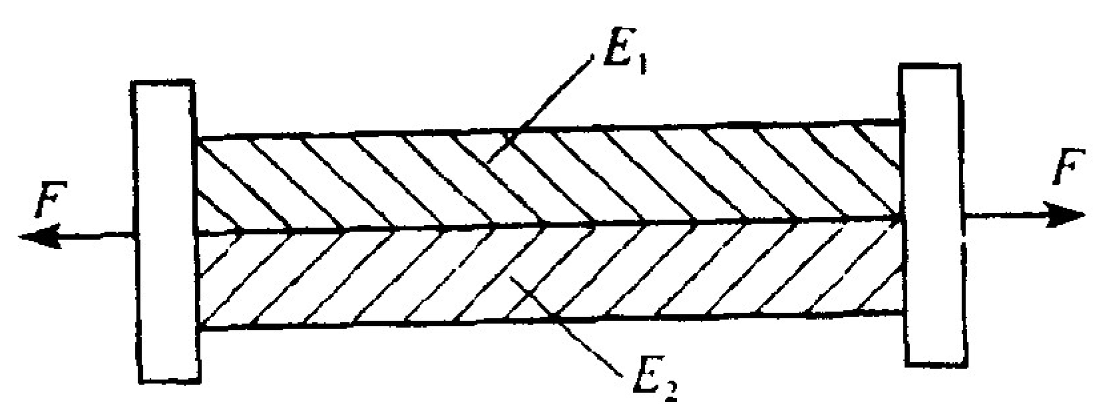


图 6.6

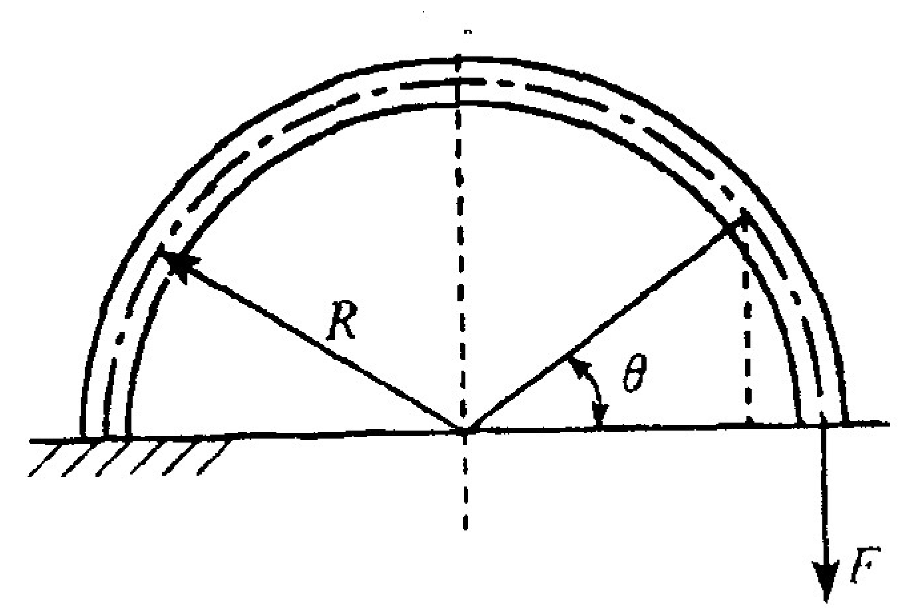


图 6.7

A. $M(\theta)=FR\sin\theta$　　B. $M(\theta)=FR\cos\theta$

C. $M(\theta)=FR(1-\cos\theta)$　　D. $M(\theta)=FR(1-\sin\theta)$

10. 图 6.8 所示圆截面梁由管 A 和芯 B 牢固地套合而成。已知管 A、芯 B 的横截面对中性轴的惯性矩相等，管 A 的弹性模量是芯 B 的两倍。设梁弯曲时平面假设成立，则管 A 和芯 B 所承担的弯矩之比 $M_A/M_B=$________。

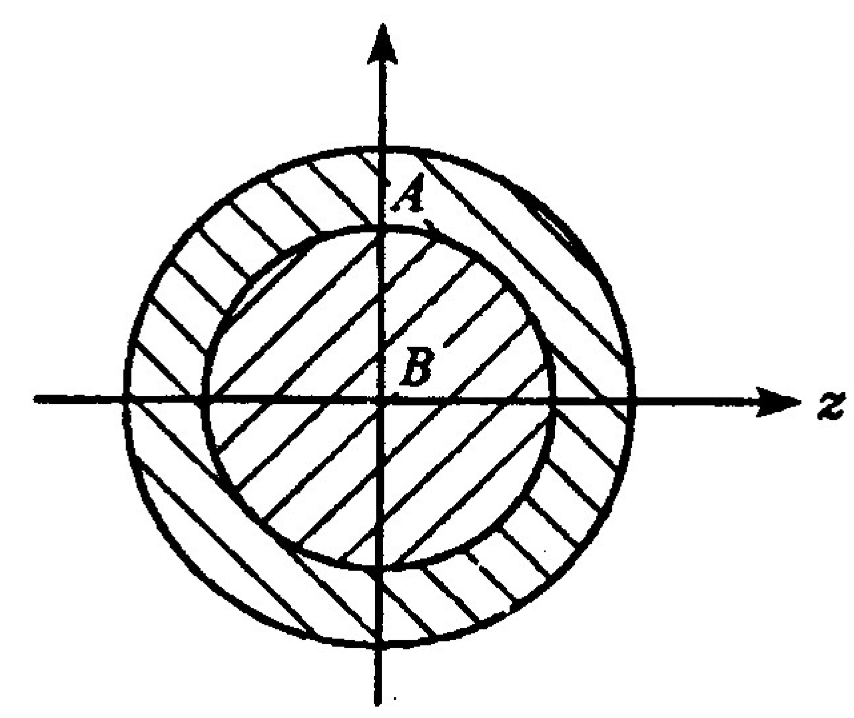


图 6.8

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1

C. 2　　D. 4

解　1.(B)因为只有单向拉伸(压缩)时，给定斜截面上 $p_\alpha=\frac{F_N}{A_\alpha}$ 为常数，斜面给定，其分量 $\sigma_\alpha=\sigma\cos_\alpha^2$ 一定相等。而弯曲时，斜截面上正应力是随该点距中性轴的距离成正比，故正应力不一定大小相等；但 σ_α 是该面上与斜截面垂直的分量，故方向一定平行。

2.(C)在弹性范围内，低碳钢材料在拉伸(压缩)变形过程中，其 σ-ε 曲线斜率相同，即弹性常数 E 相同，故其纵向应变与横向应变的比值 μ 亦相等。

3.(A)圆轴扭转时横截面上的最大切应力 $\tau_{max}=\frac{T}{W_p}=\frac{16T}{\pi d^3}$，是仅与内力和图形几何性质(抗扭截面模量 W_p)有关，而图 6.1 中直径相等，左右两段内力 $T=M_e$，故最大切应力 τ_{max} 相同。而单位长度扭转角 $\theta=\frac{T}{GI_p}$，除和内力 F，图形几何性质 I_p 有关外，还和材料切变模量 G 有关，而 $G_{st}\neq G_{al}$，故两段 θ 不同。

4.(D)图 6.2 中三向应力圆是在 $\pm\sigma$ 处包含一个点圆的情形，即单元体必是两拉一压，或两压一拉，且应力数值相等的应力状态。C 自然满足，A、B 主应力(左、右面上)分别为拉和压，其他四个面上是纯剪切应力状态，主应力分别为 $\sigma_{max}=\tau=\sigma$，$\sigma_{min}=-\tau=-\sigma$，故两单元体均满足。而 D 图是三向等拉应力状态，其对应的应力圆应为 σ 坐标处一点圆。

5.(B)由题知 $\varphi_{AB}=0$，而 $\varphi_{AB}=\sum\frac{T_il_i}{GI_p}=\frac{M_2 2a}{GI_p}-\frac{M_1a}{GI_p}=0$，故 $M_1=2M_2$。

6.(A)这是一个考察内力图的题目。可以从微分关系，突变关系推得剪力图和载荷图，结果就一目了然。AB 段为斜直线，$\frac{dM}{dx}=F_s=$ 常数，故 A 点一定作用一个向下的 F 力，其值为 $F=\frac{3\text{kN}\cdot\text{m}}{2\text{m}}=1.5\text{kN}$。$B$ 截面 M 图突变 $6\text{kN}\cdot\text{m}$，且由负向正突变，故一定有一顺时向且 $M=6\text{kN}\cdot\text{m}$ 集中力偶作用。在 BC 段，$M=$ 常数，即 $\frac{dM}{dx}=F_s=0$。由此推断在 C 截面必有一个和 A 截面集中力大小相等，方向相反的集中力。作剪力图和外载图分别为图 6.4 所示。

在 $x=2\text{m}$ 处(B 截面)，既有集中力，又有集中力偶。

7.(B)图示等腰三角形，过形心且与对称轴垂直的水平轴为中性轴。要判断危险点，

则首先要确定准危险截面。结合拉压强度极限，综合判断。作弯矩图如图 6.5 所示。

在 B 截面，正弯矩

$$M_B = Fa, \sigma_{\max} = \frac{2Fah}{3I_{zc}} \leqslant \frac{1}{3}\sigma_b^-; \quad \sigma_{\min} = \frac{Fah}{3I_{zc}} \leqslant \sigma_b^-$$

在 C 截面，负弯矩

$$M_C = 1.5Fa, \sigma_{\max} = \frac{Fah}{2I_{zc}} \leqslant \frac{1}{3}\sigma_b^-; \quad \sigma_{\min} = \frac{Fah}{I_{zc}} \leqslant \sigma_b^-$$

比较可知，产生在 B 截面下边缘（即三角形顶点）处的拉应力接近强度极限，故危险点在 B 截面下边缘。

8. (B)题知两杆尺寸相同，两端固接在刚性板上，在一对轴力作用下拉伸，若要拉伸变形相等，则必须 $E_1 = E_2$。若 $E_1 \neq E_2$，则必然出现偏心拉伸。

9. (C)过 θ 处作图 6.7 所示辅助线，则在 θ 面上的弯矩为 $M(\theta) = FR(1-\cos\theta)$。若将 F 改为垂直纸面的力，则 $M(\theta) = FR(1-\cos\theta)$，$T(\theta) = FR\sin\theta$。

10. (C)设在弯矩 M_z 作用下，z 轴为中性轴。题知 $I_{zA} = I_{zB} = I$，$E_A = 2E_B$，并设平面假设成立，则内外两部分曲率应该相等，即 $\frac{1}{\rho} = \frac{M_A}{E_A I} = \frac{M_B}{E_B I}$，故 $\frac{M_A}{M_B} = \frac{E_A}{E_B} = 2$，选 C。

6.2 计算题(共 100 分)

1. 图 6.9(a)所示拉杆，F、b、h 及材料的弹性常数 E、μ 均为已知，试求线段 AB 的正应变。(15 分)

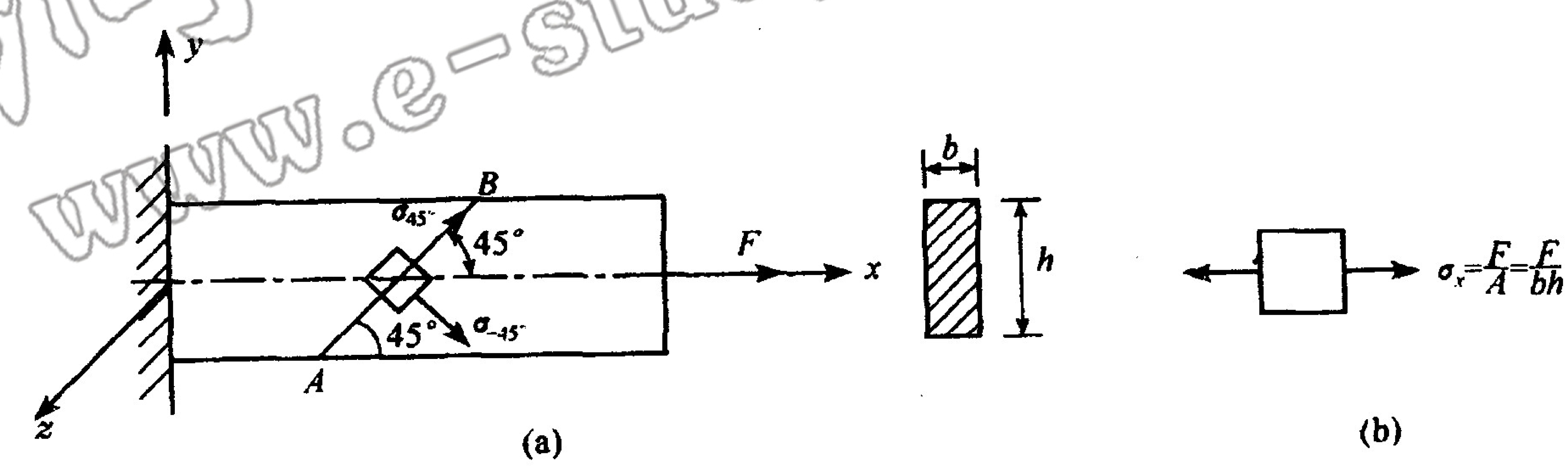


图 6.9

解 这是涉及平面应力状态，广义胡克定律方面的题目。图示拉杆，受轴向拉伸，沿横截面取单元体可知，为单向应力状态，轴向应变可用单向胡克定律求得，因 $\sigma_y = \sigma_z = 0$。而沿 AB 线段，除已知垂直纸面方向 $\sigma = 0$ 外，$\sigma_{45°}$ 和 $\sigma_{-45°}$ 方向的应力还需求出，若 $\sigma_{-45°}$ 为零，则仍可用单向胡克定律求 AB 的正应变，否则，则要用广义胡克定律。

(1) 沿横截面取图 6.9(b)所示单元体，已知 $\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{F}{bh}$，$\sigma_y = 0$，$\sigma_z = 0$，$\tau_{xy} = 0$。

(2) 求 $\alpha = 45°$ 斜截面上的应力。在 $\alpha = 45°$ 斜截面上

$$\sigma_{45°} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha = \frac{\sigma}{2} = \sigma_{-45°}$$

(3) 求 $\alpha = 45°$ 方向的应变，即 AB 的正应变。将 $\sigma_{45°}$、$\sigma_{-45°}$ 代入广义胡克定律，则

$$\varepsilon_{45°} = \frac{1}{E}[\sigma_{45°} - \mu(\sigma_{-45°} + \sigma_z)] = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma}{2} - \mu\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{1-\mu}{2E}\sigma = \frac{F(1-\mu)}{2Ebh} = \varepsilon_{AB}$$

（4）若题目要求线段 AB 的伸长量，则

$$\Delta l_{AB}=\epsilon_{AB}l_{AB}=\frac{F(1-\mu)}{2Ebh}\cdot\sqrt{2}h=\frac{F(1-\mu)}{\sqrt{2}Eb}$$

点评 单向拉伸时，沿横截面所取单元体为单向应力状态，而 AB 方向由平面应力状态任意斜截面上正应力的表达式，或单向应力状态时斜截面上的正应力 $\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha(\alpha=\pm45°)$ 表达式中代入 α，确定 σ_α，由 $\tau_\alpha=\frac{\sigma}{2}\sin\alpha$ 可知该截面非主平面，$\sigma_{45°}$、$\sigma_{-45°}$ 截面上正应力均非零，故要用正应力表示应变的广义胡克定律，切勿贸然用单向胡克定律。

2. 一重量为 F 的物体，以速度 v 水平冲击刚架的 C 点，如图 6.10(a)所示。试求刚架的最大冲击应力。已知刚架各个部分的抗弯刚度 EI 为常量，抗弯截面系数为 W。(20 分)

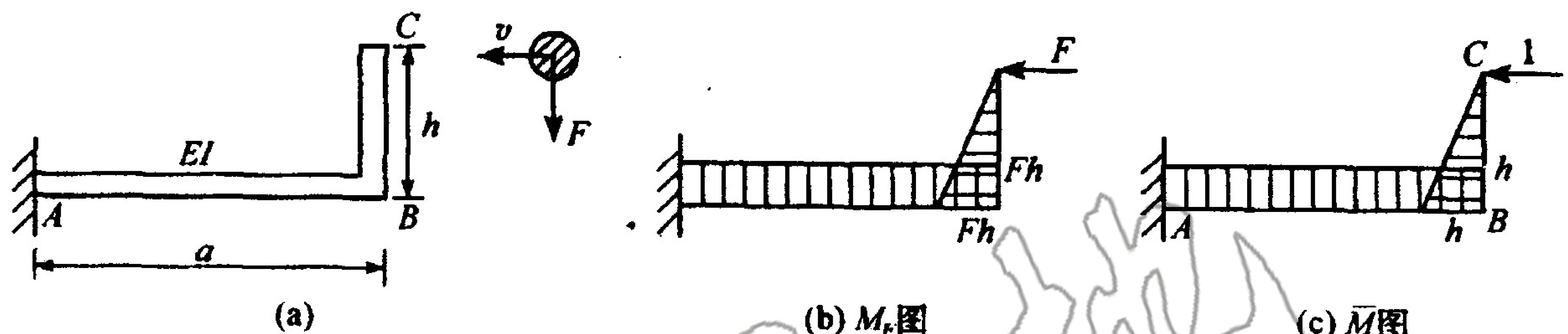


图 6.10

解 这是涉及弯曲应力、变形和冲击方面的题目。题目要求刚架的最大冲击应力，则首先要求出静载条件下的最大应力，然后乘以动荷系数 K_d。题中冲击是以速度 v 水平冲击刚架 C 点，可以根据能量守恒求出动荷系数 K_d，亦可直接套用此种冲击条件下的动荷系数 $K_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{C,st}}}$，则应先确定冲击点沿冲击方向的静位移 $\Delta_{C,st}$。

（1）求刚架中最大静应力 $\sigma_{st,max}$。将重量为 F 的物体沿冲击方向施加于刚架 C 点，作 M_F 图如图 6.10(b)所示，知刚架中最大弯矩为 $M_{max}=Fh$，代入弯曲应力公式，得

$$\sigma_{st,max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{Fh}{W}$$

（2）求冲击点沿冲击方向的静位移 $\Delta_{C,st}$。求位移的方法多种多样，本题可直接用功能原理或卡氏定律，莫尔积分等方法。现选用图乘法求 C 点位移。将 F 使加于 C 点；方向如图 6.10(b)所示，同时沿该方向施加单位力，分别作 M_F、$\overline{M}$ 图如图 6.10(b)、(c)所示，两图相乘，得

$$\Delta_{C,st}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}h\cdot Fh\cdot\frac{2}{3}h+a\cdot Fh\cdot h\right)=\frac{Fh^2}{3EI}(h+3a)$$

（3）求该系统的动荷系数 K_d。因以速度 v 水平冲击例题、习题中已多次接触，题目未给出具体要求，故选用直接套用动荷因数公式，即

$$K_d=\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{C,st}}}=\sqrt{\frac{3EIv^2}{gFh^2(h+3a)}}$$

（4）求刚架的最大冲击应力 $\sigma_{d,max}$。因为 $K_d=\frac{\sigma_{d,max}}{\sigma_{st,max}}$，故

$$\sigma_{d,max}=K_d\sigma_{st,max}=\sqrt{\frac{3EIv^2}{gFh^2(h+3a)}}\times\frac{Fh}{W}=\sqrt{\frac{3EIFv^2}{g(h+3a)}}$$

点评 ①水平冲击中冲击点沿冲击方向的静位移确定，是本题的关键。不要被重力方向向下所迷惑。此类题目，则要将重力 F 沿冲击方向施加在冲击点，然后求该点的静位移即可。②此类冲击已多次接触，本题目未明确要求的前提下，一般直接套用动荷因数公式即可。

3. 如图 6.11(a)所示结构，钢制圆杆 $ABCD$ 的横截面面积 $A=80\times10^{-4}\,\text{m}^2$，抗扭截面系数 $W_p=200\times10^{-6}\,\text{m}^3$。抗弯截面系数 $W=100\times10^{-6}\,\text{m}^3$，钢材的许用应力 $[\sigma]=134\text{MPa}$。试分析结构危险点的应力情况，并用第四强度理论进行强度校核。(20 分)

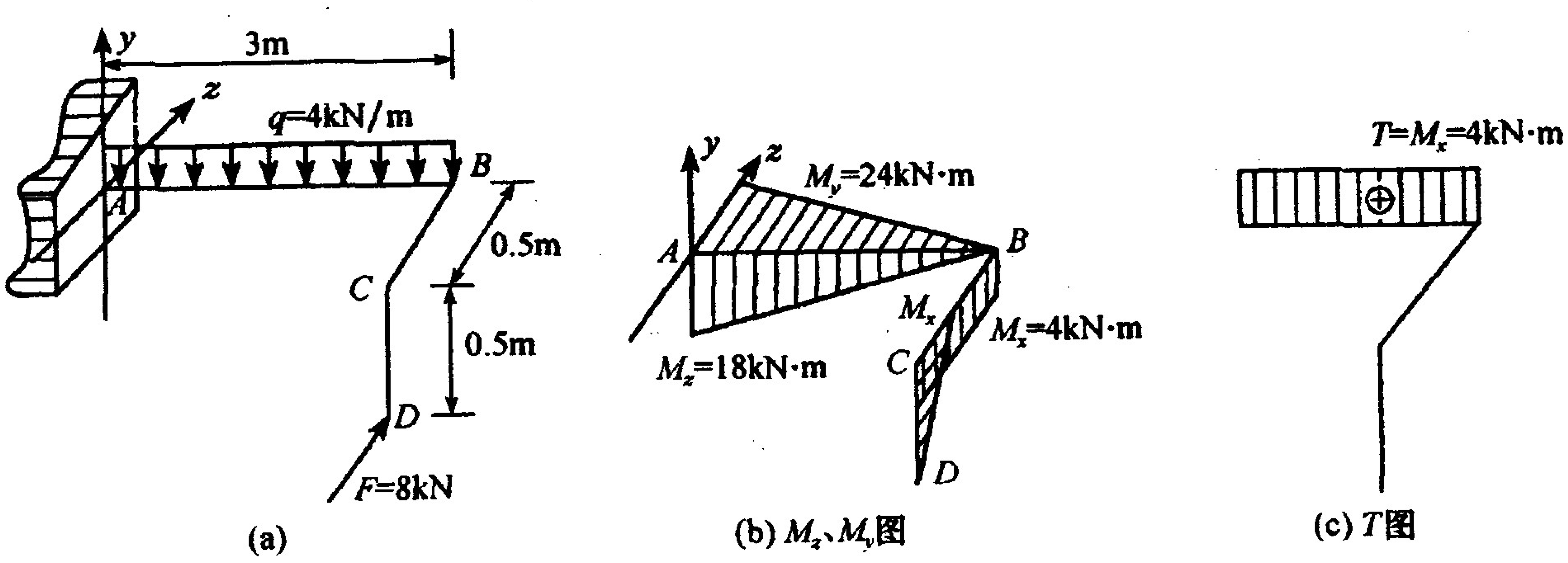


图 6.11

解 这是弯扭组合变形和强度理论方面的题目。首先应进行内力分析或作出内力图，确定危险截面；然后将危险截面上的危险应力(内力)代入第四强度理论进行强度校核。

(1) 内力分析。作内力图如图 6.11(b)、(c)所示，在固定端 A，M_y、M_z 均达到最大值，而扭矩 T 在 AB 段内为常量，故 A 截面为危险截面，其内力分量分别为

$$M=\sqrt{M_y^2+M_z^2}=\sqrt{18^2+24^2}=30(\text{kN}\cdot\text{m}),\quad T=M_x=4\text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 强度校核。圆轴在弯、扭组合变形条件下，第四强度理论表达式演化为 $\sigma_{r,4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}$，故直接将内力分量代入，得

$$\sigma_{r,4}=\frac{1}{100\times10^{-6}}\sqrt{(30\times10^3)^2+0.75\,(4\times10^3)^2}$$
$$=302\times10^6(\text{Pa})=302(\text{MPa})>[\sigma]$$

结构不满足刚度条件。

点评 ①空间结构，应注意弯矩、扭矩的转化，正确进行内力分析或作出内力图。②圆轴条件下，因为 M_y、M_z 矢量合成 M 后，矢量 M 所在直径即为中性轴，而扭矩则在整个圆周边缘有最大切应力，故可将 M_y、M_z 先矢量合成。③在 $\sigma_x=\sigma$、$\tau_{xy}=\tau$ 的平面应力状态条件下，第四强度理论演化为 $\sigma_{r,4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}$，而当此单元体取自圆轴时，由于 $W_p=2W_y=2W_z=2W$，第四强度理论进一步演化为 $\sigma_{r,4}=\frac{1}{W}\sqrt{M^2+0.75T^2}$，而弯矩 M 为 M_y、

M_z 合成时，则可直接写成 $\sigma_{r,4}=\dfrac{1}{W}\sqrt{M_y^2+M_z^2+0.75T^2}$。对第三强度理论，$\sigma_{r,3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$，仅将相当应力公式中将 0.75 换为 1 即可。

4. 图 6.12(a)所示结构中 CG 为铸铁圆杆，直径 $d_1=100\text{mm}$，弹性模量 $E_1=120\text{GPa}$，$\lambda_p=80$，稳定安全因数 $n_{st}=2$。BE 为 Q235 钢制圆杆，直径 $d_2=50\text{mm}$，弹性模量 $E_2=200\text{GPa}$ 许用拉应力 $[\sigma_t]=160\text{MPa}$，横梁 $ABCD$ 及 AH 可视为刚体，A 处铰链连接。试求结构的许可载荷 F。(25 分)

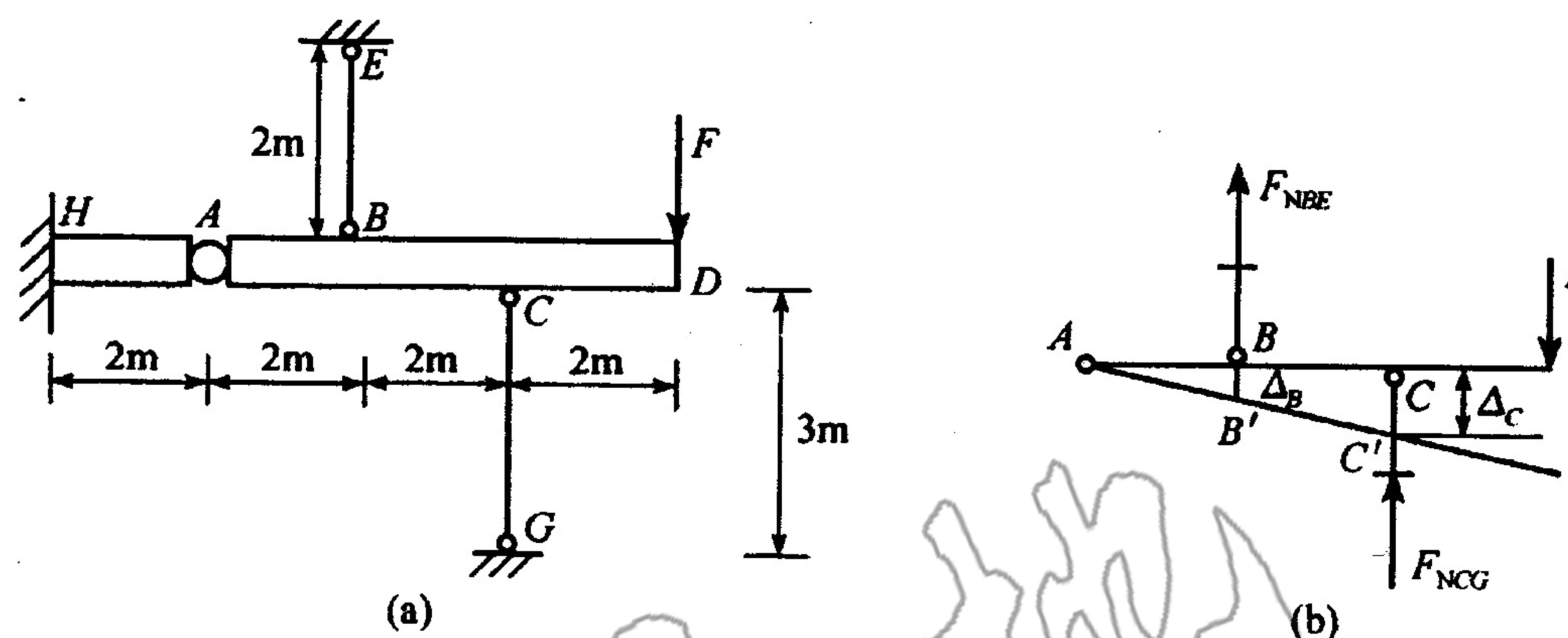


图 6.12

解 这是载荷估计的题目。涉及由梁弯曲时的强度，BE、CG 杆的强度或稳定性，要综合考虑，正确确定结构的许可载荷，但题中已知视 $ABCD$ 及 AH 段为刚体，则使问题极大简化，略去了梁的弯曲强度问题，并使解超静定问题时几何关系一目了然。

(1) 确定各杆的内力。由于 A 为中间铰，其 $M=0$，故对 A 取矩(图 6.12(b))

$$\sum M_A=0,\quad 6F-4F_{NCG}-2F_{NBE}=0 \tag{1}$$

由于视 AH、$ABCD$ 为刚体，可知 $\Delta_C=2\Delta_B$，即

$$2\times\frac{F_{NBE}\times 2\times 4}{E_2\times\pi d_2^2}=\frac{F_{NCG}\times 3\times 4}{E_1\times\pi d_1^2}$$

代入数值，即

$$\frac{16F_{NBE}}{200\times 10^9\times\pi\times 50^2\times 10^{-6}}=\frac{12F_{NCG}}{120\times 10^9\times\pi\times 100^2\times 10^{-6}}$$

整理得补充方程

$$F_{NCG}=3.21F_{NBE} \tag{2}$$

联立式(1)、式(2)，解得

$F_{NCG}=1.30F$，$F_{NBE}=0.40F$，所解结果均为正，即与假设内力方向一致，即 CG 杆受压，BE 杆受拉。

(2) 由压杆 CG 估计载荷。铸铁压杆用稳定性条件，确定压杆的临界载荷。首先计算 CG 杆的柔度，两端铰支 $\mu=1$，故

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{4\mu l}{d}=\frac{4\times 3\times 1}{0.1}=120>\lambda_p$$

CG 为大柔度杆，用欧拉公式计算其临界载荷

$$F_{Ncr}=\frac{\pi^2E_1I}{(\mu l)^2}=\frac{\pi^2\times 120\times 10^9\times\pi\times 0.1^4}{64\times(1\times 3)^2}=646\times 10^3(\text{N})=646(\text{kN})$$

已知稳定安全因数 $n_{st}=2$，故

$$F_{NCG} \leqslant \frac{F_{Ncr}}{n_{st}} = \frac{646}{2} = 323(\mathrm{kN})$$

而 $F_{NCG}=1.30F$，故由 CG 稳定性估计许可载荷为

$$[F]_1 = \frac{1}{1.30}F_{NCG} = 323/1.3 = 248(\mathrm{kN})$$

(3) 由 BE 杆的强度估计载荷。BE 杆是拉伸杆，仅存在拉伸强度问题，故

$$F_{NBE} \leqslant [\sigma_t]A_{st} = 160\times10^6\times\frac{\pi}{4}\times50^2\times10^{-6} = 314\times10^3(\mathrm{N}) = 314(\mathrm{kN})$$

而 $F_{NBE}=0.40F$，故由 BE 杆的拉伸强度估计许可载荷为

$$[F]_2 = \frac{1}{0.4}F_{NBE} = 785\mathrm{kN}$$

(4) 结构的许可载荷为

$$[F] = \min\{F_1, F_2\} = 248\mathrm{kN}$$

点评 ①注意超静定问题的求解，以确定外载与内力的关系。②压杆以失稳失效为主。故要考虑稳定性条件，在条件的使用中，首先应判断压杆的柔度，确定应用临界载荷(应力)的公式，防止张冠李戴。③当考虑到 AH、$ABCD$ 的变形时，问题则相对复杂；如果仅视 AH 为刚体，则要考察 $ABCD$ 梁的弯曲强度问题。

5. 试图 6.13(a)所示刚架的弯矩图，并计算截面 A、B 沿 AB 方向的相对线位移。设抗弯刚度 EI 为常数。(20 分)

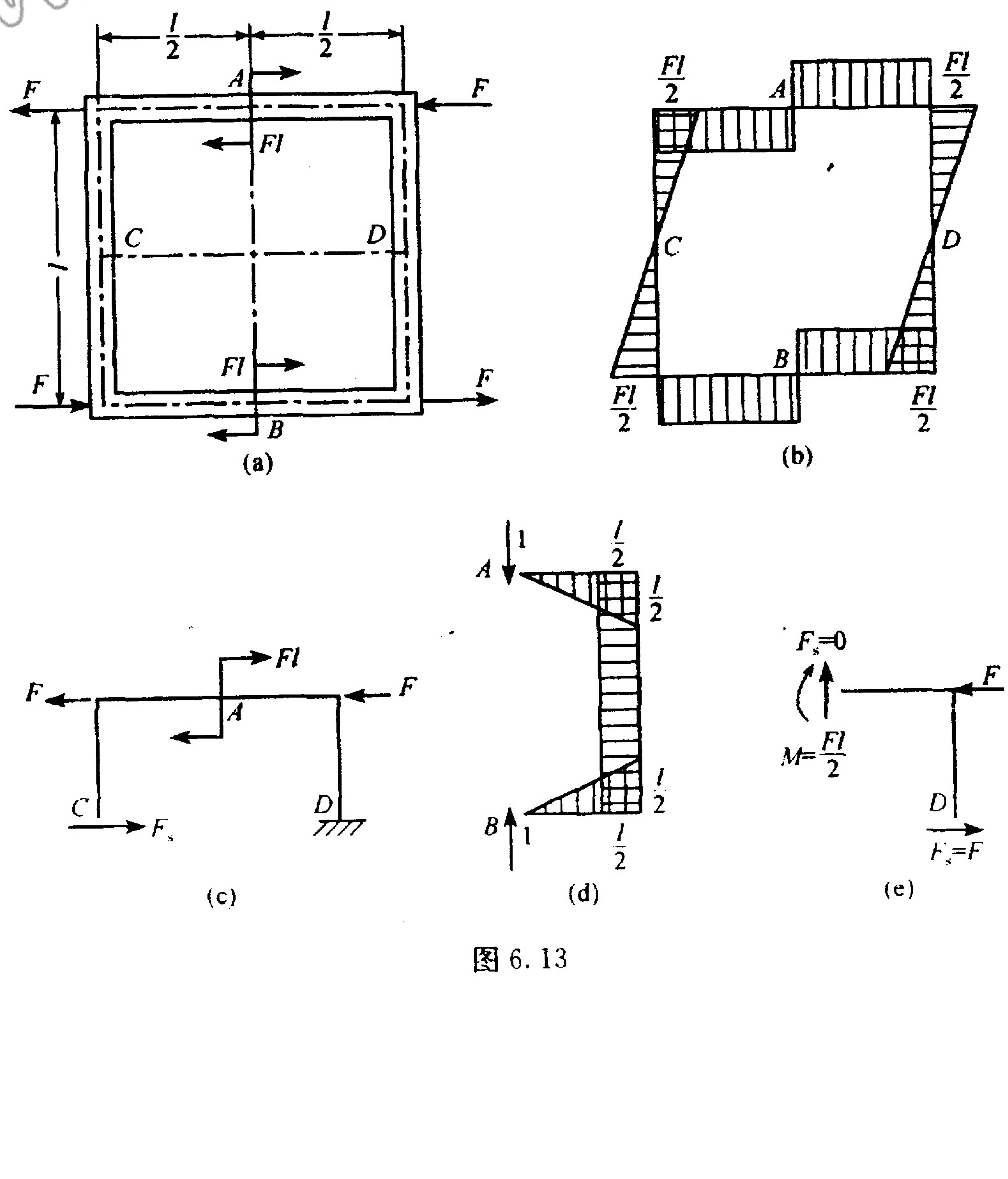


图 6.13

解 要作刚架的弯矩图，而刚架是超静定结构，故首先应解超静定问题，然后再求 AB 间的相对线位移。

(1) 作刚架弯矩图。结构为单封闭框架，且为平面结构，应为三次超静定结构，但结构有一对对称轴，且载荷关于这一对对称轴反对称。因此求解超静定问题时，应用反对称载荷性质，使问题得以简化。

取相当系统为以 CD 轴为对称轴的上半部分(图 6.13(b))，结构对称，载荷反对称，对称面(C、D)上的对称内力(F_N、M)为零，故 C、D 截面仅存在内力 F_s、F_s'，而结构又关于 AB 轴对称，载荷反对称，故 F_s 与 F_s'必同向等值。对相当系统中任一点取矩或取 $\sum F_x = 0$，则有 $F_s = F$。

作上半部分弯矩图，然后用反对称性(结构对称，载荷反对称，弯矩图反对称)作下半部分弯矩图，得刚架弯矩图如图 6.13(c)所示。

(2) 求 A、B 间相对位移。沿 AB 轴截开，在 A，B 面加一对单位力并作弯矩图如图 6.13(d)所示，图中可以看出，单位力图 $\overline{M}$ 沿 CD 轴上、下对称，而弯矩图 M_F 沿 CD 轴上、下反对称，故两图相乘得 $\Delta_{AB}=0$。

点评 ①注意对称性质的利用。同样可以取相当系统如图 6.13(e)所示，由 $\sum F_x = 0$，求得 D 面上 $F_s=F$；对 D 面取矩 $\sum M_D = 0$，确定 A 截面剪力$F_s=0$。使超静定问题简化，所有内力确定。②求结构中两点间相对位移，可用单位载荷法或图形互乘法等方法求得。用单位载荷法时需在二点连线方向各加一对单位力(相向或相背)，作用点应为所求相对位移的两点(如本例中 A、B)。当然，同样可以求得 C、D 间的相对位移，只需在 C、D 点加一对单位力即可。③由于结构对称，载荷反对称，其变形亦为反对称，故一对对称轴上两点(C、D 间，A、B 间)的相对位移均为零。